République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa -
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER

Domaine: Mathématiques et Informatique

Filière: Mathématiques

Option: Equation aux derivées partielles et applications

Thème

Comportement Asymptotique des Solutions d'un Problème de Transmission d'Ondes Viscoélastique avec Retard

Présenté Par:
Haouam Fadia
Hasnaoui Bouthaina

Devant le jury:

Rebiai Belgacem	PROF	Univérsité Larbi Tébessi	Président
Nabti Abderrazak	M.C.A	Univérsité Larbi Tébessi	Examinateur
Boumaza Nouri	M.C.A	Univérsité Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance *:* 25/06/2020

Dédicace

Nulle dédicace ne puisse exprimer ce que je leur dois
Que dieu leur réserve la bonne santé et une longue vie.

L'eau coule grâce à sa source

L'arbre pousse grâce à ses racines

Dédicacea ma maman qui m'a soutenu et encouragé durantCes années d'études.Qu'elle trouve ici le témoignage de ma profonde reconnaissance.

A mon cher père qui a toujours été dans mon coeur.
A mes frères : Akram, Hamza, Mohamed, , Abdelrazak.

Pour les sacrifices déployés à mon égards ; pour leur patiencesLeur amour et leur confiance en moiIls ont tout fait pour mon bonheur et ma réussite.Qu'ils trouvent dans ce modeste travail, le témoignage de mesProfondes affections et de mon attachement indéfectible. A tous mes cousins et mes amies.

Fadia Haouam

Dédicace

Je dédie ce travail a ceux qui ont sacrifies et qui ont donnes le meilleure pour me voir réussir dans tous les côtés de ma vie
A ma chère mère, l'esprit de ma vie, pour ses conseils et ses encouragements.
A mon cher père, que lui garde pour nous.
A ma sœur Takwa.
A mes deux frères Amjed et Yahya.
A mon cher mari Nacer Ali pour ses sacrifices, son soutien moral et matériel m'ont permis de réussir mes études. Ce travail soit témoignage de ma reconnaissance et mon amour sincère et fidèle.
A mes très chère amis: Djenina Nourddine, Ahlem Mrah, Feten , Sara, Khawla et Zina.
A toute personne qui m'ont aidé de près ou de loin même avec un petit mot du courage

Bouthaina Hasnaoui

Remerciements

Ni cette espace, ni tous les mots du monde ne suffisent vraiment pour exprimer
nos sincères remerciements et gratitude.
Avant tous nous tenons à remercier de tout cœur mon Dieu
♡ALLAH♡
le tout-puissant de nous avoir donné la force, la volonté et l'aide pour
réaliser ce mémoire.
Nous avons le grand honneur et le profond respect de remercier sa haute
bienveillance notre encadrant Dr. N. BOUMAZA qui a fait tout son possible
pour nous orienter et nous a guidé afin de réaliser ce mémoire avec compétence, pour tous les conseils précieux qu'il nous a prodigués.
Nous remercions les membres du jury qui ont accepté avec gentillesse d'examiner
notre travail, président Dr. B. REBIAI et examinateur
Dr. A. NABTI
Vraiment un grand merci aussi profond que sincère à tous ceux qui m'ont aidé.

Résume

Le but de ce travail est de donner des résultats liés à un problème de transmission d'ondes (étudié par Bahri et al) en la présence des termes mémoire infini et de retard. Sous quelques hypothèses appropriées, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution en utilisant la théorie des semi-groupes. Pour la stabilité, nous prouvons également que la dissipation unique donnée par le terme mémoire infinie est forte et suffisante pour stabiliser le système de façon exponentielle en utilisant la méthode des fonctionnelles de Lyapunov.

Mots clés: Equation des Ondes, terme mémoire, stability, fonctionnelle de Lyaponov, terme de retard.

Abstract

The aim of this work is to give a results related to the wave transmission problem (studied by Bahri et al) in the presence of history and delay terms. Under appropriate assumptions, we will study the existence and uniqueness of solution by using the theory of semigroups. For the stability, we also prove that the unique dissipation given by the infinite memory term is strong enough to stabilize exponentially the system by using a suitable Lyaponov functional method.

Keywords: Wave equation, memory term, stability, Lyaponov functional, delay term.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو إعطاء نتائج متعلقة بمسألة إنتقال الأمواج (درسه بحري وآخرون) في وجود حدود الذاكرة اللانهائي والتأخير. في ظل بعض الفرضيات المناسبة ، سندرس وجود و وحدانية الحل بإستخدام نظرية أشباه الزمر. من أجل الاستقرار ، كذللك نثبت أن الإضمحلال الوحيد الذي قدمه حد الذاكرة اللانهائيقوي وكافٍ لإستقرار النظام بشكل أسي ، من خلال إستعمال طريقة دوال ليابونوف.

الكلمات المفتاحية: معادلة الأمواج ، دالة الذاكرة ، الإستقرار ، دالة ليابونوف ، حد التـأخير.

Table des matières

Introduction générale

L'évolution au cours du temps de nombreux phénomènes physiques, biologiques, économiques ou mécaniques est modélisée par des équations aux dérivées partielles (EDP).
Parmi ces équations le problème de transmission qui se posent aussi dans plusieurs applications de la physique et de la biologie.
Notre mémoire consacré à l'étude de l'existence locale et la stabilité exponentielle d'un système de transmission fourni avec un terme mémoire et un terme de retard qui définit comme suivant [1]

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - au_{xx}(x,t) + \int_0^\infty g(s)u_{xx}(x,t-s)\,ds + \mu u_t(x,t-\tau) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_{tt}(x,t) - bv_{xx}(x,t) = 0, & x \in (L_1, L_2), t > 0, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites et de transmission

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L_3,t) = 0, \\ u(L_i,t) = v(L_i,t),\ i = 1,2, \\ au_x(L_i,t) - \int_0^\infty g(s)u_x(L_i,t-s)\,ds = bv_x(L_i,t),\ i = 1,2, \end{cases}$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} u(x,-t) = u_0(x), u_t(x,-t) = u_1(x), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), & x \in \Omega,\ t \in (0,\tau), \\ v(x,-t) = v_0(x), v_t(x,-t) = v_1(x), & x \in (L_1,L_2),\ t > 0, \end{cases}$$

où $0 < L_1 < L_2 < L_3$, $\Omega =]0, L_1[\cup]L_2, L_3[$, a, μ, b sont des constantes positives, u_0 est donné l'histoire, et $\tau > 0$ est le temps de retard.
Ce problème est en relation avec la propagation d'ondes sur un corps qui se compose de deux types de matériaux différents : la partie élastique et la partie viscoélastique qui a le passé et l'effet du temps de retard.

Avant d'énoncer et de prouver nos principaux résultats, rappelons d'abord quelques travaux liés au problème que nous abordons.
Pour certains équations d'ondes avec différentes dissipations, le lecteur devrait consulter le travail qui prouve la stabilité de la solution effectué par Nicaise- Pignotti [25] Récemment, des équations d'ondes avec la dissipation viscoélastiques ont été étudiés par de nombreux auteurs, voir

$[3, 6, 5, 17, 18, 19, 10, 30]$ et les références qu'ils contiennent. Il est montré que la dissipation produite par la partie viscoélastiques peut produire la décroissance de l'énergie. Par exemple, A. Guesmia $[14]$ a étudié l'équation

$$u_{tt} - Au + \int_0^\infty g(t)Au(t-s)\,ds + \mu u_t(t-\tau) = 0,\ x \in \Omega, t > 0, \tag{1}$$

sous la condition

$$\exists\ \delta > 0, g'(s) \leq -\delta g(s)\ \forall s\ > 0, \tag{2}$$

l'auteur a montré la décroissance exponentielle de l'énergie.
Les questions liées à la solvabilité et à la stabilité/instabilité des équations d'évolution avec retard ou mémoire ont attiré une attention considérable ces dernières années et de nombreux auteurs ont montré que les termes de retard peut déstabiliser un système qui est asymptotiquement stable. En l'absence du terme de retard dans (1) (i.e.$\mu = 0$),

$$u_{tt} - Au + \int_0^\infty g(t)Au(t-s)\,ds\ \forall t > 0,$$

une grande quantité de littérature est disponible sur ce modèle, abordant les problèmes d'existence, d'unicité et de comportement asymptotique en temps (voir Dafermos, 1970$[8]$; Fabrizio & Lazzari, 1991$[9]$; Liu & Zheng, 1996 $[20]$; Giorgi et al., 2001 $[12]$; Chepyzhov & Pata, 2006 $[7]$; Muñoz Revira & Grazia Naso, 2007 $[24]$; Pata, 2010 $[26]$; Guesmia, 2011 $[13]$ et les références qui y sont citées). L'équation d'onde viscoélastique unidimensionnelle non linéaire a été étudiée par Dafermos (1970) $[8]$. Avec la même condition (2), il a montré que l'énergie du problème tend vers zéro asymptotiquement, mais aucun resultat de décroissance a été donné.
Récemment, l'équation d'onde dans le domaine borné à N -dimensions avec retard constant, mémoire finie et amortissement par frottement linéaire a été considérée par Kirane et Said-Houari $[15]$:

$$u_{tt}\,(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^\infty g(s)\Delta u(x,t-s)\,ds + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = 0,\ x \in \Omega, t > 0, \tag{3}$$

la stabilité exponentielle de (3) a été prouvée sous l'hypothèse $0 \leq \mu_2 \leq \mu_1$. Le même résultat a été obtenu dans Said-Houari (2011) $[29]$ dans le cas du système de Timoshenko. Comme indiqué dans Kirane et Said-Houari (2011) $[15]$, on rappelle que (3) est instable si $0 \leq \mu_1 \leq \mu_2$ et $g = 0$ (voir Nicaise et Pignotti, 2006 $[25]$).
Messaoudi $[22]$ a étudié l'équation viscoélastique suivante

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t)\Delta u(t-s)\,ds = 0, x \in \Omega, t > 0,$$

dans un domaine borné, et a établi un résultat de décroissance plus générale, à partir duquel les résultats de décroissance exponentielle et polynôme habituels ne sont que des cas particuliers.
Dans [2] Les auteurs ont examiné un système d'équations d'ondes avec un frontière linéaire de dissipation et un terme de retard

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a u_{xx}(x,t) + \mu_1 u_t(x,t) + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_{tt}(x,t) - b v_{xx}(x,t) = 0, & x \in (L_1, L_2), t > 0, \end{cases}$$

sous l'hypothèse

$$\mu_2 < \mu_1$$

et la même chose dans [16] avec un terme mémoire

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a u_{xx}(x,t) + \int_0^\infty g(s) u_{xx}(x,t-s) ds + \mu_1 u_t(x,t) & \\ \quad + \mu_2 u_t(x,t-\tau) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_{tt}(x,t) - b v_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in (L_1, L_2) \times (0,\infty), \end{cases} \tag{4}$$

avec la condition ;

$$\mu_2 \leq \mu_1 \tag{5}$$

ils ont prouvé la stabilité exponentielle de la solution. Au contraire si (5) n'est pas vérifié, ils ont trouvés une suite des termes de retards pour lequels la solution correspondante de (4) sera instable.
Dans [31] les auteurs ont étudié un problème de transmission dans un domaine borné avec un terme de retard variable et a la présence d'un terme mémoire infinie dans la première équation

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - a u_{xx}(x,t) + \int_0^\infty g(s) u_{xx}(x,t-s)\, ds + \mu_1 u_t(x,t) & \\ \quad + \mu_2 u_t(x,t-\tau(t)) = 0, & x \in \Omega, t > 0, \\ v_{tt}(x,t) - b v_{xx}(x,t) = 0, & (x,t) \in (L_1, L_2) \times (0,\infty), \end{cases}$$

Sous des hypothèses appropriées sur le poids de dissipation et le poids du retard, ils ont prouvé la stabilité exponentielle de la solution.
Dans [23], Les auteurs ont considéré l'équation

$$u_{tt}(x,t) - \Delta_x u(x,t) - \mu_1 \Delta_x u_t(x,t) - \mu_2 \Delta_x u_t(x,t-\tau) = 0,$$

sous l'hypothèse

$$|\mu_2| \leq \mu_1 \tag{6}$$

ils ont prouvé la solvabilité et la stabilité exponentielle de l'énergie.
Présentons maintenant le plan que nous allons suivre.

Ce mémoire se divise en trois chapitre :

Le premier est consacré a quelques notions préléminaires, dans laquelle on a définit quelque théorèmes et quelques inégalités trés utilisés dans notre mémoire.

Dans le deuxième chapitre, on va étudier l'existence locale de la solution du problème de transmission avec un terme mémoire et un term de retard en se basant sur le travail de N. Bahri et A. Beniani [1] , on démontre l'existence Locale par la méthode des semi-groupes.

Ensuite nous travaillons sur la stabilité exponentielle du problème posé, pour cela nous prouvons la décroissance exponentielle de l'énergie quand le temps tend vers l'infini. On termine par une conclusion et une liste de références utilisées dans ce mémoire.

Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous rappelons les principaux notions dont nous aurons besoins, il consacré aux notions de la théorie des espaces fonctionnels, des théorèmes, formules et des inégalités trés utilisés dans notre mémoire, Comme nous le mentionnons la théorie des opérateurs et de semi groupe, car ils sont standard et connues chez les lecteurs comme elles peuvent êtres trouvées dans beaucoup de références de mathématiques.

1.1 Les espaces

1.1.1 Espace vectoriel normé

Définition 1.1 ***(Sous-espaces vectoriels)***

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$ et soit F sous ensemble dans E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si
1. $F \neq \varnothing$;
2. $\forall x \in F, \forall y \in F : x + y \in F$. Autrement dit F est stable par l'addition ;
3.$\forall x \in F$, pour $\lambda \in \mathbb{K} : \lambda x \in F$. Autrement dit F est stable par la multiplication par scalaire.

Définition 1.2 ***(Espaces vectoriels normés)***

Un espace vectoriel linéaire E est dit espace **normé** si pour chaque élément $u \in E$ il existe un nombre réel noté par $\|u\|$, vérifiant les axiomes
1) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0;$
2) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| , \forall u, v \in E$ (inégalité triangulaire) ;
3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| , \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Définition 1.3 ***(Suite de Cauchy)***

Soit $(E, \|.\|)$ espace normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de **Cauchy** si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0\left(\varepsilon\right),\ \forall n,\ m \geq 0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

1.1.2 Espace complet

Définition 1.4 *Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace **complet** si toute suite de **Cauchy** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'espace E est converge vers un élément u de E.*

1.1.3 Espace de Banach

Définition 1.5 ***(Espace de Banach)***

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé, on dit que E est un espace de **Banach** si E est un espace **complet**.

1.1.4 Espace de Hilbert

Définition 1.6 ***(Produit scalaire)***

Soit H un espace vectoriel, on appelle application de $H \times H$ dans le corp
$K = \mathbb{C}$ définit par $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire si :
1) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, pour tout $u, v \in H$;
2) $\langle \lambda u_1 + u_2, v\rangle = \lambda \left\langle u_1, v\right\rangle + \left\langle u_2, v\right\rangle$, pour tout $u, v \in H$, et $\lambda \in \mathbb{C}$;
3) $\langle u, \lambda v\rangle = \overline{\lambda} \left\langle u, v\right\rangle$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$;
4) $\langle u, u\rangle \geq 0$ et $\langle u, u\rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

Définition 1.7 ***(Espace de Hilbert)***

Un espace de **Hilbert** est un espace de Banach ($(H, \|.\|_H)$ espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée :

$$\|u\|_H = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}} \text{ (i.e) } \|u\|_H^2 = \langle u, u\rangle .$$

1.1.5 Espace Dual

Définition 1.8 *(Forme Linéaire)*

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle forme linéaire sur E tous les applications linéaire de E vers $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$ étant considéré comme espace vectoriel sur lui-même).

Définition 1.9 *(Espace Dual)*

Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. On appelle espace dual de E, et on le note E^*, l'ensemble des formes linéaire sur E.

1.1.6 Espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.10 *Soit $p \in \mathbb{R}$, avec $1 \leq p < \infty$. On définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\}.$$

La norme est notée par :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = \infty$, on a :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et il existe une constante positive } C \text{, telle que} \\ |u(x)| < C \quad \text{p.p sur } \Omega. \end{array} \right\}.$$

Il sera muni de la norme du **sup-essentielle**

$$\|u\|_\infty = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf_{x\in\Omega} \{C; \quad |u(x)| < C \quad \text{p.p sur } \Omega\}.$$

Proposition 1.1 *$L^p(\Omega)$ muni de sa norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de **Banach**, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Définition 1.11 *On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$ si $u\mathbf{1}_K \in L^P(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.*

Définition 1.12 *$L^2(\Omega)$ est un espace de **Hilbert**, avec le produit scalaire*

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)\, v(x)\, dx, \text{ pour tout } u, v \in L^2(\Omega).$$

Espace $L^p((0,T), E)$.

Définition 1.13 *Soit E un espace de **Banach**, $1 \leq p \leq \infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de **Lebesgue** à valeurs dans E et on note $L^p((0,T), E)$ l'espace des fonctions $u :]0,T[\to E$, mesurable qui vérifient*

$$\textbf{i) } Si\ 1 \leq p < \infty,\ \|u\|_{L^p((0,T),E)} = \left(\int_0^t |u(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty,$$
$$\textbf{ii) } Si\ p = \infty,\ \|u\|_{L^\infty((0,T),E)} = ess \sup_{x \in]0,T[} |u(x)| < \infty.$$

Lemme 1.1 *Soit $u \in L^p((0,T), E)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p((0,T), E)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ alors la fonction u est continue de $[0,T]$ dans E **(i.e)** $u \in \mathcal{C}^1((0,T), E)$.*

Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p((0,T), E)$ est un espace de Banach et en particulier $L^2((0,T), E)$ est un espace de Hilbert, lorsque E est un espace de Hilbert.

Espace de Sobolev

Dérivée faible

Définition 1.14 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une **i-ème** dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ on a*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i \varphi(x) dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de u au sens des distributions, on écrira

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.15 *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ tel\ que\ \partial_i u \in L^p(\Omega)\}.$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.16 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \textit{tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

Où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni par la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \| D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.17 *Si $p = 2$, on note par $W^{m,2}(\Omega) = H^m$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ muni par la norme*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

tel que $H^m(\Omega)$ espace de Hilbert, avec le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx, \text{ pour tout } u, v \in H^m(\Omega).$$

1) Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
2) Si $m = 0$ on a $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

1.2 Théorème de Trace

Théorème 1.1 ***(de Trace)***

Soit Ω un ouvert borné et régulier. On peut définir une application linéaire et continue ;

$$\begin{aligned} \Phi \quad &: \quad H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega) \\ u \quad &\rightarrow \quad \Phi(u) \end{aligned}$$

Prolongeant l'application trace pour les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$: pour tout

$$u \in H^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right) : \Phi(u) = u\mid_{\partial\Omega}.$$

L'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, ce qui signifie qu'il existe une constante C_Ω telle que

$$\|\Phi(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

1.3 Théorème de Fubini

Définition 1.18 *Soient par exemple X une partie de $\mathbb{R}^p$, Y une partie de $\mathbb{R}^q$, et*

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Une application intégrable. Alors, d'après le théorème de Fubini, la fonction $f(x, .)$ est intégrable pour presque tout x de X, l'intégrale paramétrique F définie par

$$F(x) = \int_Y f(x, y)dy,$$

est intégrable sur X et l'on a

$$\int_{X\times Y} f = \int_X F$$

(et même chose en intervertissant les rôles de x et y).

1.4 Quelques formules utiles

Définition 1.19 ***(Intégration par partie)***

Soit $(u, v) \in H^1(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int\limits_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma,$$

où $\eta_i(x) = \cos(\eta, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point et l'axe des x_i.

Lemme 1.2 ***(Formule de Green)***

Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta u v dx = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

1.5 Quelques inégalités utiles

1.5.1 Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \int_0^t |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

(i.e)

$$\|uv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

1.5.2 Inégalité de Cauchy avec ε (ε-inégalité)

Pour tout $\varepsilon > 0$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2.$$

1.5.3 Inégalité de Hölder

C'est une généralisation des inégalités de Cauchy.
Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, $|uv| \in L^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on note q le conjugué de p $((L^p)^* = L^q)$, c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et on a l'inégalité

$$\left|\int_\Omega uvdx\right| \leq \int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^p\, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

(i.e) ;

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

1.5.4 Inégalité algébrique de Young

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$|ab| \leq \delta |a|^2 + \frac{1}{4\delta} |b|^2, \text{ avec } \delta > 0.$$

1.5.5 Inégalité de Young

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q\,,$$

où p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

1.5.6 Inégalité de Young avec ε

Pour tout $\varepsilon > 0$ alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$|ab| \leq \varepsilon\,|a|^p + c(\varepsilon)\,|b|^q\,,$$

où p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$ et $c(\varepsilon) = \frac{1}{p}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.

1.5.7 Inégalité de Minkowski

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\|u+v\|_{L^p} \leq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}\,.$$

1.6 Les opérateurs

Soient E et F deux espaces de Banach. Notons $\|.\|$ la norme dont ils sont munis.

Définition 1.20 ***(opérateur linéaire)***
Soient E , F deux espaces de Banach. Un opérateur linéaire est une application linéaire

$$A: \ D(A) \subset E \rightarrow F,$$

i.e ;

$$\begin{array}{rcll} \forall\,(u,v) & \in & D(A)^2\,; & A(u+v) = Au + Av, \\ \forall\lambda & \in & \mathbb{C}, & A(\lambda u) = \lambda Au. \end{array}$$

Définition 1.21 ***(Domaine)***
Un opérateur linéaire A de E dans F est une application linéaire A défini par sur un sous-espace vectoriel $D(A)$ de E appelé domaine de A tel que

$$D(A) = \{u; \quad Au \in F\}.$$

Ainsi ;

$$A : D(A) \subset E \to F.$$

On dit que A est borné s'il existe $C \geq 0$ telle que

$$\forall u \in D(A), \quad \|Au\|_F \leq C \|u\|_E.$$

Dans le cas contraire, A est dit non borné.

Définition 1.22 ***Graphe/Noyau/Image)***

Le graphe *de A est le sous-espace vectoriel de $E \times F$ noté $Gr(A)$ défini par*

$$Gr(A) = \{(u, Au); u \in D(A)\}.$$

On appelle **Noyau** *de A le sous-espace de E noté $\ker(A)$ définit par*

$$\ker(A) = \{u \in D(A); Au = 0\}.$$

Et ***Image*** *de A le sous-espace de F noté $\mathrm{Im}(A)$ définit par*

$$\mathrm{Im}(A) = A(D(A)) = \{u \in D(A); Au = 0\}.$$

On dit que A est injectif si $\ker(A) = \{0\}$, et que A est surjectif si $\mathrm{Im}(A) = F$. L'opérateur est bijectif s'il est à la fois injectif et surjectif.

Définition 1.23 ***(Opérateur inversible)***
On dit qu'un opérateur A de domaine $D(A)$ est inversible si

$$A : D(A) \subset E \to F,$$

est bijectif et a un inverse ;

$$A^{-1} : F \to D(A) \subset E,$$

borné (comme opérateur de F dans E).

Définition 1.24 ***(Resolvante)***

Soit A un opérateur linéaire (non nécessairement continu) défini sur un espace de Banach. Pour tout nombre complexe λ tel que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe et est continu, on définit la résolvante de A par

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$$

L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles la résolvante existe est appelé l'ensemble résolvant, noté $\rho(A)$.

Le spectre $\sigma(A)$ est le complémentaire de l'ensemble résolvant : $\sigma(A) = \mathbb{C} \diagdown \rho(A)$.

1.6.1 Opérateur dissipatif

Définition 1.25 ***(opérateur dissipatif)***

Un opérateur linéaire A dans E est dit dissipatif si on a

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\|_E \geq \lambda \|x\|_E .$$

A est dit m-dissipatif si A est dissipatif et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif, i.e ;

$$\forall y \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A), \lambda x - Ax = y.$$

Théorème 1.2 *Si A est m-dissipatif alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1} y$ appartient à $D(A)$ pour tout $y \in X$, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Théorème 1.3 *Soit $(A, D(A))$ un opérateur non borné dissipatif dans X. L'opérateur A est m-dissipatif si et seulement si*

$$\exists \lambda_0 > 0, \forall y \in X, \exists x \in D(A) : \lambda_0 x - Ax = y.$$

Théorème 1.4 *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H, est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A) : \langle Ax, x \rangle \leq 0.$$

1.6.2 Opérateurs maximal monotone

Définition 1.26 *soit $A : D(A) \subset H \to H$ un opérateur linéaire non borné. On dit que A est monotone si*

$$(Av, v) \geq 0 \qquad \forall v \in D(A),$$

A est maximal monotone si de plus $R(I + A) = H$ i.e ;

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tel que } u + Au = f.$$

Proposition 1.2 *soit A un opérateur maximal monotone. Alors*
a) $D(A)$ est dense dans H;
b) A est férmé ;
c) Pour tout $\lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ est bijictif de $D(A)$ sur H, $(I + \lambda A)^{-1}$ est un opérateur borné et $\|(I + \lambda A)^{-1}\|_{L(H)} \leq 1$.

Remarque 1.1 *Certains auteurs disent que A est accrétif ou que -A est dissipatif.*

Définition 1.27 *l'opérateur A est Lipchitz continu s'il existe $M > 0$ tel que*

$$\|Au - Av\|_H \leq M \|u - v\|_H \quad \forall u, v \in H.$$

1.7 Semi-groupe fortement continu

Tout au long de cette section, $(E, \|.\|)$ désignera un espace de Banach.

Définition 1.28 ***(Semi-groupe fortement continu)***
Une famille d'opérateurs $(S(t))_{t\geq 0}$ de $\mathcal{L}(E)$ est un semi-groupe fortement continu sur E lorsque les conditions suivantes sont réalisés :
1) $S(0) = I$,(I est l'opérateur identité sur E) ;
2) $S(t + s) = S(t)S(s)$; $t, s \geq 0$,(propriété de semi-groupe) ;
3) Pour chaque $x \in X$, $S(t)x$ est continue en t sur $[0, +\infty)$;
Ce type de semi groupe sera simplement appelé un C_0-semi groupe.

Définition 1.29 *Un semi-groupe d'opérateurs linéaire bornés est dit :*

1) Uniformément continu si :

$$\lim_{t \to 0^+} \|S(t) - I\| = 0.$$

2) Fortement continu ou de classe C_0 si :

$$\lim_{t \to 0^+} S(t)x - x = 0, \quad \forall x \in E.$$

3) Semi-groupe de contraction de classe C_0 s'il est de classe C_0 et :

$$\|s(t)\| \leq 1, \ \ \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.2 *Si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ est un semi-groupe uniformément continu, alors*

$$\lim_{t \to s} \|S(t) - S(s)\| = 0$$

1.7.1 Générateur infinitésimal

Définition 1.30 *Le générateur infinitésimal de $S(t)$ est l'opérateur linéaire A de domaine*

$$D(A) = \left\{ x \in E : \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\},$$

défini par

$$Ax = \lim_{t \to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}; \ \forall x \in D(A)$$

Théorème 1.5 ([27]) *Soit $(A, D(A))$ le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t \geq 0}$ fortment continu sur E. Pour tout $x_0 \in D(A), x(t) = S(t)x_0$ est l'unique solution du problème*

$$\begin{aligned} x &\in C([0, \infty); D(A)) \cap C^1([0, \infty); E), \\ x'(t) &= Ax(t) \text{ pour tout } t \geq 0, \quad x(0) = x_0. \end{aligned}$$

Théorème 1.6 ([27]) *Soit E un espace banach et soit A un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(t)$ sur E, satisfaisante $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$. Si B un opérateur linéaire borné dans E. Alors $A + B$ est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $S(t)$ sur E, satisfaisante $\|S(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$.*

Proposition 1.3 *Soit $S(t)$ un C_0-semi-groupe. Il existe deux constantes $\omega \in \mathbb{R}$ et $M \geq 1$ telle que*

$$\|S(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0.$$

1. *Dans le cas $\|S(t)\|_{L(E)} \leq Me^{\omega t}; \forall t \geq 0$, on dit que $(S(t))_{t \geq 0}$ est de type (M, ω).*
2. *Si $(M, \omega) = (1, 0)$, on dit que $(S(t))_{t \geq 0}$ est C_0-semi-groupe de contraction.*

1.7.2 Théorème de Hille-Yosida

Définition 1.31 *(Théorème de Hille-Yosida1) Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans E est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*
(i) A est fermé ;
(ii) $D(A)$ est dense dans E ;
(iii) pour tout $\lambda > 0$, $(\lambda I - A)$ est une application bijective de $D(A)$ sur E, et $(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur borné sur E vérifiant :

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Définition 1.32 *(Théorème de Hille-Yosida 2) Un opérateur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans E est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions sur E si et seulement si A est m-dissipatif et de domaine dense dans E.*

1.7.3 Théorème de Lumer-Phillips

Théorème 1.7 *(Lumer-Phillips [27])*
Soit $A : D(A) \subseteq E \to E$ un opérateur tel que $\overline{D(A)} = E$:
1. *Si A est dissipatif et s'il $\lambda_0 > 0$ existe tel que $\lambda_0 I - A$ est surjectif, alors est A le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions.*
2. *Si A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de contractions, alors $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda_0 > 0$ et A est dissipatif.*

1.7.4 Théorème de Lax-Milgram

Définition 1.33 *On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, \nu) : H \times H \to \mathbb{R}$ est*
***i) continue** s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u, \nu)| \leq C|u|\,|v| \qquad \forall u,\ v \in H,$$

***ii) coercive** s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v, v) \ \geq \alpha\,|u|^2 \qquad \forall v \in H.$$

Corollaire 1.1 ***(Lax-Milgram)****. Soit $a(u,\nu)$ une forme bilinéaire, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H$ il existe $u \in H$ unique tel que*

$$a(u,\nu) = \langle \varphi, \nu \rangle, \qquad \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractérisé par la propriété

$$u \in H \;\; \textit{et} \;\; \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, \nu \rangle \; = \min_{v\,\in H}\left\{\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, \nu \rangle\right\}.$$

Chapitre 2

Existence et Unicité de la solution

Dans ce chapitre nous allons démontrer **l'existence locale** et **l'unicité** de la solution, en utilisant la théorie des **semi-groupes**.

2.1 Position du problème

Considérons le problème suivant [1]

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - au_{xx}(x,t) + \int_0^\infty g(s)u_{xx}(x,t-s)\,ds + \mu u_t(x,t-\tau) = 0, \ x \in \Omega, \ t > 0, \\ v_{tt}(x,t) - bv_{xx}(x,t) = 0, \qquad\qquad x \in (L_1, L_2), \ t > 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

avec les conditions aux limites et de transmission, et les conditions initiales

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L_3,t) = 0, \\ u(L_i,t) = v(L_i,t), \ i = 1,2, \\ au_x(L_i,t) - \int_0^\infty g(s)u_x(L_i,t-s)\,ds = bv_x(L_i,t), \ i = 1,2, \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} u(x,-t) = u_0(x), u_t(x,-t) = u_1(x), \qquad x \in \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), \qquad x \in \Omega, \ t \in (0,\tau), \\ v(x,-t) = v_0(x), v_t(x,-t) = v_1(x), \quad x \in (L_1,L_2), \ t > 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

Pour prouver l'existence de la solution unique du problème (2.1), introduisons la nouvelle variable suivante [25]

$$z(x,\rho,t) = u_t(x,t-\tau\rho), \quad x \in \Omega, \rho \in (0,1), \qquad t > 0. \tag{2.4}$$

Alors nous avons

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \ x \in \Omega, \ \rho \in (0,1), \ t > 0, \tag{2.5}$$

et nous introduisons une autre nouvelle variable [8]

$$\eta^t(x,s) \; = u(x,t) - u(x,t-s) \quad , \tag{2.6}$$

et

$$\eta^t_t(x,s) \; + \eta^t_s(x,s) = u_t(x,t), \qquad x \in \Omega, \; s > 0, \; t > 0. \tag{2.7}$$

En utilisant (2.4) et (2.6) on peux réécrire (2.1) comme suit

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - lu_{xx}(x,t) - \int_0^\infty g\,(s)\,\eta^t_{xx}(x,s)ds + \mu z(x,1,t) = 0, & x \in \Omega, \; t > 0, \\ v_{tt}(x,t) - bv_{xx}(x,t) = 0, & x \in (L_1, L_2)\,, \; t > 0, \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & x \in \Omega, \; \rho \in (0,1)\,, \; t > 0, \\ \eta^t_t(x,s) \; + \eta^t_s(x,s) = u_t(x,t), & x \in \Omega, \; s > 0, \; t > 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

les conditions aux limites et de transmission (2.2) deviennent

$$\begin{cases} u(0,t) = u(L_3,t) = 0, \\ u(L_i,t) = v(L_i,t), \qquad i = 1,2, \; t > 0, \\ lu_x(L_i,t) + \int_0^\infty g\,(s)\,\eta^t_{xx}(L_i,s)ds = bv_x(L_i,t) \quad i = 1,2, \; t > 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

et les conditions initiales (2.3)deviennent

$$\begin{cases} u(x,-t) = u_0(x,t), & u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega, \; t > 0, \\ z(x,0,t) = u_t(x,t) & z(x,1,t) = f_0(x,t-\tau), & x \in \Omega, \; t > 0, \\ v(x,0) = v_0(x) & v_t(x,0) = v_1(x), & x \in (L_1,L_2)\,, \; t > 0, \end{cases} \tag{2.10}$$

il est clair que

$$\begin{cases} \eta^t(x,0) = 0 & x \in \Omega, \\ \eta^t(0,s) = \eta^t(L_3,s) = 0 & s > 0, \\ \eta^0(x,0) = \eta_0(s) & s > 0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Pour la fonction de relaxation g, nous avons les hypothèses suivantes :
$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ satisfait

$$g\,(0) > 0, \;\; a - \int_0^\infty g(t)dt = a - g_0 = l > 0. \tag{A1}$$

Il existe une constante positive δ telle que

$$g'(s) \leq -\delta g(s), \; \forall s \geq 0. \tag{A2}$$

Nous notons $V: =(u,\upsilon,\varphi,\psi,z,\eta^{t})^{T}$. Alors on peux réécrire le problème (2.8) avec

$$\begin{cases} V_t=(\mathcal{A}+\mathcal{B})\,V\,(t)\,,\, t>0, \\ V\,(0)=V_0, \end{cases} \tag{2.12}$$

où $V_0: =(u_0\,(.,0)\,,\upsilon_0,u_1,\upsilon_1,f_0\,(.,-\tau)\,,\eta_0)^{T}$ l'opérateur $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont linéaires et définis par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ \upsilon \\ \varphi \\ \psi \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \\ lu_{xx}+\int_0^{+\infty} g\,(s)\,w_{xx}\,(s)\,ds-\mu\varphi-\mu z\,(.,1) \\ b\upsilon_{xx} \\ -\frac{1}{\tau}z_{\rho} \\ -w_s+\varphi \end{pmatrix},$$

et $\mathcal{B}\,(u,\upsilon,\varphi,\psi,z,\eta^{t})^{T}=\mu\,(0,0,\varphi,0,0,0)^{T}$.
Avec le domaine

$$D\,(\mathcal{A})=\left\{ \begin{array}{c} (u,\upsilon,\varphi,\psi,z,w)^{T}\in\mathcal{M},\ z_{\rho}\in L^2\,((0,1)\,,L^2\,(\Omega))\,,\ w_s\in\mathbb{R}_+,\ H^{\,1}\,(\Omega)\,, \\ z\,(x,0)=\varphi\,(x)\,,\ w\,(x,0)=0 \end{array}\right\},$$

tels que

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \left\{\left(H^{\,2}\,(\Omega)\times H^{\,2}\,(L_1,L_2)\cap X_*\right)\right\}\times H^{\,1}\,(\Omega)\times H^{\,1}\,(L_1,L_2)\times L^2\left((0,1)\,,L^2\,(\Omega)\right) \\ & \quad \times L_g^2\left(\mathbb{R}_+,H^{\,2}\,(\Omega)\cap H^{\,1}\,(\Omega)\right), \end{aligned}$$

et $D\,(\mathcal{B})=\mathcal{M}$.
L'espace X* est défini par

$$X_*=\left\{ \begin{array}{c} (u,\upsilon)\in H^{\,1}\,(\Omega)\cap H^{\,1}\,(L_1,L_2)\setminus u\,(0,t)=u\,(L_3,t)=0, \\ u\,(L_i,t)=\nu\,(L_i,t)\,,\ lu_x\,(L_i,t)+\int_0^{+\infty} g\,(s)\,\eta_x^t\,(L_i,s)\,ds=b\upsilon_x\,(L_i,t)\,,i=1,2 \end{array}\right\}.$$

L'espace de l'énergie est défini par

$$\mathcal{H}=L^2\,(\Omega)\times L^2\,(L_1,\,L_2)\times X_*\times\left(L_g^2\,(0,+\infty)\ ;H^{\,1}\,(\Omega)\right)\times L^2\,((\Omega)\times(0,1))\,.$$

tels que $L_g^2\,(\mathbb{R}_+\,;\ H^{\,1}\,(\Omega))$ est un espace de Hilbert dont ses élément sont des fonctions à valeurs dans H^1 définies sur $\mathbb{R}_+$, cet espace est muni du produit scalaire

$$\langle\phi,\vartheta\rangle_{L_g^2((0,+\infty)\,;\,H^{\,1}(\Omega))}=\int_{\Omega}\left(\int_0^{+\infty} g\,(s)\,\phi_x\,(x,s)\,\vartheta_x\,(x,s)\ ds\right)\,dx.$$

Soit

$$V = (u,\upsilon,\varphi,\psi,z,w)^T , \bar{V} = \left(\bar{u},\bar{\upsilon},\bar{\varphi},\bar{\psi},\bar{z},\bar{w}\right)^T$$

On définit le produit scalaire sur l'espace de l'énergie $\mathcal{H}$ comme suit

$$\begin{aligned}\left\langle V,\bar{V}\right\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} \varphi\bar{\varphi}\ dx + \int_{L_1}^{L_2} \psi\bar{\psi}\ dx + \int_{\Omega} lu_x\bar{u}_x\ dx + \int_{L_1}^{L_2} b\upsilon_x\bar{\upsilon}_x\ dx \\ &+ \int_{\Omega}\int_{+\infty} g(s)\, w_x(s)\, \bar{w}_x\ (s)\ dsdx + \tau\mu \int_{\Omega}\int_0^1 z\bar{z}d\rho\ dx.\end{aligned}$$

2.2 Existence Locale

Dans cette section nous allons démontrer **l'existence locale** et **l'unicité** de la solution, en utilisant la théorie des **semi-groupes.**

Ona la solvabilité du problème (2.8) $-$ (2.10) est assurée par le théoreme suivant.

Théorème 2.1 *Supposons que* $(A1),(A2)$ *sont vérifiées. Soit* $V_0 \in \mathcal{H}$*, alors il existe une solution faible unique* $V \in C(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})$ *du problème* (2.12)*. De plus, si* $V_0 \in D(\mathcal{A})$*, alors*

$$V \in C\ \left(\mathbb{R}_+,D(\mathcal{A}) \cap C^1(\mathbb{R}_+,\mathcal{H})\right)$$

Preuve. Pour arriver à prouver le résultat cité dans le Théorème 2.1, nous utilisons la théorie des semi-groupes, c'est-à-dire, nous montrons que l'opérateur $\mathcal{A}$ génère un C_0-semi groupe sur $\mathcal{H}$. Dans cette étape, nous nous préoccupons de prouver que l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif. Effectivement, pour $(u,\upsilon,\varphi,\psi,z,w)^T \in D(\mathcal{A})$, tel que $\varphi(L_i) = \psi(L_i)$, $i = 1,2$, on trouve

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}V,V\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega} lu_{xx}\varphi\ dx + \int_{\Omega}\left(\int_0^{+\infty} g(s)\, w_{xx}(s)\ ds - \mu\varphi - \mu z(.,1)\right)\varphi\ dx \\ &+ \int_{\Omega} lu_x\varphi_x\ dx + \int_{L_1}^{L_2} b\upsilon_x\psi_x\ dx + \int_{L_1}^{L_2} b\upsilon_{xx}\psi\ dx \\ &+ \int_{\Omega}\int_0^{+\infty} g(s)\, w_x(s)\,(-w_s+\varphi)_x\ dsdx - \mu\int_{\Omega}\int_0^1 zz_\rho(x,\rho)\ d\rho dx.\end{aligned} \tag{2.13}$$

On calcule chaque terme de (2.13), on applique une intégration par partie au premier terme du membre droite de (2.13), on obtient

$$\int_{\Omega} lu_{xx}\varphi\ dx = \int_{\partial\Omega} lu_x\varphi\ dx - \int_{\Omega} lu_x\varphi_x\ dx$$

Et pour le deuxième terme

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\left(\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{xx}\left(s\right)\ ds-\mu\varphi-\mu z\left(.,1\right)\right)\varphi\ dx \\
= & \int_{\Omega}\left(\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{xx}\left(s\right)\ ds\right)\varphi dx+\int_{\Omega}\left(-\mu\varphi-\mu z\left(.,1\right)\right)\varphi\ dx
\end{aligned}
$$

On applique l'intégration par partie par rapport à x sur Ω et on utilise Fubini sur

$$
\int_{\Omega}\left(\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{xx}\left(s\right) ds\right)\varphi\ dx,
$$

on trouve

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega}\left(\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{xx}\left(s\right) ds\right)\varphi\ dx &= \int_{0}^{+\infty} g\left(s\right)\int_{\Omega} w_{xx}\left(s\right)\varphi\ dxds \\
&= \left[\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{x}\left(s\right)\ ds\ \varphi\right]_{\partial\Omega}-\int_{\Omega}\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{x}\left(s\right)\varphi_{x}\ dsdx.
\end{aligned}
$$

Pour le cinquième terme, on a

$$
\int_{L_1}^{L_2} bv_{xx}\psi\ dx=\left[bv_{x}\psi\right]_{L_1}^{L_2}-\int_{L_1}^{L_2} bv_{x}\psi_{x}\ dx.
$$

Par une intégration par partie et en utilisant le fait que $w\left(x,0\right)=0$, on obtient

$$
\begin{aligned}
& \int_{\Omega}\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{x}\left(s\right)\left(-w_{s}+\varphi\right)_{x}\ dsdx \\
= & -\int_{\Omega}\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{x}\left(s\right) w_{xs}\ dsdx+\int_{\Omega}\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{x}\left(s\right)\varphi_{x}\ dsdx \\
= & -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right)\frac{\partial}{\partial s}\left|w_{x}\left(s\right)\right|^{2}\ dsdx+\int_{\Omega}\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{x}\left(s\right)\varphi_{x}\ dsdx \\
= & -\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[g\left(s\right)\left|w_{x}\left(x,s\right)\right|^{2}\right]_{0}^{+\infty}\ dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{+\infty} \acute{g}\left(s\right)\left|w_{x}\left(x,s\right)\right|^{2}\ dsdx \\
& +\int_{\Omega}\int_{0}^{+\infty} g\left(s\right) w_{x}\left(s\right)\varphi_{x}\ dsdx.
\end{aligned}
$$

Pour le dernier terme du côté droit de (2.13), on obtient

$$
\begin{aligned}
& -\mu\int_{\Omega}\int_{0}^{1} zz_{\rho}\left(x,\rho\right)\ d\rho dx=\mu\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\rho}z^{2}\left(x,\rho\right)\ d\rho dx \\
= & \ \frac{\mu}{2}\int_{\Omega}\left(z^{2}\left(x,1\right)-z^{2}\left(x,0\right)\right)\ dx.
\end{aligned}
$$

En remarquant que $z\left(x,0,t\right)=\varphi\left(x,t\right)$, $\varphi\left(L_i\right)=\psi\left(L_i\right)$,$i=1,2$, alors (2.13), devient

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}V,V\rangle_{\mathcal{H}} &= \left[lu_x\varphi+\int_0^{+\infty} g(s)\,w_x(s)\ ds\ \varphi\right]_{\partial\Omega}+[bv_x\psi]_{L_1}^{L_2} \\
&\quad +\int_\Omega(-\mu\varphi-\mu z(.,1))\,\varphi\ dx-\frac{1}{2}\int_\Omega\left[g(s)\,|w_x(x,s)|^2\right]_0^{+\infty}\ dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{+\infty}\acute{g}(s)\,|w_x(x,s)|^2\ dsdx-\frac{\mu}{2}\int_\Omega\left(z^2(x,1)-\varphi^2(x)\right)\ dx,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

en utilisant les conditions aux bord sur Ω au premier terme du membre droite de (2.14), on trouve

$$\begin{aligned}
&\left[lu_x\varphi+\int_0^{+\infty} g(s)\,w_x(s)\ ds\ \varphi\right]_{\partial\Omega} \\
&= \left(lu_x(L_1,t)+\int_0^{+\infty} g(s)\,w_x(L_1,s)\ ds\right)\varphi(L_1,s) \\
&\quad -\left(lu_x(L_2,t)+\int_0^{+\infty} g(s)\,w_x(L_2,s)\ ds\right)\varphi(L_2,s) \\
&= -[bv_x\psi]_{L_1}^{L_2}.
\end{aligned}$$

Alors (2.14) devient

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}V,V\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega(-\mu\varphi-\mu z(.,1))\,\varphi\ dx-\frac{1}{2}\int_\Omega\left[g(s)\,|w_x(x,s)|^2\right]_0^{+\infty}\ dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{+\infty}\acute{g}(s)\,|w_x(x,s)|^2\ dsdx-\frac{\mu}{2}\int_\Omega\left(z^2(x,1)-\varphi^2(x)\right)\ dx.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\langle \mathcal{A}V,V\rangle_{\mathcal{H}}\leq\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{+\infty}\acute{g}(s)\,|w_x(x,s)|^2\ dsdx$$

par conséquent, en tenant compte de $(A2)$, il vient

$$\langle \mathcal{A}V,V\rangle_{\mathcal{H}}\leq 0$$

Alors, l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif.

Ensuite, on montre que l'operateur $-\mathcal{A}$ est maximal. Réellement, soit $F=(f_1,f_2,f_3,f_4,f_5,f_6)^T\in\mathcal{H}$, montrons qu'il existe $V=(u,v,\varphi,\psi,z,w)^T\in D(\mathcal{A})$ tels que

$$(\lambda I-\mathcal{A})\,V=F, \tag{2.15}$$

qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{c}
\lambda u-\varphi=f_1 \\
\lambda v-\psi=f_2 \\
\lambda\varphi-lu_{xx}-\int_0^{+\infty}g(s)\,w_{xx}(s)\ ds+\mu\varphi+\mu z(.,1)=f_3 \\
\lambda\psi-bv_{xx}=f_4 \\
z+\frac{1}{\tau}z_\rho=f_5 \\
\lambda w+w_s-\varphi=f_6
\end{array}\right. \tag{2.16}$$

Supposons qu'on a trouvé u et v avec la régularité appropiée. Donc, la première et la deuxième équation de (2.16) donnent

$$\begin{cases} \varphi = \lambda u - f_1 \\ \psi = \lambda v - f_2 \end{cases} \tag{2.17}$$

nous avons donc $\varphi \in H^1(\Omega)$ et $\psi \in H^1(L_1, L_2)$. De plus, on peut trouver z avec

$$z(x,0) = \varphi(x), \text{ pour } x \in \Omega.$$

En outre, en utilisant l'équation de (2.16) nous trouvons z telles que

$$z(x,\rho) = \varphi(x) e^{-\lambda\rho\tau} + \tau e^{-\lambda\rho\tau} \int_0^\rho f_5(x,\sigma) e^{-\lambda\sigma\tau}\, d\sigma.$$

En utilisant le fait que $\varphi = \lambda u - f_1$, il vient

$$z(x,\rho) = \lambda u e^{-\lambda\rho\tau} - f_1 e^{-\lambda\rho\tau} + \tau e^{-\lambda\rho\tau} \int_0^\rho f_5(x,\sigma) e^{\lambda\sigma\tau}\, d\sigma, \tag{2.18}$$

avec

$$z(x,1) = \lambda u e^{-\lambda\tau} - f_1 e^{-\lambda\tau} + \tau e^{-\lambda\tau} \int_0^\rho f_5(x,\sigma) e^{\lambda\sigma\tau}\, d\sigma. \tag{2.19}$$

Alors, il est facile de voir que la dernière équation de (2.16) avec $w(x,0) = 0$ a une solution unique

$$\begin{aligned} w(x,s) &= \left(\int_0^s e^{\lambda y} \left(f_6(x,y) + \varphi(x) \right)\, dy \right) e^{-\lambda s} \\ &= \left(\int_0^s e^{\lambda y} \left(f_6(x,y) + \lambda u(x) - f_1(x) \right)\, dy \right) e^{-\lambda s} \end{aligned} \tag{2.20}$$

En utilisant (2.16), (2.17) les fonctions u et v satisfont le système suivant

$$\begin{cases} \lambda^2 u - \left(l u_{xx} + \int_0^{+\infty} g(s) w_{xx}(s)\, ds + \mu\left(\lambda u - f_1 + z(.,1)\right) \right) = f_3 + \lambda f_1, \\ \lambda^2 v - b v_{xx} = f_4 + \lambda f_2 , \end{cases}$$

par (2.19) $-$ (2.20), le système (2.16) devient

$$\begin{cases} \left(\lambda^2 + \mu\lambda + \mu\lambda e^{-\lambda\tau}\right) u - \tilde{l} u_{xx} = \tilde{f} , \\ \lambda^2 v - b v_{xx} = f_4 + \lambda f_2 , \end{cases} \tag{2.21}$$

où

$$\tilde{l} = l + \lambda \int_0^\infty g(s) e^{-\lambda s} \left(\int_0^s e^{\lambda y}\, dy \right)\, ds;$$

et

$$\begin{aligned}\tilde{f} &= \int_0^{\infty} g(s)\, e^{-\lambda s} \left(\int_0^s e^{\lambda y} \left(f_6(x,y) - f_1(x,y) \right)_{xx} \, dy \right) \, ds \\ & -\mu\tau e^{-\lambda\tau} \int_0^1 f_5(x,\sigma)\, e^{\lambda\sigma\tau} \, d\sigma + \left(\lambda + \mu + \mu e^{-\lambda\tau} \right) f_1 + f_3.\end{aligned}$$

Danc le problème (2.21) est équivalent au problème

$$\Phi\left((u,\upsilon), (w_1,w_2) \right) = \Psi(w_1,w_2),$$

tels que la forme bilinéaire $\Phi\colon\ (X_*, X_*) \to \mathbb{R}$, et la forme linéaire $\Psi\colon\ X_* \to \mathbb{R}$ sont définies par

$$\begin{aligned}\Phi\left((u,\upsilon), (w_1,w_2) \right) &= \int_\Omega \left[\left(\lambda^2 + \mu\lambda + \mu\lambda e^{-\lambda\tau} \right) u w_1 + \tilde{l} u_x (w_1)_x \right] \, dx - \left[\tilde{l} u_x w_1 \right]_{\partial\Omega} \\ & + \int_{L_1}^{L_2} \left(\lambda^2 \upsilon w_2 + b\upsilon_x (w_2)_x \right) \, dx - \left[b\upsilon_x w_2 \right]_{L_1}^{L_2},\end{aligned}$$

et

$$\Psi(w_1,\omega_2) = \int_\Omega \tilde{f}\, w_1 \, dx + \int_{L_1}^{L_2} \left(f_4 + \lambda f_2 \right) w_2 \, dx. \tag{2.22}$$

Il est claire que Φ est continue et coercive, et Ψ est continue. Alors en appliquant le Théorème de Lax-Migram (Corollaire 1.1), on déduit que pour tout $(w_1,w_2) \in X_*$, le problème (2.22) admet une solution unique $(u,\upsilon) \in X_*$.
En appliquant la régularité elliptique classique, il s'ensuit de (2.21) que

$$(u,\upsilon) \in \left\{ \left(H^2(\Omega) \times H^2(L_1,L_2) \right) \cap X_* \right\}.$$

Donc l'opérateur $(\lambda I - \mathcal{A})$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Cela signifie que $-\mathcal{A}$ est un opérateur maximal monotone. Ensuite, en utilisant le Theorème 1.7 de Lummer-Phillips, on déduit que $-\mathcal{A}$ est un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe linéaire sur $\mathcal{H}$. D'autre part, il est clair que l'opérateur linéaire $\mathcal{B}$ est continu lipschitz, en appliquant le Theorème 1.6, alors $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ est également un générateur infinitésimal d'un C_0 semi-groupe linéaire sur $\mathcal{H}$. Par conséquent (2.12) est bien posé au sens du Théorème 1.5. ■

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution

Dans ce chapitre, nous montrons que l'énergie de la solution du problème (2.1) − (2.3) décroit **exponentiellement** quand t tend vers l'infini, en utilisant la méthode de **l'énergie** et **les fonctionnelles de Lyapunov** appropriée pour montrer la stabilité.

3.1 Stabilité exponentielle

Nous définissons la fonctionnelle d'énergie du problème (2.1) − (2.3) par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left[u_t^2(x,t) + l u_x^2(x,t)\right] dx + \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} \left[v_t^2(x,t) + b v_x^2(x,t)\right] dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{\infty} g(s)\left|\eta_x^t(x,s)^2\right| ds dx + \frac{\tau\mu}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{1} z^2(x,\rho,t)\, d\rho dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Théorème 3.1 *Supposons que $(A1)$, $(A2)$ sont vérifiées et soit (u,v) une solution du problème* (2.1) − (2.3), *et que*

$$\begin{aligned} a &> \frac{8(L_3-L_1)}{L_1+L_3-L_2} l, \\ b &> \frac{8(L_2-L_1)}{L_1+L_3-L_2} l, \end{aligned}$$

alors il existe deux constantes γ_1, $\gamma_2 > 0$ telles que

$$E(t) \leq \gamma_2\, e^{-\gamma_1 t}, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}_+.$$

Pour la preuve du Théorème 2.2, nous avons besoin de quelques lemmes.

Lemme 3.1 *soit* (u,v,η,z) *la solution de problème* (2.5) $-$ (2.7)*, alors* $E(t)$ *satisfait*

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq \mu \int_{\Omega} u_t^2(x,t)\ dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g'(s)\left|\eta_x^t(x,s)^2\right|\ dsdx. \tag{3.2}$$

Preuve. En multipliant la première équation de (2.5) par $u_t(x,t)$, il vient

$$\int_{\Omega} u_{tt}u_t\ dx - \int_{\Omega} lu_{xx}u_t\ dx - \int_{\Omega}\int_0^{\infty} g\left(s\right)\eta_{xx}^t(x,s)u_t\ dsdx + \int_{\Omega} \mu u_t z(x,1,t) = 0. \tag{3.3}$$

En intégrant les termes de (3.3), on obtient

$$\int_{\Omega} u_{tt}u_t dx = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}(u_t^2)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2. \tag{3.4}$$

$$\int_{\Omega} lu_{xx}u_t dx = l\int_{\Omega} u_{xx}u_t dx = l\left[u_x u_t\right]_{\partial\Omega} - \frac{l}{2}\int_{\Omega}\frac{d}{dt}(u_x^2)dx = l\left[u_x u_t\right]_{\partial\Omega} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_x\right\|_2^2, \tag{3.5}$$

et

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g\left(s\right)\eta_{xx}^t(x,s)u_t\ dsdx \\
=\ &\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g\left(s\right)\eta_{xx}^t(x,s)\left[\eta_t^t(x,s)+\eta_s^t(x,s)\right]\ dsdx \\
=\ &\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g\left(s\right)\eta_{xx}^t(x,s)\eta_t^t(x,s)\ dsdx + \int_{\Omega}\int_0^{\infty} g\left(s\right)\eta_{xx}^t(x,s)\eta_s^t(x,s)\ dsdx \\
=\ &\left[\int_0^{\infty} g\left(s\right)\eta_t^t(x,s)\eta_x^t(x,s)\ ds\right]_{\partial\Omega} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g\left(s\right)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\ dsdx \\
&+\left[\int_0^{\infty} g\left(s\right)\eta_s^t(x,s)\eta_x^t(x,s)\ ds\right]_{\partial\Omega} - \int_0^{\infty}\int_{\Omega} g\left(s\right)\eta_{xs}^t(x,s)\eta_x^t(x,s)\ dsdx \\
=\ &\left[\int_0^{\infty} g\left(s\right)\eta_x^t(x,s)u_t\ ds\right]_{\partial\Omega} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g\left(s\right)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\ dsdx \\
&-\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega} g\left(s\right)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\ dx\right]_0^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g'\left(s\right)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\ dsdx.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

En multipliant la deuxième équation de (2.8) par $v_t(x,t)$, il vient

$$\int_{L_1}^{L_2} v_t v_{tt}(x,t)\,dx - \int_{L_1}^{L_2} b v_t v_{xx}(x,t)\,dx = 0, \tag{3.7}$$

en évaluant les termes de (3.7), on obtient

$$\int_{L_1}^{L_2} v_t v_{tt}(x,t)\,dx = \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} \frac{d}{dt}(v_t^2)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_t\|_2^2, \tag{3.8}$$

$$\int_{L_1}^{L_2} b v_t v_{xx}(x,t)\,dx = b\,[v_t v_x]_{L_1}^{L_2} - \frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} \frac{d}{dt} b(v_x^2)\,dx = b\,[v_t v_x]_{L_1}^{L_2} - \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\|v_x\|_2^2, \tag{3.9}$$

en remplaçant (3.8), (3.9) dans (3.7), il vient

$$\begin{aligned} &\int_{L_1}^{L_2} v_t v_{tt}(x,t)\,dx - \int_{L_1}^{L_2} b v_t v_{xx}(x,t)\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|v_t\|_2^2 + \|v_x\|_2^2\right) - b\,[v_t v_x]_{L_1}^{L_2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

En multipliant la troisième équation dans (2.8) par $\mu z(x,\rho,t)$, il vient

$$\int_0^1\int_\Omega \tau\mu z z_t(x,\rho,t)\,d\rho dx + \int_0^1\int_\Omega \mu z z_\rho(x,\rho,t)\,d\rho dx = 0, \tag{3.11}$$

en évaluant les termes de (3.11), on obtient

$$\int_0^1\int_\Omega \tau\mu z z_t(x,\rho,t)\,d\rho dx = \tau\mu\int_0^1\int_\Omega z z_t(x,\rho,t)\,d\rho dx = \frac{\tau\mu}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_\Omega (z^2(x,\rho,t))\,d\rho dx, \tag{3.12}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1\int_\Omega \mu z z_\rho(x,\rho,t)\,d\rho dx &= \mu\int_0^1\int_\Omega z z_\rho(x,\rho,t)\,d\rho dx \\ &= \frac{\mu}{2}\int_\Omega |z(x,1,t)|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega |z(x,0,t)|^2\,dx \\ &= \frac{\mu}{2}\int_\Omega |z(x,1,t)|^2\,dx - \frac{\mu}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2\,dx, \end{aligned} \tag{3.13}$$

en remplaçant (3.12) et (3.13) dans (3.11), il vient

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_\Omega \tau\mu z z_t(x,\rho,t)\,d\rho dx+\int_0^1\int_\Omega \mu z z_\rho(x,\rho,t)\,d\rho dx \qquad (3.14)\\
&= \frac{\tau\mu}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\int_\Omega (z^2(x,\rho,t))\,d\rho dx+\frac{\mu}{2}\int_\Omega |z(x,1,t)|^2\ dx-\frac{\mu}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2\ dx,
\end{aligned}$$

En évaluant les termes sur le bord de (3.5) et (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}
&\left[\left(lu_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds\right)u_t\right]_{\partial\Omega}\\
&= (lu_x(L_1,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L_1,s)ds)u_t(L_1,t)\\
&\quad -(lu_x(L_2,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(L_2,s)ds)u_t(L_2,t) \qquad (3.15)\\
&= -\left[bv_xv_t\right]_{L_1}^{L_2},
\end{aligned}$$

et on a

$$\left[\frac{1}{2}\int_\Omega g(s)\left|\eta_x^t(x,s)^2\right|dx\right]_0^\infty=0.$$

En substituant (3.5) – (3.7), (3.10), (3.14) et (3.15), on obtient

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}(\frac{1}{2}\int_\Omega\left[u_t^2(x,t)+lu_x^2(x,t)\right]\ dx+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2}\left[v_t^2(x,t)+bv_x^2(x,t)\right]\ dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)^2\right|\ dsdx+\frac{\tau\mu}{2}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\ d\rho dx)\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^\infty g'(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\ dsdx-\int_\Omega \mu u_t z(x,1,t)\ dx\\
&\quad-\frac{\mu}{2}\int_\Omega |z(x,1,t)|^2\ dx+\frac{\mu}{2}\int_\Omega |u_t(x,t)|^2\ dx. \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

On a

$$\frac{\tau\mu}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)\ d\rho dx=-\frac{\mu}{2\tau}\int_\Omega (z^2(x,1)-z^2(x,0))\ dx.$$

En appliquant l'inégalité de Young au deuxième terme du membre de droit de l'équation (3.16), on obtient

$$\int_{\Omega} \mu u_t z(x,1,t)\,dx \leq \frac{\mu}{2}\int_{\Omega} u_t^2(x,t)\,dx + \frac{\mu}{2}\int_{\Omega} |z(x,1,t)|^2\,dx. \tag{3.17}$$

En remplaçant (3.17) dans (3.16),il vient

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq \mu\int_{\Omega} u_t^2(x,t)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{\infty} g'(s)\left|\eta_x^t(x,s)^2\right|\,dsdx,$$

donc (3.2) est vérifiée. ■

Maintenant, nous définissons la fonctionnelle

$$\mathfrak{D}(t) = \int_{\Omega} uu_t\,dx + \int_{L_1}^{L_2} vv_t(x,t)\,dx \tag{3.18}$$

alors nous avons le lemme suivant.

Lemme 3.2 *la fonctionnelle $\mathfrak{D}(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathfrak{D}(t) \quad \leq \quad & \int_{\Omega} u_t^2\,dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 + (L^2+\varepsilon-l)\int_{\Omega} u_x^2\,dx \\ & - \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2\,dx + \frac{g_0}{4\varepsilon}\int_{\Omega}\int_{0}^{\infty} g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\,dsdx \\ & + \frac{\mu^2}{4\varepsilon}\int_{\Omega} z^2(x,1,t)\,dx. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Preuve. En dérivant (3.18) par rapport a t

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{D}(t) = \int_{\Omega} u_t^2\,dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2\,dx + \int_{\Omega} uu_{tt}\,dx + \int_{L_1}^{L_2} vv_{tt}(x,t)\,dx, \tag{3.20}$$

en utilisant la première équation du problème (2.8) et en intégrant, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} u u_{tt} dx &= \int_{\Omega} u \int_0^{\infty} g(s)\, \eta_{xx}^t(x,s)\, ds dx \\
&\quad - \int_{\Omega} u \mu z(x,1,t)\, dx + l \int_{\Omega} u u_{xx}(x,t)\, dx \\
&= -l \int_{\Omega} u_x^2\, dx + \left[\left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x,s) ds \right) u \right]_{\partial\Omega} \\
&\quad - \int_{\Omega} u_x \int_0^{\infty} g(s)\, \eta_x^t(x,s)\, ds dx - \mu \int_{\Omega} u(x,t) z(x,1,t)\, dx, \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

en utilisant la deuxième équation du problème (2.5) et en intégrant, on obtient

$$\int_{L_1}^{L_2} v v_{tt}(x,t)\, dx = b \int_{L_1}^{L_2} v v_{xx}(x,t)\, dx = [b v_x v]_{L_1}^{L_2} - b \int_{L_1}^{L_2} v_x^2\, dx. \qquad (3.22)$$

En remplaçant (3.21), (3.22) dans (3.20), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathfrak{D}(t) &= \int_{\Omega} u_t^2\, dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2\, dx - l \int_{\Omega} u_x^2\, dx \\
&\quad + \left[\left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x,s)\, ds \right) u \right]_{\partial\Omega} \\
&\quad - \int_{\Omega} u_x \int_0^{\infty} g(s)\, \eta_x^t(x,s)\, ds dx \\
&\quad - \mu \int_{\Omega} u(x,t) z(x,1,t)\, dx + [b v_x v]_{L_1}^{L_2} - b \int_{L_1}^{L_2} v_x^2\, dx. \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\left[\left(l u_x + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(x,s)\, ds \right) u \right]_{\partial\Omega} &= (l u_x(L_1,t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_1,s)\, ds) u(L_1,t) \\
&\quad - (l u_x(L_2,t) + \int_0^{\infty} g(s) \eta_x^t(L_2,s)\, ds) u(L_2,t) \\
&= -[b v_x v]_{L_1}^{L_2},
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathfrak{D}(t) &= \int_{\Omega} u_t^2\,dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2\,dx - l\int_{\Omega} u_x^2\,dx \\ &\quad -\int_{\Omega} u_x \int_0^{\infty} g(s)\,\eta_x^t(x,s)\,dsdx \\ &\quad -\mu\int_{\Omega} u(x,t)z(x,1,t)\,dx - b\int_{L_1}^{L_2} v_x^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.24}$$

En utilisant les conditions aux limites (2.9), nous avons

$$u^2(x,t) = \left(\int_0^x u_x(x,t)\,dx\right)^2 \le L_1 \int_0^{L_1} u_x^2(x,t)\,dx, \qquad x\in[0,L_1], \tag{3.25}$$

$$u^2(x,t) = \left(\int_0^x u_x(x,t)\,dx\right)^2 \le (L_3-L_2) \int_{L_2}^{L_3} u_x^2(x,t)\,dx, \quad x\in[L_2,L_3], \tag{3.26}$$

en intégrant (3.25) sur $[0, L_1]$, (3.26) sur $[L_2, L_3]$ et par addition, on obtient

$$\int_0^{L_1} u^2(x,t)\,dx + \int_{L_2}^{L_3} u^2(x,t)\,dx \le (L_1)^2\int_0^{L_1} u_x^2(x,t)\,dx + (L_3-L_2)^2\int_{L_2}^{L_3} u_x^2(x,t)\,dx,$$

d'où

$$\int_{\Omega} u^2(x,t)\,dx \le L^2 \int_{\Omega} u_x^2(x,t)\,dx,\ \ x\in\Omega, \tag{3.27}$$

où $L = \max\{L_1, (L_3 - L_2)\}$. En utilisant l'inégalité deYoung avec ε et (3.27) au cinquième terme du membre droit de (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}\mu\int_{\Omega} u(x,t)z(x,1,t)\,dx &\le \varepsilon\int_{\Omega} u^2(x,t)\,dx + \frac{\mu^2}{4\varepsilon}\int_{\Omega} z^2(x,1,t)\,dx \\ &\le L^2\varepsilon\int_{\Omega} u_x^2(x,t)\,dx + \frac{\mu^2}{4\varepsilon}\int_{\Omega} z^2(x,1,t)\,dx. \end{aligned} \tag{3.28}$$

En utilisant l'inégalité de Young avec ε, l'inégalité de Hölder et $(A2)$ au quatrième terme du membre droit de (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_x \int_0^\infty g(s)\,\eta_x^t(x,s)\,dsdx &\leq \varepsilon\int_\Omega u_x^2\,dx + \frac{1}{4\varepsilon}\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)\,\eta_x^t(x,s)\,ds\right)^2 dx \\
&\leq \varepsilon\int_\Omega u_x^2\,dx + \frac{1}{4\varepsilon}\left(\int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)\,ds.\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 ds\right) dx\right) \\
&\leq \varepsilon\int_\Omega u_x^2\,dx + \frac{g_0}{4\varepsilon}\int_\Omega\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 dsdx; \qquad (3.29)
\end{aligned}$$

en remplacant (3.28) et (3.29) dans (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathfrak{D}(t) \leq\ & \int_\Omega u_t^2\,dx + \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 + (L^2\varepsilon+\varepsilon-l)\int_\Omega u_x^2\,dx \\
& - \int_{L_1}^{L_2} bv_x^2\,dx + \frac{g_0}{4\varepsilon}\int_\Omega\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 dsdx + \frac{\mu^2}{4\varepsilon}\int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx. \qquad (3.30)
\end{aligned}$$

■

S'inspirant de [21], nous introduisons la fonctionnelle

$$q(x) = \begin{cases} x - \dfrac{L_1}{2}, & x\in[0,L_1], \\ \dfrac{L_1}{2} - \dfrac{L_1+L_3-L_2}{2(L_2-L_1)}(x-L_1), & x\in[L_1,L_2], \\ x - \dfrac{L_2+L_3}{2}, & x\in[L_2,L_3]. \end{cases} \qquad (3.31)$$

Il est facile de voir que $q(x)$ est bornée : $|q(x)|\leq M$, telle que $M=\max\left\{\dfrac{L_1}{2},\dfrac{L_3-L_2}{2}\right\}$.
On définie les fonctionnelles

$$\mathcal{F}_1(t) = -\int_\Omega q(x)u_t(lu_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds)dx \qquad (3.32)$$

$$\mathcal{F}_2(t) = -\int_{L_1}^{L_2} q(x)v_xv_tdx \qquad (3.33)$$

Alors nous avons les résultats suivants.

Lemme 3.3 *Les fonctionnelles $\mathcal{F}_1(t)$ et $\mathcal{F}_2(t)$ satisfont*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &\leq \left(\frac{l+g_0}{2}+\varepsilon_1 M^2\right)\int_\Omega u_t^2\,dx+(l^2+l^2\varepsilon_1)\int_\Omega u_x^2\,dx \\
&+\frac{M^2\mu^2}{4\varepsilon_1}\int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx+(g_0+g_0\varepsilon_1)\int_\Omega\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\,dsdx \\
&-\frac{g(0)}{4\varepsilon_1}\int_\Omega\int_0^\infty g'(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\,dsdx-\left[\frac{l+g_0}{2}q(x)u_t^2\right]_{\partial\Omega} \\
&-\left[\frac{q(x)}{2}\left(lu_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)ds\right)^2\right]_{\partial\Omega}, \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t) &\leq -\frac{L_1+L_3-L_2}{4\left(L_2-L_1\right)}\left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2dx+\int_{L_1}^{L_2} bv_x^2dx\right)+\frac{L_1}{4}v_t^2(L_1) \\
&+\frac{L_3-L_2}{4}v_t^2\left(L_2\right)+\frac{b}{4}\left(\left(L_3-L_2\right)v_x^2(L_2,t)+L_1v_x^2(L_1,t)\right). \qquad (3.35)
\end{aligned}$$

Preuve. En dérivant (3.32) par rapport a t

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &= -\int_\Omega q(x)u_{tt}(lu_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)\,ds)\,dx \\
&\quad -\int_\Omega q(x)u_t(lu_{xt}+\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}^t(x,s)\,ds)\,dx. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

En utilisant la première équation du problème (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &= -\int_\Omega q(x)\left(lu_{xx}(x,t)+\int_0^\infty g\left(s\right)\eta_{xx}^t(x,s)\,dsdx\right)\times\left(lu_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)dsdx\right) \\
&\quad -\int_\Omega q(x)u_t\left(lu_{xt}+\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}^t(x,s)\right)\,dsdx. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Integrant par partie le premier et le dernier terme du membre droit de (3.37), on obtient

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega q(x)\left(lu_{xx}(x,t)+\int_0^\infty g\left(s\right)\eta_{xx}^t(x,s)\,dsdx\right)\left(lu_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)\,ds\right)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega q'(x)\left(lu_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)\,ds\right)\,dx-\left[\frac{q(x)}{2}\left(lu_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x^t(x,s)\,ds\right)^2\right]_{\partial\Omega} \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&-\int_{\Omega} q(x)u_t(lu_{xt}+\int_0^{\infty} g(s)\eta^t_{xt}(x,s)ds)\,dx \\
=\;& -l\int_{\Omega} q(x)u_t u_{xt} - \int_{\Omega} q(x)u_t \int_0^{\infty} g(s)\eta^t_{xt}(x,s)\,dsdx,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Par l'utilisation de (2.7) , on obtient

$$\begin{aligned}
&-\int_{\Omega} q(x)u_t(lu_{xt}+\int_0^{\infty} g(s)\eta^t_{xt}(x,s)\,ds)\,dx \\
=\;& -l\int_{\Omega} q(x)u_t u_{xt} - \int_{\Omega} q(x)u_t \int_0^{\infty} g(s)\eta^t_{xt}(x,s)\,dsdx \\
=\;& -l\int_{\Omega} q(x)u_t u_{xt} - \int_{\Omega} q(x)u_t \int_0^{\infty} g(s)(u_t-\eta^t_s)_x\,dsdx \\
=\;& -l\int_{\Omega} q(x)u_t u_{xt} - \int_{\Omega} q(x)u_t \int_0^{\infty} g(s)u_{tx}(x,t)\,dsdx \\
&+\int_{\Omega} q(x)u_t \int_0^{\infty} g(s)\eta^t_{sx}(x,s)\,dsdx \\
=\;& \left[\frac{-l}{2}q(x)u_t^2\right]_{\partial\Omega} - \frac{l}{2}\int_{\Omega} q'(x)u_t^2\,dx \\
&-g_0\int_{\Omega} q(x)u_t u_{tx}\,dx + \int_{\Omega} q(x)u_t \int_0^{\infty} g(s)\eta^t_{sx}(x,s)\,dsdx \\
=\;& \left[\frac{-l}{2}q(x)u_t^2\right]_{\partial\Omega} - \frac{l}{2}\int_{\Omega} q'(x)u_t^2\,dx - \left[\frac{g_0}{2}q(x)u_t^2\right]_{\partial\Omega} \\
&+\frac{g_0}{2}\int_{\Omega} q'(x)u_t^2\,dx - \int_{\Omega} q(x)u_t \int_0^{\infty} g'(s)\eta^t_x(x,s)\,dsdx \\
&-\left[\int_{\Omega} q(x)u_t g(s)\eta^t_x(x,s)\,dsdx\right]_0^{\infty},
\end{aligned} \tag{3.40}$$

nous avons utilisé le fait que

$$-\left[\int_{\Omega} q(x)u_t g(s)\eta_x^t(x,s)dsdx\right]_0^{\infty} = 0. \tag{3.41}$$

En remplaçant (3.38), (3.40) et (3.41) dans (3.36), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_1(t) &= -\left[\frac{q(x)}{2}\left(lu_x + \int_0^{\infty} g(s)\eta_x^t(x,s)\ ds\right)^2\right]_{\partial\Omega} - \left[\frac{l+g_0}{2}q(x)u_t^2\right]_{\partial\Omega} \\ &+\frac{1}{2}\int_{\Omega} q'(x)\left(lu_x + \int_0^{\infty} g(s)\eta_x^t(x,s)\ ds\right)^2 dx \\ &+\mu\int_{\Omega} q(x)z(x,1,t)\left(lu_x + \int_0^{\infty} g(s)\eta_x^t(x,s)\ ds\right) dx \\ &+\frac{l+g_0}{2}\int_{\Omega} q'(x)u_t^2\ dx - \int_{\Omega} q(x)u_t\int_0^{\infty} g'(s)\eta_x^t(x,s)\ dsdx. \end{aligned} \tag{3.42}$$

Utilisant les inégalités de Minkowski et Young, on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left(lu_x + \int_0^{\infty} g(s)\eta_x^t(x,s)\ ds\right)^2 dx \\ \leq\ & l^2\int_{\Omega} u_x^2 dx + \int_{\Omega}\left(\int_0^{\infty} g(s)\eta_x^t(x,s)ds\right)^2 dx \\ \leq\ & l^2\int_{\Omega} u_x^2\ dx + \int_{\Omega}\left(\int_0^{\infty} g(s)^{\frac{1}{2}}g(s)^{\frac{1}{2}}\eta_x^t(x,s)\ ds\right)^2 dx \\ \leq\ & l^2\int_{\Omega} u_x^2\ dx + \int_{\Omega}\left(\int_0^{\infty} g(s)ds\int_0^{\infty} g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\ ds\right) dx \\ \leq\ & l^2\int_{\Omega} u_x^2\ dx + g_0\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\ dsdx, \end{aligned} \tag{3.43}$$

en appliquant l'inégalité de Young avec $\varepsilon_1 > 0$ pour le quatrième terme de (3.42)

$$
\begin{aligned}
&\left|\mu\int_{\Omega} q(x)z(x,1,t)\left(lu_x+\int_0^{\infty} g(s)\eta_x^t(x,s)ds\right)\,dx\right| \\
=&\left|\mu\int_{\Omega} q(x)z(x,1,t)lu_x\,dx+\mu\int_{\Omega} q(x)z(x,1,t)\int_0^{\infty} g(s)\eta_x^t(x,s)\,dsdx\right| \\
\leq&\frac{\mu^2M^2}{4\varepsilon_1}\int_{\Omega} z^2(x,1,t)\,dx+l^2\varepsilon_1\int_{\Omega} u_x^2\,dx+\frac{\mu^2M^2}{4\varepsilon_1}\int_{\Omega} z^2(x,1,t)\,dx \\
&+\varepsilon_1 g_0\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\,dsdx \\
\leq&\frac{\mu^2M^2}{4\varepsilon_1}\int_{\Omega} z^2(x,1,t)\,dx+l^2\varepsilon_1\int_{\Omega} u_x^2\,dx+\varepsilon_1 g_0\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\,dsdx. \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

Il est clair que

$$
\left|\int_{\Omega} q(x)u_t\int_0^{\infty} g'(s)\eta_x^t(x,s)\,dsdx\right|\leq\varepsilon_1 M^2\int_{\Omega} u_t^2\,dx-\frac{g_0}{4\varepsilon_1}\int_{\Omega}\int_0^{\infty} g'(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\,dsdx. \qquad (3.45)
$$

En remplaçant (3.43), (3.44) et (3.45) dans (3.42), nous obtenons (3.34).
De la même manière, en dérivant $\mathcal{F}_2(t)$ par rapport a t, on obtient

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_2(t)=&-\int_{L_1}^{L_2} q(x)v_{xt}v_t\,dx-\int_{L_1}^{L_2} q(x)v_xv_{tt}\,dx \\
=&-\int_{L_1}^{L_2} q(x)v_{xt}v_t\,dx-\int_{L_1}^{L_2} bq(x)v_xv_{xx}\,dx \\
=&-\left[-\frac{1}{2}q(x)v_t^2\right]_{L_1}^{L_2}+\frac{1}{2}\int_{L_1}^{L_2} q'(x)v_t^2\,dx+\frac{b}{2}\int_{L_1}^{L_2} q'(x)v_x^2\,dx+\left[-\frac{b}{2}q(x)v_x^2\right]_{L_1}^{L_2} \\
\leq&-\frac{L_1+L_3-L_2}{4\left(L_2-L_1\right)}\left(\int_{L_1}^{L_2} v_t^2dx+\int_{L_1}^{L_2} bv_x^2\,dx\right)+\frac{L_1}{4}v_t^2(L_1) \\
&+\frac{L_3-L_2}{4}v_t^2\left(L_2\right)+\frac{b}{4}\left(\left(L_3-L_2\right)v_x^2(L_2,t)+L_1v_x^2(L_1,t)\right). \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

Ainsi, la preuve du Lemme 2.3 est complète. ∎

Nous définissons la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_3(t) = \tau \int_\Omega \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2(x,\rho,t)\, d\rho dx, \tag{3.47}$$

alors nous avons l'estimation suivante.

Lemme 3.4 *La fonctionnelle $\mathcal{F}_3(t)$ satisfait*

$$\frac{d}{dt}\mathcal{F}_3(t) \leq -c_2 \left(\int_\Omega z^2(x,1,t)\, dx + \tau \int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t)\, d\rho dx \right) + \int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx. \tag{3.48}$$

Preuve. *En dérivant* (3.47) *par rapport à t et en utilisant la troisième équation du problème* (2.8)*, on obtient*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{F}_3(t) &= 2\tau \int_\Omega \int_0^1 e^{-\tau\rho} z_t(x,\rho,t) z(x,\rho,t)\, d\rho dx \\
&= -2 \int_\Omega \int_0^1 e^{-\tau\rho} z_\rho(x,\rho,t) z(x,\rho,t)\, d\rho dx \\
&= -\int_\Omega \int_0^1 e^{-\tau\rho} \frac{\partial}{\partial\rho}(z^2(x,\rho,t))\, d\rho dx \\
&= -\tau \int_\Omega \int_0^1 e^{-\tau\rho} z^2(x,\rho,t)\, d\rho dx + \int_\Omega u_t^2(x,t) dx - e^{-\tau} \int_\Omega z^2(x,1,t)\, dx \\
&\leq -e^{-\tau} \left(\int_\Omega z^2(x,1,t)\, dx + \tau \int_\Omega \int_0^1 z^2(x,\rho,t)\, d\rho dx \right) + \int_\Omega u_t^2(x,t)\, dx.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

■

Définissons la fonctionnelle

$$\mathcal{F}_4(t) = -\int_\Omega u_t \int_0^\infty g(s)(u(t) - u(t-s))\, ds dx. \tag{3.50}$$

alors nous avons l'estimation suivante.

Lemme 3.5 *La fonctionnelle $\mathcal{F}_4(t)$ satisfait*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_4(t) \leq & -(g_0-\delta_2)\int_\Omega u_t^2\,dx+\delta_2 l^2\int_\Omega u_x^2\,dx+\delta_2\mu\int_\Omega z^2(x,1,t)\,dx\\ & +\left(g_0+\frac{g_0}{4\delta_2}+\frac{\mu g_0 L^2}{2\delta_2}\right)\int_\Omega\int_0^\infty g(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\,dsdx\\ & -\frac{g_0 L^2}{\delta_2}\int_\Omega\int_0^\infty g'(s)\left|\eta_x^t(x,s)\right|^2\,dsdx. \qquad (3.51)\end{aligned}$$

Preuve. En dérivant (3.50) par rapport à t et en utilisant la première équation du problème (2.8), on obtient

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathcal{F}_4(t) &= -\int_\Omega u_{tt}\int_0^\infty g(s)(u(t)-u(t-s))\,dsdx-\int_\Omega u_t\int_0^\infty g(s)(u_t(t)-u_t(t-s))\,dsdx\\ &= -\int_\Omega\left(lu_{xx}+\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x,s)ds-\mu z(x,1,t)\right)\int_0^\infty g(s)(u(t)-u(t-s))\,dsdx\\ &\quad -\int_\Omega u_t\int_0^\infty g(s)(u_t(t)-u_t(t-s))\,dsdx\\ &= -\int_\Omega lu_{xx}\int_0^\infty g(s)(u(t)-u(t-s))\,dsdx\\ &\quad -\int_\Omega\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}^t(x,s)ds\int_0^\infty g(s)(u(t)-u(t-s))\,dsdx\\ &\quad +\int_\Omega \mu z(x,1,t)\int_0^\infty g(s)(u(t)-u(t-s))\,dsdx\\ &\quad -\int_\Omega u_t\int_0^\infty g(s)(u_t(t)-u_t(t-s))\,dsdx\\ &= \int_\Omega lu_x\int_0^\infty g(s)(u_x(t)-u_x(t-s))dsdx+\int_\Omega u_t\int_0^\infty g(s)\eta_s^t(s)\,dsdx\\ &\quad +\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\left(u_x(t)-u_x(t-s)ds\right)\right)^2dx-g_0\int_\Omega u_t^2\,dx\\ &\quad +\int_\Omega \mu z(x,1,t)\int_0^\infty g(s)(u(t)-u(t-s))\,dsdx. \qquad (3.52)\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young et (3.27), nous obtenons, pour tout $\delta_2 > 0$

$$\begin{aligned} & \int_\Omega l u_x \int_0^\infty g(s)(u_x(t) - u_x(t-s))\, ds dx \\ \leq \;& \delta_2 l^2 \int_\Omega u_x^2 \, dx + \frac{g_0}{4\delta_2} \int_0^\infty g(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 \, ds dx. \end{aligned} \tag{3.53}$$

et

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \mu z(x,1,t) \int_0^\infty g(s)(u(t) - u(t-s))\, ds dx \\ \leq \;& \delta_2 \mu \int_\Omega z^2(x,1,t)\, dx + \frac{\mu g_0 L^2}{4\delta_2} \int_\Omega \int_0^\infty g(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 \, ds dx. \end{aligned} \tag{3.54}$$

Nous remarquons que

$$\begin{aligned} & \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \left(u_x(t) - u_x(t-s) ds\right) \right)^2 dx \\ = & \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s)^{\frac{1}{2}} g(s)^{\frac{1}{2}} \left(u_x(t) - u_x(t-s) ds\right) \right)^2 dx \\ \leq & \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) ds \left(\int_0^\infty g(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 ds \right) \right) dx \\ \leq & \; g_0 \int_\Omega \left(\int_0^\infty g(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 ds \right) dx, \end{aligned} \tag{3.55}$$

et

$$\begin{aligned} \int_\Omega u_t \int_0^\infty g(s) \eta_s^t(s)\, ds dx &= - \int_\Omega u_t \int_0^\infty g'(s) \eta^t(s)\, ds dx \\ &\leq \delta_2 \int_\Omega u_t^2 dx - \frac{g(0) L^2}{4\delta_2} \int_\Omega \int_0^\infty g'(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 \, ds dx. \end{aligned} \tag{3.56}$$

En remplaçant les estimations (3.53) – (3.56) dans (3.52), nous obtenons (3.51). ■

Nous définissons la fonctionnelle de Lyapunov

$$\mathcal{L}(t) = N_1 E(t) + N_2 \mathfrak{D}(t) + N_3 \mathcal{F}_1(t) + N_4 \mathcal{F}_2(t) + N_5 \mathcal{F}_3(t) + N_6 \mathcal{F}_4(t), \tag{3.57}$$

où N_1, N_2, N_3, N_4, N_5 et N_6 sont des constantes positives qui seront fixées ultérieurement. Prenons la dérivée de (3.57) par rapport à t et en utilisant les mêmes des lemmes ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) = & -\left\{ N_6 (g_0 - \delta_2) - N_2 - \left(\frac{l+g_0}{2} + \varepsilon_1 M^2 \right) - N_5 - N_1 \mu \right\} \int_\Omega u_t^2 \, dx \\
& - \left\{ N_5 c_2 - \frac{N_2 \mu^2}{4\varepsilon} - \frac{M^2 \mu^2}{4\varepsilon_1} - N_6 \delta_2 \mu \right\} \int_\Omega z^2(x,1,t)\, dx \\
& - \left\{ N_2 \left(l - L^2 \varepsilon - \varepsilon \right) - \left(l^2 + l^2 \varepsilon_1 \right) - N_6 \delta_2 l^2 \right\} \int_\Omega u_x^2 \, dx \\
& - \left\{ \frac{b(L_1 + L_3 - L_2)}{4(L_2 - L_1)} N_4 + N_2 b \right\} \int_{L_1}^{L_2} v_x^2 \, dx \\
& - \left\{ \frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} N_4 - N_2 \right\} \int_{L_1}^{L_2} v_t^2 \, dx \\
& - (b - N_4) \frac{b}{4} \left((L_3 - L_2) v_x^2(L_2,t) + L_1 v_x^2(L_1,t) \right) \\
& - (a - N_4) \left[\frac{L_1}{4} v_t^2(L_1,t) + \frac{L_3 - L_2}{4} v_t^2(L_2,t) \right] \\
& + c(N_2, N_6) \int_\Omega \int_0^\infty g(s) \left| \eta_x^t(x,s) \right|^2 \, ds dx \\
& \left(\frac{N_1}{2} - \frac{g(0)}{4\varepsilon} - \frac{N_6 g(0) L^2}{4\delta_2} \right) \int_\Omega \int_0^\infty g'(s) \left| \eta_x^t(x,s) \right|^2 \, ds dx.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

En ce moment, nous souhaitons que tous les coefficients sauf les deux derniers dans (3.58) soient négatifs. Nous choisissons N_2 et N_4 telles que

$$a - N_4 \geq 0, \quad b - N_4 \geq 0,$$

$$\frac{L_1 + L_3 - L_2}{4(L_2 - L_1)} N_4 - N_2 > 0.$$

On a $\dfrac{8l\left(L_2-L_1\right)}{L_1+L_3-L_2}<\min\left\{a,b\right\}$, nous choisissons d'abord N_4 satisfaisant

$$\frac{8l\left(L_2-L_1\right)}{L_1+L_3-L_2}<N_4\leq\min\left\{a,b\right\}.$$

Une fois N_4 fixé, on choisit N_2 satisfaisant

$$2l<N_2<\frac{L_1+L_3-L_2}{4\left(L_2-L_1\right)}N_4.$$

Ensuite, nous prenons $\varepsilon,\varepsilon_1$ et ε_1 assez petits, et $\delta_2<\dfrac{1}{2N_6}$ nous avons

$$N_2\left(l-L^2\varepsilon-\varepsilon\right)-2l^2\varepsilon_1>\frac{3}{2}l^2.$$

Une fois ε et ε_1 fixés, on prend N_5 satisfaisant

$$N_5>\max\left\{\frac{2N_2\mu^2}{\varepsilon c_2},\frac{2M^2\mu^2}{\varepsilon_1 c_2}\right\},$$

et $\delta_2<\dfrac{N_5c_2}{8N_6\mu}$ tel que

$$N_5c_2-\frac{N_2\mu^2}{4\varepsilon}-\frac{M^2\mu^2}{4\varepsilon_1}>\frac{3}{8}N_5c_2.$$

De plus, nous prenons $\delta_2<\dfrac{g_0}{2}$ nous choisissons N_6 satisfaisant

$$N_6>\frac{2N_2}{g_0}+\frac{l+g_0}{g_0}+\frac{2\varepsilon_1M^2}{g_0}+\frac{2N_5}{g_0}+\frac{2N_1\mu}{g_0}.$$

Alors, nous avons

$$N_6>\max\left\{\frac{2N_2}{g_0},\frac{l+g_0}{g_0},\frac{2\varepsilon_1M^2}{g_0},\frac{2N_5}{g_0},\frac{2N_1\mu}{g_0}\right\}.$$

Ensuite, nous choisissons δ_2 satisfaisant

$$\delta_2<\min\left\{\frac{g_0}{2},\frac{N_5c_2}{8N_6\mu},\frac{1}{2N_6}\right\},$$

$$\left\{N_5c_2-\frac{N_2\mu^2}{4\varepsilon}-\frac{M^2\mu^2}{4\varepsilon_1}-N_6\delta_2\mu\right\}\geq0.$$

Une fois que

$$\left\{N_2\left(l-L^2\varepsilon-\varepsilon\right)-\left(l^2+l^2\varepsilon_1\right)-N_6\delta_2l^2\right\}\geq0.$$

Enfin, choisir N_1 suffisamment grand pour que le premier et le dernier coefficient de (3.58) soient positifs.

De ce qui précède, on déduit qu'il existe deux constantes positives α_1 et α_2 telles que (3.58) devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) &\leq -\alpha_1 E(t) + \alpha_2 \int_\Omega \int_0^\infty g(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 dsdx \\ &\leq -\alpha_1 E(t) - \frac{\alpha_2}{\delta} \int_\Omega \int_0^\infty g'(s) \left|\eta_x^t(x,s)\right|^2 dsdx \\ &\leq -\alpha_1 E(t) - \alpha_3 E'(t). \end{aligned} \tag{3.59}$$

Ce qui implique que

$$(\mathcal{L}(t) + \alpha_3 E(t))' \leq -\alpha_1 E(t), \tag{3.60}$$

où $\alpha_3 > 0$. Dénoter $\mathcal{E}(t) = \mathcal{L}(t) + \alpha_3 E(t)$, alors il est facile de voir que

$$\mathcal{E}(t) \sim E(t).$$

c'est-à-dire qu'il existe deux constantes positives β_1, β_2 telles que

$$\beta_1 E(t) \leq \mathcal{E}(t) \leq \beta_2 E(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0. \tag{3.61}$$

En combinant (3.60) et (3.61), on en déduit qu'il existe $\gamma_1 > 0$ pour lequel on a l'estimation

$$\frac{d\mathcal{E}(t)}{dt} \leq -\gamma_1 \mathcal{E}(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0. \tag{3.62}$$

Intégrant (3.62) sur $(0, t)$, on obtient

$$\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) e^{-\gamma_1 t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \tag{3.63}$$

Par conséquent, en utilisant (3.60) et (3.61), on obtient

$$E(t) \leq \frac{1}{\beta_1}\mathcal{E}(t) \leq \frac{1}{\beta_1}\mathcal{E}(0) e^{-\gamma_1 t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \tag{3.64}$$

Ainsi, la preuve du Théorème 2.2 est complète.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a considéré un problème de transmission d'équations des ondes avec un terme d'amortissement viscoélastique (terme mémoire infinie) et un terme de retard apparaissent dans la première équation du système. Dans un domaine unidimensionnel sur le quel on a imposé des conditions aux points d'extrémité et des conditions de transmission à l'intérieur du domaine, on a prouvé la solvabilité du problème (quel est bien posé) par la méthode des semi-groupes. La partie viscoélastique produit une dissipation qui agit sur tout le domaine pour donner une décroissance de l'énergie associée à la solution pour ramener le système à l'état d'équilibre (stabilité).

Une des perspective sera d'étudier l'explosion de la solution de ce problème avec un terme de retard.

Bibliographie

[1] N. Bahri, A. Beniani, Exponential Stability of a Transmission Problem with History and Delay, Stat., Optim. Inf. Comput., Vol. 7, December 2019, pp 731– 747.

[2] A. Benseghir, Existence and exponential decay of solutions for transmission problems with delay. Electronic Journal of Dierential Equations, 212 (2014) , 1–11.

[3] S. Berrimi, S. A. Messaoudi ; Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, Nonlinear Anal., 64 (2006), no. 10, 2314–2331

[4] H.Brézis,Opérateurs maximaux monotones,Université de Paris (1973),N.Y.10017.

[5] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. A. Soriano ; Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, Electron. J. Dierential Equations,(2002), No. 44, 14 pp.

[6] M. M. Cavalcanti et al., Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping, Dierential Integral Equations, 14 (2001), no. 1, 85–116.

[7] V. V. Chepyzhov, V. Pata, Some remarks on stability of semigroups arising from linear viscoelasticity. Asymptot. Anal., 46, 251–273 (2006).

[8] C. M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity. Archive for rational mechanics and analysis, 37(4) (1970), 297-308.

[9] M. Fabrizio, B. Lazzari, On the existence and asymptotic stability of solutions for linear viscoelastic solids. Arch. Rational Mech. Anal., 116, 139–152 (1991).

[10] S. B. Gazi Karakoc, A Quartic Subdomain Finite Element Method for the Modi. . . ed KdV Equation, Stat., Optim. Inf. Comput., Vol. 6, December 2018, pp 609-618.

[11] S. B. Gazi Karakoc and Halil Zeybek, A cubic B-spline Galerkin approach for the numerical simulation of the GEW equation, Stat., Optim. Inf. Comput., Vol. 4, March 2016, pp 30-41.

[12] C. Giorgi, J. E. Muñoz Revira and J. E. Pata, Global attractors for a semilinear hyperbolic equation in viscoelasticity. J. Math. Anal. Appl., Vol 260, Issue 1, 1 August 2001, Pages 83-99.

[13] A. Guesmia, Asymptotic stability of abstract dissipative systems with infinite memory. J. Math. Anal. Appl.,Vol 382, Issue 2, 15 October 2011, Pages 748-760.

[14] A. Guesmia, Well-posedness and exponential stability of an abstract evolution equation with infinite memory and time delay. IMA Journal of Mathematical Control and Information, 30(4) (2013), 507-526.

[15] M. Kirane, B. Said-Houari, Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay. Z. Angew. Math. Phys., 62 , 1065–1082 (2011).

[16] G.Li,D.Wang, B. Zhu, Well-posedness and decay of solutions for a transmission problem with history and delay. Electronic Journal of Dierential Equations. Vol. 2016 (2016), No. 23, pp. 1–21

[17] W. J. Liu, Arbitrary rate of decay for a viscoelastic equation with acoustic boundary conditions, Appl. Math. Lett., 38 (2014), 155–161.

[18] W. J. Liu, K. W. Chen, Existence and general decay for nondissipative dis- tributed systems with boundary frictional and memory dampings and acoustic boundary conditions, Z. Angew. Math. Phys., 66 (2015), no. 4, 1595–1614.

[19] W. J. Liu, Y. Sun, General decay of solutions for a weak viscoelastic equation with acoustic boundary conditions, Z. Angew. Math. Phys., 65 (2014), no. 1, 125–134.

[20] Z. Liu, S. Zheng, On the exponential stability of linear viscoelasticity and ther- moviscoelasticity. Quart. Appl. Math., (1996), no. 54, 21–31.

[21] A. Marzocchi, J. E. Munoz Rivera, M. G. Naso, Asymptotic behaviour and exponential stability for a transmission problem in thermoelasticity, Math. Me- thods Appl. Sci., (2002), no. 11, 955–980.

[22] S. A. Messaoudi, General decay of solutions of a viscoelastic equation, J. Math. Anal. Appl., 341 (2008), 1457-1467.

[23] S. A.Messaoudi, A.Fareh and N. Doudi, Well posedness and exponential stabi- lity in a wave equation with a strong damping and a strong delay, Journal of Mathematical Physics, vol. 57, no 11, p. 111501(2016).

[24] J. E. Muñoz Revira, M. Grazia Naso, Asymptotic stability of semigroups asso- ciated with linear weak dissipative systems with memory. J. Math. Anal. Appl., Vol 326, Issue 1, 1 February 2007, Pages 691-707.

[25] S. Nicaise, C. Pignotti, Stability and instability results of the wave equation with a delay, 45 (2006), no. 5, 1561–1585.

[26] V. Pata, Exponential stability in linear viscoelasticity with almost ‡at memory kernels. Commun. Pure. Appl. Anal. 9, 721–730 (2010).

[27] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial dierential equations, Springer New York 198 (1983).

[28] F.Sahnoune,Semi-Groupes associes aux systèmes dissipatifs,mémoire Pour l'obtention du diplome de master en Mathématiques,Université de Djilali BOUNA :MAKhemisMiliana ; jun(2017).

[29] B.Said-Houari, A stability result for a Timoshenko system with past history and a delay term in the internal feedback. Dynam. Systems Appl., 20, 327–354 (2011).

[30] F.Tahamtani, A. Peyravi, Asymptotic behavior and blow-up of solutions for a non- linear viscoelastic wave equation with boundary dissipation, Taiwanese J. Math., 17 (2013), no. 6, 1921–1943.

[31] S.Zitouni, A. Ardjouni , K. Zennir and R. Amiar, Well-posedness and decay of solution for a transmission problem in the presence of infinite history and varying delay, Vol. 25, No. 2, pp. 445-465, 2018.