



République Algérienne Démocratique et  
Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de  
la recherche scientifique  
Université Larbi Tébessa - Tébessa



Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'étude  
Pour l'obtention du diplôme de MASTER  
Domaine : Mathématiques et Informatique  
Option : Équations aux dérivées partielles et applications  
Filière : Mathématiques

# Le Chaos dans les Systèmes Dynamiques Non-Linéaires Discrets

Présenté Par :

Khaldi Ahlem

Gabli Ouarda

Devant le jury :

Mr. Zeraoulia. E Prof Université Larbi Tébessi

Président

Mr. Toualbia .A MCB Université Larbi Tébessi

Examineur

Mr. Boukhalfa .H MCB Université Larbi Tébessi

Encadreur

Date de soutenance : Juin 2020

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaires sur les systèmes dynamiques discrets</b>	<b>9</b>
1.1	Système dynamique . . . . .	9
1.2	Système dynamique discret . . . . .	9
1.3	Orbites . . . . .	10
1.4	Point fixe . . . . .	11
1.5	orbite périodique . . . . .	11
1.6	Stabilité du point fixe . . . . .	11
1.6.1	Méthode de linéarisation . . . . .	12
1.7	Nature d'un point d'équilibre . . . . .	12
1.8	Fonction de Lyapunov . . . . .	15
<b>2</b>	<b>Bifurcation</b>	<b>16</b>
2.1	Bifurcation pli . . . . .	17
2.2	Bifurcation transcritique . . . . .	17
2.3	Bifurcation fourche . . . . .	18
2.4	Bifurcation flip . . . . .	19
2.5	Bifurcation Neimark-Sacker . . . . .	20
2.6	Bifurcation noeud-col . . . . .	21
2.7	Bifurcation doublement de période . . . . .	21

<b>3</b>	<b>Quantification du chaos dans les systèmes dynamiques discrets</b>	<b>28</b>
3.1	Historique du chaos . . . . .	28
3.2	Quelque définitions du chaos . . . . .	31
3.3	Caractérisation du chaos . . . . .	31
3.3.1	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	31
3.3.2	Espace de phase . . . . .	32
3.3.3	Dimension fractale . . . . .	32
3.3.4	Dimension de Lyapunov . . . . .	33
3.3.5	Dimension de capacité (Kolmogorov) . . . . .	33
3.3.6	Attracteurs étranges . . . . .	33
3.3.7	Exposants de Lyapunov . . . . .	34
3.4	Route vers le chaos . . . . .	37
3.4.1	Cascade de doublements de période . . . . .	38
3.4.2	Par intermittence . . . . .	38
3.4.3	Scénario de Ruelle et Takens . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Systèmes dynamiques discrets chaotiques Célèbres</b>	<b>39</b>
4.1	L'application logistique . . . . .	39
4.1.1	Historique de l'application logistique . . . . .	39
4.1.2	Définition de l'application logistique . . . . .	41
4.1.3	Propriétés de l'application logistique . . . . .	41
4.1.4	Points fixes et orbites périodiques . . . . .	47
4.1.5	Points fixes super attractifs . . . . .	49
4.1.6	Convergence de l'application logistique . . . . .	50
4.1.7	Les bifurcations de l'application logistique . . . . .	53
4.1.8	Le chaos dans l'application logistique . . . . .	58
4.2	Attracteur de Hénon . . . . .	59
4.2.1	Définition du système de Hénon . . . . .	60
4.2.2	Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	65
4.2.3	Points fixes et stabilité des premières et deuxième itérations . . . . .	66

4.2.4	Analyse de bifurcation . . . . .	68
4.2.5	Diagramme de bifurcation . . . . .	71
4.2.6	Bassin d'attraction de Hénon . . . . .	72
4.2.7	Le chaos dans le système de Hénon . . . . .	72
4.3	Application de Lozi . . . . .	73
4.3.1	Propriétés de l'application de Lozi . . . . .	74
4.3.2	La Stabilité . . . . .	74
4.3.3	Attracteur de lozi . . . . .	75
4.3.4	Le chaos dans le système de Lozi . . . . .	78
5	Conclusion générale	80

molakhas

## Abstract :

The objective of this final dissertation is based on the general problem which relates to the detection of chaos in nonlinear dynamic systems. More precisely, we are interested in nonlinear discrete dynamic systems, whose formulations are given by recurrent functions with the presence of a bifurcation parameter, (later, will be several parameters in the multidimensional case), or a small perturbation to the conditions initial results in a large gap between long-term observations, that is where the notion of unpredictability takes place. By applying the chaos quantification tools, several examples of systems are detected chaotic, for such a set of parameters.

## Résumé :

L'objectif de ce mémoire de fin d'études est basé sur la problématique générale qui porte sur la détection du chaos dans les systèmes dynamiques non linéaires. Plus précisément, nous nous intéressons aux systèmes dynamiques discrets non linéaires, dont leurs formulations sont données par des fonctions récurrentes avec la présence d'un paramètre de bifurcation, (ultérieurement, sera plusieurs paramètres dans le cas multidimensionnel), ou une petite perturbation aux conditions initiales résulte un grand écart entre les observations à long terme, c'est d'ici la notion de l'imprévisibilité a lieu. En appliquant les outils de quantification du chaos, plusieurs exemples de systèmes sont détectés chaotiques, pour un tel ensemble de paramètres.

# Introduction

Les systèmes dynamiques se sont développés durant le XIX<sup>ème</sup> siècle ; effectivement, vers la fin de ce siècle, le mathématicien physicien et philosophe français **Henri Poincaré**<sup>1</sup> avait déjà mis en exergue le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales, il montra dans son étude du système solaire qu'il existait des orbites stables et d'autres instables et que parfois, une très faible perturbation dans le système pouvait générer un changement d'état d'une orbite. Il s'est rendu compte que des causes parfaitement semblables pouvaient ne pas entraîner les mêmes effets.

Puis, plusieurs recherches sur la sensibilité du mouvement ont été réalisées, **Alexandre Lyapunov**<sup>2</sup>, le mathématicien russe qui avait introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initialement voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement il s'agit de la sensibilité aux conditions initiales, et **Edward Lorenz**<sup>3</sup> météorologue américain analysait le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. En proportion de différentes valeurs des paramètres, un nouveau comportement dynamique était souligné. Les trois variables d'état du système, donnant lieu à déterminer l'évolution des masses d'air, agissaient une activité intermittente, imprévisible. Edward Lorenz soutenait que, dans les systèmes non-linéaires de petites différences dans les conditions initiales reproduisent à long terme des systèmes complètement différents. C'est d'ici les premiers pas pour comprendre le chaos déterministe.

Plus généralement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système sert à structurer un espace mathématique appelé "espace des phases" ; cette illustration permet de distinguer un comportement régulier d'un comportement purement aléatoire et donc prévisible.

---

<sup>1</sup>Henri Poincaré (1854-1912), est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos.

<sup>2</sup>Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov (1857-1918) est un mathématicien russe, il a apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires ou non.

<sup>3</sup>Edward Norton Lorenz (1917-2008), est un scientifique américain, travaillant comme météorologue au "Massachusetts Institute of Technology", il découvre par hasard, en 1963, que l'on peut obtenir un comportement chaotique avec seulement trois variables, soit un système non linéaire à trois degrés de liberté.

En raison de ses applications dans la télécommunication, la transmission sécurisée d'informations, et la cryptographie, les systèmes dynamiques chaotiques jouent un rôle plus important, car de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques, ont été définis à l'aide des systèmes dynamiques. Par conséquent, il est important de considérer l'étude de ce type de systèmes.

Suite à ce qui précède, notre mémoire est réparti sur quatre chapitres importants et liés l'un de l'autre, dont le premier est consacré aux systèmes dynamiques dans leurs généralité, comme par exemple, les définitions de base, d'espace d'état, de système dynamique continu, de système dynamique discret, des points fixes avec leurs classification et stabilité, en passant en deuxième chapitre à la théorie de bifurcation, en études avec exemples tous les types de bifurcation.

Le troisième chapitre, nous fait une tournée vers les outils de mesure et de quantification du chaos dans tel système, en décrivant les notions d'attracteur régulier; attracteur étrange, sensibilités aux conditions initiales, exposant de Lyapunov.

Pour la bonne illustration du chaos dans les systèmes dynamiques, nous citons dans le quatrième chapitre, quelques exemples universels de systèmes dynamiques détecter chaotique dans le plan et dans l'espace..

# Chapitre 1

## Préliminaires sur les systèmes dynamiques discrets

### 1.1 Système dynamique

**Définition 1.1** *Un système dynamique est défini par un triplet  $(X, T, \varphi)$ , constitué de l'espace d'états  $X$ , du domaine temporel  $T$  et d'une fonction de transition d'état  $\varphi : X \times T \rightarrow X$ , qui possède la propriété, pour tout  $x \in X$  et  $t_1, t_2 \in T$  :*

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) = x \\ \varphi(\varphi(x, t_1), t_2) = \varphi(x, t_1 + t_2) \end{cases}$$

*Il existe deux principaux types de systèmes dynamiques : les systèmes de temps continus et discrets. si  $T = \mathbb{R}$ , cela signifie que le système est continu, si  $T = \mathbb{N}$ , le système est appelé au temps discret.*

### 1.2 Système dynamique discret

**Définition 1.2** *Un système dynamique discret est décrit par un système d'équations aux différences finies, autrement dit, par une récurrence suivante :*

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, c), k \in \mathbb{N} \\ x_0 &\quad \text{donné} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Où :

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction non linéaire de récurrence .

$c \in \mathbb{R}$  : le vecteur des paramètres.

$x_0 \in \mathbb{R}^n$  : Valeur initiale.

$x_k \in \mathbb{R}^n$  : Vecteur des états du système à l'iteration  $t_k$ .

Pour une valeur initiale  $x_0$  de (1.1) on obtient :

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)) = f^2(x_0)$$

En générale :  $x_n = f^n(x_0)$  où  $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

$f(x_0)$  est appelée première itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .

$f^2(x_0) = f(f(x_0))$  est appelée seconde itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .

$f^n(x_0)$  est appelée  $n^{\text{ième}}$  itération de  $x_0$  par la fonction  $f$ .

**Définition 1.3** L'espace des phases est une structure correspondante à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, ou un espace mesurable.

### 1.3 Orbites

**Définition 1.4** On appelle la suite  $\{f(x_0)\}_{k=0}^n$  un orbite (ou une trajectoire) du point  $x_0$  et on le note par  $O(x_0)$  i.e :

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f.f(x_0) = f^2(x_0)$$

$$x_3 = f(x_2) = f^3(x_0)$$

$$x_k = f^k(x_0)$$

l'orbite c'est :  $O(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_k\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots, f^k(x_0)\}$ .

## 1.4 Point fixe

**Définition 1.5** Est un point invariant par l'application  $f$ , c'est-à-dire un point  $x$  tel que :

$$f(x^*) = x^*$$

*Géométriquement : Le point fixe est une intersection de la courbe de notre fonction  $y = f(x)$  avec la ligne  $y = x$ .*

## 1.5 orbite périodique

**Définition 1.6** Un cycle d'ordre  $p$  (ou orbite périodique d'ordre  $p$  ou encore un  $p$  cycle) est un ensemble de  $p$  points  $(x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{p-1}^*)$  vérifiant :

$$\begin{aligned} x_{i+1}^* &= f(x_i^*) & i &= 0, \dots, p-2 \\ x_p^* &= f(x_{p-1}^*) = x_0^* \\ x_i^* &= f^p(x_i^*) & i &= 0, \dots, p-1 & x^* \text{ est le point fixe de } f^p \\ x_i^* &= f^h(x_i^*) & i &= 0, \dots, p-1, 1 \leq h < p \\ p &\text{ est l'entier minimal tel que : } x_0 = f^p(x_0). \end{aligned}$$

## 1.6 Stabilité du point fixe

Trouver des solutions pour des systèmes non linéaires n'est pas facile. Habituellement, ces solutions ne pas fournir suffisamment d'informations pour contrôler la stabilité systématique. Par conséquent, nous avons besoin de méthodes analytiques pour promouvoir l'approximation linéaire du système de recherche du comportement du système non linéaire. La non-linéarité est l'une des méthodes les plus efficaces pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires .

**Définition 1.7** Un point fixe  $x^*$  de  $f: I \rightarrow I, I \subset \mathbb{R}^n$ , est dit attractif, s'il existe un voisinage de  $x^*$  tel que pour tout  $v_0$  dans ce voisinage la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par  $v_0$  et  $v_{n+1} = f(v_n)$ , converge vers  $x^*$  .i.e

$$\forall x_0 \in I, \exists \delta > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x^* - f(x_0)\| < 0$$

de plus si

$$\forall x_0 \in I, \exists \delta > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = x^*$$

le point  $x^*$  dit asymptotiquement stable.

**Définition 1.8** Un point fixe  $x^*$  de  $f : I \rightarrow I, I \subset \mathbb{R}^n$ , est répulsif (ou instable) si :

$$\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x^* - f(x)\| > 0$$

### 1.6.1 Méthode de linéarisation

**Définition 1.9** Le développement de Taylor d'ordre 1 de  $f(x_k) = x_{k+1}$  au voisinage  $x^*$  est :

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x^*) + (x - x^*)Df(x^*) + O(x_k - x^*)^2 \\ &= Ax_k + O(x_k - x^*)^2 \end{aligned}$$

tel que

$$A = Df(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(x^*)}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(x^*)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(x^*)}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

puisque au voisinage de  $x^*$ ;  $\|x - x^*\| \rightarrow 0$  en négligeant les termes du second ordre, et le système (1.1) est bien linéariser.

L'application  $X \rightarrow AX$  s'appelle l'application linéarisée de  $f$  au voisinage du point fixe  $x^*$ .

On dit que le système (1.1) est approximé au voisinage du point d'équilibre  $x$ .

## 1.7 Nature d'un point d'équilibre

**Définition 1.10** soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit le multiplicateur  $f$  par :

$$m = f'(x^*)$$

de la tangente au point fixe  $x^*$  de  $f$  qui détermine le type (ou la nature) du point fixe.

**Théorème 1.1** *Supposons que  $x^*$  est un point fixe de  $x_{k+1} = f(x_k)$ , alors le point fixe  $x^*$  est :*

1. *Attractif si  $|m| < 1$ .*
2. *Répulsif si  $|m| > 1$ .*
3. *Indifférent si  $|m| = 1$  on ne peut pas conclure.*
4. *Super stable si  $m = 0$ .*

$m$  : s'appelle le multiplicateur de  $f$  au point  $x^*$ .

**Preuve:** On utilise la formule de Taylor au voisinage de  $x^*$  avec  $f(x^*) = x^*$  et  $f'(x^*) = m$

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + O((x - x^*)^2) = x^* + m(x - x^*) + O(x - x^*)^2$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(f(x^*)) + m(m(x - x^*)) + O(x - x^*)^2 = x^* + m^2(x - x^*) + O(x - x^*)^2$$

⋮

$$f^p(x) = x^* + m^p(x - x^*) + O(x - x^*)^2$$

1. Attractif si  $|m| < 1$

$$f^p(x) = x^* + m^p(x - x^*) + O(x - x^*)^2$$

$$p \rightarrow \infty \Rightarrow f^p(x) \rightarrow x^*$$

2. Répulsif si  $|m| > 1$

$$f^p(x) \text{ éloigne par rapport à } x^* \text{ i.e. } |f^p(x) - x^*| \rightarrow \infty$$

3. Indifférent si  $m = \pm 1$

la nature de  $x^*$  dépend des termes d'ordre supérieur à 1 du développement de Taylor.

4. Super stable si  $m = 0$

l'attraction est la plus forte car le terme du premier ordre en  $(x - x^*)$  disparaît complètement.

■

**Remarque 1.1** *La stabilité du système non linéaire à proximité d'un point fixe  $x^*$  ne peut être étudiée à partir du système linéarisé si  $f'(x^*) = 1$ . À savoir, tout changement infinitésimal dans la dérivée au point  $x^*$  entraîne un changement dans la nature du système dynamique.*

**Théorème 1.2** *En dimension  $n$ , si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , pour décider si le point fixe  $x^*$  est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne*

$$J(x^*) = Df(x^*) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Le point fixe  $x^*$  est :

1. Stable si toutes les valeurs propres de  $J(x^*) = Df(x^*)$  sont à l'intérieur du disque unité (leurs modules sont inférieurs à 1).

2. Instable si l'une de ces valeurs propres de  $J(x^*) = Df(x^*)$  a un module plus grand que 1 (à l'extérieur du disque unité).

**Définition 1.11** *Un point fixe  $x^*$  de  $x_{k+1} = f(x_k)$  est appelée hyperbolique si  $\left| \frac{df}{dx}(x^*) \right| \neq 1$ .*

Le théorème qui suit est une généralisation du théorème (1,2). Il découle immédiatement de ce que tous les points d'une orbite périodique de période  $p$  sont les points fixes de  $f^p$

**Théorème 1.3** *Soit le point périodique  $x$  d'un cycle d'ordre  $p$ .*

1. Si le spectre de la matrice jacobienne  $Df^p(x)$  est contenu à l'intérieur du cercle unité, le cycle est stable.

2. Si une des valeurs propres a un module plus grand que 1, le cycle est instable.

On le voit plus facilement en dimension 1. Le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de la chaîne. En effet, la dérivée de  $f^p$  au point  $x_0$  s'écrit :

$$(f^p)'(x_0) = f'(x_{p-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0)$$

mais  $x_0 = x_p$ , on déduit que cette valeur  $(f^p)'(x_0)$  est la même pour toutes les dérivées et notée  $m_p$ .

On définit le multiplicateur du cycle  $m_p$  par :

$$m_p = (f^p)'(x_0)$$

**Théorème 1.4** Pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , le cycle  $\{x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{p-1}^*\}$  est :

1. *Attractif* si  $|m_p| < 1$ .
2. *Répulsif* si  $|m_p| > 1$ .
3. *Indifférent* si  $|m_p| = 1$ .
4. *Super stable* si  $|m_p| = 0$ .

En général, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  on calcule les valeurs propres  $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$  de la matrice jacobienne de  $f^p$ .

Si  $\lambda_i$  sont réelles :

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| < 1$ , il s'agit d'un noeud attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| > 1$ , il s'agit d'un noeud répulsif.

$\exists i, j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ , telque  $|\lambda_i| < 1$  et  $|\lambda_j| > 1$ , il s'agit d'un noeud col.

Si  $\lambda_i$  sont complexes :

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| < 1$ , il s'agit d'un foyer attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| > 1$ , il s'agit d'un foyer répulsif.

## 1.8 Fonction de Lyapunov

**Définition 1.12** Une fonction de Lyapunov est une fonction scalaire  $V : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  continue en  $x_k$  telle que :

1.  $V(0) = 0$
2.  $V$  soit définie positive, i.e à  $V(x_k) > 0, x_k \neq 0$
3.  $V(x_k) \rightarrow \infty$  si  $x_k \rightarrow \infty$ .

**Théorème 1.5** (Méthode indirecte de Lyapunov) Le point d'équilibre  $x^*$  de (1.1) est globalement stable et asymptotiquement stable, s'il existe un voisinage  $I$  de  $x^*$  et une fonction de Lyapunov continue  $V : I \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que :

$$\Delta V(x_k) = V(x_{k+1}) - V(x_k) = V(f(x_{k+1})) - V(x_k) < 0$$

# Chapitre 2

## Bifurcation

**Définition 2.1** *Une bifurcation est un changement quantitatif ou qualitatif de la solution d'un système dynamique lors de la modification des paramètres aux quels il dépend, et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité ou l'apparition de nouvelles solutions.*

### ***Types de bifurcation***

*Il existe deux types de bifurcation (locale et globale) Chacune de ces bifurcations est caractérisée par une forme normale.*

- *bifurcation pli*
- *bifurcation transcritique*
- *bifurcation fourche*
- *bifurcation flip*
- *bifurcation Neimark–Sacker*
- *bifurcation neoud-col*
- *bifurcation doublement de période*

*Nous nous intéressons ici aux bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point fixe d'un système discret.*

## 2.1 Bifurcation pli

**Théorème 2.1** Soit  $x_{k+1} = f(x_k, c)$  a un point fixe à  $x^* = 0, c = 0$  avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$$

et

$$\frac{\partial f}{\partial c}(0, 0) \neq 0, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \neq 0$$

Alors au voisinage de  $(0, 0)$  l'application équivalent à l'une des formes normales suivantes :

$$\eta_{k+1} = \eta_k \pm \mu \pm \eta_k^2$$

## 2.2 Bifurcation transcritique

**Théorème 2.2** Soit  $x_{k+1} = f(x_k, c) = x_k g(x_k, c)$ , a un point fixe non-hyperbolique à  $x^* = 0, c = 0$

$$g(0, 0) = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial c}(0, 0) \neq 0, \text{ et } \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) \neq 0$$

Alors au voisinage de  $(0, 0)$ , l'application est localement équivalents à l'une des formes normales suivantes :

$$\eta_{k+1} = \eta_k \pm \mu \eta_k \pm \eta_k^2$$

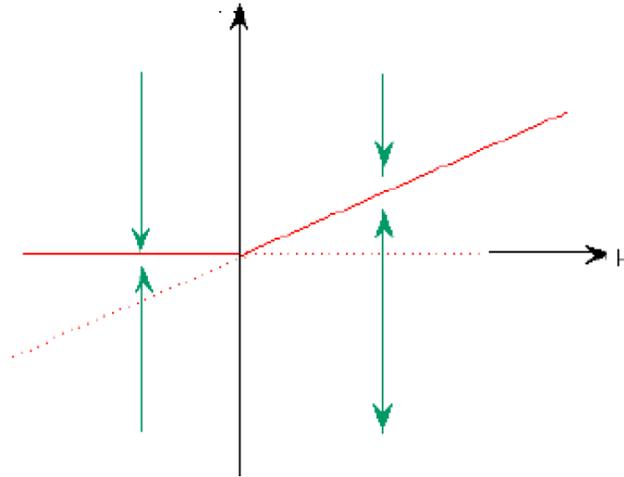


FIG.2-1-Diagramme de la bifurcation transcritique.

## 2.3 Bifurcation fourche

**Théorème 2.3** *Considérons l'application  $x_{k+1} = f(x_k, c)$ , de telle sorte que  $f(-x, c) = -f(x, c)$  pour tous  $c$  proche de  $c = 0$ . Si cette application à un point fixe non-hyperbolique à  $x^* = 0, c = 0$  et  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$  et si*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(0, 0) \neq 0$$

*Alors au voisinage de  $(0, 0)$ , cette application est localement équivalent à l'une des formes normales suivantes :*

$$\eta_{k+1} = \eta_k + \eta_k(\pm\mu \pm \eta_k^2)$$

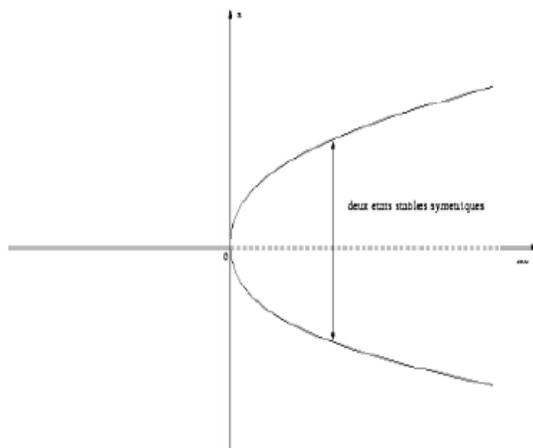


FIG.2-2-Diagramme de bifurcation de fourche.

## 2.4 Bifurcation flip

**Théorème 2.4** Soit  $x_{k+1} = f(x_k, c)$ , a un point fixe non-hyperbolique à  $x^* = 0$ ,  $c = 0$  de telle sorte que :

$$\begin{aligned} f(0, c) &= 0 \\ \forall c, c &\longrightarrow 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= -1 \end{aligned}$$

Puis, si

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial c}(0, 0) &\neq 0 \\ d &= \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \neq 0 \end{aligned}$$

Cette application est localement équivalente à l'une des formes normales suivantes :

$$z_{k+1} = -z_k \pm \gamma z_k \pm z_k^2$$

## 2.5 Bifurcation Neimark-Sacker

**Théorème 2.5** Soit l'application suivante :

$$x_{k+1} = f(x_k, y_k, c)$$

$$y_{k+1} = g(x_k, y_k, c)$$

A un point fixe non-hyperbolique à  $x^* = 0, y = 0, c = 0$ , ces valeurs propres de la matrice jacobienne sont :

$$\lambda = |\lambda(c)| e^{i\phi(c)}, \quad |\lambda(0)| = 1$$

Puis, si

$$\frac{\partial |\lambda|}{\partial c}(0) \neq 0, \quad e^{ik\phi(0)} = \lambda^k \neq 1, \quad (k = 1, 2, 3, 4), \quad d(0) \neq 0$$

il y a un changement en coordonnées polaires qui transforme l'application sous la forme suivante :

$$\gamma_{k+1} = |\lambda| \gamma_k + d\gamma_k^3$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \phi(c) + b(c)\gamma_k^2$$

On en distingue deux types, les bifurcations nœud-col qui donnent naissance à des points fixes et les bifurcations par doublement de la période qui font apparaître des orbites périodiques.

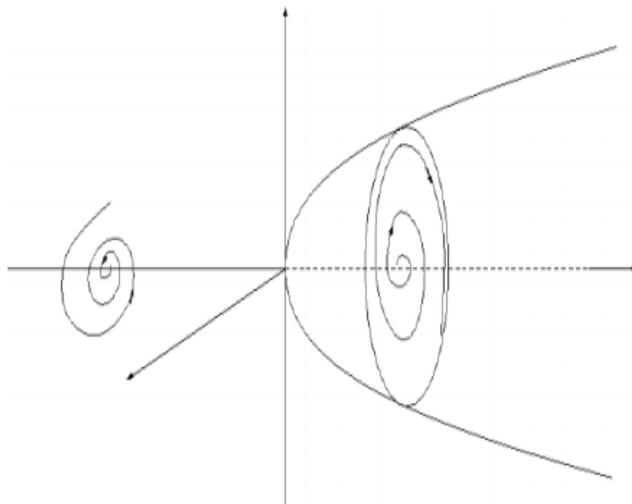


FIG.2-3-Diagramme de bifurcation Neimark-Sacker

## 2.6 Bifurcation noeud-col

**Théorème 2.6** *Considérons l'application*

$$x_{k+1} = f(x_k, c)$$

*S'il exist  $c = 0$  pour lequel l'application  $x_{k+1} = f(x_k, c)$  admet un point fixe non-hyperbolique  $x^*$  i.e  $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = 1$ .*

*On dit que l'application admet une bifurcation noeud-col en  $c = 0$ .*

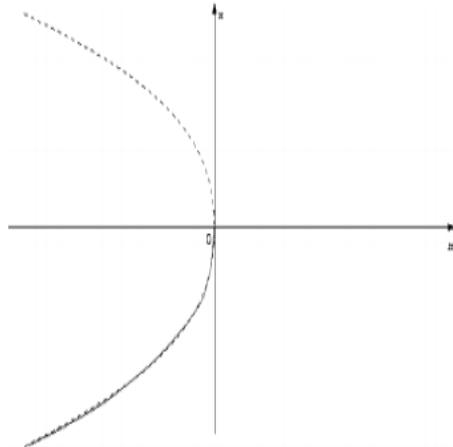


FIG.2-4-Diagramme de bifurcation neoud-col

## 2.7 Bifurcation doublement de période

**Théorème 2.7** *Considérons l'application*

$$x_{k+1} = f(x_k, c)$$

*S'il exist  $c = 0$  pour lequel l'application  $x_{k+1} = f(x_k, c)$  admet un point fixe non-hyperbolique  $x^*$  i.e  $\frac{\partial f}{\partial x}(x^*) = -1$ .*

On dit que l'application admet une bifurcation doublement de période en  $c = 0$

On peut prendre l'application logistique comme un exemple pour l'étude de la bifurcation doublement de période :

$$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$$

C'est un modèle d'évolution d'une population naturelle (d'où le nom logistique) est proposé par le mathématicien Pierre-françois Verhulst en 1840.

Dans cette section, nous obtenons des solutions successives itérées, ou les orbites de l'application logistique pour cinq valeurs du paramètre de contrôle  $a$  avec une condition initiale fixée  $x_0 = 0.2$  on trouve les cas suivants :

Cas 1 : Les itérations de l'application logistique pour  $a = 0.90$  on trouve les valeurs de  $x$  pour  $x_0 = 0.2$

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.1440... & x_2 &= 0.1109... & x_3 &= 0.0887... & x_4 &= 0.0727... & x_5 &= 0.0607... \\ x_6 &= 0.0513... & x_7 &= 0.0438... & x_8 &= 0.0377... & x_9 &= 0.0326... & x_{10} &= 0.0284... \\ x_{11} &= 0.0248... & x_{12} &= 0.0218... & x_{13} &= 0.0192... & x_{14} &= 0.0169... & x_{15} &= 0.0150... \\ x_{16} &= 0.0133... & x_{17} &= 0.0118... & x_{18} &= 0.0105... & x_{19} &= 0.0093... & x_{20} &= 0.0083... \end{aligned}$$

D'après les vingt itérations première, les solutions itérées de l'application logistique asymptotiquement vers zéros quand  $n$  tend vers l'infini. En générale, toutes les valeurs de  $a$  entre zéro et un on a une orbite asymptotiquement tends vers zéro.

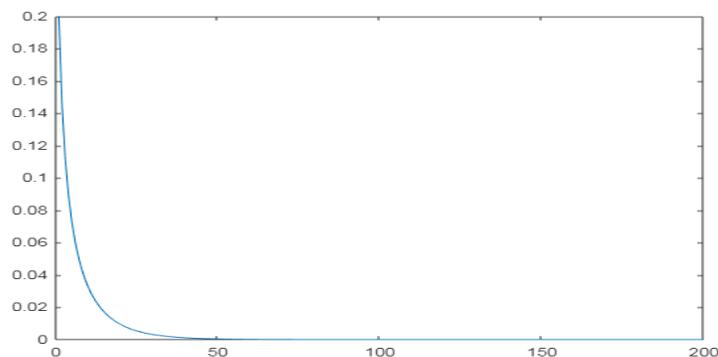


FIG.2-5-Diagramme pour les solutions itérées de l'application logistique avec  $a = 0.9$  et  $x_0 = 0.2$ .

Cas 2 : Les itérations de l'application logistique pour  $a = 2.60$  on trouve les valeurs de  $x$

pour  $x_0 = 0.2$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.4160\dots & x_2 &= 0.6316\dots & x_3 &= 0.6049\dots & x_4 &= 0.6213\dots & x_5 &= 0.6117\dots \\
 x_6 &= 0.6175\dots & x_7 &= 0.6140\dots & x_8 &= 0.6161\dots & x_9 &= 0.6149\dots & x_{10} &= 0.6156\dots \\
 x_{11} &= 0.6152\dots & x_{12} &= 0.6154\dots & x_{13} &= 0.6153\dots & x_{14} &= 0.6154\dots & x_{15} &= 0.6153\dots \\
 x_{16} &= 0.6153\dots & x_{17} &= 0.6153\dots & x_{18} &= 0.6153\dots & x_{19} &= 0.6153\dots & x_{20} &= 0.6153\dots
 \end{aligned}$$

On remarque d'après les cinq premières itérations la solution correcte à deux décimales, après le 10<sup>ème</sup> itération la solution correcte à trois décimale et après le 15<sup>ème</sup> itération la solution est installée et répétée vers 0.6153... cependant la 21<sup>ème</sup> iteration il n'y a pas un changement notable, donc la solution connu comme une orbite à une seule période vers le point fixe c.à.d  $x_{n+1} = x_n$  pour  $n$  grand.

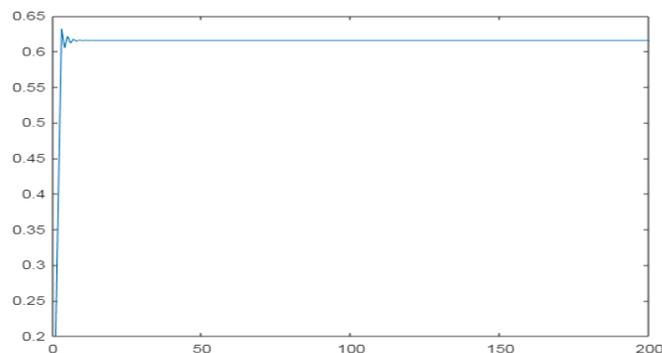


FIG.2-6-Diagramme pour les solutions itérées de l'application logistique avec  $a = 2.60$  et  $x_0 = 0.2$ .

Cas 3 : Les itérations de l'application logistique pour  $a = 3.20$  on trouve les valeurs de  $x$  pour  $x_0 = 0.2$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.5120\dots & x_2 &= 0.7995\dots & x_3 &= 0.5130\dots & x_4 &= 0.7994\dots & x_5 &= 0.5130\dots \\
 x_6 &= 0.7994\dots & x_7 &= 0.5130\dots & x_8 &= 0.7994\dots & x_9 &= 0.5130\dots & x_{10} &= 0.7994\dots \\
 x_{11} &= 0.5130\dots & x_{12} &= 0.7994\dots & x_{13} &= 0.5130\dots & x_{14} &= 0.7994\dots & x_{15} &= 0.5130\dots \\
 x_{16} &= 0.7994\dots & x_{17} &= 0.5130\dots & x_{18} &= 0.7994\dots & x_{19} &= 0.5130\dots & x_{20} &= 0.7994\dots
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, les solutions convergent rapidement à deux valeurs 0.5130...et 0.7994...on remarque les solutions sont répétées d'après deux itérations c.à.d  $x_{n+2} = x_n$  donc on conclure que la solution connu comme une orbite à deux période.

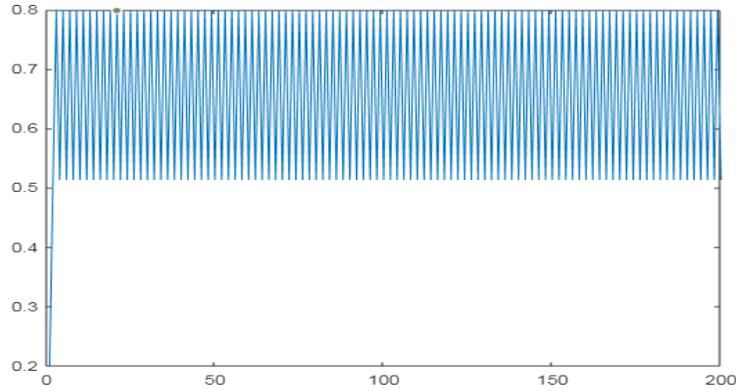


FIG..2-7-Diagramme pour les solutions itérées de l'application logistique avec  $a = 3.20$  et  $x_0 = 0.2$ .

Cas 4 : Les itérations de l'application logistique pour  $a = 3.52$  on trouve les valeurs de  $x$  pour  $x_0 = 0.2$

$x_1 = 0.5120\dots$	$x_2 = 0.7995\dots$	$x_3 = 0.5130\dots$	$x_4 = 0.7994\dots$	$x_5 = 0.5130\dots$
$x_6 = 0.7994\dots$	$x_7 = 0.5130\dots$	$x_8 = 0.7994\dots$	$x_9 = 0.5130\dots$	$x_{10} = 0.7994\dots$
$x_{11} = 0.5130\dots$	$x_{12} = 0.7994\dots$	$x_{13} = 0.5130\dots$	$x_{14} = 0.7994\dots$	$x_{15} = 0.5130\dots$
$x_{16} = 0.7994\dots$	$x_{17} = 0.5130\dots$	$x_{18} = 0.7994\dots$	$x_{19} = 0.5130\dots$	$x_{20} = 0.7994\dots$
...	...	...	...	...
...	$x_{37} = 0.5120\dots$	$x_{38} = 0.8794\dots$	$x_{39} = 0.3730\dots$	$x_{40} = 0.8233\dots$
...	$x_{41} = 0.5120\dots$	$x_{42} = 0.8794\dots$	$x_{43} = 0.3730\dots$	$x_{44} = 0.8233\dots$

Nous voyons que les itérées ci-dessus n'ont pas sensiblement convergé pour les vingt premières itérations cependant 40<sup>ème</sup> itération on voit que les solutions s'installent et une répétition d'après 4 itérations c.à.d  $x_{n+4} = x_n$  donc la solution connue comme une orbite à 4 période.

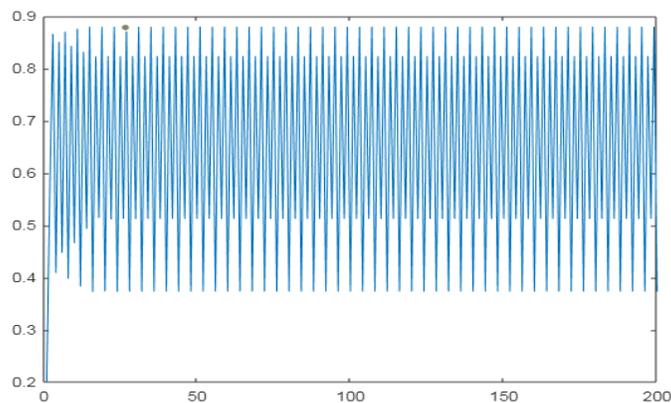


FIG.2-8-Diagramme pour les solutions itérées de l'application logistique avec  $a = 3.52$  et  $x_0 = 0.2$ .

Cas 5 : Les itérations de l'application logistique pour  $a = 4.00$  on trouve les valeurs de  $x$  pour  $x_0 = 0.2$

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0.6400\dots & x_2 &= 0.9216\dots & x_3 &= 0.2890\dots & x_4 &= 0.8219\dots & x_5 &= 0.5854\dots \\
 x_6 &= 0.9708\dots & x_7 &= 0.1133\dots & x_8 &= 0.4019\dots & x_9 &= 0.9615\dots & x_{10} &= 0.1478\dots \\
 x_{11} &= 0.5308\dots & x_{12} &= 0.9999\dots & x_{13} &= 0.0002\dots & x_{14} &= 0.0009\dots & x_{15} &= 0.0038\dots \\
 x_{16} &= 0.0153\dots & x_{17} &= 0.0605\dots & x_{18} &= 0.2275\dots & x_{19} &= 0.7031\dots & x_{20} &= 0.8348\dots
 \end{aligned}$$

Les itérations au-dessus n'ont pas sensiblement convergé vers une orbite périodique pour les 20 première itérations, contrairement dans les trois cas précédents ci-dessus le comportement de la solution n'est périodique est connue sous le nom orbite chaotique

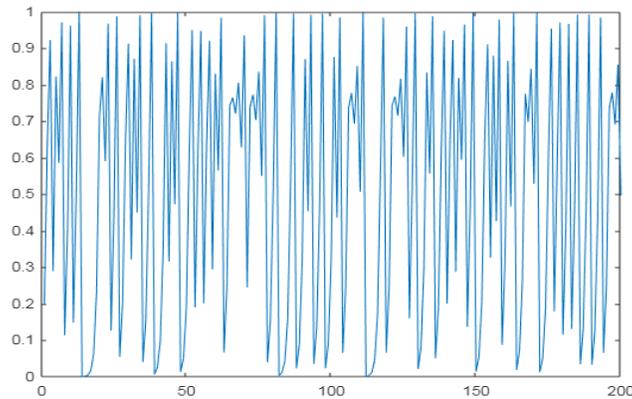


FIG.2-9-Diagramme pour les solutions itérées de l'application logistique avec  $a = 4$  et  $x_0 = 0.2$ .

**EXEMPLE**

On a

$$f(x) = ax(1 - x), \quad 0 \leq a \leq 4$$

Les points fixes de l'application sont :

$$x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{a - 1}{a}, \quad a \neq 0$$

En vas étudier la bifurcation Pli pour  $x_0 = 0$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= a - 2ax \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0) &= a \implies a = 1 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2a \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) &= -2a \neq 0 \\ \frac{\partial f}{\partial a} &= x(1-x) \implies \frac{\partial f}{\partial a} = 0\end{aligned}$$

Donc le 3<sup>ème</sup> condition n'est pas satisfaisant, alors bifurcation pli introuvable pour  $x_0 = 0$ .

En vas étudier bifurcation Pli pour  $x_1 = \frac{a-1}{a}$  :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= a - 2ax \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= -2a \\ \frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{a-1}{a}\right) &= 1 \implies a = 1 \\ \frac{\partial f}{\partial a} &= x(1-x) \\ \frac{\partial f}{\partial a}\left(\frac{a-1}{a}\right) &= \frac{a-1}{a}\left(1 - \frac{a-1}{a}\right)\end{aligned}$$

Donc bifurcation pli introuvable pour  $x_1 = \frac{a-1}{a}$ .

Bifurcation Transcritique

$$\begin{aligned}f(x) &= ax(1-x) \\x_{k+1} &= xg(x) \\&= x(a-ax) \\g(x) &= a-ax \\g(0,0) &= 1 \\&\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial g}{\partial x} \neq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial a} \neq 0 \end{array} \right.\end{aligned}$$

Donc bifurcation est trouvable pour  $x_0 = 0$ .

Bifurcation Transcritique pour  $x_1 = \frac{a-1}{a}$  :

$$\begin{aligned}g(x) &= a-ax \\&\left\{ \begin{array}{l} g\left(\frac{a-1}{a}\right) = 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}\left(\frac{a-1}{a}\right) \neq 0 \\ \frac{\partial g}{\partial a}\left(\frac{a-1}{a}\right) \neq 0 \end{array} \right.\end{aligned}$$

Donc la la bifurcation transcritique est trouvable pour  $x_1$ .

Bifurcation Fourche

$$\begin{aligned}f(-x, c) &= -ax(1+x) \neq -a(-1+x) \neq -f(x, c) \\ \forall x &\in \mathbb{R}\end{aligned}$$

La première condition n'est pas satisfaisant. Donc la bifurcation fourche introuvable.

# Chapitre 3

## Quantification du chaos dans les systèmes dynamiques discrets

### 3.1 Historique du chaos

Il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, et plusieurs interprétations sont données au phénomènes chaotiques, comme un indésirable aspect du désordre, et aussi confusion, agitation, abime essentiel et aléatoire indésirable.

Nous citons plusieurs travaux qui prédispose l'invention de cette branche de mathématiques dans sa façon moderne, nous commençons par Henri Poincaré en 1889, dans le problème des trois corps, puis en 1908, l'idée de "chance" a été publié par Poincaré. En 1898, la divergence globale des trajectoires dans l'espace de courbure négative a été inscrite par Jacques Hadamard, puis en 1908, la signification générale de son théorème a été discuté par Pierre Duhem qui a déclaré que les premières conditions aléatoires introduites dans le théorème d'Hadamard ne permettent pas de prédire le système chaotique d'une façon complète.

À la fin du XIX<sup>ième</sup> siècle, Jacques Hadamard a réussi à prouver un théorème sur la dépendance sensible aux conditions initiales concernant le courant géodésique sur une surface de courbure négative et le mouvement sans friction d'un point sur une surface.

Le comportement indécis "*occasionnel*" d'un circuit oscillatoire du tube électronique géré par une équation différentielle non linéaire simpliste a été constaté par Bathazar Van Del Pol en 1927.

Environ treize ans après, selon Mary Cartwright Tôt et John Littlewood cette équation avait le potentiel de démontrer des solutions sensibles à tous les chiffres dans ces conditions initiales.

En suivant la tradition de Poincaré, l'étude des systèmes hamiltoniens non linéaires a été poursuivie par des nombreux mathématiciens comme Kolmogorov, Arnold et Moser entre les années 1920 et 1960.

Au début des années 1960, la désignation laborieuse des entrées et des productions de processeurs de données mentales constituait un facteur essentiel facilitant la révolution cognitive. Considérer l'esprit comme un système cybernétique dynamique avait été l'approche la plus rapide selon Miller, Gallanter et Pribram. En 1972, Newell et Simon ont proposé une nouvelle approche qui a dénoncé la précédente en considérant l'esprit comme une règle basée sur un processeur de symbole.

En 1960, Steve Smale a fourni des preuves mathématiques permettant d'établir des équations différentielles avec une sensibilité générique. La fin des années 1960 a marqué le commencement des simulations numériques des équations différentielles avec un comportement complexe sur les calculatrices analogiques ensuite sur les calculatrices numériques.

Dans les années 1962, Edward Lorenz a remarqué un comportement complexe sensiblement dépendable des conditions initiales après avoir mené une simulation en ordinateur d'un ensemble d'équations différentielles simplifiées pour une convection d'un fluide.

Une large série de champs a incorporé la théorie des systèmes dynamiques dans le comportement prédateur-proie, parole et langue, développement de l'enfant, et l'intelligence artificielle.

En 1977, Ilya Prigogine a remporté le Prix Noble en chimie. Il a focalisé sur l'entropie des systèmes ouverts. En d'autres mots, l'accumulation et l'écoulement de la matière, l'énergie, ou l'information entre le système et son environnement. Prigogine a dévoilé à travers un système dissipatif que l'évolution des structures complexes peut être simple et organisé.

C'est en 1984 que T. Matsumoto et L.O. Chua avaient leurs première observation d'un attracteur chaotique dans un circuit électronique très simple, construit avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux à cinq segments. Le développement de la théorie des circuits non linéaires a commencé à partir de cette observation, suivi par les circuits électroniques chaotiques. Matsumoto a vérifié la nature chaotique de ce circuit avec

ses expériences numériques.

Avec ses étudiants ils étaient parvenus à modifier les circuits de Rosenthal afin d'obtenir deux résistances non linéaires terminales avec une fonction linéaire par morceaux qui devraient être précocement désignés. L'adaptation du circuit de Rosenthal a été réussite par Takumaso deux ans après dans le but d'en arriver à la non-linéarité requise.

La caractéristique principale du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, si le système est chaotique, alors il n'est pas possible de calculer avec précision l'évolution d'un cas particulier, car une erreur négligeable est survenue aux observations de départ résulte des fluctuations énormes. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales. Ce comportement est connu sous le nom du chaos déterministe, ou tout simplement le chaos.

## 3.2 Quelques définitions du chaos

Le chaos est un comportement apériodique à long terme dans un système déterministe qui présente une dépendance sensible aux conditions initiales.

**Définition 3.1** *Définition Larousse : Confusion générale des éléments, de la matière, avant la création du monde.*

**Définition 3.2** *Définition de E .Lorenz : Un système agité par des forces où seules existent trois fréquences indépendantes, peut se déstabiliser, ses mouvements devenant alors totalement irréguliers et erratiques.*

**Définition 3.3** (R.L Devaney) *Soit  $(I, d)$  un espace métrique compact ( $d$  est une distance) et soit  $f$  une fonction tel que*

$$f : I \rightarrow I, x_{k+1} = f(x_k) \quad (3.1)$$

*Le système dynamique discret (3, 1) est dit chaotique si les conditions suivantes sont vérifiées :*

1.  *$f$  possède une sensibilité aux conditions initiales : Il existe un nombre réel  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $x_0 \in I$  et pour tout  $\rho > 0$ , il existe un point  $y_0 \in I$  et un entier  $k > 0$ , satisfaisant :*

$$d(x_0, y_0) < \rho \Rightarrow d(x_k, y_k) > \varepsilon \quad (3.2)$$

2.  *$f$  est topologiquement transitive : S'il existe  $x_k \in I$  tel que l'orbite  $O = \{f^k(x_k), k \in \mathbb{N}\}$  est dense dans  $I$ .*

3. *L'ensemble des points périodiques de  $f$  est dense dans  $I$  :  $\{x_0 \in I, \exists k > 0; x_k = x_0\}$  est dense dans  $I$ .*

## 3.3 Caractérisation du chaos

### 3.3.1 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du XIX<sup>e</sup> siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses

travaux en météorologie. Pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables.

### 3.3.2 Espace de phase

On peut suivre l'évolution de l'état du système physique au fil du temps. Pour cela, tout d'abord, on construit un modèle avec les lois et conditions physiques nécessaires pour caractériser le système. Le modèle se compose généralement d'équations différentielles. Puis, nous définissons un point dans le «repère» à un instant donné. Cela caractérisera l'état du système dans l'espace. Cet espace est appelé "espace de phase". L'espace de phase est un concept purement mathématique avec autant de dimensions qu'il y a des paramètres dans le système dynamique étudié. Un système qui converge vers un état d'équilibre après de multiples oscillations correspond à une boucle qui converge vers un point dans l'espace des phases. Nous avons d'autres qui se répètent régulièrement, ce qui correspond à l'espace de phase sur une orbite cyclique. D'autres ont également des mouvements périodiques mais plus compliqué, ils ne se répètent qu'après deux oscillations différentes, cela correspond à un cycle plus complexe dans l'espace de phase. Dans les systèmes chaotiques, dans l'espace des phases, ils ont la forme de la trajectoire irrégulier.

### 3.3.3 Dimension fractale

Plusieurs dimensions ont été proposées, on cite quelques une : : il ya la dimension de Kolmogorov, dimension de Corrélation et dimension de Lyapunov, il ya une différence légère entre chaque'une de ces dimensions. La dimension fractale vérifier les propriétés suivantes :

- $A \subset B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$ .
- $A = \emptyset \Rightarrow d(A) = 0$ .
- $d(A * B) = d(A) + d(B)$ .

### 3.3.4 Dimension de Lyapunov

la dimension de Lyapunov est plus ou moins grande classant les exposants de Lyapunov  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ .

La dimension de Lyapunov  $D_L$  est définie par :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{\lambda_{j+1}}$$

Où  $j$  est le plus grand entier qui satisfait :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0$$

### 3.3.5 Dimension de capacité (Kolmogorov)

Soit un ensemble des points metté dans l'espace de dimension  $n$ , on cherchons un recouvrement pour cet ensemble (chaque boule à diamètre  $\varepsilon$ ).

Soit  $E(\varepsilon)$  le plus petits nombre des boules nécessaire pour cette dimension de capacité

La dimension de Kolmogorov ou de capacité est définie par :

$$d_c = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(E(\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})}$$

Par exemple, la dimension de Kolmogorov de l'ensemble triadique de Cantor obtenu est  $d_c \approx 0.6309$ .

### 3.3.6 Attracteurs étranges

Les attracteurs est un ensemble de points vers lesquelles évoluent le système en question, quelles que soient ses conditions initiales, à savoir la géométrie les trajectoires de tous les points de l'espace des phases tendent à cela. Nous pouvons extraire plusieurs attracteurs pour le même espace de phase, et il y a deux type : Attracteurs réguliers et attracteurs étranges. Attracteur étrange a des lois au meme temps déterministes et aléatoires, il n'est donc pas pratique toute vision évolutive à long terme.

### Attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers déterminent l'évolution des systèmes non chaotiques et sont divisés en deux catégories :

Point fixe : C'est les valeurs des variables au fil du temps, cela peut empêcher l'évolution.

Cycle limite : ce sont les valeurs de la variable dont l'évolution dans la chaîne le temps est cyclique.

Pour tous les attracteurs réguliers les points très proches de l'espace des phases restent infiniment proches. Nous pouvons cependant prédire l'évolution de ces systèmes en fonction de l'état connu.

### Attracteurs étranges

Tous les points de l'espace de phase générés par le bassin d'attraction de l'attracteur fournissent une trajectoire qui tend à établir des attracteurs étranges au fil du temps.

L'important est que l'étrange attracteur n'est pas une surface lisse, mais une surface En fait, ils sont introvertis. Les deux points ne connaîtront pas la même évolution, mais en raison de la taille de l'attracteur Limité, donc l'attracteur doit se replier tout seul, et ce processus de pliage a tendance à se répéter indéfiniment, et conduit à une augmentation du nombre de plis superposés insatisfaisants. Par conséquent, les deux conditions qui sont initialement fermées peuvent avoir deux positionnements différents de l'attracteur au-delà d'un certain Niveau.

### 3.3.7 Exposants de Lyapunov

En (1857-1918) Lyapunov Alexander a développé un paramètre qui nous permet de calculer le taux de différence entre l'évolution de la trajectoire à partir des conditions initiales Cet espace limité est un attracteur étrange. Cette méthode de contrôle est appelée l'exposant de Lyapunov, et sa quantité permet de caractériser le chaos temporel et définissez les systèmes dynamiques de la manière suivante :

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

$x_0$  : condition initiale.

### Cas des systèmes discrets unidimensionnels

**Théorème 3.1** *Soit une application discrète  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  qui applique  $x_{n+1}$  sur  $x_n$ , l'exposant de Lyapunov  $\lambda$  qu'il indique le taux moyen de divergence est défini par :*

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \quad (3.3)$$

**Preuve:** On vas prendre deux conditions initiales très proches, soit  $x_0$  et  $x'_0$  séparées d'une distance  $d_0$ , et on regarde comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. ■

**Preuve:** Alors  $d_0 = |x'_0 - x_0|$

Pour la première itération, la distance entre les deux trjéctoires devient  $d_1 = |x'_1 - x_1|$ .

Pour  $n$  itération la distance évolue à  $d_n = |x'_n - x_n|$ .

Le rapport  $\frac{d_i}{d_{i-1}}$  décrit l'évolution de l'erreur  $d_i$  dans la ième itération, autrement

$$\frac{d_1}{d_0} = \frac{|x'_1 - x_1|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x'_0) - f(x_0)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{|x'_0 - x_0|}$$

$$\text{et puis } \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f(x_0 + d_0) - f(x_0)|}{d_0} = |f'(x_0)|.$$

Cette quantité est positive, alors il existe un réel  $\lambda_1$  telle que  $\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_1}{d_0} = |f'(x_0)| = e^{\lambda_1}$ .

donc les deux trajectoires s'écartent à un rythme exponentiel à la première itération.

en extraire la valeur de  $\lambda_1 = \ln |f'(x_0)|$  en passant au logarithme dans (1.1). L'évolution de

l'erreur après  $n$  itérations :

$$\frac{d_n}{d_0} = \frac{|x'_n - x_n|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f(x'_n) - f(x_n)|}{|x'_0 - x_0|} = \frac{|f^n(x'_0) - f^n(x_0)|}{d_0} = \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0}.$$

donc

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0} = \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

l'erreur tends vers une limite  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{d_n}{d_0} = \lim_{d_0 \rightarrow 0} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{|x'_{i+1} - x_{i+1}|}{|x'_i - x_i|} = (e^\lambda)^n = e^{\lambda n} \simeq \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

$$\Rightarrow n\lambda \simeq \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right|$$

$$\Rightarrow \lambda \simeq \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df(f^{n-1}(x_0))}{dx} \right|.$$

en utilisant la règle de dérivation par chaîne

$$\lambda \simeq \frac{1}{n} \ln |f'(x_{n-1})| |f'(x_{n-2})| \dots |f'(x_0)| = \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)|$$

quand  $n \rightarrow \infty$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n}{dx}(x_0) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|$$

Pour un point d'équilibre  $x^*$

$$\lambda = \ln |f'(x^*)|$$

-Si  $f'(x) < 1 \Rightarrow \lambda < 0$ , alors  $x^*$  est asymptotiquement stable et la trajectoire issue d'une condition initiale  $x_0$  ( $\{x_i\}_{i=0}^n$ ) est asymptotiquement stable au voisinage de  $x$ .

-Si  $f'(x) = 1 \Rightarrow \lambda = 0$ ,  $x^*$  est stable et par conséquent la trajectoire issue de  $x_0$  est périodique, donc stable.

-Si  $f'(x) > 1 \Rightarrow \lambda > 0$ ,  $x^*$  est instable ainsi que la trajectoire issue de  $x_0$ .

Exemple : soit  $f(x) = 2x$

$$\begin{aligned} \lambda(x_i) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_i)| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |2| = \ln 2 > 0. \end{aligned}$$

alors le système est chaotique. ■

### Cas des systèmes discrets multidimensionnels

**Théorème 3.2** Soit  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  une application discrète telle que  $x_{n+1} = f(x_n)$

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln q_i(f^k(x_0)) \tag{3.4}$$

**Preuve:** On a

$$\frac{d_n}{d_0} = \frac{x'_n - x_n}{x'_0 - x_0} = \frac{|f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)|}{d_0} \simeq (e^\lambda)^n \Rightarrow |f^n(x_0 + d_0) - f^n(x_0)| \simeq d_0 (e^\lambda)^n$$

Soit le développement limité d'ordre 1 de la fonction  $f^n(x_0)$  au voisinage de  $x_0$

$$x_n - x'_n \simeq f^n(x_0) - f^n(x'_0) = (x_0 - x'_0) \left[ \frac{df^n}{dx}(x_0) \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= J(x_0)J(x_1)J(x_2)\dots J(x_n) \times (x_0 - x'_0) \\
 &= \prod_{i=0}^n J(x_i) \times (x_0 - x'_0)
 \end{aligned}$$

On note  $\prod_{i=0}^n J(x_i)$  par  $J^n(x_0)$ ,  $x_n - x'_n = J^n(x_0) \times (x_0 - x'_0)$ ,

où  $J^n(x_0) \in M_{p \times p}$  représente la matrice jacobéenne de  $f^n(\cdot)$  au point  $x_0$ .

Si  $J^n(x_0)$  est diagonalisable, alors il existe une matrice inversible  $P \in M_{p \times p}$  telle que la matrice  $D_p^n = P^{-1}J^n P$  est diagonale des valeurs propres  $q_i(f^k(x_0)), (i = 1, 2, \dots, p,)$

On définit les  $p$  exposants de Lyapunov comme suit :

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^n \ln q_i(f^k(x_0)) \tag{3.5}$$

et  $\lambda_i$  sont les exposants de Lyapunov associés aux trajectoires issues de  $x_0$  dans la  $i$ ème direction.

Pour le point d'équilibre  $x^* : x_n - x'_n = (J(x^*))^n(x - x'_0)$

passant aux composantes du vecteur  $\|x_{i,n} - x'_{i,n}\| = |q_i(x^*)|^n \|x_{i,0} - x'_{i,0}\| = e^{n\lambda_i} \|x_{i,0} - x'_{i,0}\|$

ceci implique par comparaison

$$\lambda_i = \ln q_i(x^*), \quad i = 1, 2, \dots, p \tag{3.6}$$

■

### 3.4 Route vers le chaos

Pour le moment, nous ne savons pas dans quelles conditions le système deviendra chaotique. Cependant, les systèmes dynamiques peuvent avoir plusieurs types d'évolution de stabilité va au chaos. Supposons que la dynamique de l'étude dépend des paramètres contrôle.

Après avoir modifié ce paramètre, le système peut entrer dans l'état à partir de l'état statique périodiquement, puis dépasser un certain seuil, puis suivre le plan de transition chaotique. Il existe plusieurs scénarios qui décrivent la transition d'un point fixe au chaos. Habituellement, l'évolution des points fixes, par le changement de son type de stabilité, suivant au changement des valeurs

du paramètre de bifurcation, fait le motif pour lequel une transition vers le chaos est apparue. tout ces scénarios ont été prédits par la théorie et ont été observés dans de nombreuses. Nous décrirons brièvement les quatre types d'évolution possibles.

### 3.4.1 Cascade de doublements de période

Cette transition vers le chaos est la plus célèbre, dès que le paramètre de contrôle augmente la fréquence du régime périodique double c.à.d  $\times 2 \times 4 \times 16 \dots$ , les doublements étant plus en plus rapprochés tendent vers un point d'accumulation auquel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie. C'est à ce moment que le système devient chaotique.

Il est étudié précisément dans l'application logistique  $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ . Selon

### 3.4.2 Par intermittence

Ce scénario est caractérisé par l'apparition irrégulière de bouffées chaotiques dans un système qui oscille régulièrement. Le système maintient un régime périodique ou pratiquement périodique pendant une certaine période de temps, c'est-à-dire une certaine «régularité», après il se déstabilise brutalement pour donner lieu à une sorte d'explosion chaotique. Il se stabilise ensuite à nouveau, provoquant alors une autre "bouffée".

### 3.4.3 Scénario de Ruelle et Takens

Dans un système dynamique à comportement périodique, il a une seule fréquence, et si nous changeons le paramètre, une deuxième fréquence apparaîtra. Si la relation entre les deux fréquences est raisonnable, le comportement deviendra périodique. Cependant, si le rapport est déraisonnable, le comportement est presque périodique (quasi périodique). Par conséquent, nous modifions à nouveau les paramètres, puis jusqu'à l'arrivée de la situation chaotique.

# Chapitre 4

## Systemes dynamiques discrets chaotiques Célèbres

### 4.1 L'application logistique

#### 4.1.1 Historique de l'application logistique

L'application logistique  $g_a = ax(1 - x)$  s'intéresse beaucoup à la modélisation de l'évolution des populations. En 1838, Pierre François Verhulst a avancé ce point de vue, il a affirmé la croissance non exponentielle de la population. Ce nouveau modèle a raison Thomas Malthus. devrait connaître une croissance exponentielle. Bien sûr, pour Malthus, chaque année, la population croît à un rythme fixe :  $U_{n+1} = rU_n$  courant, dont certains précisent taux de croissance de la population au cours des années  $n$  et  $r$ . Caractéristiques liées à cela la séquence est :  $f(x) = rx$ . Par conséquent, le modèle d'indice envisage le développement infini de la population, emplacement, et donc ne correspond pas à la réalité.

En fait, aucune barrière évolutive n'est considérée. Cependant, compte tenu de ces obstacles, il est nécessaire de corriger le modèle Malthus , qui est le même que le modèle de Verhulst basé sur la nourriture disponible. Ceci détermine la population maximale  $P$  qui sera atteinte une fois que tous les aliments seront épuisés. Si la population en un an est égale à  $P$ , la population de la deuxième année sera nulle. Dans ce cas ,on peut l'écrire comme ceci :  $U_{n+1} = rU_n(p - U_n)$  où la

fonction de corrélation est  $g(x) = rx(P - x)$ . facteur de réception signifie que tant que  $(P - x)$  correspond à facteurs externes.. Puis écris la dernière expression  $g(x) = rxp(1 - \frac{x}{p})$

$$g(y) = ryp^2(1 - y) = ay(1 - y)$$

avec  $a = rP^2$ . la population doit être ainsi assimilée à un rapport compris entre 0 et 1, où 0 correspond à son extinction et 1 à son maximum. De plus, la population maximale est égale à  $g(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$ . Ainsi,  $0 \leq \frac{a}{4} \leq 1$ , soit  $0 \leq a \leq 4$

L'application  $g$  définie par :

$$g : [0; 1] \rightarrow [0; 1]$$

$$y \rightarrow ay(1 - y) \quad , a \in [0; 4]$$

s'appelle l'application logistique.

Après la découverte de Pierre François Verhulst, les applications logistiques ont été oubliées jusqu'au début du XXe siècle. Dans les années 1920, deux mathématiciens et biologistes travaillaient concernant l'évolution des différentes populations animales, veuillez noter que la façon dont les populations évoluent d'une espèce à l'autre est différente : certaines espèces se stabilisent et d'autres suivent Il y a des cycles réguliers, et enfin d'autres cycles fluctuent de façon aléatoire. De quoi dépend ce développement ?

Ensuite, l'application logistique réapparaît pour tenter de répondre à cette question. Toujours dans le même but, dans les années 1970, les écologistes James Yorke<sup>3</sup> et Robert May<sup>4</sup> ont trouvé la réponse. Pour eux, l'évolution de chaque population animale est calculée à l'aide de l'application logique  $g(y) = ay(1 - y)$  et dépend de la valeur de  $a$ .

En fait, pour certaines valeurs  $a$ , le comportement de l'application change considérablement. Ces paramètres sont appelés ultérieurement des fourches. Pour plus de clarté, May a développé son résultat sur le graphique est l'apparence du diagramme de bifurcation. Il note que dans une certaine mesure la population s'approche d'une valeur, puis de deux, puis de quatre, etc.

De plus, ce comportement prévisible s'arrête, il y a du chaos. De plus, au cours de la même période, le physicien Mitchell Feigenbaum<sup>5</sup> s'est intéressé à l'utilisation de la logistique dans le cadre de la recherche sur les turbulences. Il fait tout d'abord le même constat que Robert May : il y a des valeurs pour lesquelles le comportement de l'application logistique change. Puis, à l'été 1975, il participe à une conférence sur la transition de la périodicité au chaos, ce qui l'amène à

étudier les applications logistiques sous différents angles. Il permet des bifurcations et se concentre sur la distance entre deux bifurcations consécutives. Il a ensuite remarqué que la relation entre deux distances consécutives convergeait. Il a repris les recherches sur d'autres applications basées sur les paramètres et a constaté que le rapport entre les deux cycles convergeait toujours vers le même nombre. C'est la découverte de la constante de Feigenbaum.

### 4.1.2 Définition de l'application logistique

**Définition 4.1** *Le système dynamique associé est : Partant d'une condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}$ , on pose :*

$$x_1 = g_a(x_0), x_2 = g_a(x_1), \dots, x_{n+1} = g_a(x_n)$$

$$\text{où } x_1 = g_a(x_0), x_2 = g_a(x_1) = g_a(g_a(x_0)) = g^2(x_0), \dots, x_n = g_a^n(x_0).$$

*On dit que c'est un système dynamique de dimension 1 car  $x \in \mathbb{R}$ , et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment, la loi de mouvement est simplement  $x_{n+1} = g_a(x_n)$ .*

### 4.1.3 Propriétés de l'application logistique

Nous utiliserons un exemple en mathématiques pour étudier la population est un modèle logistique. La population pendant  $t + 1$  sera  $x_{t+1}$  en fonction la population avant la période  $t$  est donnée par l'équation :

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$$

et

$ax_t$  représente le rapport de croissance.

$(1 - x_t)$  représente la diminution de la population due à des facteurs extérieurs.

On verra que selon la valeur du taux de croissance effectif  $a$ , la population est stable, oscille ou fluctue aléatoire à une certaine valeur ou entre deux ou plusieurs valeurs.

Nous étudions l'évolution de taux de croissance effectif des populations animales entre  $[0, 4]$  pour les 200 premières itérations.

On fixe comme valeur initiale  $x_0 = 0.3$  et on change le paramètre  $a$ , à chaque fois on obtient

un graphe différent à l'autre représentons dans les figures ci-dessous. L'équation de l'évolution est donnée par :

$$x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$$

Pour  $a = 1$

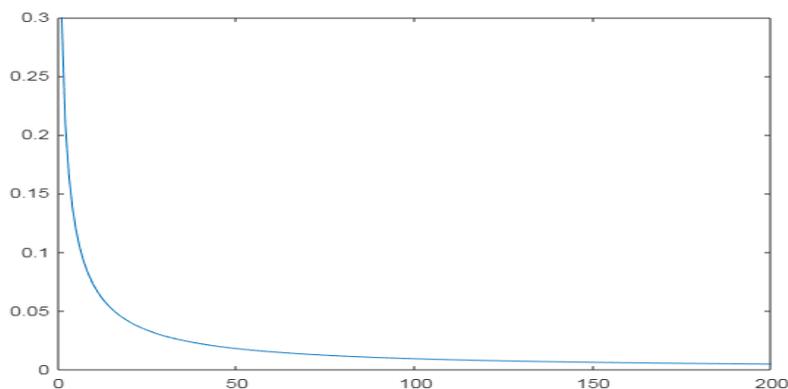


FIG.4-1-Population dont le taux de croissance  $a = 1$  avec  $x_0 = 0,3$ .

Pour cette valeur, la population diminue et tend à converger vers zéro, voir Fig (4.1.)

Pour  $a = 2$

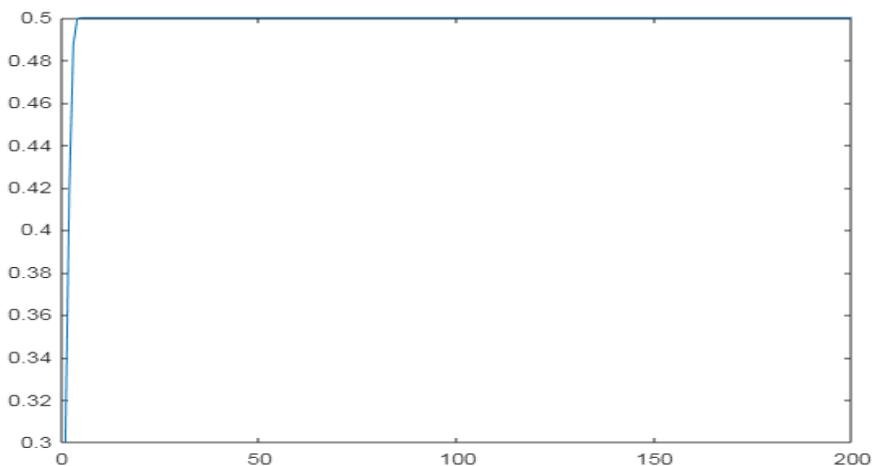


FIG.4-2-Population dont le taux de croissance  $a = 2$  avec  $x_0 = 0,3$ .

On constate que la population se stabilise vers une certaine valeur correspond à 0,5, voir Fig(4.2).

Pour  $a = 3$

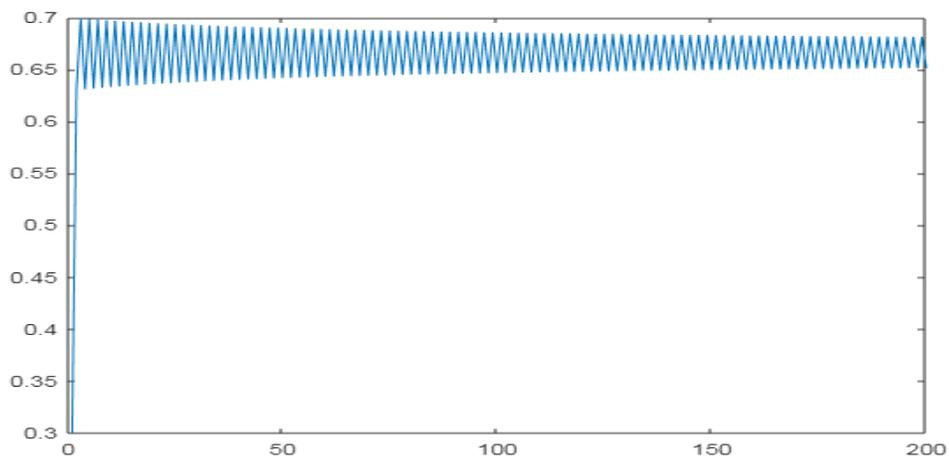


FIG.4-3—Population dont le taux de croissance  $a = 3$  avec  $x_0 = 0,3$

On constate que la population pour ce taux de croissance oscille entre deux valeurs, voir Fig(4.3).

Poure  $a = 4$

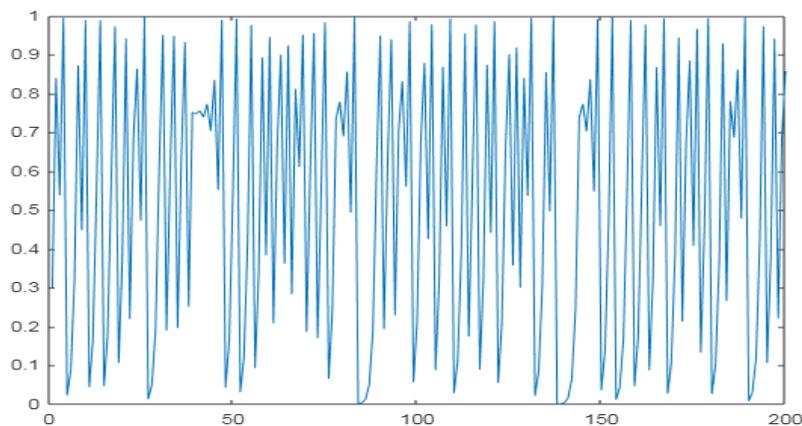


FIG.4-4-Population dont le taux de croissance  $a = 4$  avec  $x_0 = 0,3$ .

Nous avons remarqué dans la figure précédente que le nombre de populations oscille irrégulièrement et devient donc imprévisible, par conséquent, l'évolution des points résultats de récurrence devient non atteinte, voir Fig(4.4)

Lorsque nous choisissons une autre valeur de la population initiale, que pouvons-nous dire ?

Pour la simulation précédente avec une population initiale de  $x_0 = 0.3$  nous avons vu que pour le taux de croissance, le nombre de personnes par génération semble se stabiliser Moins de

3, puis fluctuent entre deux, puis fluctuent entre quatre valeurs, de sorte que le taux de croissance est supérieur à 3. Enfin, ce nombre fluctue irrégulièrement au-delà d'un certain seuil.

Maintenant, essayons d'observer la différence en répétant la simulation précédente

Différentes populations initiales, soit  $x_0 = 0.7$ .

Pour  $a = 1$ ,  $x_0 = 0.7$ .alors, nous obtenons :

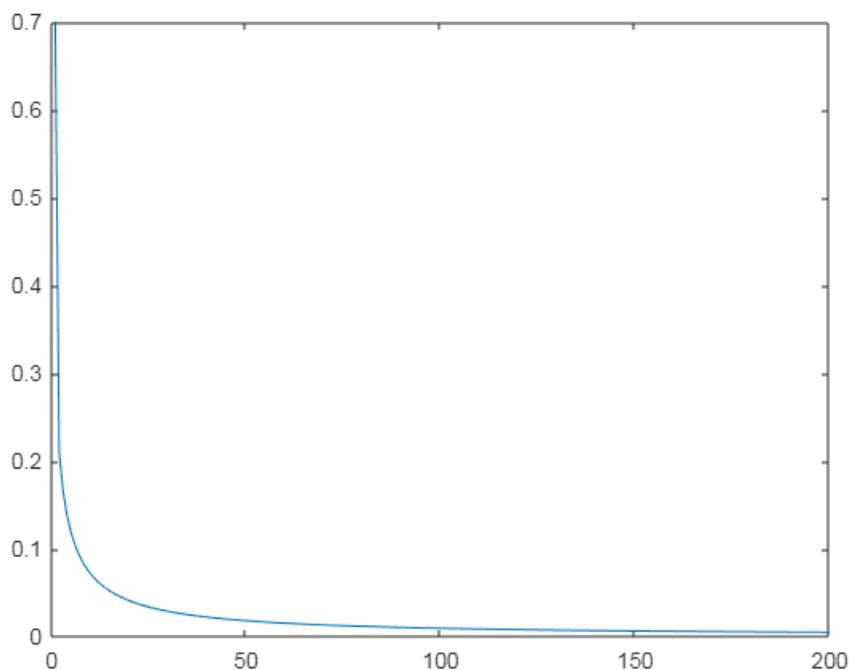


FIG.4-5-Population dont le taux de croissance  $a = 1$  avec  $x_0 = 0,7$ .

Selon Fig(4.1)et Fig(4.5), on constate que : La population tend vers zéro pour les deux populations initiales.

Pour  $a = 2$ ,  $x_0 = 0.7$ .

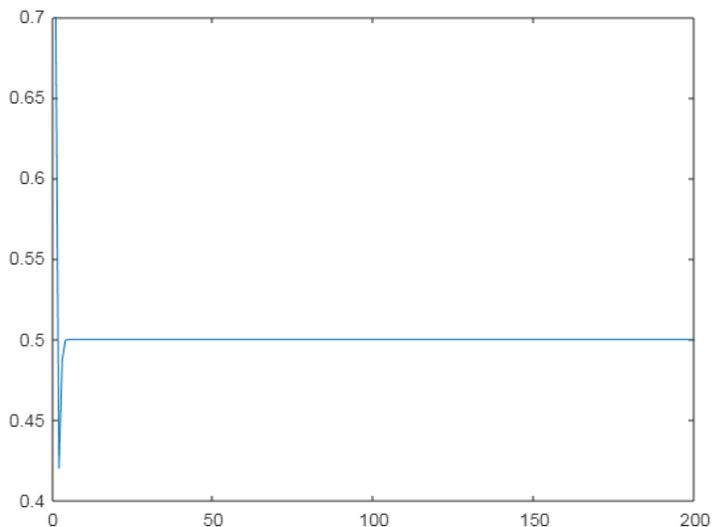


FIG.4-6-Population dont le taux de croissance  $a = 2$  avec  $x_0 = 0,7$ .

Selon Fig(4.2)et Fig(4.6) :Nous ne constatons aucune différence vu le comportement de l'évolution de la population, elle tend vers la même valeur (vers la moitié du diagramme ),

Pour  $a = 3,8$ ,  $x_0 = 0.7$ .

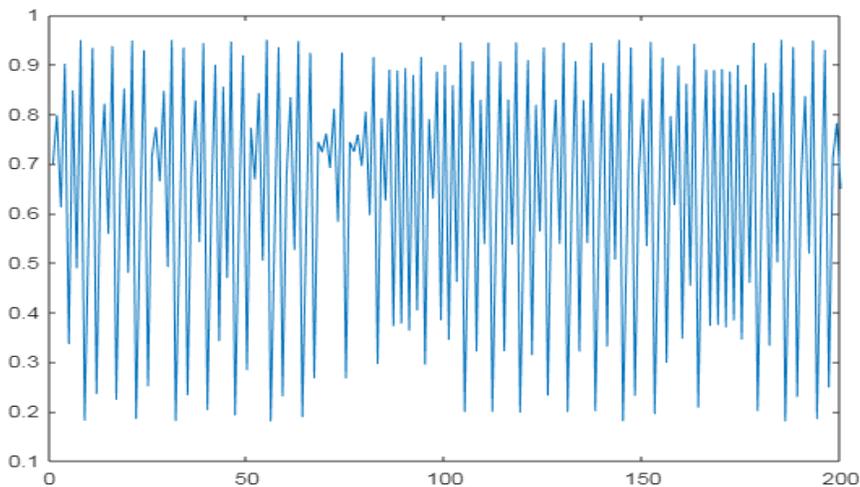


FIG4-7-Population dont le taux de croissance  $a = 3.8$  avec  $x_0 = 0.7$ .

Pour  $a = 3,8$ ,  $x_0 = 0.3$

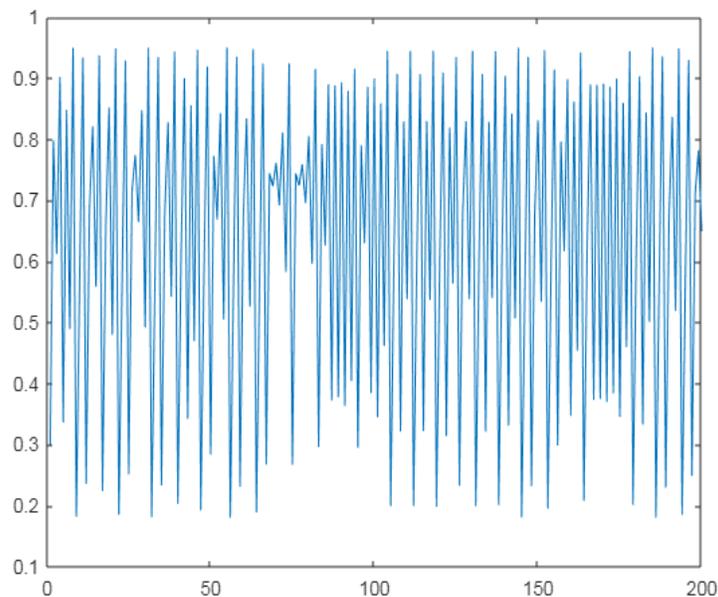


FIG.4-8-Population dont le taux de croissance  $a = 3.8$  avec  $x_0 = 0.3$ .

Selon Fig (4.7) et Fig (4.8) :Nous constatons ici, une évolution de population très différente.

Maintenant si on prend des populations initiales voisines que peut-on voir ?

Pour  $a = 3.8$ ,  $x_0 = 0.7001$ .

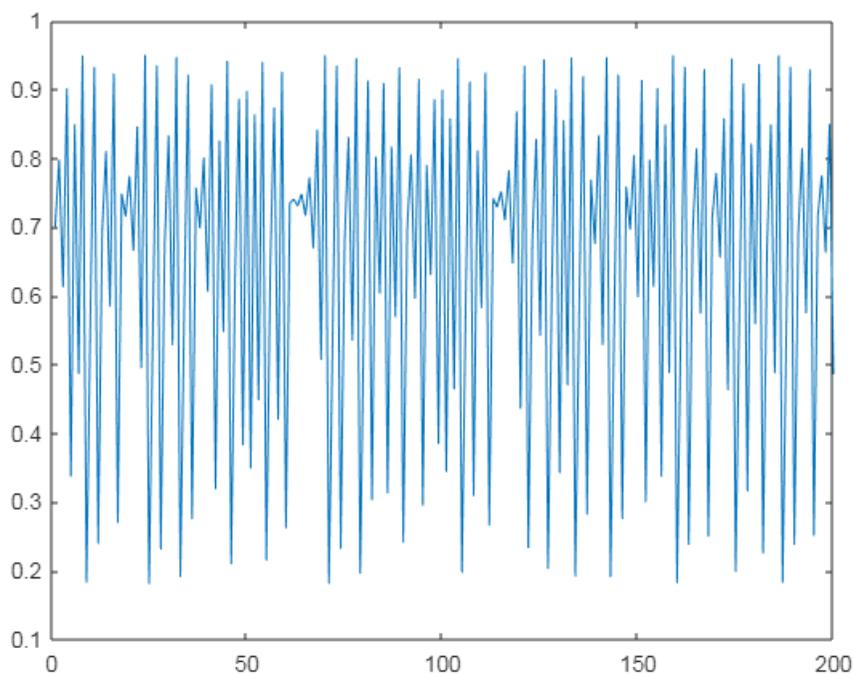


FIG.4-9-Population dont le taux de croissance  $a = 3.8$  avec  $x_0 = 0.7001$ .

Selon Fig(4.7) et Fig(4.9) :On voit ici que l'évolution des populations se comporte différemment, même si elles le font étaient initialement très proches.

Dons, la sensibilité aux conditions initiales est.une partie importante de la théorie du chaos .

#### 4.1.4 Points fixes et orbites périodiques

On considère l'application logistique :

$$m = g'(x^*) / g_a(x) = ax(1-x), \quad x \in [0, 1], \quad a \in [0, 4]$$

$$g_a(x) = x \iff ax(1-x) = x \iff x(a-ax-1) = 0$$

les points fixes de cette équation sont :  $x_1 = 0, x_2 = \frac{a-1}{a}$

maintenemt on vas etudier la stabilité des points fixes

On a :

$$g'_a(x) = -2ax + a$$

D'où

$$m_1 = g'_a(0) = a > 0$$

$$\text{Donc } x_1 \text{ est un point fixe } \left\{ \begin{array}{ll} \text{attractif} & \text{ssi } a < 1 \\ \text{répulsif} & a > 1 \\ \text{on peut rien conclure} & a = 1. \end{array} \right.$$

pour la deuxième point fixe :

on a

$$m_2 = g'_a\left(\frac{a-1}{a}\right) = 2-a$$

$$\text{Le point fixe } x_2 \text{ est alors } \left\{ \begin{array}{ll} \text{attractif} & 1 < a < 3 \\ \text{répulsif} & a < 1 \text{ et } a > 3 \\ \text{douteux} & a = 1 \text{ et } a = 3. \end{array} \right.$$

$$x_2 \text{ est attractif si } \begin{cases} |g'_a(x_2)| = |2 - a| < 1 \\ -1 < 2 - a < 1 \\ \text{donc} & 1 < a < 3 \end{cases}$$

Les points fixes de  $g_a^2$

On a :

$$g_a^2(x) = ag_a(x)(1 - g_a(x)) = (a^2x - a^2x^2)(1 - ax + ax^2) = a^2x(1 - x)(1 - ax + ax^2)$$

On a deux points fixes répulsifs :  $\begin{cases} x_1(a) = 0 \\ x_2(a) = \frac{a-1}{a} (a > 3) \end{cases}$

Et on a deux nouveaux points fixes :

$$x_3(a) = \frac{a + 1 + \sqrt{(a + 1)'a - 3}}{2a}$$

$$x_4(a) = \frac{a + 1 - \sqrt{(a + 1)'a - 3}}{2a}$$

On a donc une orbite périodique de période 2. On peut conclure sa stabilité sachant qu'elle est stable si  $|g'(x_4)g'(x_3)| < 1$  , on a :

$$g'(x_4)g'(x_3) = -a^2 + 2a + 4$$

Donc l'orbite est stable si  $a \in ]3.1 + \sqrt{6}[$

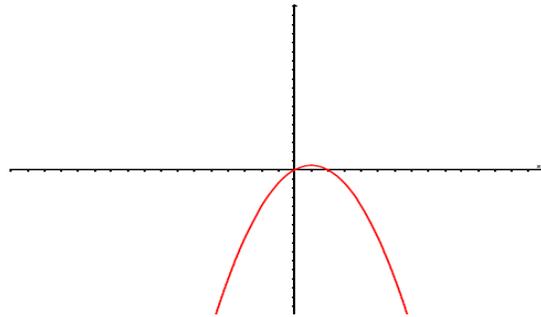


FIG.4-10- Graphe de  $g_a(x)$ .

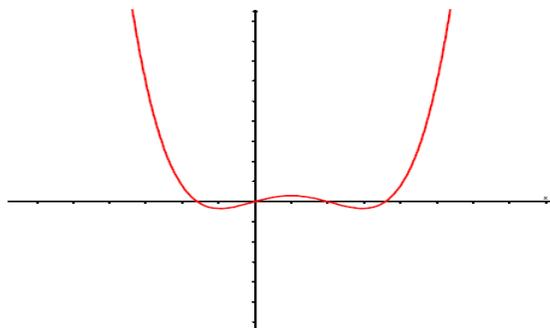


FIG. 4-11- Graphe de  $g_a^2(x)$ .

### 4.1.5 Points fixes super attractifs

**Proposition 4.1** *Pour  $a = 2$  l'application  $g_a$  a un point fixe super attractif.*

**Preuve:** Commençons par chercher le sommet de la parabole  $g_a(x) = ax(1 - x)$ . Nous avons :

$$g_a'(x) = a(1 - 2x)$$

$$g_a'(x) > 0 \text{ pour } x < \frac{1}{2}$$

$x$	0	$\frac{1}{2}$	1
$g_a'(x)$	+	0	-
$g_a(x)$	0	$\nearrow \frac{a}{4} \searrow$	0

Le sommet de la parabole est

$$g_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$$

ce qui implique que  $a = 2$ . ■

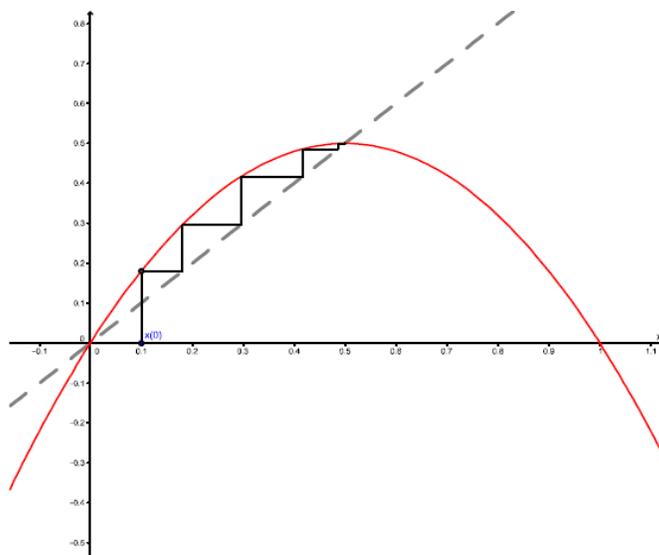


Fig.4-12- Point Fixe super attractif de l'application logistique.

### 4.1.6 Convergence de l'application logistique

**Théorème 4.1** *Pour  $0 < a < 3$ , et pour toute valeur initiale  $x_0 \in I$ , la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente. Pour  $3 < a < 3,44$ , la suite  $(g_a^n(x))$ ;  $x$  dans le voisinage de  $[0; 1]$ , oscille entre deux valeurs,  $g_a$  a une orbite périodique de période 2.*

**Preuve:** Regardons graphiquement le comportement de  $g_a$ . Tout d'abord, pour  $a = 1,5$ , c'est -à-dire  $0 < a < 3$ , la suite  $(g_a^n(x))$ , dans le voisinage de  $[0, 1]$ , converge vers le point fixe, voir Fig (4.13). ■

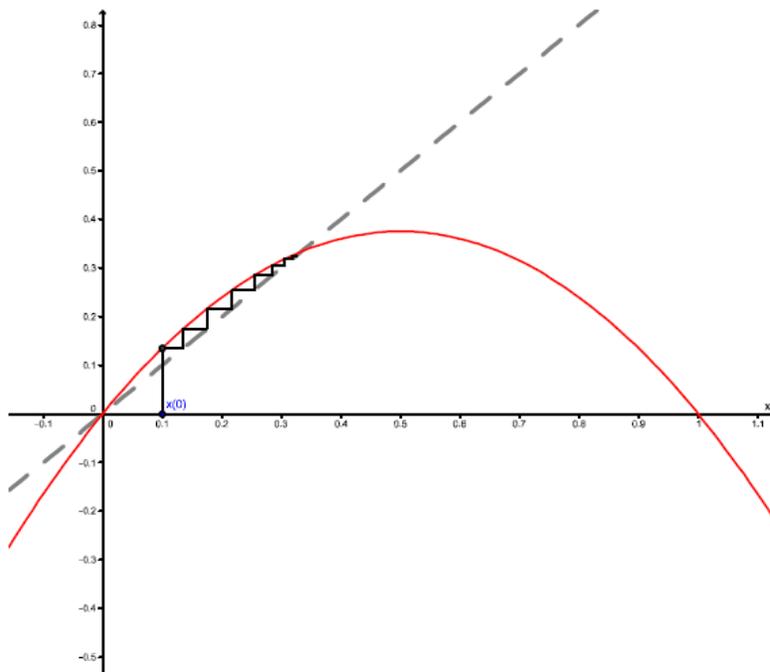


Fig 4-13. Convergence de la suite  $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ,  $x_{n+1} = g_{1,5}(x_n)$  et  $x_0 = 0,1$ .

**Preuve:** Le cas  $0 < a < 1$

Il y a un unique point fixe dans  $I$ , le point 0, qui attractif.

Soit  $x_0 \in I$  :

1. Pour  $x_0 = 0$ , la suite est constante. Pour  $x_0 = 1$  la suite est constante et égale à 0.
2. On suppose  $x_0 \in ]0; 1[$ ; la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroît et converge géométriquement vers 0.

Le cas  $a = 2$

On a  $p_2 = \frac{1}{2}$  et  $f'(p_2) = 0$  donc  $p_2$  est un point super attractif. ■

Pour  $a = 3, 2$  c'est-à-dire  $3 < a < 3,44$ , la suite  $(g_a^n(x))$ ;  $x$  dans le voisinage de  $[0; 1]$ , oscille entre deux valeurs,  $g_a$  a une orbite périodique de période 2, voir Fig (4.14).

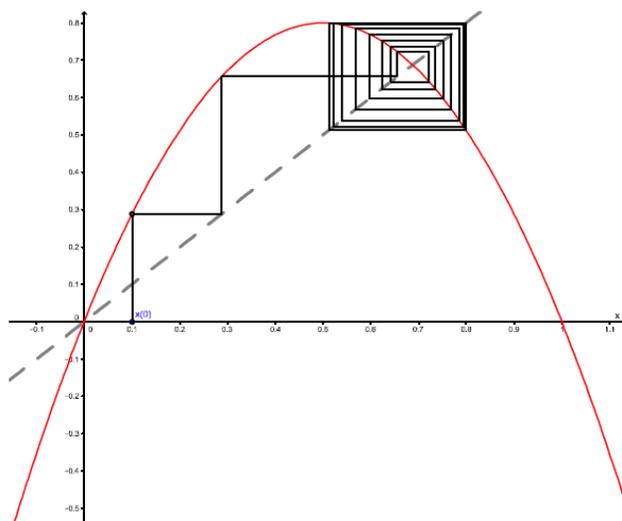


Fig 4-14-Convergence de la suite  $(x_n)_{\mathbb{N}}$ ,  $x_{n+1} = g_{3,2}(x_n)$  et  $x_0 = 0, 1$ .

Il y a deux manières de converger vers le point fixe. Plaçons nous dans le cas  $1 < a < 3$ . Tout d'abord, les points fixes sont 0 (répulsif) et  $p_a = \frac{a-1}{a}$  (attractif). On distingue alors deux comportements : Si la bissectrice  $y = x$  coupe la parabole  $g_a$  avant son sommet, les itérations convergent en escalier vers  $p_a$ , voir Fig (4.15). En revanche si elle coupe la parabole après son sommet, les itérations convergent en spirale vers  $p_a$ ; voir Fig (4.16).

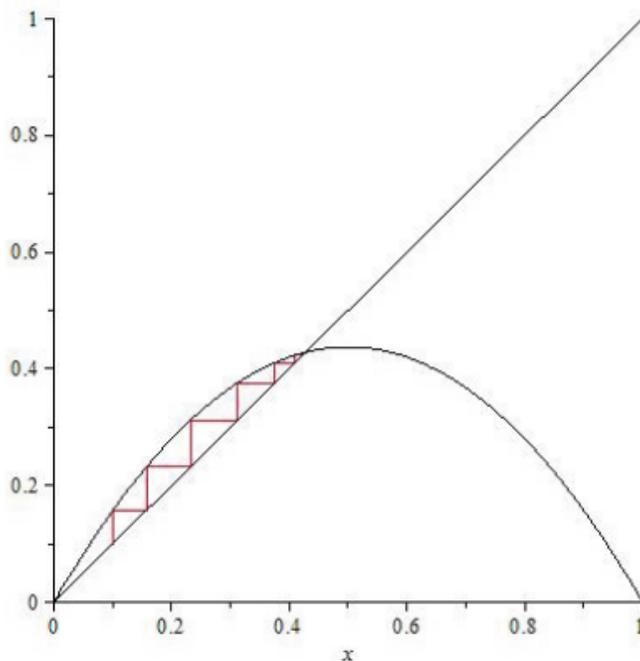


Fig.4-15-Convergence en escalier

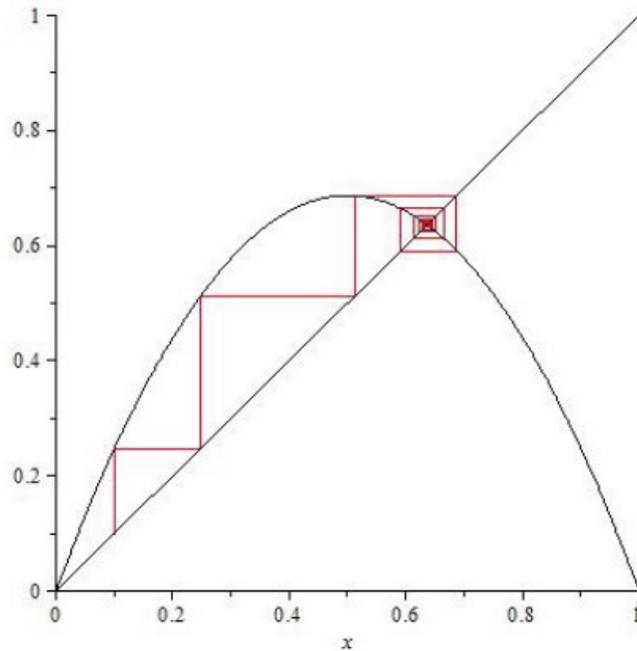


Fig.4-16-Convergence en spirale.

**Divergence grossière vers  $\pm\infty$  de  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$**

En étudiant les variations de l'application  $g_a$  on constate que s'il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $U_p \in ]-\infty, 0[$  ou  $U_p \in ]1, +\infty[$  alors  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $-\infty$ .

Une application directe du théorème des valeurs intermédiaires montre que  $g_a([0, 1]) = [0, \frac{a}{4}]$ . Donc pour  $u_0 \in [0, 1]$  si  $a \leq 4$  alors  $[0, 1]$  est stable par  $g_a$  alors la divergence grossière vers l'infini n'a pas lieu. Si dans ce cas  $a > 4$  alors on sort de cet intervalle et la suite diverge vers l'infini[4].

**4.1.7 Les bifurcations de l'application logistique**

**Proposition 4.2** *L'application  $g_a$  a une première bifurcation en 1 et une deuxième en 3.*

**Proposition 4.3** *L'application  $g_a$  a une troisième bifurcation pour  $a = 3,44$ .*

### Classification des bifurcations

Bifurcations selle-noeud

**Proposition 4.4** *L'application  $g_a$  a une bifurcation selle-noeud en  $a = 1$ . C'est l'unique bifurcation de ce type.*

**Preuve:** On a

$$g'_a(x) = a - 2ax$$

■

Donc

$$g'_1(x) = 1 - 2ax$$

De plus, pour  $a = 1$  le point fixe est 0. D'où,  $g'_1(0) = 1$ . Donc, d'après théorème (2.6)  $a = 1$  est une bifurcation selle-noeud.

### Bifurcation par doublement de la période

**Proposition 4.5** *L'application  $g_a$  a une bifurcation par doublement de la période en 3.*

**Preuve:** Nous avons

$$g'_3(x) = 3 - 6x$$

Pour  $a = 3$  le seul point fixe dans  $I$  est

$$x_3^* = \frac{3 + 1 + \sqrt{(3 + 1)(3 - 3)}}{6} = \frac{2}{3}$$

De plus

$$g'_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

Donc, d'après théorème(2.7)  $a = 3$  est une bifurcation par doublement de la période. ■

**Proposition 4.6** *L'application  $g_a^2$  a une bifurcation fourche en 3,44. Par généralisation c'est une bifurcation par doublement de la période de  $g_a$ .*

**Preuve:** Les points  $x_3$  et  $x_4$  sont fixes pour  $g_a^2$ . Pour  $a = 3, 44$ ; nous avons :

$$x_3 = \frac{a + 1 + \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}$$

et

$$x_4 = \frac{a + 1 - \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a}$$

$$g_a^2(x) = ax(1 - x)(1 - ax(1 - x)).$$

Donc, 3, 44 est une bifurcation par doublement de la période de  $g_a^2$ .

Cette démonstration montre de plus, que les points  $x_3$  et  $x_4$  subissent la même bifurcation. Ainsi lorsque  $x_3$  change de stabilité, il donne naissance à deux points fixes de  $g_a^4$ . Le point  $x_4$  se comporte exactement de la même façon, créant lui aussi deux points fixes de  $g_a^4$ . Il y a création de 4 points fixes pour  $g_a^4$ , et par conséquent d'une orbite périodique de période 4 pour  $g_a$ . Les bifurcations jouent un rôle important dans le diagramme de bifurcation puisqu'elles indiquent un changement de comportement. Nous définissons alors la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , suite des bifurcations par doublement de la période de l'application logistique. Les premiers termes de cette suite sont  $a_1 = 3$  et  $a_2 = 3, 44$ . Une deuxième suite de paramètre est également fondamentale dans l'étude du diagramme, c'est la suite  $(s_n)_N$  définie de telle sorte que pour  $a = s_n$ , l'application  $g_a^{2n-1}$  a un point fixe super attractif. Les termes de cette suite sont appelés paramètres super attractifs et ses premiers termes sont  $s_1 = 2$  et  $s_2 = 1 + \sqrt{5}$ . ■

**Proposition 4.7** *Il y a toujours un paramètre super attractif entre deux bifurcations successives.*

**Preuve:** Regardons ce qui se passe pour les premières bifurcations. La première bifurcation  $a_0 = 1$  est une bifurcation selle-noeud. Si  $p_0$  est le point fixe de  $g_{a_0}(p_0 = 0)$ , alors  $g'_{a_0}(p_0) = 1$ .

Puis, il y a création de deux points fixes  $p_1(a)$  et  $p_2(a)$ ,  $p_1(a) = \frac{a-1}{a}$  et  $p_2(a) = 0$  telle que :

$$\left| g'_{a_0+\varepsilon}(p_2(a_0 + \varepsilon)) \right| = a_0 + \varepsilon > 1$$

Et

$$\left| g'_{a_0+\varepsilon}(p_1(a_0 + \varepsilon)) \right| = \frac{1}{a_0 + \varepsilon} < 1$$

La deuxième bifurcation  $a_1$  apparaît lorsque  $g'_{a_1}(p_1(a_1)) = 1$ . Comme  $g'_{a_0}(p_1(a_0)) > 0$  et  $g'_{a_1}(p_1(a_1)) = -1$ , il existe  $s_1$  tel que  $a_0 < s_1 < a_1$  et  $g_{s_1}(p_1(s_1)) = 0$ . Le point  $s_1$  est donc un paramètre super attractif. Cette nouvelle bifurcation donne naissance à deux points fixes  $q_1(a)$  et  $q_2(a)$  de  $g_a^2$  avec  $0 < |(g_{a_1+\varepsilon}^2)'(q_i(a_1 + \varepsilon))| < 1, (i = 1, 2)$ .

La troisième bifurcation apparaît lorsque  $(g_{a_1+\varepsilon}^2)'(q_i(a_1 + \varepsilon)) = -1$  : Il existe donc un paramètre super attractif  $s_2$  tel que

$$a_1 < s_2 < a_2$$

■

Ce raisonnement se généralise à toutes les bifurcations. Juste après une bifurcation, les points fixes ou les points de l'orbite périodique qui ont été créés, ont une dérivée inférieure à 1 et positive. La bifurcation suivante apparaît lorsque ces points ont une dérivée égale à  $-1$ . Le changement de signe prouve que ces dérivées passent par 0 avant la nouvelle bifurcation, il y a donc un paramètre super attractif.

**Proposition 4.8** *Si la suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une certaine valeur, la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers cette même valeur.*

**Preuve:** Nous connaissons les premiers termes des deux suites  $a_1 = 3$  et  $s_1 = 2$ . Ainsi  $s_1 < a_1$ . de plus, nous avons :

$$s_1 < a_1 < s_2 < a_2 < s_3 < a_3 < \dots$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; s_n < a_n < s_{n+1}$$

Si  $(s_n)_N$  converge vers une valeur  $l$ , alors d'après le théorème des gendarmes la suite  $(a_n)_N$  converge vers la même valeur  $l$ . En effet, elles convergent tous deux vers un point appelé point de Feigenbaum noté  $s_1$  et correspond à  $3,5699456$  : Ce point marque un changement radical dans la dynamique de l'application logistique  $g_a$ . ■

### Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation rend compte le comportement de l'application logistique en fonction du paramètre  $a$ . Sur ce diagramme, en abscisses, sont représentées les différentes valeurs du paramètre  $a$  et en ordonnées celles de  $g_a$ . Nous construisons le diagramme en repérant pour chaque valeur de  $a$  le ou les points de convergence de la suite  $(u_n)_N$  définie par  $u_0 \in [0, 1]$  et  $u_{n+1} = g_a(u_n)$ . Nous obtenons ainsi :

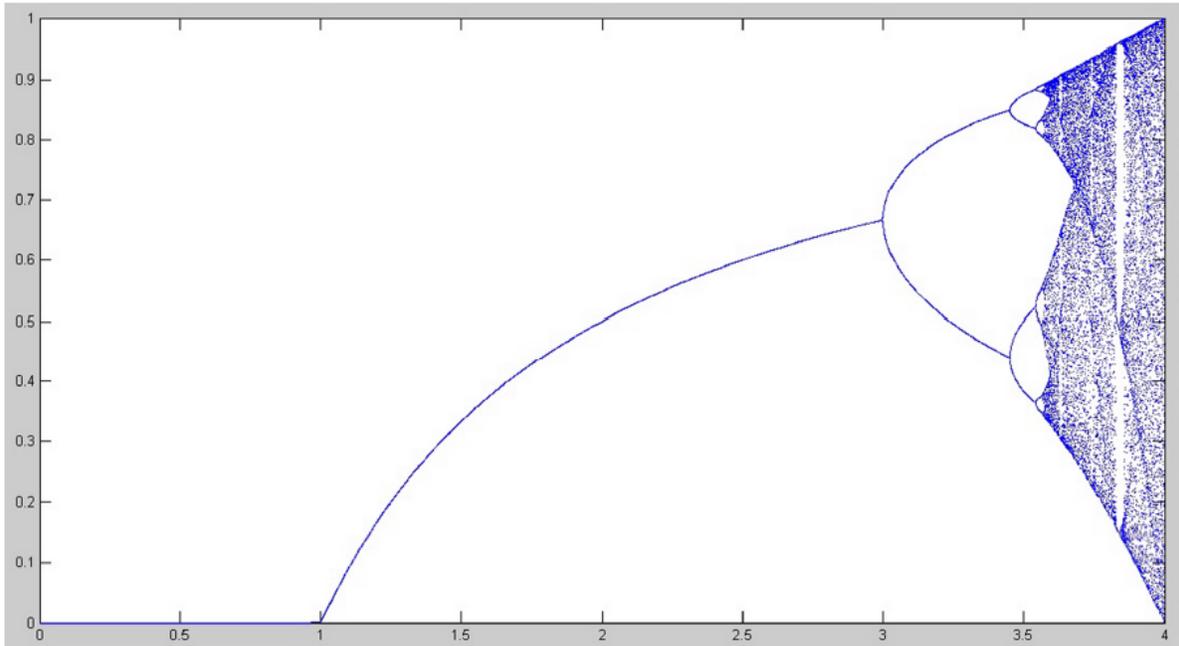


Fig. 4-17-Diagramme de bifurcation de l'application logistique.

Nous retrouvons, bien évidemment, le comportement de l'application logistique décrit dans les parties précédentes.

Pour  $1 < a < 3$ , il n'y a qu'une seule branche. La suite  $(u_n)_N$  précédemment définie converge vers le point fixe.

Pour  $3 < a < 3,44$ , il y a deux branches. Ceci correspond au comportement périodique, l'application  $g_a$  a une orbite périodique de période 2.

En effet l'orbite suivie par  $(u_n)_N$  sera 4-périodique et que de même les orbites continuent de doubler cette période à 8, 16, 32 vers l'infini sur des intervalles de plus en plus petits tels que le rapport entre deux intervalles tendent à diminuer et ce comportement a lieu jusqu'à la constante de Feigenbaum  $s_\infty = 3,5699456$ . Et  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, a_{n+1}) \in [3, s_\infty[$  tel que l'orbite suivie par  $(u_n)_N$

soit périodique sur  $]a_n, a_{n+1}]$ . La démonstration de ce résultat et d'autres résultats beaucoup plus détaillés ont été réalisés par Feigenbaum.

Sur  $[s_\infty, 4]$ , le comportement est globalement chaotique, et nous ne pouvons plus prévoir le comportement de l'application logistique.

### 4.1.8 Le chaos dans l'application logistique

Par exemple, nous utiliserons l'exposant de Lyapunov pour mesurer la sensibilité de différentes valeurs de  $a$  aux conditions initiales de la suite logistique : nous avons vu dans les résultats précédents que lorsque  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet un point ou périodique, celui-ci est indépendant des conditions initiales. Les régions chaotiques devront être très sensibles aux conditions initiales donc dans le cas de ce système discret à une dimension, son exposant de Lyapunov doit être positif. Et plus cet exposant est grand, plus l'orbite est sensible aux petites variations dans les conditions initiales. Sachant cela, il serait intéressant de tracer la courbe des exposants en fonction de  $a$

On a pour  $N$  grand :

$$\begin{aligned}\lambda &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| (g_a^n)'(x_0) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{i=0}^{n-1} \left| g_a'(x_i) \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \left| \ln g_a'(x_i) \right| \\ &= \ln |a| + \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |1 - 2x_i|\end{aligned}$$

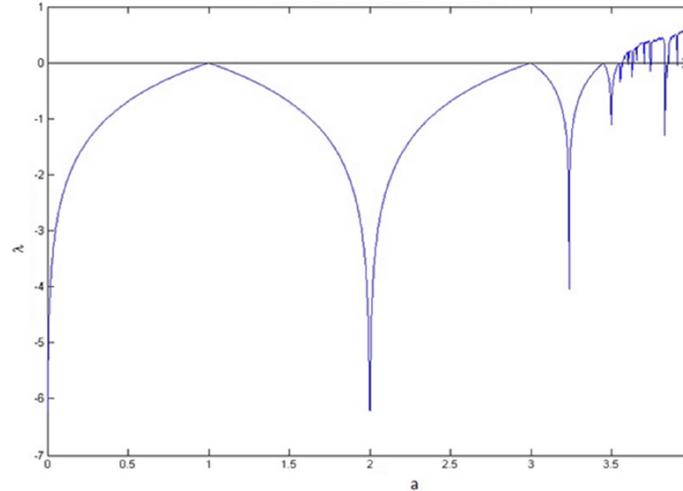


Fig.4-18- L'évolution de l'exposant le Lyapunov  $\lambda$  de système de l'application logistique en fonction de  $a$ .

On constate que sur des intervalles correspondants aux points fixes ou périodiques attractifs, l'exposant de Lyapunov est négatif. On peut remarquer des points où il devient très négatif (serait  $-\infty$  si on ne faisait pas une approximation), c'est lorsqu'un point périodique ou fixe, devient super attractif, la convergence est très rapide. Plus l'exposant est positif, plus les orbites sont sensibles aux conditions initiales, donc chaotiques.

## 4.2 Attracteur de Hénon

L'astronome Michel Hénon exploita la suggestion de Lorenz, pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice (sur la turbulence), en janvier 1976 lorsque Pomeau passe en revue adéquatement cette perspective de ses spéculations. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange. Il est connu depuis sous le nom de système de Hénon et correspond à l'application suivante :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

où  $a, b$  sont des constants.

Il est intéressant de saisir que c'est le démontage du système de Lorenz par Pomeau qui emmène Hénon vers son système. L'étirement et le repliement sont des éléments qui guident Hénon.

Le choix des valeurs des paramètres est plus approximatif et c'est par tâtonnements que des valeurs adéquates de  $a$  et  $b$  sont retenues. Tout l'intérêt du système de Hénon réside dans la facilité de programmer cette opération extrêmement simple, une itération à deux dimensions, simulant les comportements plus complexes des systèmes du type Lorenz. Il devient un système numérique de référence. Ainsi l'attracteur de Hénon est manipulé et les ensembles de Cantor sont visualisés avec leur structure auto-similaire.

D'autres comportements sont mis en évidence. Pour  $b = 0,3$  par exemple, la forme de l'attracteur évolue de manière significative selon les valeurs de  $a$ , pour  $a$  petit, l'attracteur est un point, et lorsque  $a$  augmente il se transforme successivement en 2 points, puis 4, 8 et ainsi de suite par doublement. Hénon rapproche la situation de celle évoquée par May en 1976, et annonce l'existence d'une valeur critique  $a_c = 1,06$  pour laquelle il affirme obtenir un attracteur étrange.

### 4.2.1 Définition du système de Hénon

**Définition 4.2** *Le système dynamique de Hénon est défini par :*

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

Où  $a, b \in \mathbb{R}$

*On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ , et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.*

*Partant d'un point du plan de coordonnées  $(x_0, y_0)$  on peut calculer les coordonnées  $(x_1, y_1)$  du point suivant, et ainsi de suite. Inversement on peut reculer dans de temps aux itérations précédentes grâce à l'inversibilité de l'application de Hénon :*

$$H^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} b^{-1}y \\ x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2 \end{pmatrix}$$

*Où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels, où la valeur de la constante  $a$  contrôle la non-linéarité de*

*l'itération, et celle de  $b$  traduit le rôle de la dissipation.*

*En effet, la matrice Jacobienne  $DH_{a,b}$  est :*

$$DH_{a,b} = \begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

*Le déterminant de la matrice Jacobienne  $\det(DH_{a,b}) = -b$ .*

*Les valeurs habituellement utilisées pour  $a$  et  $b$  sont  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$ .*

*Nous avons fait un programme sur Matlab avec une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  à travers lequel on peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur, voir Fig*

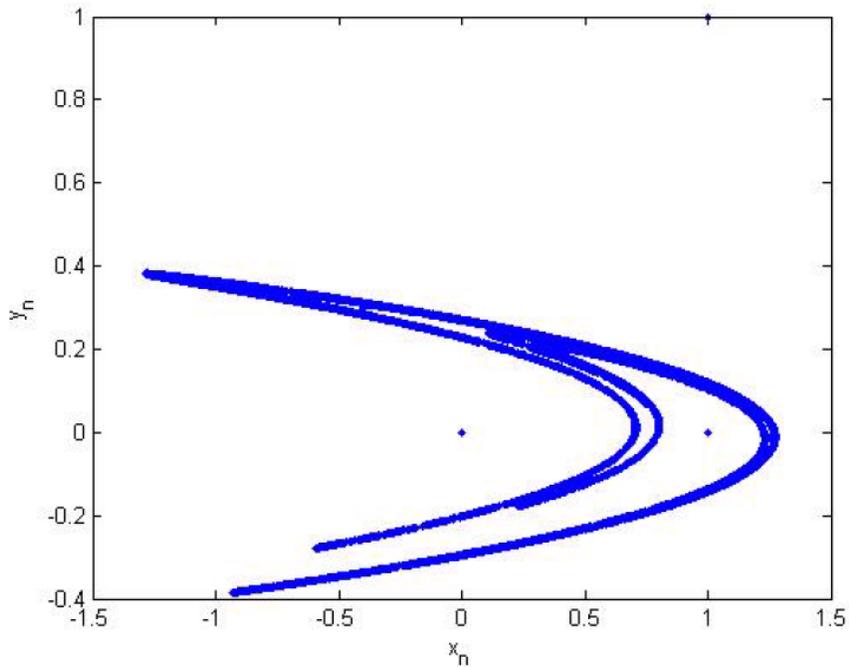


Fig.4-19.-Attracteur de Hénon pour  $H_{a,b}$  pour  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$ .

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables  $x$  et  $y$  pour une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , voir Fig (4.20.) et Fig (4.21).

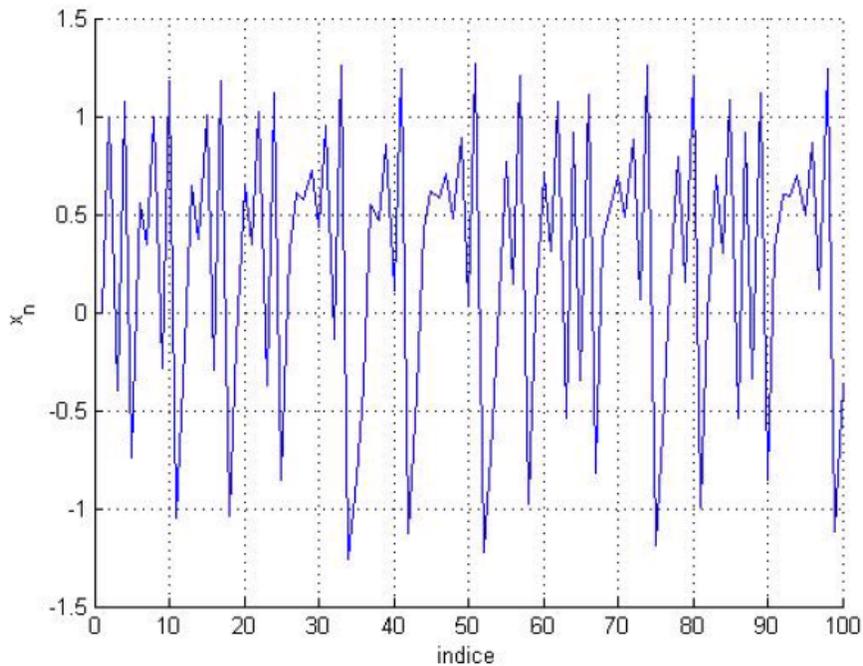


Fig.4-20-Les100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

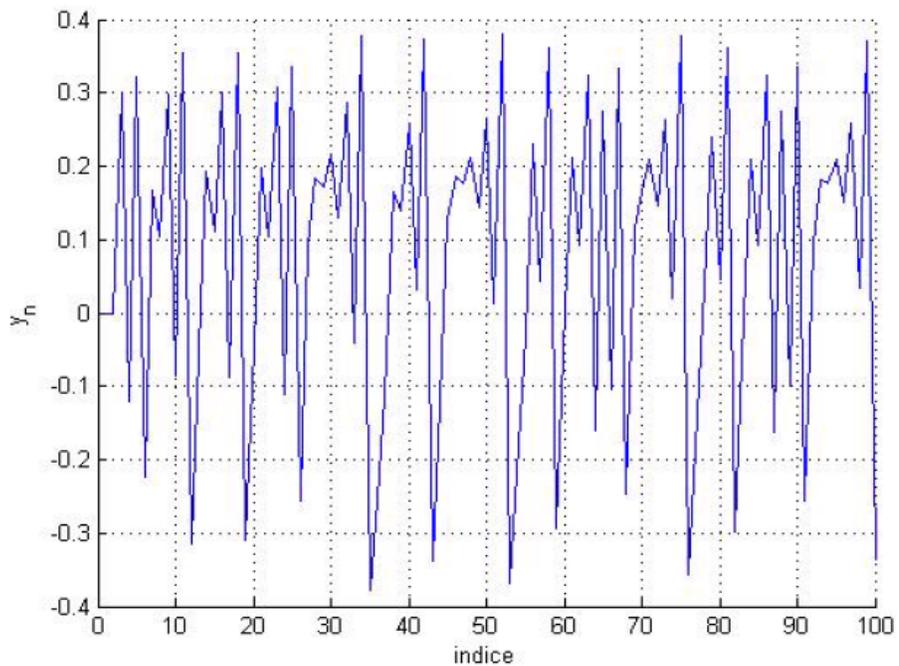


Fig.4-21-Les100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables.

Voyons maintenant que se passe-t-il pour les valeurs  $a = 0,1$ ; et  $b = 0,3$ ?

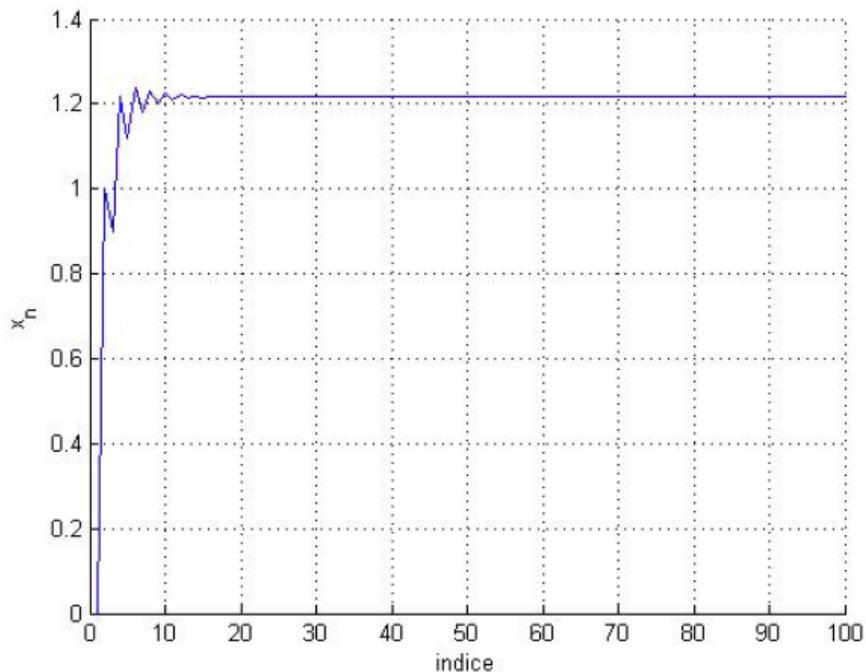


Fig.4-22-Les 100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 0,1$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

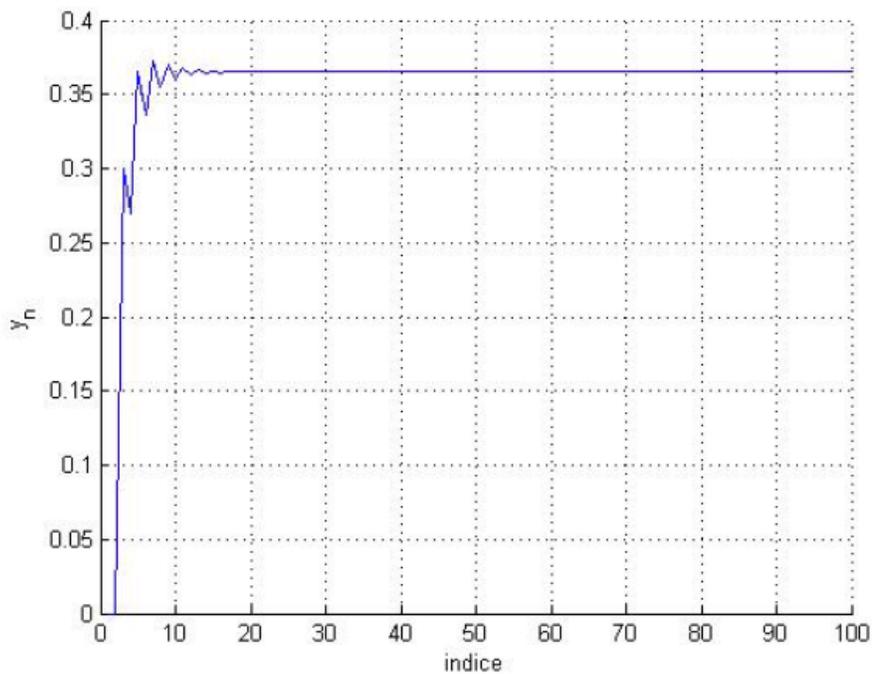


Fig.4-23-Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 0,1$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

On constate une stabilisation de l'évolution de  $x_n$  autour de la valeur 1,2 et de  $y_n$  autour de 0,36, voir Fig (4.22)et Fig(4.23).

Prenons maintenant les valeurs des paramètres  $a = 0,4$  et  $b = 0,3$ .

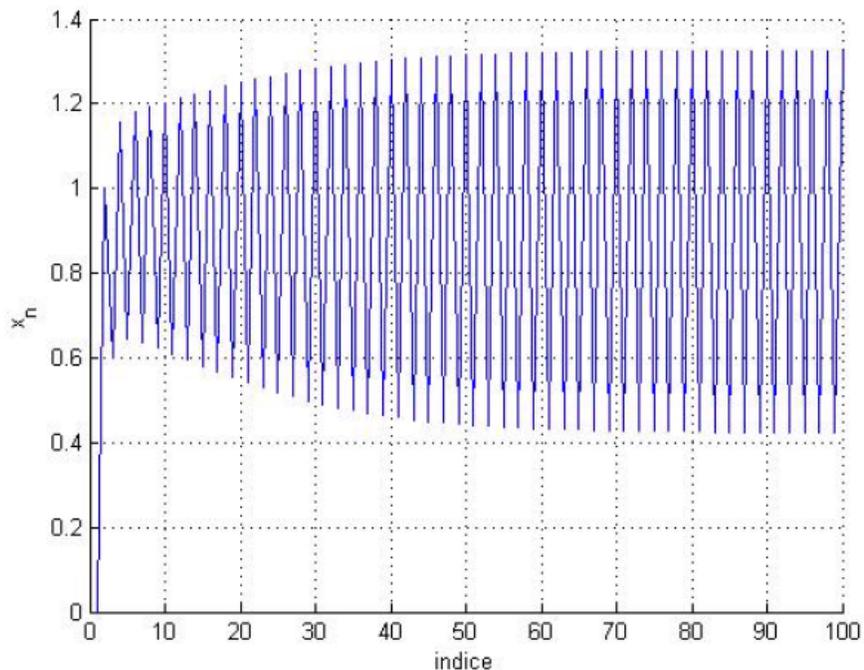


Fig.4-24-Les 100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 0,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

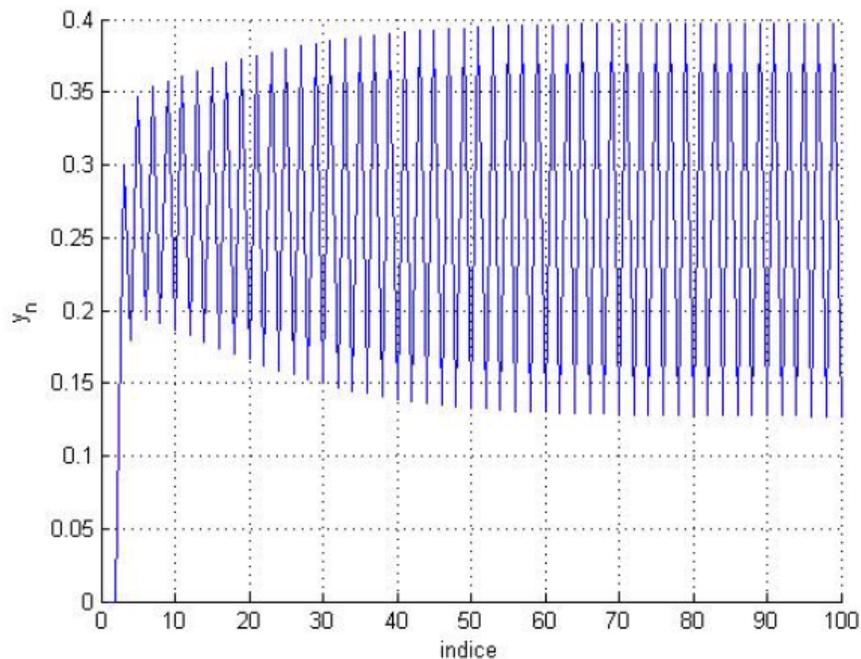


Fig.4-25-Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 0,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 0)$

On constate que l'évolution pour ces valeurs des paramètres est périodique et elle va se

stabiliser à un cycle périodique, voir Fig (4.24) et Fig (4.25).

### 4.2.2 Sensibilité aux conditions initiales

Que-ce passe-t-il quand on choisit des conditions initiales extrêmement voisines ? Prenons par exemple  $(x_0, y_0) = (0, 001; 0, 001)$ .

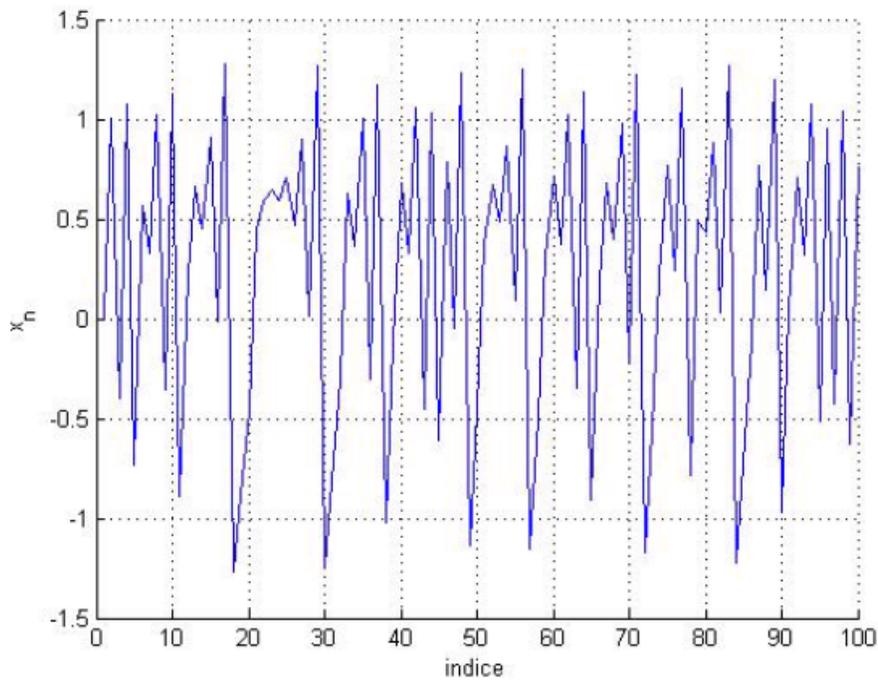


Fig.4-26-Les100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0, 001; 0, 001)$

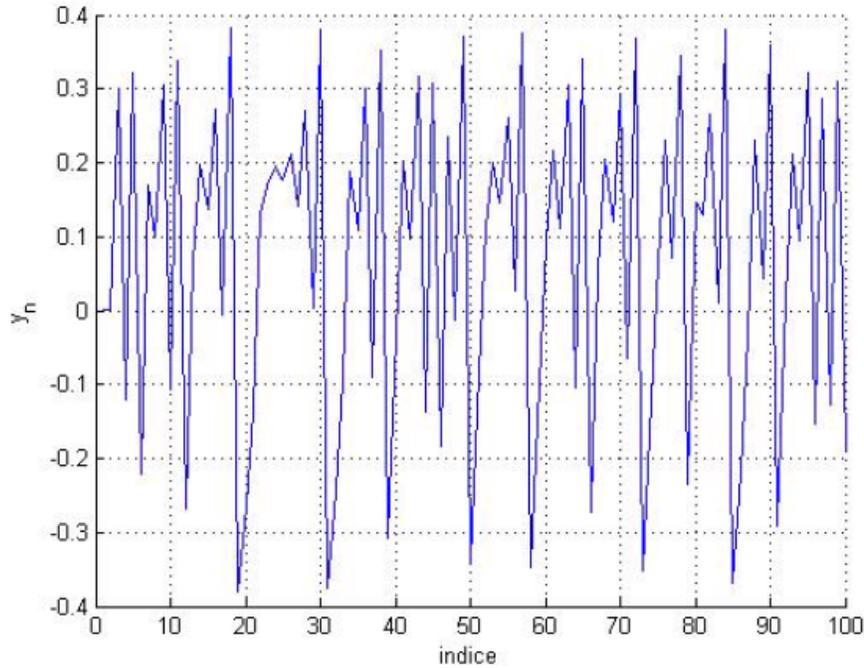


Fig.(4-27)-Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 1,4$  et  $b = 0,3$  avec  $(x_0, y_0) = (0,001; 0,001)$

On constate que les courbes rendues sont différentes de celles quant  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , voir Fig (4.26) et Fig (4.27).

### 4.2.3 Points fixes et stabilité des premières et deuxième itérations

#### *Première itération*

La première itération du système de Hénon introduit déjà dans la section précédente est considéré comme le système original de Hénon donné par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

On peut obtenir les points fixes du système de Hénon en résolvant l'équation  $H_{a,b}(x, y) = (x, y)$  :

$$H_{a,b}(x, y) = (x, y) \Leftrightarrow -ax^2 + (b-1)x + 1 = 0$$

**Théorème 4.2** Pour  $|b| < 1$ , et  $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  on a :

1. Si  $a < a_0(b)$ ,  $H_{a,b}$  n'a aucun point fixe.

2. Si  $a = a_0(b)$ ,  $H_{a,b}$  a un seul point fixe.

3. Si  $a > a_0(b)$ ,  $H_{a,b}$  a deux points fixes.

**Preuve :** Nous obtenons du discriminant de l'équation (3.4) l'équation  $(b - 1)^2 + 4a = 0$ , ce qui implique que :  $a = -\frac{1}{4}(b - 1)^2 = a_0(b)$ .

1. Pour  $a < a_0(b)$ ,  $x_{\pm}(a, b) \notin \mathbb{R}^2$ , donc dans ce cas il n'y a aucun point fixe pour  $H_{a,b}$ .

2. Pour  $a = a_0(b)$ , nous obtenons  $x_+(a, b) = x_-(a, b) = \frac{b-1}{2a}$ . Donc dans ce cas le système  $H_{a,b}$  admet exactement un seul point fixe  $(x_1, y_1) = (\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$ .

3. Pour  $a > a_0(b)$ ; nous avons  $x_+(a, b)$  et  $x_-(a, b)$  dans  $\mathbb{R}^2$  et  $x_+(a, b) \neq x_-(a, b)$ . Dans ce cas nous avons deux points fixes de la forme.

$$(x_1, y_1) = \left( \begin{array}{c} \frac{b-1-\beta}{2a} \\ b(\frac{b-1-\beta}{2a}) \end{array} \right) \text{ et } (x_2, y_2) = \left( \begin{array}{c} \frac{b-1+\beta}{2a} \\ b(\frac{b-1+\beta}{2a}) \end{array} \right)$$

Et les valeurs propres en ces points d'équilibre sont :

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{a} \left( \frac{1}{2}\beta \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}(\beta - b + 1)^2} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right) \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{a} \left( \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}(\beta + b - 1)^2} - \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

Où  $\beta = \sqrt{4a + (b - 1)^2}$ .

Il peut être également démontré que l'un de ces deux points est stable à la sign positive devant le radical, l'autre est toujours instable.

En effet, les valeurs des paramètres connues pour présenter un comportement chaotique sont  $a = 1, 4$  et  $b = 0, 3$  et les deux points d'équilibre du système pour ces paramètres sont  $(1, 1314; 0, 3394)$  et  $(0, 6314; 0, 1894)$ , les valeurs propres au premier point d'équilibre sont  $(2, 3284; -0, 0657)$  et les valeurs propres au deuxième point sont  $(0, 5657; -1, 8284)$  : D'où le premier est un point selle est le deuxième est clairement un point stable. ■

### Deuxième itération

La deuxième itération du système original de Hénon est d'intérêt depuis qu'une bifurcation par doublement de la période est un mécanisme éminent comme révélé dans le diagramme de bifurcation.

Selon la variation de Jacobi la deuxième itération du système de Hénon est donnée par

$$\text{Preuve: } \begin{cases} x_{n+1} = -a^3 x_n^4 + 2a^2 x_n^2 y_n + 2a^2 x_n^2 - ay_n^2 - 2ay_n - a + bx_n + 1 \\ y_{n+1} = b(-ax_n^2 + y_n + 1) \end{cases}$$

Ce système dispose de quatre points d'équilibre dont deux sont hérités du système original de Hénon et les deux autres points d'équilibre sont :

$$(x_3, y_3) = \left( -\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}, -b\left(\left(\frac{b-1}{2a}\right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}\right) \right)$$

et

$$(x_4, y_4) = \left( -\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}, -b\left(\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}\right) \right).$$

La matrice jacobienne s'écrit :

$$DH_{a,b}^2 = \begin{pmatrix} -4a^3 x^3 + 4a^2 xy + 4a^2 x + b & 2a^2 x^2 - 2ay - 2a \\ -2abx & b \end{pmatrix}$$

■

#### 4.2.4 Analyse de bifurcation

Nous procédons en donnant les résultats de stabilité pour le système original de Hénon. Nous rappelons que le système de Hénon a deux points d'équilibre réels pour  $a > -\frac{1}{4}(b-1)^2$ .

**Lemme 4.1** *Pour  $a = \frac{1}{4}(b-1)^2$  et  $\beta = 0$  le système original de Hénon a un unique point d'équilibre en  $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$  avec les valeurs propres  $\{1, -b\}$  indiquant une bifurcation selle-noeud.*

**Preuve:** En substituant  $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2$  et  $\beta = 0$  dans l'équation (3,3) les deux points d'équilibre se trouvent à s'imbriquer les uns les autres en  $(\frac{b-1}{2a}, b(\frac{b-1}{2a}))$ . Le jacobien du système

en ce point d'équilibre est :

$$\begin{pmatrix} 1 - b & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

■

Et ainsi les valeurs propres sont  $\{1, -b\}$ .

On considère la bifurcation selle-noeud avec un exemple numérique.

**Proposition 4.9** *Pour  $b = 0,3$  et  $a = -0,1225$ , on a une bifurcation selle-noeud.*

**Preuve:** Pour  $b = 0,3$  et  $a = -0,1225$ ; le point d'équilibre du système est  $(2, 8571; 0, 8571)$  indiquent une bifurcation selle-noeud avec une branche stable et une branche instable montrées dans la *Figure(3.28)*. La région de  $a$  de la branche stable est comprise entre  $-0,1225 \leq a \leq 0,3675$ . ■

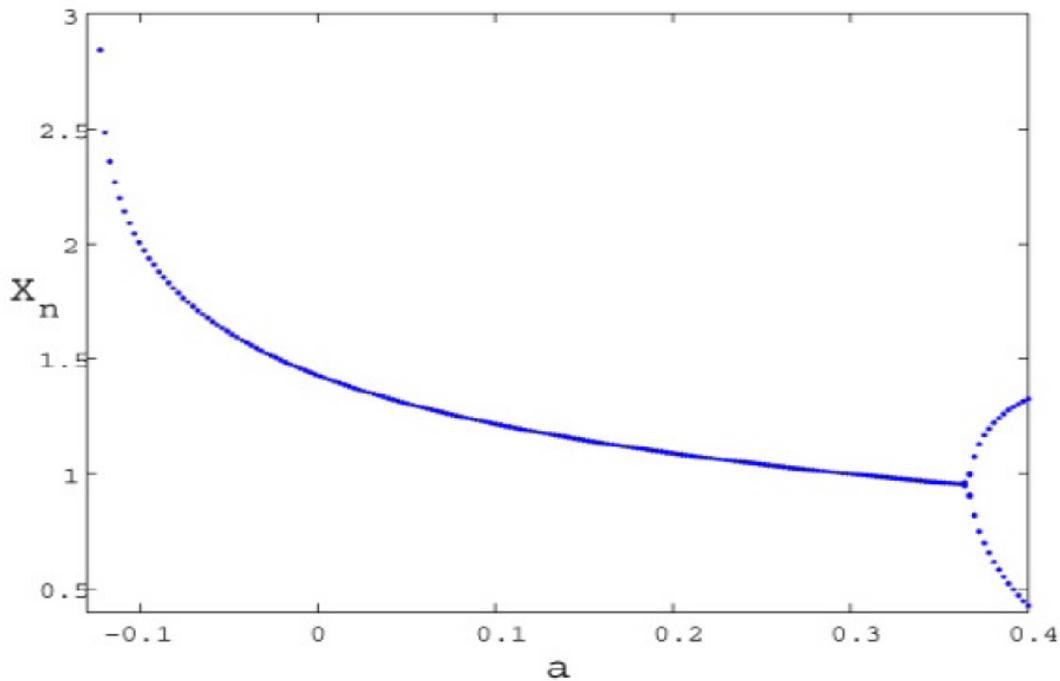


Fig.4-28-Diagramme de Bifurcation pour le système original de Hénon pour  $-0,15 \leq a \leq 0,4$  et  $b = 0,3$ .

**Proposition 4.10** *Pour le cas particulier de  $a = 0,3675$  une bifurcation par doublement de la période est observée.*

**Preuve:** Pour  $a = \frac{3}{4}(b - 1)^2 = 0,3675$ ; le système original de Hénon et la deuxième itération du système original de Hénon a deux points d'équilibre complètement imbriqués en  $(0,9524; 0,2857)$ . Les valeurs propres pour le système original de Hénon sont  $\{-1; 0,3\}$  et  $\{2,2343; -0,1343\}$ ; et les valeurs propres pour la deuxième itération du système original de Hénon sont  $\{1; 0,09\}$  et  $\{4,9920; 0,0180\}$ . En effet, quand  $a$  s'approche de  $0,3675$ , une orbite périodique 2 est constatée. ■

De plus, l'analyse de stabilité pour la valeur du paramètre  $a = 0,2$  donne les deux points d'équilibre  $(1,08945; 0,326836)$  et  $(-4,58945; -1,376836)$  et les valeurs propres  $\{0,371580; -0,80736213\}$  et  $\{1,986779; 0,1509981\}$  respectivement. Le premier point d'équilibre est un point stable et le deuxième est un point sell.

Pour les mêmes valeurs des paramètres la deuxième itération du système de Hénon a quatre points d'équilibre, dont deux sont complexes conjugués i.e.  $(1,75 \pm 2,046338i; 0,525 \pm 0,6139i)$  et les deux autres sont hérités du système original de Hénon respectivement. Les valeurs propres pour les points d'équilibre complexes conjugués sont  $\{1,7072; 0,05271\}$  et les valeurs propres pour le troisième point d'équilibre sont  $\{0,138072; 0,6518336\}$  et pour le quatrième point d'équilibre  $\{0,0228; 3,9472\}$ . Les points d'équilibres complexes conjugués sont des point selles, le troisième est stable et le quatrième est un point selle comme prévu.

Les points d'équilibre en  $a = 0,3675$  sont  $(0,95238; 0,285714)$  et  $(-2,857142; -0,857142)$  et leurs valeurs propres associées sont  $\{0,3; -1\}$  et  $\{2,234271; -0,134271\}$ . Par conséquent, le premier point d'équilibre donne naissance à une bifurcation par doublement de la période et le deuxième point d'équilibre est un point selle.

En  $a = 0,9125$  un attracteur de période 4 a lieu comme montré dans la *figure(4.29)*.

Pour  $a = 1$ , les points d'équilibre sont  $(0,70948; 0,21284)$  et  $(-1,40948; -0,42284)$  et les valeurs propres sont  $\{0,186824; -1,60578\}$  et  $\{2,921643; -0,102681\}$  respectivement. Les deux points d'équilibre sont des points selles.

Pour  $a = 1,2$  et  $b = -0,1$  les points d'équilibre sont  $(0,563137; 0,0563137)$  et  $(-1,4798; 0,14798)$  et les valeurs propres sont  $\{-0,0785562; -1,2729739\}$  et  $\{0,0283838; 3,523146\}$  respectivement.

Les deux points d'équilibre sont des points selles. Autour du premier point d'équilibre une orbite périodique de période 2 est observée. Considérons la deuxième itération du système original de Hénon avec les mêmes conditions,  $y$  en a quatre points d'équilibre dont deux sont les mêmes qu'on avait de la première itération. Les valeurs propres sont  $\{1,620462; 0,0061710\}$  et  $\{12,41256; 0,000805\}$ . Encore les deux points d'équilibre sont des points selles. Le système fait disparaître son comportement périodique observé pour la première itération et l'incrémement de l'itération du système fait de ce système plus chaotique et compliqué qu'un multipériodique.

### 4.2.5 Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre  $a$  de 0 à 1,4 avec un pas de 0,001,  $b$  est égale à 0,3. On obtient le diagramme suivant :

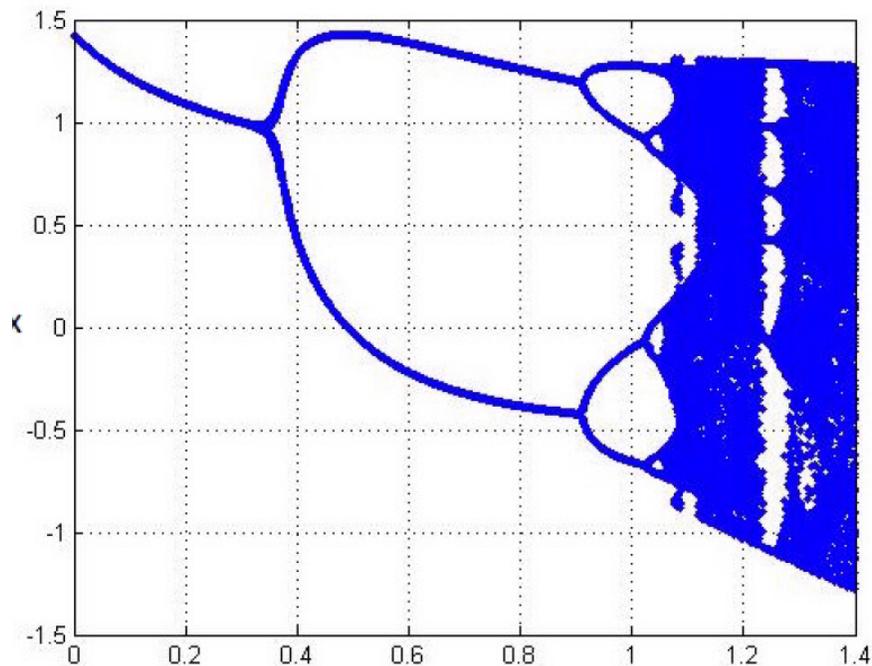


Fig.4-29- Diagramme de bifurcation de Hénon

- Si  $-0,1225 < a < 0,3675$ , les itérations convergent vers un point du plan,
- Si  $0,3675 < a < 0,9$ , les itérations tendent à constituer une suite  $(x_n, y_n)$  telle que  $(x_{2n}, y_{2n})$  converge vers un point et  $(x_{2n+1}, y_{2n+1})$  converge vers un autre point. On a donc deux points limites : on observe un doublement de période.

- Si  $0,9 < a < 1,02$ , on assiste à un nouveau doublement de période.

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour  $a \geq 1,02$ , on ne distingue plus les cycles, et donc le système est chaotique.

### 4.2.6 Bassin d'attraction de Hénon

Les itérations ne convergent pas pour toutes les conditions initiales  $(x_0, y_0)$ . L'ensemble des conditions initiales pour lequel les itérations convergent est le bassin d'attraction de l'attracteur.

Un calcul numérique permet de construire une partie de ce bassin d'attraction ; voir *fig(4.30)*.

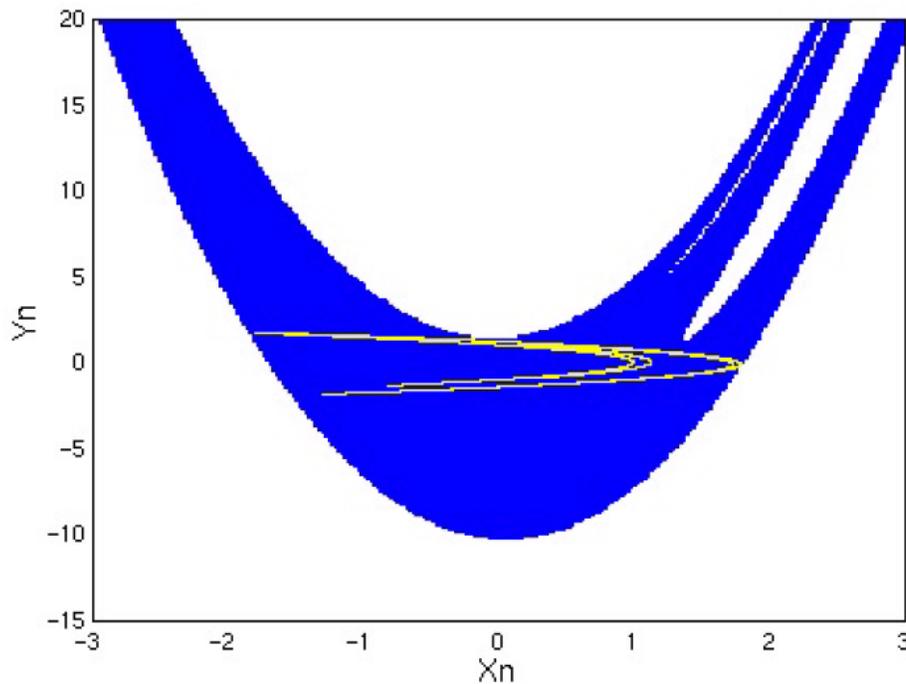


Fig.4-30-. Bassin d'attraction de l'attracteur de Hénon pour  $a= 1,4$  et  $b = 0,3$ .

### 4.2.7 Le chaos dans le système de Hénon

Dans l'étude de la stabilité du système de Hénon, on remarque que les valeurs propres sont en fonction des points fixes qui sont aussi en fonction des paramètres  $a$  et  $b$ . Donc, pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre  $a$  ou  $b$ .

On fixe

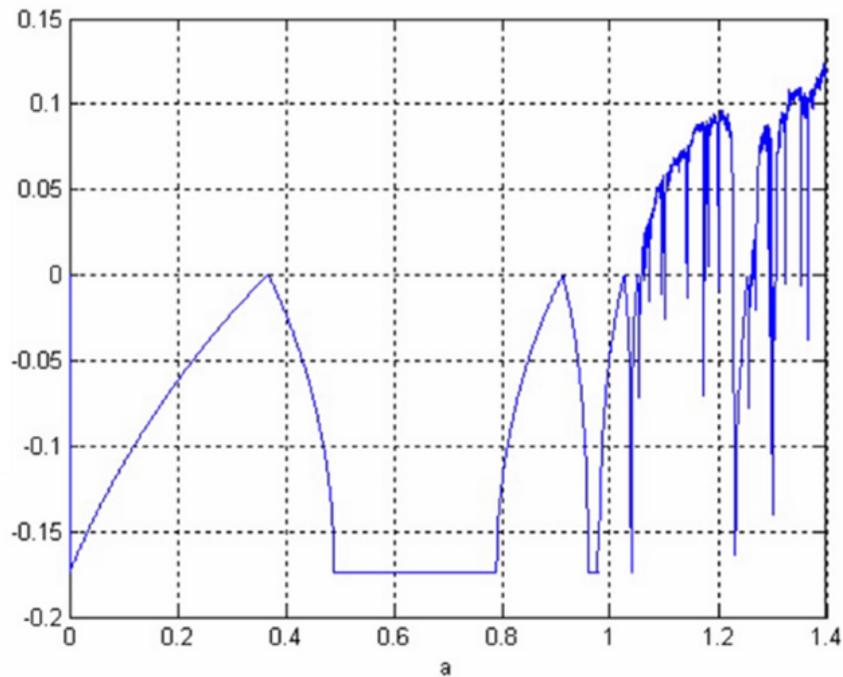


Fig.4-31- L'évolution de l'exposant le Lyapunov  $\lambda$  de système de Henon en fonction de  $a$ .

et  $b = 0,3$ , et on laisse  $a$  varier entre 0 et 1,4.

A partir de la *Figure(3.31)* on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $[0; 1,052]$ .
- une zone chaotique lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $]1,052; 1,4]$ .

### 4.3 Application de Lozi

La récurrence de Lozi est obtenue en remplaçant  $x_k^2$  dans la récurrence de Hénon par  $|x_k|$  et en modifiant la valeur des paramètres cela peut prouver strictement la nature chaotique du système itératif de Lozi  $L(x, y)$ .

**Définition 4.3** Le système dynamique de Lozi est défini par :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - a|x_k| + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

$a, b$  représentent des paramètres des bifurcation  $(a, b) \neq (0, 0)$  dans la zone où les orbites restent bornée, le système peut présenter un comportement régulier ou chaotique

### 4.3.1 Propriétés de l'application de Lozi

- L'application de Lozi n'est pas différentiable.
- Si  $a = 0$ , L'application de Lozi est une application linéaire, donc on pose toujours  $a \neq 0$ .
- L'application de Lozi est inversible, son inverse est

$$L^{-1}(x, y) = \begin{pmatrix} b^{-1}y \\ x - 1 + \frac{a}{b}|y| \end{pmatrix}$$

- Le déterminant de la matrice jacobienne est égale à  $|J| = -b$ , alors il y a contraction des aires pour  $|b| < 1$ .
- Cette application possède deux points fixes hyperbolique défini par

$$\begin{cases} p_1 = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{1}{1+a-b}\right) \text{ si } b < a + 1 \\ p_2 = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{1}{1-a-b}\right) \text{ si } b < -a + 1 \end{cases}$$

### 4.3.2 La Stabilité

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne

$$Df(x) = \begin{pmatrix} -a \frac{\partial |x|}{\partial x} & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique de la matrice jacobienne est

$$\lambda^2 + a\lambda - b \text{ pour } p_1$$

$$\lambda - a\lambda - b \text{ pour } p_2$$

### Stabilité de $P_1$

**Proposition 4.11** : le point fixe  $p_1$  peut être stable quand  $(a, b)$  se trouve dans le triangle de sommets  $(1, 0), (-1, 2), (-1, -2)$  sur l'espace des paramètres et instable si :

$$b < -1, b < a + 1, b < 1 - a$$

Le polynôme caractéristique distinctif vaut  $\Delta = a^2 + 4b$

Pour  $b > \frac{-a^2}{4}$ , les valeurs propres sont des réelles.

Pour  $b < \frac{-a^2}{4}$ , les valeurs propres sont des complexes.

Elle sont de module inférieur à 1 si  $b > -1, b < a + 1$  et  $b < 1 - a$ . Et le point fixe  $P_1$  est stable.

Les valeurs propres sont de module supérieur à un si  $b < -1, b < a + 1$  et  $b < 1 - a$ . Et le point fixe  $P_1$  est instable.

Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| > 1$  si  $b > a + 1$  et  $b > 1 - a$ .

Et le point fixe  $P_1$  est un point selle ou col.

### Stabilité de $P_2$

L'existence de  $P_2$  est pour  $b > -a + 1$ , et les valeurs propres sont toujours des réelles.

Elle sont de modules supérieurs à un si  $b > -a + 1, b > a + 1$ . Et le point fixe  $P_2$  est instable.

Les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont  $|\lambda_1| < 1$  et  $|\lambda_2| > 1$  si  $b > a + 1$  et  $b > 1 - a$ .

Et le point fixe  $P_2$  est un point selle ou col.

### 4.3.3 Attracteur de lozi

L'attracteur chaotique de Lozi est représenté sur la Figure pour les valeurs numériques  $a = 1,7$  et  $b = 0,5$  avec une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  à travers lequel on peut voir la forme d'attracteur dans la figure (4.32).

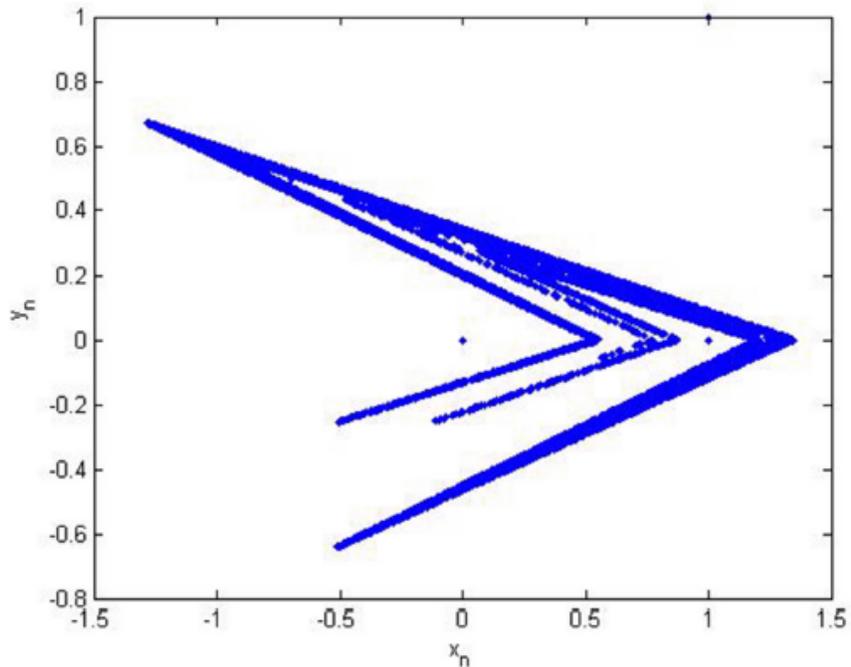


Fig.4-32-Attracteur chaotique de Lozi pour  $a = 1,7$  et  $b = 0,5$ .

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables  $x$  et  $y$  pour une condition initiale  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ , voir *Figure(4.33)* et *Figure(4.34)*.

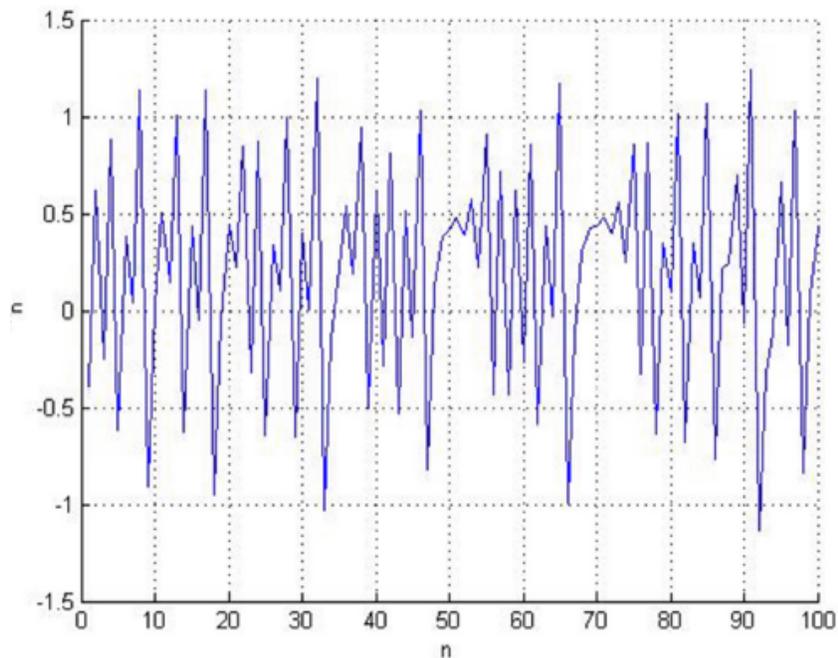


Fig.4-33-Les 100 premières itérées de  $x_n$  avec  $a = 1,7$  et  $b = 0,5$ .

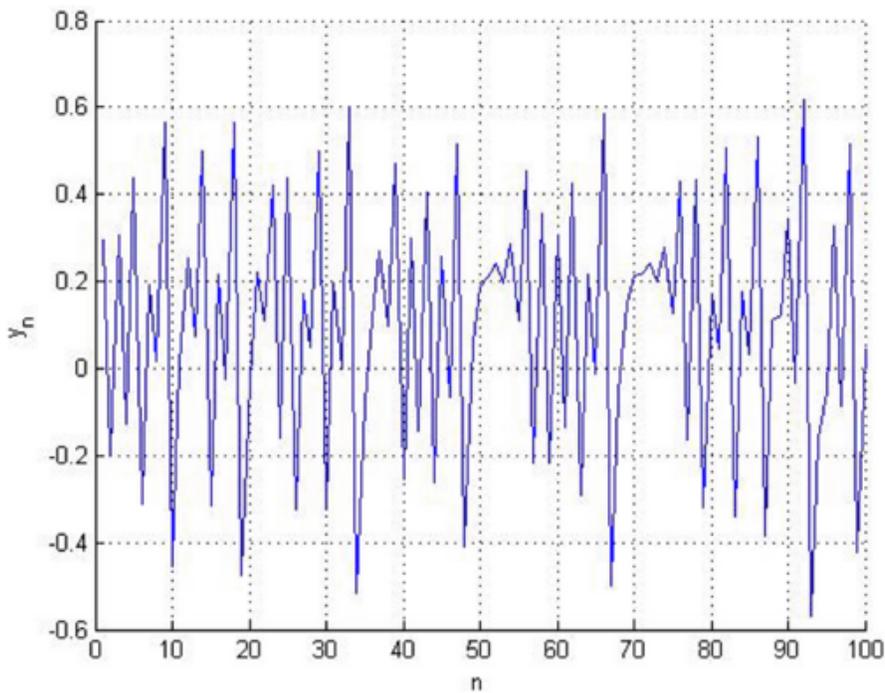


Fig.4-34-Les 100 premières itérées de  $y_n$  avec  $a = 1,7$  et  $b = 0,5$ .

On constate que l'évolution est chaotique pour les deux variables (voir Fig (4.34) et Fig(4.35)), qui se justifie par le diagramme de bifurcation sur la figure (4.35). Fig 2-37.

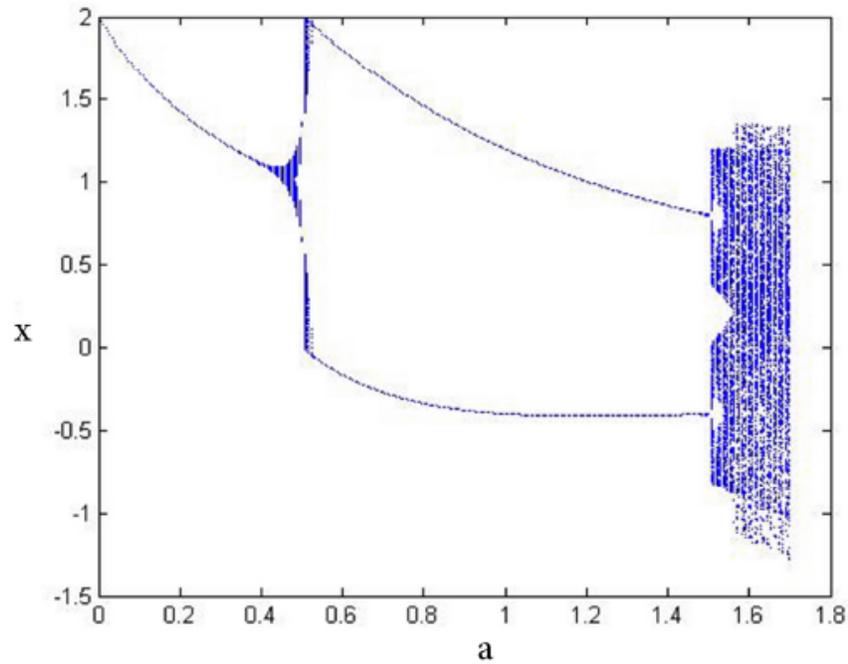


Fig.4-37-Diagramme de bifurcation de Lozi.

#### 4.3.4 Le chaos dans le système de Lozi

De même on peut calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre  $a$  ou  $b$  pour le système de Lozi.

On fixe  $b = 0,3$ , et on laisse  $a$  varier entre 0 et 1,8.

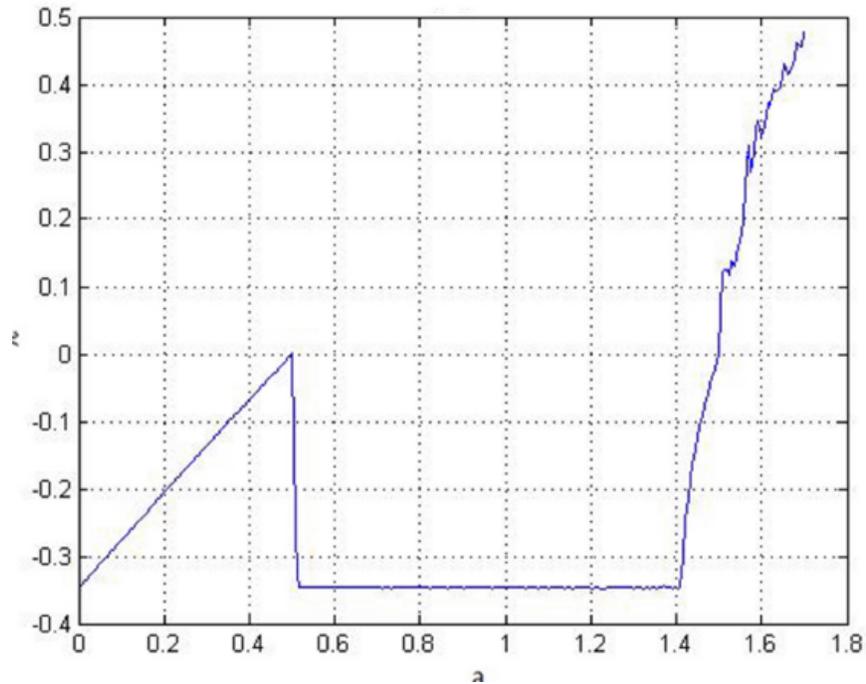


Fig.4-38. L'évolution de l'exposant le Lyapunov  $\lambda$  de système de Lozi en fonction de  $a$ .

A partir de la Figure (4.38) on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $[0; 1,5]$ .
- une zone chaotique lorsque  $a$  varie dans l'intervalle  $]1,5; 1,8]$ .

# Chapitre 5

## Conclusion générale

L'une des choses qui est très importantes dans tous les domaines c'est la notion du chaos. En effet, en physique, en météorologie bien sûr, mais aussi en biologie et chimie, en économie pour estimer les paramètres de distribution, ainsi qu'en étudiant leur comportement à long terme et en sciences sociales. En cryptographie, la découverte de signaux chaotiques peut alourdir l'accusation, et aussi détruire un tel message devant les pirates, est une grande révolution dans le monde de la communication, ces signaux de nature très imprévisible et qui ne semblaient pas faciles à contrôler sont déterministes, mais très sensibles aux conditions initiales et ont une apparence pseudo-aléatoire, ce qui fait du chaos un phénomène très intéressant pour cacher des signaux d'information pour leur transmission sécurisée.

Finalement, je veux dire que l'objectif principale de notre mémoire c'est de présenter le système dynamique et d'étudier de manière approfondie les concepts de base du système, tels que le point fixe et la stabilité, suivi de différents types de bifurcations, ce qui nous permet de détecter un comportement chaotique à travers plusieurs caractéristiques, notamment la sensibilité aux conditions initiales, l'exposant de Lyapunov et les attracteurs singuliers. De plus, nous prêtons attention aux comportements chaotiques dans les systèmes les plus célèbres de la littérature, qui impliquent des perturbations imprévisibles à un ensemble de paramètres, et ont une grande praticité et des citations dans de nombreuses disciplines telles que les applications logistiques, le modèle Hénon, application lozi, système Lorenz, etc.

# Bibliographie

- [1] Aziz-Alaoui, M. A, Robert, C and Grebogi, C 2001. Dynamics of a Hénon-Lozi-type map Chaos,Solitons and Fractals 12, 2323-2341.
- [2] Aziz Alaoui, Carl Robert, Celso Grebogi, Dynamics of a Henon-Lozi type map, unversity of California, 2000.
- [3] Alligood K T, Sauer T D and Yorke J A Chaos : an introduction to dynamical systems 1996 (Springer, NY).
- [4] Boukhalfa-El hafsi, Sur le chaos et synchronisation dans les systemes dynamique discrets, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, l'Université Badji Mokhtar Annaba, 2017.
- [5] Eduardo, L., Ruiz-Herrera, A. (2012), “Chaos in discrete structured population models,” J. Appl. Dyn. Syst., Vol. 11(4), pp. 1200–1214.
- [6] Hamaizia Tayeb, Systemes Dynamiques et Chaos, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, l'Université de Constantine 1, 2013.
- [7] Hale, J.K., Kocak, H. Dynamics and Bifurcations. Applied Mathematics,Publisher Springer-Verlag New York, 1991.
- [8] Khalil, H. K. (1996), Nonlinear Systems Second edition, Prentice-Hall.
- [9] Lozi, R., (1978), “Un Attracteur étrange du Type Attracteur de Hénon,” Journal de Physique,Vol. 39, pp.9-10.
- [10] Masri Soufiane, Systèmes dynamiques discrets, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université Mohamed Khider, Biskra, 2019.

- [11] Misiurewicz, M. 1980. Strange attractors for the Lozi mappings Ann. N.Y. Acad. Sci. 357-348-358.
- [12] Matsumoto, T, Chua, L. O., Kobayashi, K. (1986), "Hyperchaos : laboratory experiment and numerical confirmation,"IEEE Transactions on Circuits and Systems, CAS-33 Vol. (11), pp. 1143-1147.
- [13] Orhan. Ozgur Aybar, I. Kusbeyzi Aybar, and A. S. Hacinliyan, Stability and Bifurcation in the Henon Map and its Generalizations, Yeditepe University, Istanbul, Turkey,2013.
- [14] Rabiaa Ouahabi, Systèmes dynamiques et chaos : Différents méthodes de contrôle et de synchronisation, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université Mentouri de Constantine, 200.
- [15] Seigneur Agathe sous la direction de Rechtman Ana, Les bifurcations de l'application logistique,Septembre 2012.
- [16] Steven H. Strogatz, Nonlinear dynamics and chaos, 1994.
- [17] Talbi Ibtissen, Systèmes dynamiques non-linéaires et phénomène de chaos, Thèse de Magistère, Université Mentouri de Constantine, 2010.
- [18] Thomas HOET, LORENZI Baptiste, SAHIN Serdar, La cryptographie chaotique, 2 IMACS-Promotion 48, 2011-2012.
- [19] X.X. Wu, Z. Chen, Introduction of Chaos Theory, Shanghai Science and Technology, Biblio- graphic Publishing House, 1996.
- [20] Zeraoulia Elhadj, Etude de quelques types de systèmes chaotiques :généralisation d'un modèle issu du modèle de Chen, Thèse de 3<sup>ème</sup> cycle, Université Mentouri de Constantine, 2006.