



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques

Option : Equations aux dérivées partielles et applications
Thème

Synchronisation des systèmes chaotiques et hyper-chaotiques par la méthode de contrôle adaptatif

Présenté Par :

Harrache Randa

Beghil Souad

Devant le jury :

<i>Mr : A.Ouannas</i>	<i>MCA</i>	<i>Université Larbi Tébessi</i>	<i>Président</i>
<i>Mr : L.Bougherara</i>	<i>MAA</i>	<i>Université Larbi Tébessi</i>	<i>Examineur</i>
<i>Mr : F.Hannachi</i>	<i>MCA</i>	<i>Université Larbi Tébessi</i>	<i>Encadreur</i>

Date de soutenance : 13/09/2020

Dédicace

À l'homme de ma vie, mon exemple éternel, mon soutien moral et source de joie et de bonheur, celui qui s'est toujours sacrifié pour me voir réussir, que Dieu te garde toujours, à toi mon père "Mohamed".

À la lumière de mes jours, la source de mes efforts, la flamme de mon cœur, ma vie et mon bonheur ; maman que j'adore "Habiba".

Aux personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagné durant mon chemin d'études supérieures, mes aimables amies, collègues d'étude, et soeurs de cœur : Messaouda, Iméne, Nawel, Houda, Zahia, Bouthaina, Randa, Aya, Karima , Aicha, Foulla, Kamillya et Fadia.

SOUAD BEGHIL

Dédicace

À ma mère "Mahbouba" qui a joué le rôle de le père et la mère, qui m'a entouré d'amour, d'affection et qui fait tout pour ma réussite, qui Dieu le garde ;

À ma belle-sœur "Atra" et ses petites filles "Nayra" et "Nihad".

À mes frères pour leurs encouragements et leurs aide ;

Aux mes très chères amies : Hasna, Fatma et Dhouha symbole de la tendresse et de fidélité, à ma binôme Souad qui j'ai partagé ce travail avec ;

À mes collègues des études et toutes les personnes qui m'ont toujours aidé et encouragé, qui étaient toujours à mes côtés.

RANDA HARRACHE

Remerciement

On remercie Dieu le tout puissant de nous avoir donné la santé et la volonté d'entamer et de terminer ce mémoire.

*Tout d'abord, ce travail ne serait pas aussi riche et n'aurait pas pu avoir le jour sans l'aide et l'encadrement de **Mr Fareh Hannachi** on le remercie pour la qualité de son encadrement exceptionnel, pour sa patience, sa rigueur et sa disponibilité durant notre préparation de ce mémoire.*

*Nous sommes conscientes de l'honneur que nous a fait **Mr Adel Ouannas** en étant président du jury et **Mr Lyazid Boughrara** d'avoir accepté d'examiner ce travail.*

*On remercie aussi **Mr E. Zeraouia**, **Mr K. Akroute** et **Mr A. Hafdhallah** pour leurs aides et leur encouragements.*

Nos remerciement s'adresse également à tout nos professeurs pour leurs générosités et la grande patience dont ils ont su faire preuve malgré leurs charges académiques et professionnelles. Nos profonds remerciements vont également à toutes les personnes qui nous ont aidés et soutenue de près ou de loin.

Merci à tous.

Résumé

Dans ce travail, nous nous concentrerons sur l'utilisation de la méthode de contrôle adaptatif pour réaliser certains types de synchronisation pour quelques systèmes chaotiques et hyper-chaotiques (identiques et non identiques) à temps continu. Nous avons donné le schéma adaptatif pour les types de synchronisation réalisés puis nous appliquons ces schémas à quelques systèmes chaotiques et hyper chaotiques dans les deux cas identiques et non identiques sur la base de la théorie de stabilité de **Lyapunov** lorsque les paramètres sont inconnus ou initialement incertains.

Enfin, des simulations numériques en **Matlab** sont utilisées pour illustrer l'efficacité et la justesse de l'approche de chaque type de synchronisation selon cette méthode de contrôle.

Mots clés: Système dynamique, chaos, attracteur étrange, système chaotique, système hyper-chaotique, contrôle adaptatif, synchronisation.

Abstract

In this work, we will focus on the use of the adaptive control method to achieve some kind of synchronization for some chaotic and hyper chaotic (identical and not-identical) continuous time systems.

We have given the adaptive scheme for the types of synchronization to be achieved, then we apply these schemes to some chaotic and hyper chaotic systems in both identical and not-identical cases on the basis of **Lyapunov's** stability theory when the parameters are unknown or initially uncertain.

Finally, numerical simulations in **Matlab** are used to illustrate the efficiency and the correctness of the approach of each type of synchronization according to this control method.

Key words: Dynamic system, chaos, strange attractor, chaotic system, hyper-chaotic system, adaptive control, synchronization.

ملخص

في هذا العمل سوف نركز على إستخدام طريقة التحكم التكميلي لتحقيق بعض أنواع المزامنة لبعض الأنظمة الفوضوية والجد فوضوية (المتطابقة و غير المتطابقة) في الزمن المستمر. لقد قدمنا مخططاً تكميلاً لأنواع المزامنة المراد تحقيقها, ثم نطبق هذه المخططات على بعض الأنظمة الفوضوية والجد فوضوية في كلتا حالتها التطابق وعدم التطابق وهذا على أساس نظرية الاستقرار لليابونوف عندما تكون المعاملات غير معروفة أو غير مؤكدة في البداية. أخيراً, تم إستخدام المحاكاة العددية بواسطة برنامج **ماتلاب** لتوضيح كفاءة وصحة تقارب كل نوع من أنواع المزامنة وفقاً لطريقة التحكم المستعملة.

الكلمات المفتاحية : نظام ديناميكي, فوضى, جاذب غريب, نظام فوضوي, نظام جد فوضوي, تحكم تكميلي, مزامنة.

Table des matières

1	Généralité sur les systèmes chaotiques et les méthodes de synchronisation	7
1.1	Systèmes dynamiques	7
1.1.1	Système dynamique à temps discret	7
1.1.2	Système dynamique à temps continu	8
1.1.3	Points d'équilibres :	8
1.2	Espace des phases, variables d'état et portrait de phases	9
1.3	Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu	9
1.4	Bifurcations	10
1.4.1	Types du bifurcations	11
1.5	Chaos	11
1.5.1	Système chaotique	11
1.5.2	Attracteurs étranges (chaotiques)	12
1.5.3	Exposant de Lyapunov	12
1.6	Synchronisation	13
1.6.1	Principe de synchronisation des systèmes chaotiques :	14
1.6.2	Types de synchronisation	15
1.6.3	Techniques et stratégies de synchronisation	17
1.7	Conclusion	19
2	Synchronisation des systèmes chaotiques par la méthode de contrôle adaptatif	20
2.1	Formulation du problème et description des systèmes	20
2.2	Méthodologie de la méthode de contrôle adaptatif pour la synchronisation des systèmes	21
2.2.1	Méthodologie de la méthode de contrôle adaptatif pour la synchronisation complète	21

2.2.2	Méthodologie de la méthode de contrôle adaptatif pour l'anti synchronisation	22
2.3	Description et contrôle adaptatif d'un nouveau système chaotique	23
2.4	Synchronisation adaptatif des systèmes chaotiques identiques en 3D	26
2.4.1	Synchronisation complète	26
2.4.2	Anti synchronisation	31
2.5	Synchronisation des systèmes chaotiques non identiques	35
2.5.1	Synchronisation complète	35
2.5.2	Anti synchronisation	39
2.6	Conclusion	43
3	Synchronisation des systèmes hyper chaotiques par la méthode de contrôle adaptatif	45
3.1	Description et contrôle d'un nouveau système hyper chaotique	45
3.1.1	Représentation du système hyper chaotique	46
3.1.2	Contrôle adaptatif du système hyper chaotique (3.1) :	46
3.2	Synchronisation hybride des systèmes hyper chaotiques	49
3.2.1	Conception du contrôleur de synchronisation hybride adaptatif	49
3.3	Application du contrôle adaptatif pour la synchronisation hybride des systèmes hyper chaotiques	51
3.3.1	Cas des systèmes hyper chaotiques identiques	51
3.3.2	Cas des systèmes hyper chaotiques non identiques	57
3.4	Conclusion	60
3.5	Conclusion générale	61

Table des figures

Fig 1.1-Projection de l'attracteur du système (1.9) dans le plan (x, z) pour $a = 16; b = 5; c = 10; d = 6; e = 18; m = 0.5$.	13
Fig 1.2-Projection de l'attracteur du système (1.9) dans le plan (x, y) pour $a = 16; b = 5; c = 10; d = 6; e = 18; m = 0.5$.	13
Fig 2.1-Convergence des états contrôlés $x_1(t); x_2(t); x_3(t)$ du système (2.15).	26
Fig 2.2-Synchronisation complète des états x_1 et y_1 pour les systèmes (2.15) et (2.30).	29
Fig 2.3-Synchronisation complète des états x_2 et y_2 pour les systèmes (2.15) et (2.30).	29
Fig 2.4-Synchronisation complète des états x_3 et y_3 pour les systèmes (2.15) et (2.30)cas identique.	30
Fig 2.5-Historique temporel de l'erreur de la synchronisation complète des systèmes (2.15) et (2.30).	30
Fig 2.6-Historique temporel des paramètres des estimations de la synchronisation complète des systèmes (2.5) et (2.30).	31
Fig 2.7-Anti synchronisation des états x_1 et y_1 des systèmes (2.15) et (2.30) cas identique.	33
Fig 2.8-Anti synchronisation des états x_2 et y_2 des systèmes (2.15) et (2.30).	33
Fig 2.9-Anti synchronisation des états x_3 et y_3 des systèmes (2.5) et (2.30).	34
Fig 2.10-Historique temporel de l'erreur de l'anti synchronisation des systèmes (2.15) et (2.30).	34
Fig 2.11-Historique temporel des paramètres des estimations pour anti synchronisation des systèmes (2.15) et (2.30).	35
Fig 2.12-Synchronisation complète des états x_1 et y_1 pour les systèmes (2.59) et (2.60) cas non identique.	38
Fig 2.13-Synchronisation complète des états x_2 et y_2 pour les systèmes (2.59) et (2.60) cas non identique.	38
Fig 2.14-Synchronisation complète des états x_3 et y_3 pour les systèmes (2.59) et (2.60) cas non identique.	39

Fig 2.15-Historique temporel de l'erreur de synchronisation complète des systèmes (2.59) et (2.60) cas non identique.	39
Fig 2.16-Anti ynchronisation des états x_1 et y_1 pour les systèmes (2.59) et (2.60) cas non-identique.	42
Fig 2.17-Anti ynchronisation des états x_2 et y_2 pour les systèmes (2.59) et (2.60) cas non-identique.	42
Fig 2.18-Anti-ynchronisation des états x_3 et y_3 pour les systèmes (2.59) et (2.60) cas non-identique.	43
Fig 2.19-Historique temporel de l'erreur de l'anti-synchronisation des systèmes (2.59) et (2.60) cas non-identique.	43
Fig 3.1-Historique des états contrôlés x_1, x_2, x_3, x_4 du système (3.1).	48
Fig 3.2-Synchronisation complète des états x_1 et y_1 pour les systèmes (2.29) et (2.30) cas identique.	54
Fig 3.3-Anti synchronisation des états x_2 et y_2 pour les systèmes (2.29) et (2.30) cas identique.	55
Fig 3.4-Synchronisation complète des états x_3 et y_3 pour les systèmes (2.29) et (2.30) cas identique.	55
Fig 3.5-Anti synchronisation des états x_4 et y_4 pour les systèmes (2.29) et (2.30) cas identique.	56
Fig 3.6-Historique temporel de l'erreur de la synchronisation hybride des systèmes (2.29) et (2.30) cas identique.	56
Fig 3.7-Historique temporel de l'erreur de la synchronisation hybride cas non identique du systèmes (3.46) et (3.47).	59

Introduction Générale

Une grande partie des systèmes dynamiques non linéaires sont des systèmes chaotiques qui sont sensibles aux conditions initiales. Cette sensibilité est parmi les idées de base du chaos et la signature la plus visible de son comportement. Ce phénomène est ancien mais a été mis en évidence par **Lorenz** en utilisant l'effet papillon [1]. Pour un système dynamique, la sensibilité aux conditions initiales est quantifiée par les exposants de Lyapunov qui mesurent la divergence exponentielle des trajectoires proches. En général, lorsqu'un exposant de **Lyapunov** est positif et que la somme des exposants de **Lyapunov** est négative, nous dirons que le système est chaotique et a un attracteur étrange. **Lorenz** a découvert le premier système chaotique 3D [1] en 1963, puis de nombreux systèmes chaotiques 3D ont été découverts tels que système Rössler, système **Chen**, système **Lü**, système **Liu Chen**, système **Zhu**, système **Sprott**, système **Vaidyanathan** ... etc. Le chaos en tant que phénomène non linéaire important a été étudié en sciences, en mathématiques, en ingénierie et dans de nombreuses autres disciplines. La synchronisation des systèmes chaotiques est devenue un domaine de recherche actif en raison de ses applications potentielles dans différentes zones industrielles. Les premiers temps de synchronisation chaotique ont été illustrés par **Fujiska** et **Yamada** en 1983, puis par **Pecora** et **Carroll** [6] en 1990, ont présenté une nouvelle méthode très efficace pour la synchronisation de deux systèmes chaotiques avec des conditions initiales différentes.

Ces dernières années, des nombreuses méthodes de synchronisation pour les systèmes chaotiques et hyper chaotiques ont été introduites et appliquées telles que ; Méthode OYG [10], méthode de conception backstepping [11], contrôle du mode coulissant [12], contrôle passif [13], contrôle flou [14], contrôle actif non linéaire [15, 16], synchronisation projective [17], synchronisation de fonction projective [18], synchronisation globale [19, 20] ... etc. La méthode de contrôle adaptatif est utilisée lorsque les paramètres sont inconnus ou initialement incertains. Dans une méthode adaptative, la loi de commande et la loi de mise à jour des paramètres sont conçues de telle sorte que le système de réponse chaotique se comporte comme des systèmes d'entraînement chaotiques. Cette méthode de contrôle diffère des autres méthodes de contrôle car elle ne nécessite pas d'informations préalables sur les limites de ces paramètres incertains ou variant dans le temps car elle se rapporte à une loi de contrôle qui se modifie.

Ce mémoire contient les trois chapitres suivants :

Le premier chapitre a pour principal objectif d'introduire quelques notions sur les systèmes dynamiques et la théorie du chaos.

Le deuxième chapitre est consacré sur la synchronisation des systèmes chaotiques 3D (identiques et non identiques) à temps continu par la méthode de contrôle adaptatif.

Dans **le troisième chapitre** nous concentrerons à la synchronisation des systèmes hyper chaotiques 4 D (identiques et non identiques) à temps continu par la méthode de contrôle adaptatif.

Chapitre 1

Généralité sur les systèmes chaotiques et les méthodes de synchronisation

Ce chapitre est étudié le comportement des systèmes dynamiques non linéaires et leurs propriétés, il présente aussi un bref historique sur la synchronisation avec un accent sur la définition du différents types et méthodes de la synchronisation du systèmes dynamiques chaotiques.

1.1 Systèmes dynamiques

Les systèmes dynamiques représentent des phénomènes qui évoluent dans l'espace et /ou de temps. Ils sont développés et spécialisés au cours du dix-neuvième siècle. Ces systèmes viennent de Biologies, Physique, Chimie, ou même des sciences sociales, le système dynamique est le sujet qui fournit des outils mathématiques pour son analyse.

Définition 1.1 *Un système dynamique est une application continue $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant $\varphi(0, x_0) = x_0$, $\varphi(t + s, x_0) = \varphi(t, \varphi(s, x_0))$, où $(t, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$.*

Un tel système dynamique présente deux aspects, sont état et sa dynamique; c'est-à-dire son évolution en fonction du temps [1]. Les systèmes dynamiques sont classés en deux catégories :

- Système dynamique à temps discret,
- Système dynamique à temps continu.

1.1.1 Système dynamique à temps discret

Un système dynamique discret est un système d'équations algébriques récurrentes défini par :

$$x_{k+1} = F(x_k, \mu), \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.1)$$

Où $X(k) = x_k \in U \subseteq \mathbb{R}^n$ le vecteur d'état à l'instant $t_k, \mu \in V \subseteq \mathbb{R}^p$ le vecteur des paramètres. F la fonction de récurrence définit la dynamique du système discret. Si nous associons à cette dynamique un état initial $x_0 = X(0)$ nous pourrions avoir une solution unique de F .

Exemple 1.1 (Le système de Hénon) Il s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{cases} x = y + 1 - ax^2 \\ y = bx \end{cases} \quad (1.2)$$

où a et b deux paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la nonlinéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation. Les valeurs habituellement utilisées pour $a; b$ sont $a = 1,4$ et $b = 0,3$.

1.1.2 Système dynamique à temps continu

Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{x}_t = f(x, t, p) \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } p \in \mathbb{R}^r \quad (1.3)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ désigne la dynamique du système.

Exemple 1.2 (Système de Lorenz)

Ce célèbre système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - rz \end{cases} \quad (1.4)$$

avec σ, ρ et r sont des constantes.

1.1.3 Points d'équilibres :

On appelle "point d'équilibre" d'un système dynamique tout point x tel que :

$$F(x) = 0 \quad (1.5)$$

parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points stables.

1.2 Espace des phases, variables d'état et portrait de phases

De manière simplifiée, l'espace des phases permet de traduire des séries de nombre en une représentation spatiale, de dégager l'essentiel de l'information d'un système en mouvement et de dresser la carte routière de toutes ses possibilités. L'espace des phases est un espace mathématique souvent multi-dimensionnel. Chaque axe de coordonnées de cet espace correspond une variable d'état du système dynamique étudié et chaque variable d'état caractérise le système à un instant donné. Pour chaque instant donné, le système est donc caractérisé par un point de cet espace. A l'instant suivant, il sera caractérisé par un autre point et ainsi de suite. Si l'espace des phases est représenté en trois dimensions, cette suite de points peut montrer graphiquement l'évolution du système dans le temps. L'ensemble des trajectoires possibles constitue le portrait de phases. Celui-ci peut aider à percevoir l'attracteur du système.

1.3 Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu

Considérons une classe des systèmes non linéaires décrit par le système dynamique

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0; \end{cases} \quad (1.6)$$

a). Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte).

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre x^* du système (1.6). Plus précisément, on examine les valeurs propres λ_i de la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de x^* s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative, x^* est exponentiellement stable.
- Si la matrice Jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive, x^* est instable.

Remarque 1.1 Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, les trajectoires du système convergent vers un sous-espace (une variété) dont la dimension est le nombre de valeurs propres nulles de la matrice Jacobienne, la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.

b). Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe).

La première méthode de Lyapunov est simple à appliquer, mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. En outre, elle ne donne aucune indication sur la taille des bassins d'attraction. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée $V(x)$ et appelée fonction de Lyapunov, qui est décroissante le long des trajectoires du système à l'intérieur du bassin d'attraction. La théorème suivante résume cette méthode.

Théorème 1.1 *Le point d'équilibre x^* du système (1.6) est stable s'il existe une fonction $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$ continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

i) D est un ouvert de \mathbb{R}^n et $x^* \in D$.

ii) $V(x) = 0$ et $V(x) > V(x^*)$; $\forall x \neq x^*$ dans D .

iii) $\dot{V}(x) \leq 0$; $\forall x \neq x^*$ dans D .

* Si de plus pour x ; $\dot{V}(x) < 0$; $\forall x \neq x^*$ dans D , alors x^* est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

* Si on suppose encore que V tend vers l'infini lorsque $x \in \mathbb{R}^n$ tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de x^* , tendent vers x^* (on dit que x est globalement asymptotiquement stable).

Remarque 1.2 *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov.*

1.4 Bifurcations

Soit le système non linéaire :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.7)$$

où $x \in I \subseteq \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}^k$, $f \in C^r$.

Les changements qualitatifs du portrait de phases d'un système dynamique dépendant de paramètres sont appelés bifurcations. L'étude des bifurcations dites locales, c'est à dire relatives à un point d'équilibre d'un système continu ou à un point fixe d'un système discret.

Définition 1.2 *Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x_0 du système (1.7) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions. La codimension d'une bifurcation est la plus petite dimension de l'espace des paramètres telle que la bifurcation soit persistante.*

1.4.1 Types de bifurcations

Il y a plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions f .

Parmi les différents types de bifurcations, pour les systèmes dynamiques en temps continu, on a : Bifurcation de type noeud-col ; bifurcation transcritique ; bifurcation de fourche et les bifurcations globales.

1.5 Chaos

Il existe plusieurs définitions possibles du chaos :

-**Définition de E .Lorenz** : Un système agité par des forces où seules existent trois fréquences indépendantes, peut se déstabiliser, ses mouvements devenant alors totalement irréguliers et erratiques.

-La théorie du chaos a été découverte par le météorologue **Lorenz**, elle traite du comportement des systèmes chaotiques non linéaires qui sont fortement sensibles à leurs conditions initiales, et aussi est un phénomène généralement connu sous le nom d'effet papillon.

Définition 1.3 Soit un ensemble V . L'application $f : V \longrightarrow V$ est dite chaotique sur V si:

1. f possède une sensibilité aux conditions initiales.
2. f est topologiquement transitive.
3. Les points périodiques sont denses dans V .

1.5.1 Système chaotique

Définition 1.4 Un système dynamique est appelé un système chaotique s'il a au moins un attracteur chaotique.

Définition 1.5 Un système chaotique est un système dont l'exposant de Lyapunov est strictement positif.

Exemple 1.3 Système de **Rössler** : Ce système semblable à celui de **Lorenz**, a été proposé par le biochimiste **Allemand Otto Rössler** en 1976, il découle des équations de **Navier Stokes**, ainsi il est lié à l'étude de l'écoulement des fluides. Ce système est écrit comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = -(y + z) \\ \dot{y} = x + \alpha z \\ \dot{z} = \beta - \gamma z + xz \end{cases} \quad (1.8)$$

Avec α, β, γ sont des constantes.

1.5.2 Attracteurs étranges (chaotiques)

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques. L'attracteur étrange se caractérise par :

1. La sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotique).
2. La dimension d de l'attracteur est fractale (non entières) avec $2 < d < n$ (ce qui justifie l'adjectif étrange).
3. L'attracteur est de volume nul dans l'espace des phases.

1.5.3 Exposant de Lyapunov

La distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Étant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de Lyapunov permettent de mesurer ce taux de divergence. La mesure du plus grand exposant de Lyapunov nécessite d'itérer la dynamique du modèle pour deux conditions initiales très proches, et de mesurer au bout d'un temps fini la distance entre ces deux trajectoires. Pour que ce calcul soit valable, il faut bien sûr que ces deux conditions initiales soient situées à proximité de l'attracteur.

Les exposants de **Lyapunov** sont obtenus par l'algorithme de **Wolf**.

Exemple 1.4 *Considérons le système tridimensionnel chaotique défini par :*

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + myz \\ \frac{dy}{dt} = cy - dxz \\ \frac{dz}{dt} = -bz + ey^2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Ici, x, y, z sont les variables d'état et a, b, c, d, e, m sont des paramètres constants positifs. Le nouveau système (1.9) comprend deux termes de produit croisé quadratiques et un terme carré. Lorsque $a = 16$, $b = 5$, $c = 10$, $d = 6$, $e = 18$ et $m = 0.5$, le système (1.9) est chaotique avec les exposants de Lyapunov $L_1 = 1.86852 > 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = -17.73664 < 0$. Les portraits de phase correspondants sont représentés sur les figures

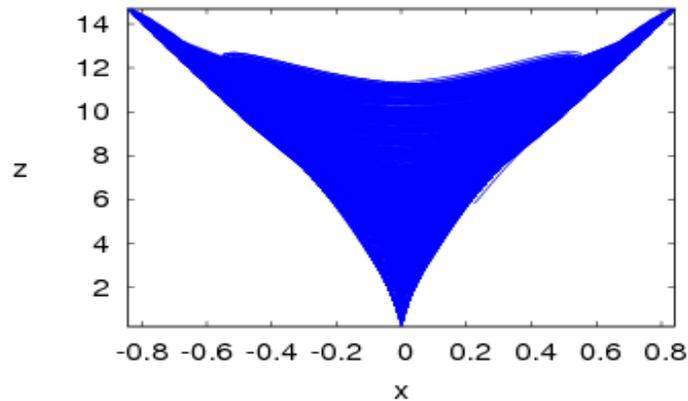


Fig 1.1-projection de l'attracteur du système (1.9) dans le plan (x, z) pour $a = 16, b = 5, c = 10, d = 6, e = 18, m = 0.5$.

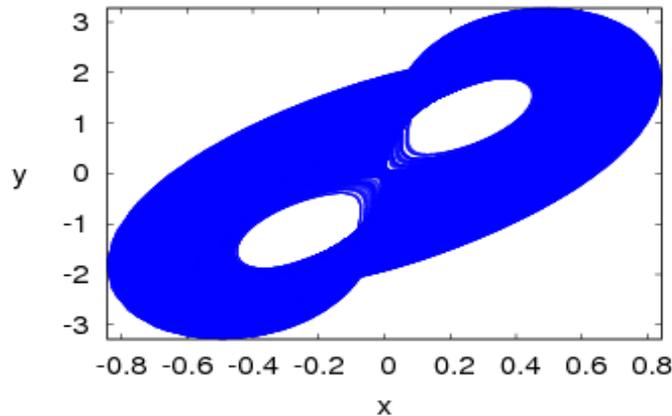


Fig 1.2-projection de l'attracteur du système (1.9) dans le plan (x, y) pour $a = 16, b = 5, c = 10, d = 6, e = 18, m = 0.5$.

1.6 Synchronisation

Historique :

La synchronisation a été découverte au cours de la dix-septième siècle, par le chercheur hollandais **Christian Huygens** en 1658. Ce scientifique a rapporté son observation : deux horloges

à balancier, se synchronisaient parfaitement, ou bien convergeaient rapidement vers un mouvement identique en phase et en fréquence même en présence de perturbations, donc il conclut que les deux horloges ont été synchronisées.

Plusieurs concepts de synchronisation chaotique ont été proposés, en premier par **Fujisaka et Yamada** en **1983**, par la suite, **Afraimovich** et son équipe de recherche ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique. En 1990, **Pecora** et **Carroll** ont montré que deux systèmes chaotiques identiques peuvent se synchroniser. Alors, ils ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de la synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés. Le premier système produisant le signal chaotique qu'il est le système émetteur (maître) et le deuxième est le système récepteur (esclave). Une autre approche de synchronisation chaotique a été proposée par **Rulkov**. Le schéma de synchronisation excepté que cette fois le couplage n'est pas limité aux systèmes identiques. Grâce à ces derniers travaux, plusieurs idées et approches ont été proposées pour synchroniser les systèmes chaotiques et les appliquer dans divers domaines d'ingénierie comme la transmission sécurisée.

Définition 1.6 (de Larousse) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : Syn veut dire ensemble et Chrono veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.*

Définition 1.7 (générale) *La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.*

Théorème 1.2 *Le système maître et le système esclave sont synchronisés si et seulement si tous les exposants de Lyapunov du système esclave, appelés les exposants de Lyapunov conditionnels, sont négatifs.*

1.6.1 Principe de synchronisation des systèmes chaotiques :

La configuration maître-esclave est l'une des configurations les plus populaires de la synchronisation de systèmes chaotiques. Dans un schéma maître-esclave, un système dynamique dit esclave suit le rythme et l'évolution imposés par un autre système dynamique dit système maître. On dit, alors, qu'un système esclave défini dans le cas continu, par le système différentiel :

$$\dot{x}_s(t) = f_s(x_s(t)), x_s \in \mathbb{R}^n \quad (1.10)$$

et dans le cas discret, par l'équation aux différences :

$$x_s(k+1) = f_s(x_s(k)), x_s(k) \in \mathbb{R}^n \quad (1.11)$$

se synchronise avec un système maître donné, en temps continu, par le système d'équations différentielles :

$$\dot{x}_m(t) = f_m(x_m(t)), x_m \in \mathbb{R}^n \quad (1.12)$$

et en temps discret, par l'équation aux différences :

$$x_m(k+1) = f_m(x_m(k)), x_m(k) \in \mathbb{R}^n \quad (1.13)$$

si pour toute paire de conditions initiales $(x_m(0), x_s(0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a :

$$\lim_{(t,k) \rightarrow +\infty} \|x_m - x_s\| = 0 \quad (1.14)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

1.6.2 Types de synchronisation

On va présenter des différents types de synchronisation les plus performantes comme suit :

Synchronisation complète :

On considère un système chaotique maître représenté par :

$$\dot{X} = G(X(t)) \quad (1.15)$$

où $X(t)$ est vecteur d'état de système (1.15) de dimension n , et $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. On représentant le système esclave par :

$$\dot{Y} = H(Y(t)) + U_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (1.16)$$

où $Y(t)$ est vecteur d'état de système (1.16) de dimension m , et $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, et $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ déterminent le vecteur de contrôle.

On définit l'erreur de la synchronisation complète comme suivant :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \text{ tel que } \lim_{t \rightarrow +\infty} \|e(t)\| = 0 \quad (1.17)$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Si $G = H$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Si $G \neq H$, c'est une synchronisation complète non identique.

d'où, la synchronisation complète est une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés.

Anti synchronisation :

Théoriquement, on dit que le système maître et le système esclave sont anti synchronisation, s'ils ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue, mais avec signes opposés et d'autre part, la somme des vecteurs d'état de deux systèmes tend vers zéro quant le temps tend vers l'infini. Donc on définit l'erreur de l'anti synchronisation comme :

$$e(t) = Y(t) + X(t) \quad (1.18)$$

Synchronisation hybride (synchronisation complète et anti synchronisation) :

Pour estimer les fonctions de contrôle entre deux systèmes chaotiques (système maître et système esclave), alors que le système d'erreur de synchronisation hybride est donné par :

$$e_i = y_i \pm x_i \quad (1.19)$$

Synchronisation décalée

Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $Y(k)$ du système chaotique esclave convergent vers les variables d'état $X(k)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k - \tau)\| = 0 \text{ (où } \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k + \tau)\| = 0), \forall x(0), \quad (1.20)$$

avec τ est un nombre positif très petit.

Synchronisation projective (PS)

La synchronisation projective a été étudiée plus large ces dernières années, parce qu'elle peut réaliser une communication plus rapide avec ses caractéristiques relatives.

Définition 1.8 _ Synchronisation projective est vérifiée si les variables d'état $y_i(t)$ du système chaotique esclave $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ qui synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(t)$ du système chaotique maître $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ tel que

$$\exists \lambda_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} \|y_i(t) - \lambda_i x_i(t)\| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n$$

-Si $\lambda_i = 1$ est le cas de synchronisation complète

-Si $\lambda_i = -1$ est le cas d'anti synchronisation complète.

Il y a aussi d'autres types de synchronisation comme : la synchronisation généralisée, synchronisation GPS, synchronisation FSHPS, synchronisation Q-S, Synchronisation MPS, synchronisation FPS ... etc.

1.6.3 Techniques et stratégies de synchronisation

La théorie de commande des systèmes a joué un rôle important dans le développement des méthodes modernes de synchronisation. Diverses méthodes, basées sur la conception de différentes lois de commande, ont été largement rapportées dans la littérature. Nous présenterons dans cette partie les méthodes de synchronisation souvent utilisées dans le contexte de synchronisation.

Synchronisation par contrôle actif : Cette méthode, proposée par **Bai** et **Lonngren**, a montré son efficacité pour la synchronisation des systèmes chaotiques identiques et non identiques. Elle offre une simplicité d'implémentation remarquable.

Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$\dot{X} = F(X(t)) \quad (1.21)$$

$$\dot{Y} = G(Y(t)) + U \quad (1.22)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer. Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\dot{e}(t) = \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) = G(Y(t)) - F(X(t)) + U \quad (1.23)$$

Si on peut écrire la quantité $G(Y(t)) - F(X(t))$ de la façon suivante :

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)). \quad (1.24)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U \quad (1.25)$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(X(t), Y(t)) \quad (1.26)$$

où V est le contrôleur actif défini par :

$$V = -Le(t) \quad (1.27)$$

où L est une matrice de contrôle inconnue. Donc, on obtient la formule finale suivante de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = (A - L)e(t) \quad (1.28)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (1.21) et le système esclave (1.22) est transformé en problème de zéro-stabilité du système (1.28). Maintenant le théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires continus.

Théorème 1.3 *Le système maître (1.21) et le système esclave (1.22) sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle (1.26), si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que les valeurs propres de $(A - L)$ se trouvent à l'intérieur du disque de l'unité.*

Méthode de contrôle adaptatif

La synchronisation par le contrôle adaptatif est une méthode utilisée par un contrôleur qui doit s'adapter à un système ou plus contrôlé dont le but est de réagir à tout instant dans le sens désiré avec des paramètres qui varient. C'est à dire minimisation de l'erreur entre les systèmes dynamiques.

Le système chaotique qui nous avons étudié dans ce travail est décrit sous la forme générale suivante :

$$\dot{x} = Ax + \Phi(x)\Theta \quad (1.29)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\Phi(x) \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n \times l})$ et $\Theta \in \mathbb{R}^l$. Θ est le vecteur des paramètres constants inconnus. A est une matrice constante de dimension $n \times n$. $\Phi(x) = (\Phi_{ij}(x))$ sont les matrices des fonctions non linéaires qui prend des arguments en \mathbb{R}^n et $\Phi_{ij}(0) = 0$.

quand $\Phi_{ij}(0) = 0$, le système (1.29) a un point d'équilibre on $x = 0$.

Le but du contrôle est de stabiliser globalement cet équilibre pour tous les valeurs inconnus de le vecteur Θ .

Le système chaotique contrôlé est donné par :

$$\dot{x} = Ax + \Phi(x)\Theta + u \quad (1.30)$$

tel que $u \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur de contrôle.

Comme il existe un vecteur des paramètres inconnus Θ , nous devons concevoir un estimateur de paramètres $\bar{\Theta}$, qui se rapproche asymptotiquement des paramètres réels du vecteur Θ .

De plus, on mentionne autre méthodes de synchronisations : Synchronisation par backstepping, méthode du mode glissant, synchronisation avec commande par rétroaction ... etc.

1.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons avancé quelques notions fondamentaux sur les systèmes dynamiques non linéaires et leurs propriétés générales, puis nous avons parlé sur la théorie du chaos, la théorie du bifurcations et les systèmes chaotiques avec des exemples. Il y avait une présentation des différents outils mathématiques qui nous servent à caractériser le comportement chaotique, telles que la notion de stabilité au sens de Lyapunov, les exposants de Lyapunov et les attracteurs étranges.

Enfin, on a voulu d'attirer l'attention sur les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes.

Chapitre 2

Synchronisation des systèmes chaotiques par la méthode de contrôle adaptatif

Dans ce chapitre, on s'intéresse à la synchronisation des systèmes chaotiques en 3d selon la méthode de contrôle adaptatif. Deux types de synchronisation ont été réalisés selon cette méthode entre deux systèmes chaotiques en 3D (identiques et non identiques) en temps continu. En premier, nous considérons le problème avec description des systèmes, puis nous avons considéré les schémas de contrôle adaptatif pour synchronisation complète et anti synchronisation. Nous terminerons par application de ces approches entre deux systèmes chaotiques dans les cas identiques et non identiques avec des figures illustratives de chaque type de synchronisation.

2.1 Formulation du problème et description des systèmes

Dans la première partie de cette section, nous mettons en place le problème et présentons un schéma de synchronisation adaptatif avec une loi de mise à jour des paramètres. Puis, en utilisant la théorie de la stabilité de Lyapunov, nous réalisons deux types de synchronisation entre deux systèmes chaotiques en 3d .

Considérons le système chaotique maître sous la forme :

$$\dot{x} = f(x) + F(x)\alpha \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\alpha \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur de paramètre constant inconnu du système, $f(x)$ est une $n \times 1$ matrice, $F(x)$ est une $n \times m$ matrice.

Le système esclave est supposé par :

$$\dot{y} = g(x) + G(x)\beta + u \quad (2.2)$$

où $y \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur d'état, $\beta \in \mathbb{R}^q$ est le vecteur de paramètre constant inconnu du système, $g(x)$ est une $n \times 1$ matrice, $G(x)$ est une $n \times q$ matrice.

2.2 Méthodologie de la méthode de contrôle adaptatif pour la synchronisation des systèmes

2.2.1 Méthodologie de la méthode de contrôle adaptatif pour la synchronisation complète

L'erreur de la synchronisation complète est défini par :

$$e(t) = y(t) - x(t).$$

Où $e(t) = (e_i; i = 1, 2, \dots, n)^T$ est la fonction d'erreur et $\|\cdot\|$ représente la norme vectorielle.

Il s'ensuit que

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) - \dot{x}(t). \quad (2.3)$$

En utilisant (2.1) et (2.2), la dynamique d'erreur devient

$$\dot{e} = -f(x) - F(x)\alpha + g(x) + G(x)\beta + u. \quad (2.4)$$

Maintenant, nous concevons une fonction de contrôle u appropriée et des lois de mise à jour des paramètres pour garantir que les systèmes maître et esclave avec des paramètres inconnus synchroniser.

Pour cela, le contrôleur est choisi comme :

$$u = f(x) + F(x)\hat{\alpha} - g(x) - G(x)\hat{\beta} - ke \quad (2.5)$$

où $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ sont les valeurs estimées de vecteurs de paramètres inconnus α, β , respectivement, et $k = (k_i)$ avec $k_i \geq 0, i = 1 \dots n$.

Les lois de mise à jour des paramètres sont décrites comme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\alpha}} = -[F(x)]^T e \\ \dot{\hat{\beta}} = [G(x)]^T e \end{cases} \quad (2.6)$$

on considère une fonction quadratique de Lyapunov donnée par :

$$V = \frac{e^T e + e_\alpha^T e_\alpha + e_\beta^T e_\beta}{2} \quad (2.7)$$

implique que

$$\begin{aligned}
 \dot{V} &= e^T \dot{e} + e_\alpha^T \dot{e}_\alpha + e_\beta^T \dot{e}_\beta & (2.8) \\
 &= e^T (-F(x)(e_\alpha) + G(x)(e_\beta) - ke) + e_\alpha^T \begin{pmatrix} -\dot{\hat{\alpha}} \end{pmatrix} + e_\beta^T \begin{pmatrix} -\dot{\hat{\beta}} \end{pmatrix} \\
 &= e^T (-F(x)(e_\alpha) + G(x)(e_\beta) - ke) + e_\alpha^T ([F(x)]^T e) - e_\beta^T ([G(x)]^T e) \\
 &= -ke^T e.
 \end{aligned}$$

Donc \dot{V} est une fonction définie négative. D'où par la théorie de stabilité de Lyapunov il s'ensuit que $e(t) \rightarrow 0$ asymptotiquement quand $t \rightarrow \infty$ pour toutes conditions initiales $e(0)$.

Par conséquent, la synchronisation complète est confirmée entre les deux systèmes (2.1) et (2.2) et sous la loi du contrôle adaptatif (2.5) et la loi de mise à jour d'estimation des paramètres (2.6)

2.2.2 Méthodologie de la méthode de contrôle adaptatif pour l'anti synchronisation

L'erreur de l'anti-synchronisation est défini par :

$$e(t) = y(t) + x(t)$$

où $e(t) = (e_i; i = 1, 2, \dots, n)^T$ est la fonction d'erreur et $\|\cdot\|$ représente la norme vectorielle.

Il s'ensuit que

$$\dot{e}(t) = \dot{y}(t) + \dot{x}(t) \quad (2.9)$$

en utilisant (2.1) et (2.2), la dynamique d'erreur devient

$$\dot{e} = f(x) + F(x)\alpha + g(x) + G(x)\beta + u. \quad (2.10)$$

Maintenant, nous concevons une fonction de contrôle u appropriée et des lois de mise à jour des paramètres pour garantir que les systèmes maître et esclave avec des paramètres inconnus synchroniser.

Pour cela, le contrôleur est choisi comme

$$u = -f(x) - F(x)\hat{\alpha} - g(x) - G(x)\hat{\beta} - ke \quad (2.11)$$

où $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ sont les valeurs estimées de vecteurs du paramètres inconnus α, β , respectivement, et $k = (k_i)$ avec $k_i \geq 0, i = 1 \dots n$.

Les lois de mise à jour des paramètres sont décrites comme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\alpha}} = [F(x)]^T e \\ \dot{\hat{\beta}} = [G(x)]^T e \end{cases} \quad (2.12)$$

On considère une fonction quadratique de Lyapunov donné par :

$$V = \frac{e^T e + e_\alpha^T e_\alpha + e_\beta^T e_\beta}{2} \quad (2.13)$$

implique que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e^T \dot{e} + e_\alpha^T \dot{e}_\alpha + e_\beta^T \dot{e}_\beta \\ &= e^T (-F(x)(e_\alpha) + G(x)(e_\beta) - ke) + e_\alpha^T \left(-\dot{\hat{\alpha}} \right) + e_\beta^T \left(-\dot{\hat{\beta}} \right) \\ &= e^T (F(x)(e_\alpha) + G(x)(e_\beta) - ke) - e_\alpha^T ([F(x)]^T e) - e_\beta^T ([G(x)]^T e) \\ &= -ke^T e \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donc \dot{V} est une fonction définie négative. D'où par la théorie de stabilité de Lyapunov il s'ensuit que $e(t) \rightarrow 0$ asymptotiquement quand $t \rightarrow \infty$ pour toutes conditions initiales $e(0)$.

Par conséquent, l'anti synchronisation est confirmé entre les deux systèmes (2.1) et (2.2) et sous la loi du contrôle adaptatif (2.11) et la loi de mise à jour d'estimation des paramètres (2.12).

2.3 Description et contrôle adaptatif d'un nouveau système chaotique

Considérons, un nouveau système chaotique en $3D$ avec deux formes quadratiques non linéaires donné par :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(x_2 - x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = cx_1 + x_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1x_2 + b(x_1 - x_3) \end{cases} \quad (2.15)$$

où a, b, c sont des paramètres réels positives. Le système (2.15) est chaotique quand les paramètres ont les valeurs suivantes :

$$a = 13; b = 2, 5; c = 50. \quad (2.16)$$

Pour les valeurs du paramètres (2.16), selon **Matlab** les exposants de Lyapunov du système (2.15) sont donnés par :

$$L_1 = 1, 4375; L_2 = -0, 000166417; L_3 = -16, 9373. \quad (2.17)$$

Contrôle adaptatif du nouveau 3D système chaotique (2.15) :

On décrit un concept adaptatif de feedback contrôleur de stabilisation globale pour le système chaotique (2.15) avec des paramètres inconnus. On réalise la conception à partir de la théorie du contrôle adaptatif et la théorie du stabilité de Lyapunov.

Un système chaotique contrôlé du système (2.15) est donné par :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(x_2 - x_1) + u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = cx_1 + x_1x_3 + u_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1x_2 + b(x_1 - x_3) + u_3 \end{cases} \quad (2.18)$$

avec a, b, c sont des paramètres constants inconnus, et u_1, u_2, u_3 sont des contrôleurs adaptatives, on les trouver par utiliser les états x_1, x_2, x_3 et les estimations $a_1(t), b_1(t), c_1(t)$ de a, b, c respectivement.

La loi du contrôle adaptatif est définie par :

$$\begin{cases} u_1 = -a_1(t)(x_2 - x_1) - k_1x_1 \\ u_2 = -c_1(t)x_1 - x_1x_3 - k_2x_2 \\ u_3 = x_1x_2 - b_1(t)(x_1 - x_3) - k_3x_3 \end{cases} \quad (2.19)$$

où k_1, k_2, k_3 sont des constantes positives.

En remplaçant (2.19) dans (2.18), nous obtenons le système :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = (a - a_1(t))(x_2 - x_1) - k_1x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = (c - c_1(t))x_1 - k_2x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = (b - b_1(t))(x_1 - x_3) - k_3x_3. \end{cases} \quad (2.20)$$

On définit les paramètres des estimations des erreurs comme :

$$\begin{cases} e_a(t) = a - a_1(t) \\ e_c(t) = c - c_1(t) \\ e_b(t) = b - b_1(t) \end{cases} \quad (2.21)$$

remplaçant (2.21) en (2.20), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = e_a(t) (x_2 - x_1) - k_1x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = e_c(t) x_1 - k_2x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = e_b(t) (x_1 - x_3) - k_3x_3 \end{cases} \quad (2.22)$$

différenciant (2.21) par rapport à t nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{de_a(t)}{dt} = -\frac{da_1(t)}{dt} \\ \frac{de_c(t)}{dt} = -\frac{dc_1(t)}{dt} \\ \frac{de_b(t)}{dt} = -\frac{db_1(t)}{dt}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Pour trouver une loi de mise à jour (en anglais : updated law) des paramètres des estimations, nous utilisons la théorie de stabilité de Lyapunov.

Considérons une fonction quadratique de Lyapunov donnée par :

$$V(x_1, x_2, x_3, e_a, e_b, e_c) = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2). \quad (2.24)$$

V est une fonction définie positive sur \mathbb{R}^6 .

On différencie V sur le long des trajectoires des systèmes (2.22) et (2.23), on obtient :

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3, e_a, e_b, e_c) = \dot{x}_1 x_1 + \dot{x}_2 x_2 + \dot{x}_3 x_3 + \dot{e}_a e_a + \dot{e}_b e_b + \dot{e}_c e_c \quad (2.25)$$

implique que

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2, x_3, e_a, e_b, e_c) &= [e_a(t) (x_2 - x_1) - k_1 x_1] x_1 + [e_c(t) x_1 - k_2 x_2] x_2 + \\ & [e_b(t) (x_1 - x_3) - k_3 x_3] x_3 - \frac{da_1(t)}{dt} e_a(t) - \frac{dc_1(t)}{dt} e_c(t) - \frac{db_1(t)}{dt} e_b(t) \\ &= e_a(t) (x_2 - x_1) x_1 - k_1 x_1^2 + e_c(t) x_1 x_2 - k_2 x_2^2 + e_b(t) (x_1 - x_3) x_3 - \\ & k_3 x_3^2 - \frac{da_1(t)}{dt} e_a(t) - \frac{dc_1(t)}{dt} e_c(t) - \frac{db_1(t)}{dt} e_b(t). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2, x_3, e_a, e_b, e_c) &= -\sum_{i=1}^3 k_i x_i^2 + e_a(t) \left(x_1 x_2 - x_1^2 - \frac{da_1(t)}{dt} \right) + \\ & e_b(t) \left(x_1 x_3 - x_3^2 - \frac{db_1(t)}{dt} \right) + e_c(t) \left(x_1 x_2 - \frac{dc_1(t)}{dt} \right). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Posons :

$$\begin{cases} \frac{da_1(t)}{dt} = x_1 x_2 - x_1^2 \\ \frac{db_1(t)}{dt} = x_1 x_3 - x_3^2 \\ \frac{dc_1(t)}{dt} = x_1 x_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

Théorème 2.1 *Le nouveau 3D système chaotique (2.15) avec des paramètres inconnus est globalement et exponentiellement stable par la loi de contrôle adaptatif (2.19) et la loi de mise à jour (en anglais : updated law) des paramètres (2.28) tel que k_1, k_2, k_3 sont des constantes positives.*

Preuve. Remplaçant (2.28) en (2.27), on obtient la dérivée temporelle de V comme :

$$\dot{V}(x_1, x_2, x_3, e_a, e_b, e_c) = -k_1 x_1^2 - k_2 x_2^2 - k_3 x_3^2 < 0 \quad (2.29)$$

qu'elle est une fonction définie négative sur \mathbb{R}^6 , et par la méthode directe de Lyapunov, $x_1, x_2, x_3, e_a, e_b, e_c$ sont globalement et exponentiellement stable. ■

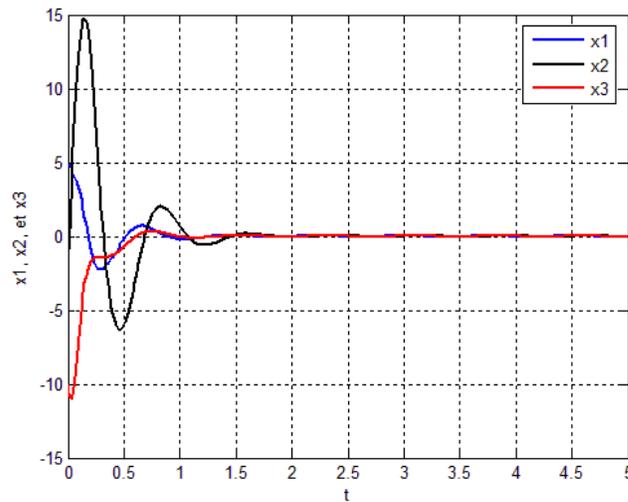


Fig 2.1-Convergence des états contrôlés $x_1(t)$; $x_2(t)$; $x_3(t)$ du système (2.15).

2.4 Synchronisation adaptatif des systèmes chaotiques identiques en 3D

On va dériver une loi de contrôle adaptative pour synchroniser globalement et exponentiellement deux 3D systèmes chaotiques identiques avec des paramètres inconnus.

Donc on donne le système (2.15) comme un système maître, et le système esclave comme :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1 \\ \dot{y}_2 = cy_1 + y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3 = -y_1y_2 + b(y_1 - y_3) + u_3. \end{cases} \quad (2.30)$$

Où a , b , c sont des paramètres inconnus. Le but de concept est pour trouver les contrôleurs feedbacks adaptatives u_1, u_2, u_3 par utiliser les valeurs d'état des systèmes et les estimations $a_1(t), b_1(t), c_1(t)$ pour les paramètres inconnus a, b, c respectivement.

2.4.1 Synchronisation complète

L'erreur de la synchronisation complète entre les systèmes (2.15) et (2.30) est :

$$e_i = y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.31)$$

Il implique que :

$$\dot{e}_i = \dot{y}_i - \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.32)$$

On remplaçant (2.15) et (2.30) dans (2.32) :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1 - a(x_2 - x_1) \\ \dot{e}_2 = cy_1 + y_1y_3 + u_2 - (cx_1 + x_1x_3) \\ \dot{e}_3 = -y_1y_2 + b(y_1 - y_3) + u_3 - (-x_1x_2 + b(x_1 - x_3)) \end{cases} \quad (2.33)$$

il implique que :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = ay_2 - ay_1 + u_1 - ax_2 + ax_1 \\ \dot{e}_2 = cy_1 + y_1y_3 + u_2 - cx_1 - x_1x_3 \\ \dot{e}_3 = -y_1y_2 + by_1 - by_3 + u_3 + x_1x_2 - bx_1 + bx_3 \end{cases} \quad (2.34)$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(y_2 - x_2) - a(y_1 - x_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = c(y_1 - x_1) + y_1y_3 - x_1x_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 = b(y_1 - x_1) - b(y_3 - x_3) - y_1y_2 + x_1x_2 + u_3 \end{cases} \quad (2.35)$$

alors

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = ce_1 + y_1y_3 - x_1x_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 = b(e_1 - e_3) - y_1y_2 + x_1x_2 + u_3 \end{cases} \quad (2.36)$$

on prend la loi de contrôle adaptatif définie par :

$$\begin{cases} u_1 = -a_1(t)(e_2 - e_1) - k_1e_1 \\ u_2 = -c_1(t)e_1 - y_1y_3 + x_1x_3 - k_2e_2 \\ u_3 = -b_1(t)(e_1 - e_3) + y_1y_2 - x_1x_2 - k_3e_3 \end{cases} \quad (2.37)$$

où k_1, k_2, k_3 sont des constants positifs.

On remplaçant (2.37) dans (2.36), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) - a_1(t)(e_2 - e_1) - k_1e_1 \\ \dot{e}_2 = ce_1 + y_1y_3 - x_1x_3 - c_1(t)e_1 - y_1y_3 + x_1x_3 - k_2e_2 \\ \dot{e}_3 = b(e_1 - e_3) - y_1y_2 + x_1x_2 - b_1(t)(e_1 - e_3) + y_1y_2 - x_1x_2 - k_3e_3 \end{cases} \quad (2.38)$$

alors le système d'erreurs devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (a - a_1(t))(e_2 - e_1) - k_1e_1 \\ \dot{e}_2 = (c - c_1(t))e_1 - k_2e_2 \\ \dot{e}_3 = (b - b_1(t))(e_1 - e_3) - k_3e_3 \end{cases} \quad (2.39)$$

on définit les estimations des erreurs comme suit :

$$\begin{cases} e_a(t) = a - a_1(t) \\ e_c(t) = c - c_1(t) \\ e_b(t) = b - b_1(t) \end{cases} \quad (2.40)$$

différenciant (2.40) par rapport à t , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{de_a(t)}{dt} = -\frac{da_1(t)}{dt} \\ \frac{de_c(t)}{dt} = -\frac{dc_1(t)}{dt} \\ \frac{de_b(t)}{dt} = -\frac{db_1(t)}{dt} \end{cases} \quad (2.41)$$

on utilisons (2.40), le système (2.39) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_a(t)(e_2 - e_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = e_c(t)e_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = e_b(t)(e_1 - e_3) - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.42)$$

On considère une fonction quadratique de Lyapunov donnée par :

$$V(e_1, e_2, e_3, e_a, e_b, e_c) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2) \quad (2.43)$$

avec (2.43) est une fonction définie positive en \mathbb{R}^6 .

Différenciant V au le long du trajectoires du systèmes (2.41) et (2.42), on obtient :

$$\dot{V} = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 + \dot{e}_a e_a + \dot{e}_b e_b + \dot{e}_c e_c \quad (2.44)$$

alors :

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^3 k_i e_i^2 + e_a(t) (e_1 e_2 - e_1^2 - \frac{da_1(t)}{dt}) + e_b(t) (e_1 e_3 - e_3^2 - \frac{db_1(t)}{dt}) + e_c(t) (e_1 e_2 - \frac{dc_1(t)}{dt}). \quad (2.45)$$

Dans (2.45), posons :

$$\begin{cases} \frac{da_1(t)}{dt} = e_1 e_2 - e_1^2 \\ \frac{db_1(t)}{dt} = e_1 e_3 - e_3^2 \\ \frac{dc_1(t)}{dt} = e_1 e_2. \end{cases} \quad (2.46)$$

Introduisant (2.46) dans (2.45), on obtient :

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^3 k_i e_i^2 < 0 \quad (2.47)$$

Donc (2.47) est une fonction définie négative dans \mathbb{R}^3 . D'où par la théorie de stabilité de Lyapunov il s'ensuit que $e_i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 1, 2, 3$. D'où nous avons prouvé le théorème suivant :

Théorème 2.2 Les deux 3D systèmes chaotiques (2.15) et (2.30) avec des paramètres inconnus sont globalement et exponentiellement synchronisés pour toutes les conditions initiales par la loi de contrôle feedback adaptatif (2.37) et la loi de mise à jour des paramètres (2.46) tel que k_1, k_2, k_3 sont des constants positifs.

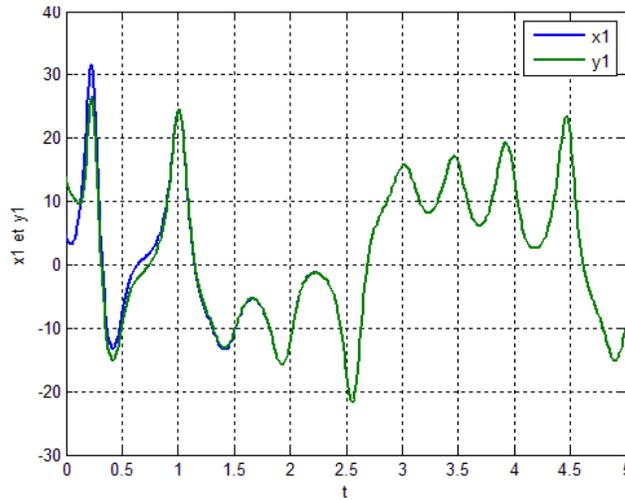


Fig 2.2-Synchronisation complète des états x_1 et y_1 pour les systèmes (2.15) et (2.30).

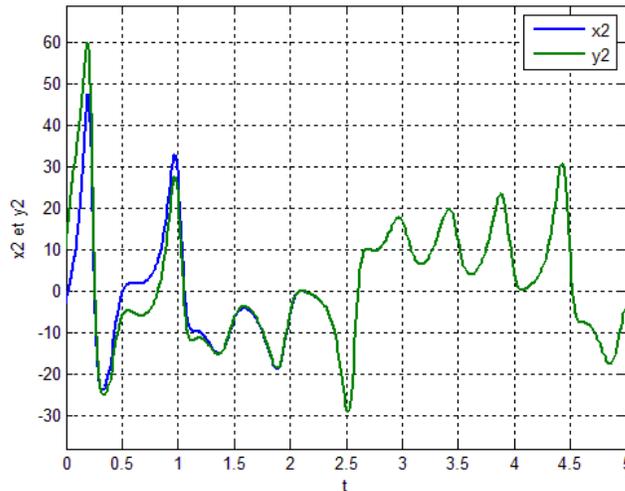


Fig 2.3-Synchronisation complète des états x_2 et y_2 pour les systèmes (2.15) et (2.30).

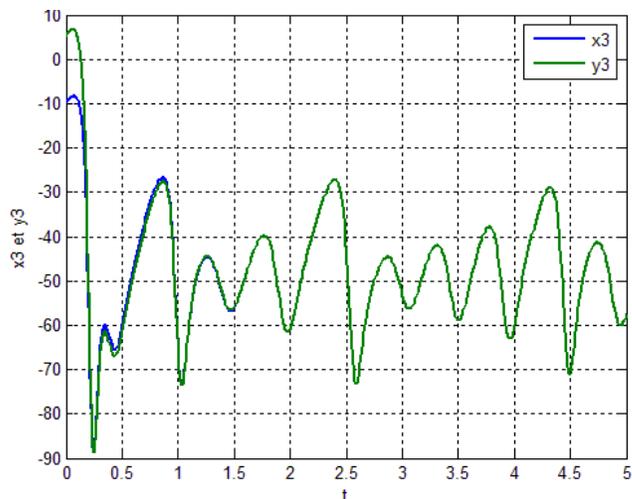


Fig 2.4-Synchronisation complète des états x_3 et y_3 pour les systèmes (2.15) et (2.30). cas identique.

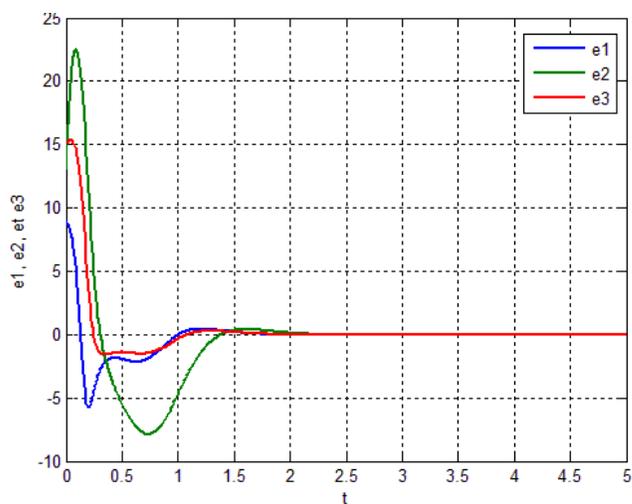


Fig 2.5-Historique temporel de l'erreur de la synchronisation complète des systèmes (2.15) et (2.30).

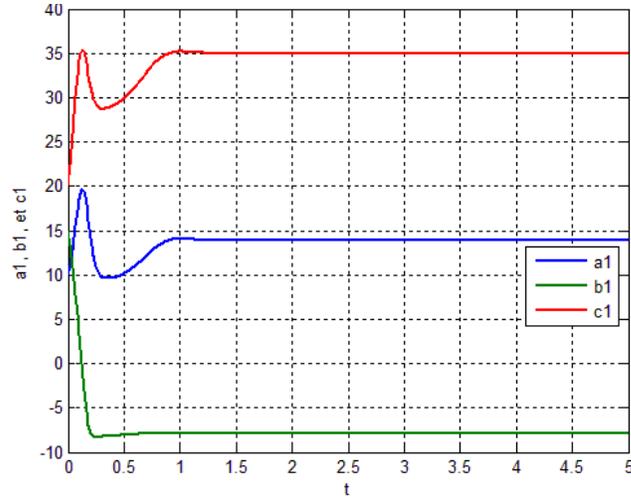


Fig 2.6-Historique temporel des paramètres des estimations de la synchronisation complète des systèmes (2.15) et (2.30)

2.4.2 Anti synchronisation

Nous utilisons le même système maître (2.15) et le même système esclave (2.30).

L'erreur d'anti synchronisation entre les systèmes chaotiques (2.15) et (2.30) est défini comme :

$$e_i = y_i + x_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.48)$$

Il implique que :

$$\dot{e}_i = \dot{y}_i + \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.49)$$

Introduisant (2.15) et (2.30) dans (2.49) :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(y_2 - y_1) + u_1 + a(x_2 - x_1) \\ \dot{e}_2 = cy_1 + y_1y_3 + u_2 + cx_1 + x_1x_3 \\ \dot{e}_3 = -y_1y_2 + b(y_1 - y_3) + u_3 - x_1x_2 + b(x_1 - x_3). \end{cases} \quad (2.50)$$

On obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ \dot{e}_2 = ce_1 + x_1x_3 + y_1y_3 + u_2 \\ \dot{e}_3 = b(e_1 - e_3) - x_1x_2 - y_1y_2 + u_3. \end{cases} \quad (2.51)$$

La loi du contrôle adaptatif est :

$$\begin{cases} u_1 = -a_1(t)(e_2 - e_1) - k_1e_1 \\ u_2 = -c_1(t)e_1 - x_1x_3 - y_1y_3 - k_2e_2 \\ u_3 = -b_1(t)(e_1 - e_3) + x_1x_2 + y_1y_2 - k_3e_3 \end{cases} \quad (2.52)$$

où k_1, k_2, k_3 sont des constantes positives.

Introduisant (2.52) dans (2.51), on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1) - a_1(t)(e_2 - e_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = ce_1 + x_1 x_3 + y_1 y_3 - c_1(t)e_1 - x_1 x_3 - y_1 y_3 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = b(e_1 - e_3) - x_1 x_2 - y_1 y_2 - b_1(t)(e_1 - e_3) + x_1 x_2 + y_1 y_2 - k_3 e_3. \end{cases} \quad (2.53)$$

Alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (a - a_1(t))(e_2 - e_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = (c - c_1(t))e_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = (b - b_1(t))(e_1 - e_3) - k_3 e_3. \end{cases} \quad (2.54)$$

Alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_a(t)(e_2 - e_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = e_c(t)e_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = e_b(t)(e_1 - e_3) - k_3 e_3. \end{cases} \quad (2.55)$$

On considère la même fonction quadratique de Lyapunov donnée par (2.43) :

Différenciant V au le long du trajectoires du systèmes (2.55) et (2.41), on obtient :

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^3 k_i e_i^2 + e_a(t) (e_1 e_2 - e_1^2 - \frac{da_1(t)}{dt}) + e_b(t) (e_1 e_3 - e_3^2 - \frac{db_1(t)}{dt}) + e_c(t) (e_1 e_2 - \frac{dc_1(t)}{dt}). \quad (2.56)$$

De (2.56), posons :

$$\begin{cases} \frac{da_1(t)}{dt} = e_1 e_2 - e_1^2 \\ \frac{db_1(t)}{dt} = e_1 e_3 - e_3^2 \\ \frac{dc_1(t)}{dt} = e_1 e_2 \end{cases} \quad (2.57)$$

introduisant (2.57) dans (2.56), on obtient :

$$\dot{V} = -\sum_{i=1}^3 k_i e_i^2 < 0 \quad (2.58)$$

où (2.58) est une fonction définie négative dans \mathbb{R}^3 . D'où par la théorie de stabilité de Lyapunov il s'ensuit que $e_i(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ pour $i = 1, 2, 3$.

D'après ce qui est précède l'anti synchronisation entre les deux systèmes est confirmé.

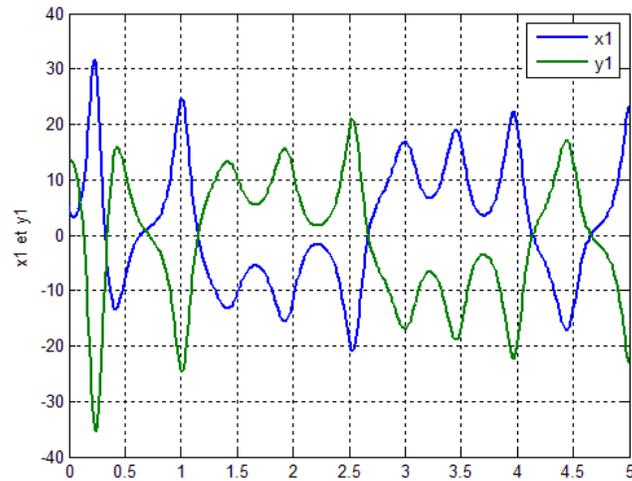


Fig 2.7-Anti synchronisation des états x_1 et y_1 des systèmes (2.15) et (2.30). cas identique.

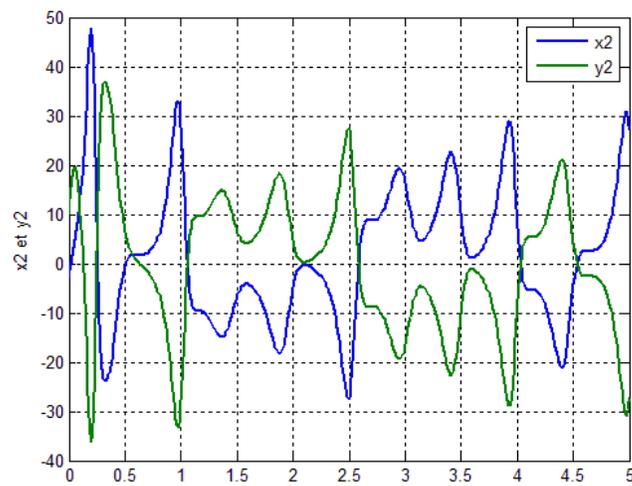


Fig 2.8-Anti synchronisation des états x_2 et y_2 des systèmes (2.15) et (2.30).

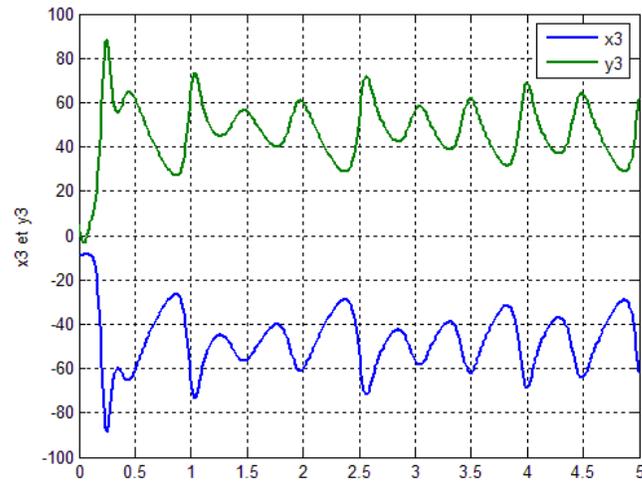


Fig 2.9-Anti synchronisation des états x_3 et y_3 des systèmes (2.15) et (2.30).

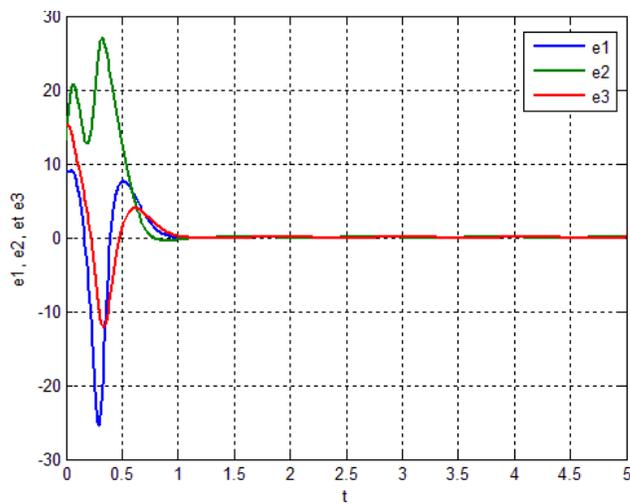


Fig 2.10-Historique temporel de l'erreur de l'anti-synchronisation des systèmes (2.15) et (2.30).

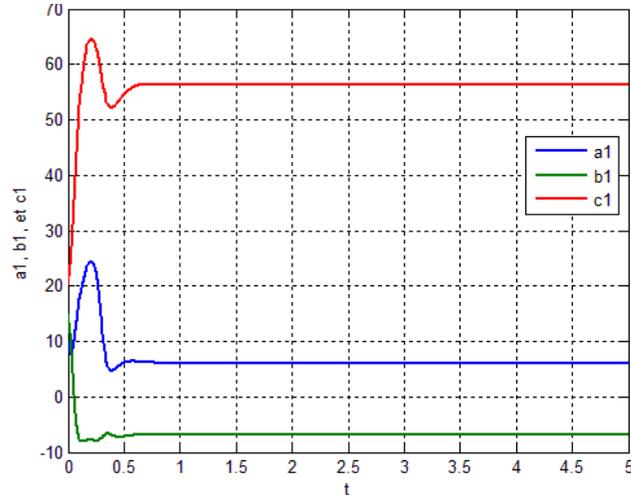


Fig 2.11-Historique temporel des paramètres des estimations pour anti-synchronisation des systèmes (2.15) et (2.30).

2.5 Synchronisation des systèmes chaotiques non identiques

2.5.1 Synchronisation complète

On décrit le système maître par le système de **Liu** tel que :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = a(x_2 - x_1) \\ \frac{dx_2}{dt} = bx_1 - x_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = -cx_3 + dx_1^2 \end{cases} \quad (2.59)$$

où x_1, x_2, x_3 sont les variables d'état et a, b, c, d sont des paramètres constants réels inconnus du système.

Ce système est chaotique si et seulement si : $a = 10, b = 40, c = 2, 5; d = 4$.

Comme le système esclave, on décrit le système **Lü** comme suit :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha(y_2 - y_1) + u_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \gamma y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = -\beta y_3 + y_1 y_2 + u_3 \end{cases} \quad (2.60)$$

tel que y_1, y_2, y_3 des variables d'état et α, β, γ sont des paramètres constants réels et inconnus du système et u_1, u_2, u_3 des contrôles non linéaires.

Ce système est chaotique pour les valeurs données : $\alpha = 36, \beta = 3, \gamma = 20$.

On a l'erreur de ce type de synchronisation défini par :

$$e_i = y_i - x_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.61)$$

il implique que :

$$\dot{e}_i = \dot{y}_i - \dot{x}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.62)$$

on obtient l'erreur comme :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha(y_2 - y_1) + u_1 - a(x_2 - x_1) \\ \dot{e}_2 = \gamma y_2 - y_1 y_3 + u_2 - b x_1 + x_1 x_3 \\ \dot{e}_3 = -\beta y_3 + y_1 y_2 + u_3 + c x_3 - d x_1^2 \end{cases} \quad (2.63)$$

donc les contrôleurs sont :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha_1(t)(y_2 - y_1) + a_1(t)(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ u_2 = -\gamma_1(t)y_2 + y_1 y_3 + b_1(t)x_1 - x_1 x_3 - k_2 e_2 \\ u_3 = \beta_1(t)y_3 - y_1 y_2 - c_1(t)x_3 + d_1(t)x_1 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.64)$$

En substituant (2.64) à (2.63), la dynamique d'erreur est obtenue comme

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha(y_2 - y_1) - a(x_2 - x_1) - \alpha_1(t)(y_2 - y_1) + a_1(t)(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = \gamma y_2 - y_1 y_3 - b x_1 + x_1 x_3 - \gamma_1(t)y_2 + y_1 y_3 + b_1(t)x_1 - x_1 x_3 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -\beta y_3 + y_1 y_2 + c x_3 - d x_1^2 + \beta_1(t)y_3 - y_1 y_2 - c_1(t)x_3 + d_1(t)x_1^2 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.65)$$

il implique que :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (\alpha - \alpha_1(t))(y_2 - y_1) - (a - a_1(t))(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = (\gamma - \gamma_1(t))y_2 - (b - b_1(t))x_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -(\beta - \beta_1(t))y_3 + (c - c_1(t))x_3 - (d - d_1(t))x_1^2 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.66)$$

on définit l'estimation des erreurs des paramètres comme suit :

$$e_a = a - a_1(t), e_b = b - b_1(t), e_c = c - c_1(t), e_d = d - d_1(t), e_\alpha = \alpha - \alpha_1(t), e_\beta = \beta - \beta_1(t), e_\gamma = \gamma - \gamma_1(t). \quad (2.67)$$

Remplaçant (2.67) dans (2.66) on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_\alpha(y_2 - y_1) - e_a(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = e_\gamma y_2 - e_b x_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -e_\beta y_3 + e_c x_3 - e_d x_1^2 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.68)$$

utilisant la fonction de Lyapunov :

$$V(e_1, e_2, e_3, e_a, e_b, e_c, e_d, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma) = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_d^2 + e_\alpha^2 + e_\beta^2 + e_\gamma^2) \quad (2.69)$$

qu'est une fonction définie positive sur \mathbb{R}^{10} , et on a :

$$\begin{cases} \frac{de_a(t)}{dt} = -\frac{da_1(t)}{dt}, \frac{de_b(t)}{dt} = -\frac{db_1(t)}{dt}, \frac{de_c(t)}{dt} = -\frac{dc_1(t)}{dt}, \\ \frac{de_d(t)}{dt} = -\frac{dd_1(t)}{dt}, \frac{de_\alpha(t)}{dt} = -\frac{d\alpha_1(t)}{dt}, \\ \frac{de_\beta(t)}{dt} = -\frac{d\beta_1(t)}{dt}, \frac{de_\gamma(t)}{dt} = -\frac{d\gamma_1(t)}{dt}. \end{cases} \quad (2.70)$$

Différenciant V au le long du trajectoires du systèmes (2.70) et (2, 68), on obtient :

$$\dot{V} = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 + \dot{e}_a e_a + \dot{e}_b e_b + \dot{e}_c e_c + \dot{e}_d e_d + \dot{e}_\alpha e_\alpha + \dot{e}_\beta e_\beta + \dot{e}_\gamma e_\gamma \quad (2.71)$$

alors

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 + e_a(t) \left[-e_1(x_2 - x_1) - \frac{da_1(t)}{dt} \right] + \\ & e_b(t) \left[-e_2 x_1 - \frac{db_1(t)}{dt} \right] + e_c(t) \left[x_3 e_3 - \frac{dc_1(t)}{dt} \right] + \\ & e_d(t) \left[x_1^2 e_3 - \frac{dd_1(t)}{dt} \right] + e_\alpha(t) \left[(y_2 - y_1) e_1 - \frac{d\alpha_1(t)}{dt} \right] + \\ & e_\beta(t) \left[-y_3 e_3 - \frac{d\beta_1(t)}{dt} \right] + e_\gamma(t) \left[y_2 e_2 - \frac{d\gamma_1(t)}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (2.72)$$

Posons :

$$\begin{cases} \frac{da_1(t)}{dt} = -e_1(x_2 - x_1) + k_4 e_a \\ \frac{db_1(t)}{dt} = -e_2 x_1 + k_5 e_b \\ \frac{dc_1(t)}{dt} = x_3 e_3 + k_6 e_c \\ \frac{dd_1(t)}{dt} = x_1^2 e_3 + k_7 e_d \\ \frac{d\alpha_1(t)}{dt} = (y_2 - y_1) e_1 + k_8 e_\alpha \\ \frac{d\beta_1(t)}{dt} = -y_3 e_3 + k_9 e_\beta \\ \frac{d\gamma_1(t)}{dt} = y_2 e_2 + k_{10} e_\gamma \end{cases} \quad (2.73)$$

tel que k_i , ($i = 4, 5, 6, \dots, 10$) des constants positifs.

Remplaçant (2.73) en (2.72) on obtient :

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_a^2 - k_5 e_b^2 - k_6 e_c^2 - k_7 e_d^2 - k_8 e_\alpha^2 - k_9 e_\beta^2 - k_{10} e_\gamma^2 < 0 \quad (2.74)$$

qu'est une fonction définie négative sur \mathbb{R}^{10} .

Théorème 2.3 : *Le système maître (2.59) et le système esclave (2.60) non-identiques avec des paramètres inconnus sont globalement et exponentiellement synchronisés sous la loi du contrôle adaptatif (2, 64) si et seulement si les estimations du paramètres données par (2, 70) sont exponentiellement convergentes pour les valeurs des paramètres $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$ respectivement quand $t \rightarrow \infty$. Aussi k_i , ($i = 4, 5, 6, \dots, 10$) des constantes positives.*

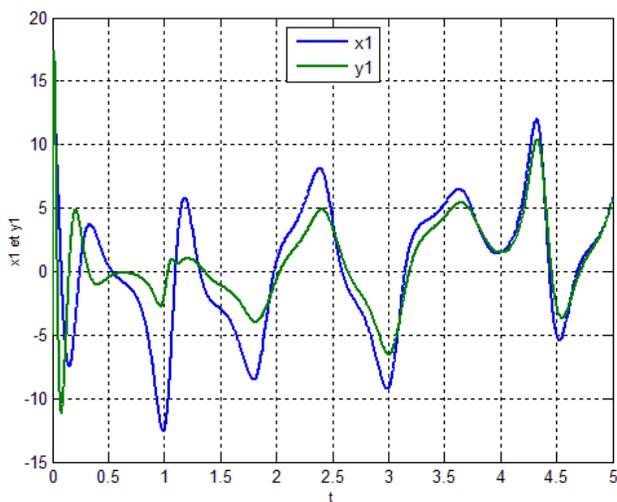


Fig 2.12-Synchronisation complète des états x_1 et y_1 pour les systèmes (2.59) et (2.60). cas non-identique.

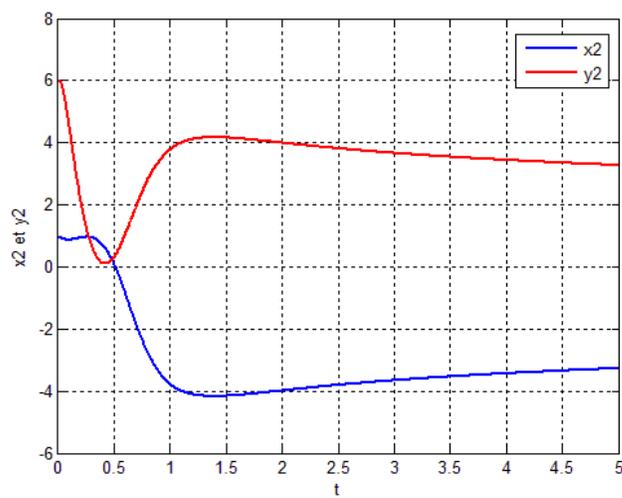


Fig 2.13-Synchronisation complète des états x_2 et y_2 pour les systèmes (2.59) et (2.60). cas non-identique.

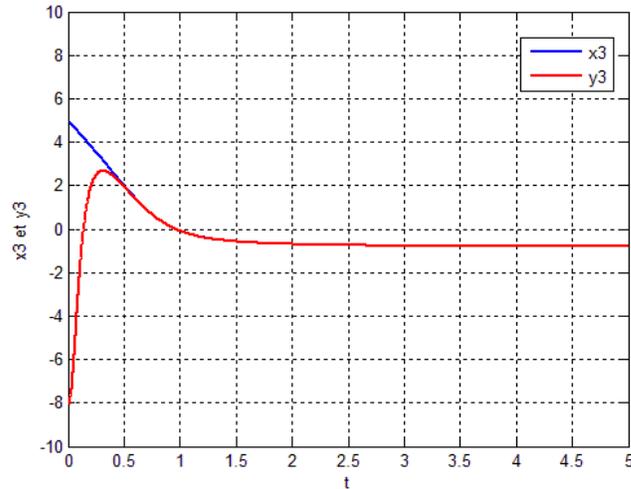


Fig 2.14-Synchronisation complète des états x_3 et y_3 pour les systèmes (2.59) et (2.60). cas non-identique.

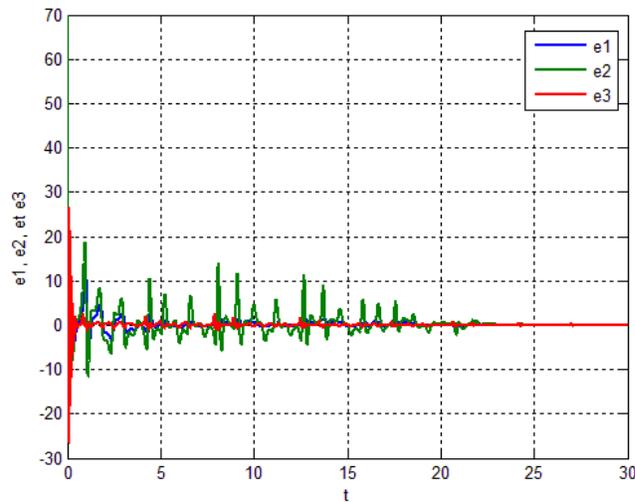


Fig 2.15-Historique temporel de l'erreur de synchronisation complète des systèmes (2.59) et (2.60). cas non-identique.

2.5.2 Anti synchronisation

Soit le système (2.59) un système maître et le système **Pan** contrôlé un système esclave :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = \alpha(y_2 - y_1) + u_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = \gamma y_2 - y_1 y_3 + u_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = -\beta y_3 + y_1 y_2 + u_3 \end{cases} \quad (2.75)$$

tel que y_1, y_2, y_3 sont les variables d'état, α, β, γ sont des paramètres constants réels et inconnus du système et u_1, u_2, u_3 des contrôles non linéaires.

Ce système est chaotique pour : $\alpha = 10, \beta = 8/3, \gamma = 16$.

on a l'erreur de ce type défini par :

$$e_i = y_i + x_i, i = 1, 2, 3. \quad (2.76)$$

il implique que :

$$\dot{e}_i = \dot{y}_i + \dot{x}_i, i = 1, 2, 3. \quad (2.77)$$

on obtient l'erreur comme suit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha(y_2 - y_1) + u_1 + a(x_2 - x_1) \\ \dot{e}_2 = \gamma y_2 - y_1 y_3 + u_2 + b x_1 - x_1 x_3 \\ \dot{e}_3 = -\beta y_3 + y_1 y_2 + u_3 - c x_3 + d x_1^2 \end{cases} \quad (2.78)$$

implique que les contrôleurs sont données comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -\alpha_1(t)(y_2 - y_1) - a_1(t)(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ u_2 = -\gamma_1(t)y_2 + y_1 y_3 - b_1(t)x_1 + x_1 x_3 - k_2 e_2 \\ u_3 = \beta_1(t)y_3 - y_1 y_2 + c_1(t)x_3 - d_1(t)x_1^2 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.79)$$

donc :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \alpha(y_2 - y_1) - a(x_2 - x_1) - \alpha_1(t)(y_2 - y_1) - a_1(t)(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = \gamma y_2 - y_1 y_3 + b x_1 - x_1 x_3 - \gamma_1(t)y_2 + y_1 y_3 - b_1(t)x_1 + x_1 x_3 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -\beta y_3 + y_1 y_2 - c x_3 + d x_1^2 + \beta_1(t)y_3 - y_1 y_2 + c_1(t)x_3 - d_1(t)x_1^2 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.80)$$

alors :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = (\alpha - \alpha_1(t))(y_2 - y_1) + (a - a_1(t))(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = (\gamma - \gamma_1(t))y_2 + (b - b_1(t))x_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -(\beta - \beta_1(t))y_3 - (c - c_1(t))x_3 + (d - d_1(t))x_1^2 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.81)$$

on définit l'estimation des erreurs des paramètres comme :

$$\begin{aligned} e_a &= a - a_1(t), e_b = b - b_1(t), e_c = c - c_1(t), e_d = d - d_1(t), \\ e_\alpha &= \alpha - \alpha_1(t), e_\beta = \beta - \beta_1(t), e_\gamma = \gamma - \gamma_1(t). \end{aligned} \quad (2.82)$$

Remplaçant (2.82) dans (2.81) on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_\alpha(y_2 - y_1) + e_a(x_2 - x_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = e_\gamma y_2 + e_b x_1 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -e_\beta y_3 - e_c x_3 + e_d x_1^2 - k_3 e_3 \end{cases} \quad (2.83)$$

utilisant la même fonction de Lyapunov qui est définie par (2.69).

Différenciant V au long du trajectoires du systèmes (2.83) et (2.70), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 + e_a(t) \left[e_1(x_2 - x_1) - \frac{da_1(t)}{dt} \right] + \\ & e_b(t) \left[e_2 x_1 - \frac{db_1(t)}{dt} \right] + e_c(t) \left[-x_3 e_3 - \frac{dc_1(t)}{dt} \right] + \\ & e_d(t) \left[x_1^2 e_3 - \frac{dd_1(t)}{dt} \right] + e_\alpha(t) \left[(y_2 - y_1) e_1 - \frac{d\alpha_1(t)}{dt} \right] + \\ & e_\beta(t) \left[-y_3 e_3 - \frac{d\beta_1(t)}{dt} \right] + e_\gamma(t) \left[y_2 e_2 - \frac{d\gamma_1(t)}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

En choisit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{da_1(t)}{dt} = e_1(x_2 - x_1) + k_4 e_a \\ \frac{db_1(t)}{dt} = e_2 x_1 + k_5 e_b \\ \frac{dc_1(t)}{dt} = -x_3 e_3 + k_6 e_c \\ \frac{dd_1(t)}{dt} = x_1^2 e_3 + k_7 e_d \\ \frac{d\alpha_1(t)}{dt} = (y_2 - y_1) e_1 + k_8 e_\alpha \\ \frac{d\beta_1(t)}{dt} = -y_3 e_3 + k_9 e_\beta \\ \frac{d\gamma_1(t)}{dt} = y_2 e_2 + k_{10} e_\gamma \end{array} \right. \quad (2.85)$$

tel que $k_i, (i = 4, 5, 6, \dots, 10)$ des constants positifs.

Remplaçant (2.85) en (2.84) on obtient :

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_a^2 - k_5 e_b^2 - k_6 e_c^2 - k_7 e_d^2 - k_8 e_\alpha^2 - k_9 e_\beta^2 - k_{10} e_\gamma^2 < 0 \quad (2.86)$$

qu'est une fonction définie négative sur \mathbb{R}^{10} .

Théorème 2.4 : *Le système maître (2.59) et le système esclave (2.75) non identiques avec des paramètres inconnus sont globalement et exponentiellement anti synchronisés sous la loi du contrôle adaptatif (2.79) et la loi de mise à jour (2.85).*

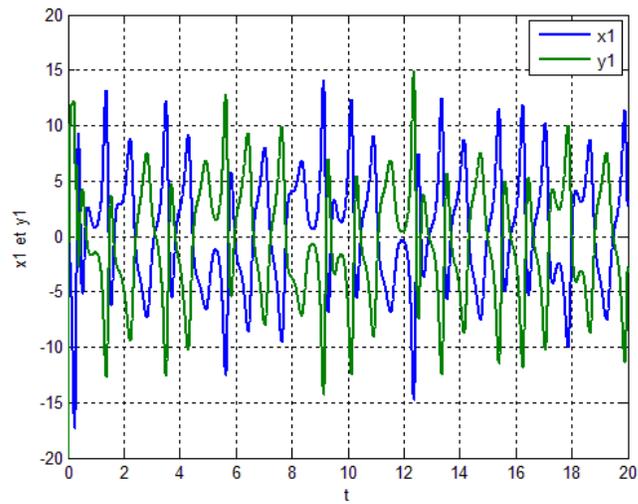


Fig 2.16-Anti synchronisation des états x_1 et y_1 pour les systèmes (2.59) et (2.60). cas non-identique.

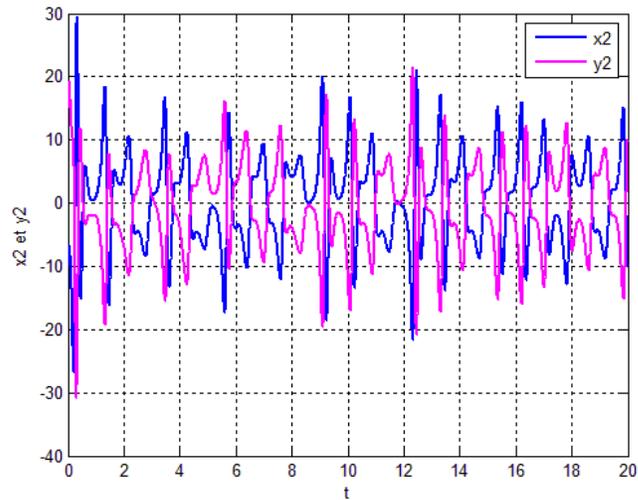


Fig 2.17-Anti synchronisation des états x_2 et y_2 pour les systèmes (2.59) et (2.60). cas non-identique.

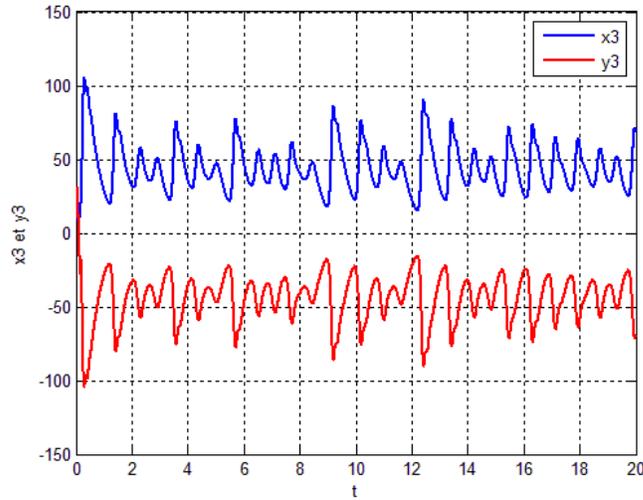


Fig 2.18-Anti synchronisation des états x_3 et y_3 pour les systèmes (2.59) et (2.60). cas non-identique.

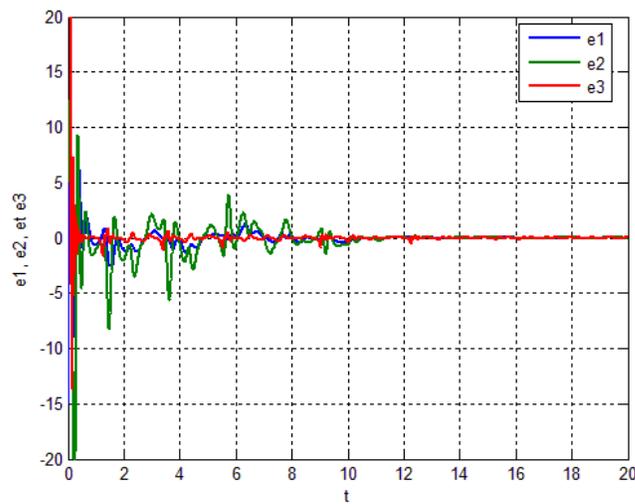


Fig 2.19-Historique temporel de l'erreur de l'anti-synchronisation des systèmes (2.59) et (2.60). cas non-identique.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré la synchronisation complète et l'anti synchronisation par la méthode de contrôle adaptatif pour certains systèmes chaotiques 3D identiques et non iden-

tiques avec des paramètres inconnus, basons sur la théorie de stabilité de Lyapunov et la théorie de contrôle adaptatif, les lois du contrôle adaptatives, les lois de mises à jour des paramètres des estimations.

La simulation numérique est présentée pour montrer l'efficacité de chaque approche pour les deux types de synchronisation réaliser.

Chapitre 3

Synchronisation des systèmes hyper chaotiques par la méthode de contrôle adaptatif

Dans ce chapitre, nous avons réalisé la synchronisation hybride par la méthode de contrôle adaptatif pour quelques systèmes hyper-chaotiques identiques et non identiques.

En premier, nous avons donné une idée sur le contrôle d'un système hyper chaotique selon la méthode considéré puis en utilisant la théorie du stabilité de Lyapunov, nous montrons la coexistence d'une synchronisation hybride entre deux systèmes hyper chaotiques en 4d. Les résultats sont confirmés par des simulations numériques en **Matlab**.

3.1 Description et contrôle d'un nouveau système hyper chaotique

Dans cette section, on va détailler brièvement des propriétés qualitatives d'un système hyper chaotique.

3.1.1 Représentation du système hyper chaotique

On considère le système hyper chaotique financier décrit par le modèle d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -a(x_2 + x_1) + x_4 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - ax_1x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} = b + ax_1x_2 \\ \frac{dx_4}{dt} = -dx_4 - cx_1x_3 \end{cases} \quad (3.1)$$

tel que x_1, x_2, x_3, x_4 sont les variables d'état et a, b, c, d sont les paramètres du système respectivement.

Pour $a = 3; b = 15; c = 0, 2$ et $d = 0, 12$, les exposants de Lyapunov du système (3.1) sont :

$$L_1 = 0.7083; L_2 = 0.032247; L_3 = 0; L_4 = -4.7139 \quad (3.2)$$

Donc, le système (3.1) a deux exposants de Lyapunov positives L_1 et L_2 , ce qui montre que le système est hyper chaotique et le dimension de Kaplan-York pour ce système hyper chaotique est calculé comme :

$$D_{KY} = 3 + \frac{L_1 + L_2 + L_3}{|L_4|} = 3.15709 \quad (3.3)$$

3.1.2 Contrôle adaptatif du système hyper chaotique (3.1) :

Dans cette partie, on va construire un contrôleur adaptatif pour stabiliser globalement le nouveau système hyper chaotique (3.1), avec des paramètres inconnus.

Le système hyper chaotique contrôlé du système (3.1) est :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -a(x_2 + x_1) + x_4 + u_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2 - ax_1x_3 + u_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = b + ax_1x_2 + u_3 \\ \frac{dx_4}{dt} = -dx_4 - cx_1x_3 + u_4 \end{cases} \quad (3.4)$$

tel que x_1, x_2, x_3, x_4 les variables d'état, a, b, c, d sont des constantes et inconnus paramètres et u_1, u_2, u_3, u_4 sont des contrôles adaptatifs à concevoir en utilisant des estimations $\hat{a}(t), \hat{b}(t), \hat{c}(t)$ et $\hat{d}(t)$ qui sont des paramètres inconnus.

Considérons le contrôleur adaptatif défini comme suit :

$$\begin{cases} u_1(t) = \hat{a}(t)(x_2 + x_1) - x_4 - k_1x_1 \\ u_2(t) = x_2 + \hat{a}(t)x_1x_3 - k_2x_2 \\ u_3(t) = -\hat{b}(t) - \hat{a}(t)x_1x_2 - k_3x_3 \\ u_4(t) = \hat{d}(t)x_4 + \hat{c}(t)x_1x_3 - k_4x_4 \end{cases} \quad (3.5)$$

où k_1, k_2, k_3, k_4 sont des constantes positives et $\hat{a}(t), \hat{b}(t), \hat{c}(t), \hat{d}(t)$ pour les paramètres inconnus a, b, c, d respectivement.

Introduisant (3.5) dans (3.4), nous obtenons :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -(a - \hat{a}(t))(x_2 + x_1) - k_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -(a - \hat{a}(t))x_1 x_3 - k_2 x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = b - \hat{b}(t) + (a - \hat{a}(t))x_1 x_2 - k_3 x_3 \\ \frac{dx_4}{dt} = -(d - \hat{d}(t))x_4 - (c - \hat{c}(t))x_1 x_3 - k_4 x_4. \end{cases} \quad (3.6)$$

Maintenant, définissons les paramètres d'estimations des erreurs comme :

$$\begin{cases} e_a(t) = a - \hat{a}(t) \\ e_b(t) = b - \hat{b}(t) \\ e_c(t) = c - \hat{c}(t) \\ e_d(t) = d - \hat{d}(t). \end{cases} \quad (3.7)$$

Utilisant (3.7), puis introduisant dans (3.6), et d'après la simplification on obtient les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -e_a(t)(x_2 + x_1) - k_1 x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} = -e_a(t)x_1 x_3 - k_2 x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} = e_b(t) + e_a(t)x_1 x_2 - k_3 x_3 \\ \frac{dx_4}{dt} = -e_d(t)x_4 - e_c(t)x_1 x_3 - k_4 x_4. \end{cases} \quad (3.8)$$

Différenciant (3.7) par rapport à t , on obtient :

$$\begin{cases} \frac{de_a(t)}{dt} = -\frac{d\hat{a}(t)}{dt} \\ \frac{de_b(t)}{dt} = -\frac{d\hat{b}(t)}{dt} \\ \frac{de_c(t)}{dt} = -\frac{d\hat{c}(t)}{dt} \\ \frac{de_d(t)}{dt} = -\frac{d\hat{d}(t)}{dt} \end{cases} \quad (3.9)$$

Nous utilisons la théorie de stabilité de Lyapunov pour trouver une loi de mise à jour des paramètres des estimations.

Considérons une fonction quadratique de Lyapunov donnée par :

$$V = 1/2 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_d^2). \quad (3.10)$$

Différenciant V au long des trajectoires des systèmes (3.8) et (3.9) et introduisant dans \dot{V} , on

obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -k_1x_1^2 - k_2x_2^2 - k_3x_3^2 - k_4x_4^2 + e_a \left[-(x_2 + x_1)x_1 - \frac{d\hat{a}(t)}{dt} \right] + e_b \left[x_3 - \frac{d\hat{b}(t)}{dt} \right] \\ & + e_c \left[-x_1x_3x_4 - \frac{d\hat{c}(t)}{dt} \right] + e_d \left[-x_4^2 - \frac{d\hat{d}(t)}{dt} \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Alors du (3.11), on prend :

$$\begin{cases} \frac{d\hat{a}(t)}{dt} = -(x_2 + x_1)x_1 \\ \frac{d\hat{b}(t)}{dt} = x_3 \\ \frac{d\hat{c}(t)}{dt} = -x_1x_3x_4 \\ \frac{d\hat{d}(t)}{dt} = -x_4^2 \end{cases} \quad (3.12)$$

alors :

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^4 -k_i x_i^2 \quad (3.13)$$

Théorème 3.1 *Le système hyper chaotique (3.1) est stabilisé globalement et exponentiellement par la loi de contrôle adaptatif (3.5) et la loi de mise à jour (3.12), tel que k_1, k_2, k_3, k_4 sont des constantes positives.*

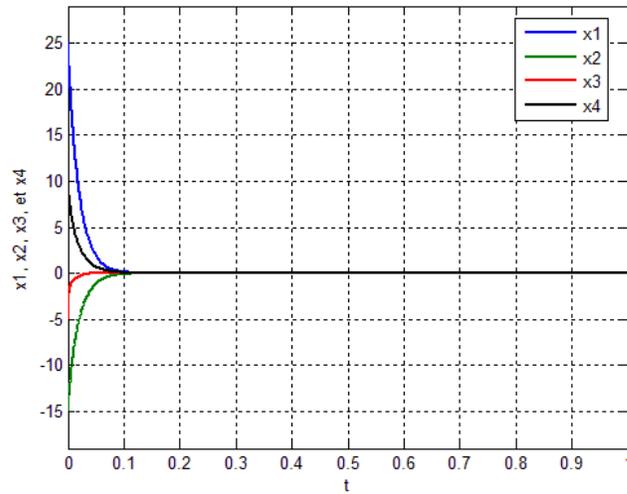


Fig 3.1-Historique des états contrôlés x_1, x_2, x_3, x_4 du système (3.1).

3.2 Synchronisation hybride des systèmes hyper chaotiques

Si nous divisons les systèmes maître et esclave en deux parties, alors le système (2.1) peut s'écrire :

$$\dot{x}_i = f_i(x) + F_i(x) \alpha_i \quad (3.14)$$

$$\dot{x}_j = f_j(x) + F_j(x) \alpha_j \quad (3.15)$$

et le système esclave (2.2) peut s'écrire

$$\dot{y}_i = g_i(y) + G_i(y) \beta_i + u_i \quad (3.16)$$

$$\dot{y}_j = g_j(y) + G_j(y) \beta_j + u_j. \quad (3.17)$$

Soit $e_i = y_i - x_i$ et $e_j = y_j - x_j$ le vecteur d'erreur de la synchronisation complète et l'anti synchronisation entre les systèmes (3.14) – (3.15) et (3.16) – (3.17). Notre objectif est de concevoir un contrôleur u tel que la trajectoire du système esclave (3.16) – (3.17) avec les conditions initiales $x_0 = (x_i(0), x_j(0))$ puisse approcher asymptotiquement le système maître (3.14) – (3.15), avec la condition initiale $y_0 = (y_i(0), y_j(0))$. Et enfin mettre en œuvre la synchronisation hybride de telle sorte que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_i\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_j\| = 0 \quad (3.18)$$

3.2.1 Conception du contrôleur de synchronisation hybride adaptatif

Si le contrôleur non linéaire $u(t, x, y)$ est sélectionné comme :

$$u(t, x, y) = \begin{cases} f_i(x) + F_i(x) \hat{\alpha}_i - g_i(y) - G_i(y) \hat{\beta}_i - e_i \\ -f_j(x) - F_j(x) \hat{\alpha}_j - g_j(y) - G_j(y) \hat{\beta}_j - e_j \end{cases} \quad (3.19)$$

et les lois adaptatives des paramètres sont considérées comme :

$$\begin{cases} \dot{\hat{\alpha}}_i = -[F_i(x)]^T e_i \\ \dot{\hat{\beta}}_i = [G_i(y)]^T e_i \\ \dot{\hat{\alpha}}_j = [F_j(x)]^T e_j \\ \dot{\hat{\beta}}_j = [G_j(y)]^T e_j \end{cases} \quad (3.20)$$

alors, le système (3.16) – (3.17) peut synchroniser et anti synchroniser le système d'entraînement (3.14) – (3.15) globalement et asymptotiquement, où $\hat{\alpha}_i, \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_i, \hat{\beta}_j$ sont respectivement des estimations des paramètres inconnus, $\alpha_i, \alpha_j, \beta_i, \beta_j$.

Des équations (3.14) – (3.17), nous obtenons les systèmes dynamiques d'erreur comme suit :

$$\dot{e}_i = -f_i(x) - F_i(x)\alpha_i + g_i(y) + G_i(y)\beta_i + u_i \quad (3.21)$$

$$\dot{e}_j = f_j(x) + F_j(x)\alpha_j + g_j(y) + G_j(y)\beta_j + u_j \quad (3.22)$$

implique

$$\dot{e}_i = -F_i(x)\left(\alpha_i - \hat{\alpha}_i\right) + G_i(y)\left(\beta_i - \hat{\beta}_i\right) - e_i \quad (3.23)$$

$$\dot{e}_j = F_j(x)\left(\alpha_j - \hat{\alpha}_j\right) + G_j(y)\left(\beta_j - \hat{\beta}_j\right) - e_j \quad (3.24)$$

alors

$$\dot{e} = -F_i(x)\left(\alpha_i - \hat{\alpha}_i\right) + G_i(y)\left(\beta_i - \hat{\beta}_i\right) + F_j(x)\left(\alpha_j - \hat{\alpha}_j\right) + G_j(y)\left(\beta_j - \hat{\beta}_j\right) - e \quad (3.25)$$

où $e = e_i + e_j$.

Soit $\tilde{\alpha}_i = \alpha_i - \hat{\alpha}_i$, $\tilde{\beta}_i = \beta_i - \hat{\beta}_i$, $\tilde{\alpha}_j = \alpha_j - \hat{\alpha}_j$, $\tilde{\beta}_j = \beta_j - \hat{\beta}_j$.

pour la fonction de Lyapunov

$$V = \frac{e_i^T e_i + e_j^T e_j + \tilde{\alpha}_i^T \tilde{\alpha}_i + \tilde{\alpha}_j^T \tilde{\alpha}_j + \tilde{\beta}_i^T \tilde{\beta}_i + \tilde{\beta}_j^T \tilde{\beta}_j}{2} \quad (3.26)$$

implique que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}_i^T e_i + \dot{e}_j^T e_j + \tilde{\alpha}_i^T \dot{\tilde{\alpha}}_i + \tilde{\alpha}_j^T \dot{\tilde{\alpha}}_j + \tilde{\beta}_i^T \dot{\tilde{\beta}}_i + \tilde{\beta}_j^T \dot{\tilde{\beta}}_j \\ &= \left(-F_i(x)\left(\tilde{\alpha}_i\right) + G_i(y)\left(\tilde{\beta}_i\right) - e_i\right)^T e_i + \left(F_j(x)\left(\tilde{\alpha}_j\right) + G_j(y)\left(\tilde{\beta}_j\right) - e_j\right)^T e_j \\ &\quad + \tilde{\alpha}_i^T \left([F_i(x)]^T e_i\right) + \tilde{\alpha}_j^T \left(-[F_j(x)]^T e_j\right) + \tilde{\beta}_i^T \left(-[G_i(y)]^T e_i\right) + \tilde{\beta}_j^T \left(-[G_j(y)]^T e_j\right) \\ &= -(e_i^T e_i + e_j^T e_j) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.27)$$

La fonction de Lyapunov V est définie positive et sa dérivée \dot{V} est définie négative dans un voisinage de la solution nulle pour le système (3.25). D'après la théorie du stabilité de Lyapunov, le système dynamique d'erreur peut converger asymptotiquement vers l'origine i.e., $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$.

Par conséquent, le système maître (3.14) – (3.15) est synchronisé de manière asymptotique avec le système esclave (3.16) – (3.17) sous la loi de contrôle adaptatif (3.19) et la loi de mise à jour d'estimation des paramètres (3.20).

3.3 Application du contrôle adaptatif pour la synchronisation hybride des systèmes hyper chaotiques

3.3.1 Cas des systèmes hyper chaotiques identiques

Dans cette sous-section, basée sur la théorie de stabilité de Lyapunov et la théorie du contrôle adaptatif, la synchronisation entre deux systèmes hyper chaotiques financiers identiques avec des paramètres inconnus est réalisée.

Récemment, un nouveau système hyper chaotique financier a été construit comme :

$$\begin{cases} \dot{x} = z + (y - a)x + w \\ \dot{y} = 1 - by - x^2 \\ \dot{z}_3 = -x - cz \\ \dot{w}_4 = -dxy - kw \end{cases} \quad (3.28)$$

où a, b, c, d et k sont les paramètres du système et ce sont toutes des constantes positives. Et lorsque les paramètres $a = 0,9; b = 0,2; c = 1,5; d = 0,2$ et $k = 0,17$, les exposants de Lyapunov du système sont $L_1 = 0,34432; L_2 = 0,018041; L_3 = 0$ et $L_4 = -1,1499$. Par conséquent, le système présente un comportement hyper chaotique.

Selon le système hyper chaotique financier ci-dessous, le système maître et le système esclave sont respectivement donnés comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + (x_2 - a)x_1 + x_4 \\ \dot{x}_2 = 1 - bx_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - cx_3 \\ \dot{x}_4 = -dx_1x_2 - kx_4 \end{cases} \quad (3.29)$$

et

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_3 + (y_2 - a)y_1 + y_4 + u_1 \\ \dot{y}_2 = 1 - by_2 - y_1^2 + u_2 \\ \dot{y}_3 = -y_1 - cy_3 + u_3 \\ \dot{y}_4 = -dy_1y_2 - ky_4 + u_4 \end{cases} \quad (3.30)$$

où a, b, c, d, k sont des paramètres inconnus. Et il peut être présenté sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_1x_2 + x_4 \\ 1 - x_1^2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x_1x_2 & -x_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ k \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

De même, le système de réponse devient :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_3 + y_1 y_2 + y_4 \\ 1 - y_1^2 \\ -y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y_1 y_2 & -y_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

tel que $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ sont des variables d'état et u_1, u_2, u_3, u_4 sont des contrôleurs non linéaires qui doivent être conçus de telle sorte que les deux systèmes hyper-chaotiques puissent être synchronisés au sens de synchronisation hybride.

L'erreur entre les trajectoires de ces systèmes est obtenu comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 + x_2 \\ e_3 = y_3 - x_3 \\ e_4 = y_4 + x_4. \end{cases} \quad (3.33)$$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{y}_1 - \dot{x}_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 + \dot{x}_2 \\ \dot{e}_3 = \dot{y}_3 - \dot{x}_3 \\ \dot{e}_4 = \dot{y}_4 + \dot{x}_4 \end{cases} \quad (3.34)$$

il implique que :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -x_3 - x_4 + y_3 + y_4 + ax_1 - ay_1 - x_1 x_2 + y_1 y_2 + u_1 \\ \dot{e}_2 = 2 - x_1^2 - y_1^2 - bx_2 - by_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = x_1 - y_1 + cx_3 - cy_3 + u_3 \\ \dot{e}_4 = -kx_4 - ky_4 - dx_1 x_2 - dy_1 y_2 + u_4. \end{cases} \quad (3.35)$$

Donc

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = e_3 - x_4 + y_4 - ae_1 - x_1 x_2 + y_1 y_2 + u_1 \\ \dot{e}_2 = 2 - x_1^2 - y_1^2 - be_2 + u_2 \\ \dot{e}_3 = -e_1 - ce_3 + u_3 \\ \dot{e}_4 = -ke_4 - d(e_2 y_1 - x_2 e_1) + u_4. \end{cases} \quad (3.36)$$

Alors, définissant les fonctions de contrôle adaptatif $u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t)$ de ce système comme :

$$\begin{cases} u_1(t) = -e_3 + x_4 - y_4 + \hat{a}e_1 + x_1 x_2 - y_1 y_2 - k_1 e_1 \\ u_2(t) = -2 + x_1^2 + y_1^2 + \hat{b}e_2 - k_2 e_2 \\ u_3(t) = e_1 + \hat{c}e_3 - k_3 e_3 \\ u_4(t) = \hat{k}e_4 + \hat{d}(e_2 y_1 - x_2 e_1) - k_4 e_4 \end{cases} \quad (3.37)$$

tel que $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{d}, \hat{k}$ des estimations de a, b, c, d, k respectivement et k_1, k_2, k_3, k_4 sont des constantes positives.

Introduisant (3.37) dans (3.36) on obtient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\left(a - \hat{a}\right) e_1 - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -\left(b - \hat{b}\right) e_2 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -\left(c - \hat{c}\right) e_3 - k_3 e_3 \\ \dot{e}_4 = -\left(k - \hat{k}\right) e_4 - \left(d - \hat{d}\right) (e_2 y_1 - x_2 e_1) - k_4 e_4 \end{cases} \quad (3.38)$$

posons :

$$e_a = a - \hat{a}, e_b = b - \hat{b}, e_c = c - \hat{c}, e_d = d - \hat{d}, e_k = k - \hat{k}. \quad (3.39)$$

puis différenciant on obtient :

$$\dot{e}_a = -\dot{\hat{a}}, \dot{e}_b = -\dot{\hat{b}}, \dot{e}_c = -\dot{\hat{c}}, \dot{e}_d = -\dot{\hat{d}}, \dot{e}_k = -\dot{\hat{k}} \quad (3.40)$$

introduisant (3.39) en (3.38) :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_a (e_1) - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -e_b e_2 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -e_c e_3 - k_3 e_3 \\ \dot{e}_4 = -e_k e_4 - e_d (e_2 y_1 - x_2 e_1) - k_4 e_4 \end{cases} \quad (3.41)$$

on considère la fonction de Lyapunov :

$$V(e_1, e_2, e_3, e_4, e_a, e_b, e_c, e_d, e_k) = \frac{(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_d^2 + e_k^2)}{2} \quad (3.42)$$

tel que V une fonction définie positive sur \mathbb{R}^9 .

Différenciant V au le long du trajectoires du systèmes (3.40) et (3.41), on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V} = & e_a \left[(-e_1) e_1 - \dot{\hat{a}} \right] + e_b \left[-e_2^2 - \dot{\hat{b}} \right] \\ & + e_c \left[-e_3^2 - \dot{\hat{c}} \right] + e_d \left[-(e_2 y_1 - x_2 e_1) e_4 - \dot{\hat{d}} \right] + e_k \left[(-e_4) e_4 - \dot{\hat{k}} \right] \\ & - k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_4^2 \end{aligned} \quad (3.43)$$

de (3.41), la loi de mise à jour est donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\hat{a}} = -e_1^2 \\ \dot{\hat{b}} = -e_2^2 \\ \dot{\hat{c}} = -e_3^2 \\ \dot{\hat{d}} = (e_2 y_1 - x_2 e_1) e_4 \\ \dot{\hat{k}} = -e_4^2 \end{cases} \quad (3.44)$$

Introduisant (3.44) en (3.43), on obtient :

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_4^2. \quad (3.45)$$

\dot{V} est une fonction définie négative. Ainsi, il se traduit par $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_i\| = 0, \forall i = 1, \dots, 4$. Et l'erreur d'estimation des paramètres e_a, e_b, e_c, e_d, e_k décroît jusqu'à zéro avec le temps, par la théorie de stabilité de Lyapunov.

D'après ce qui est précède le système maître (3.29) et le système esclave (3.30) sont synchronisés au sens hybride et que les estimations des paramètres convergent vers les valeurs d'origine des paramètres du système.

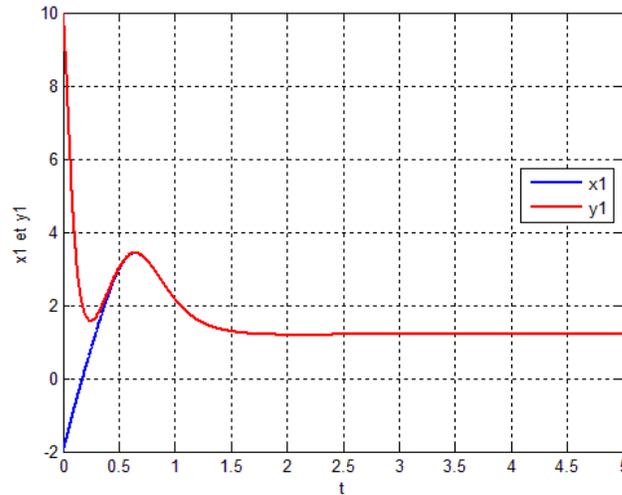


Fig 3.2-Synchronisation complètes des états x_1 et y_1 pour les systèmes (2.29) et (2.30). cas identique.

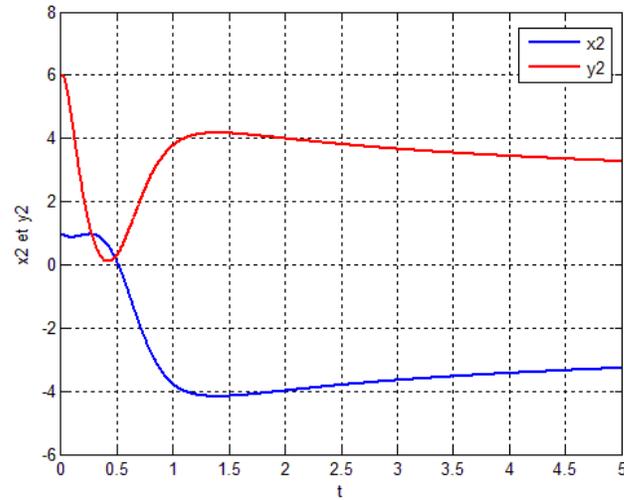


Fig 3.3-Anti-synchronisation des états x_2 et y_2 pour les systèmes (2.29) et (2.30). cas identique.

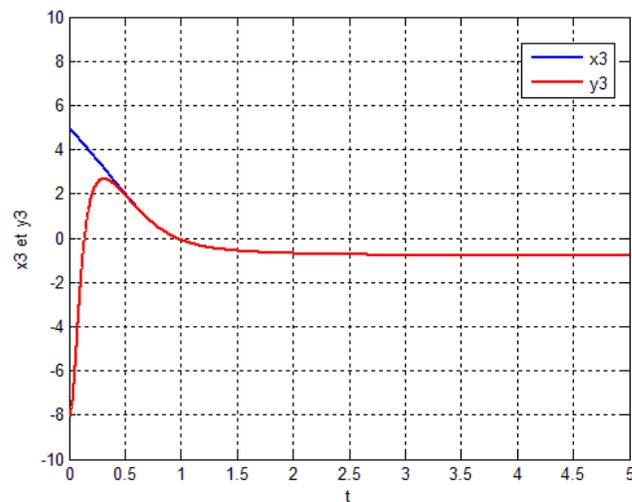


Fig 3.4-Synchronisation complète des états x_3 et y_3 pour les systèmes (2.29) et (2.30). cas identique.

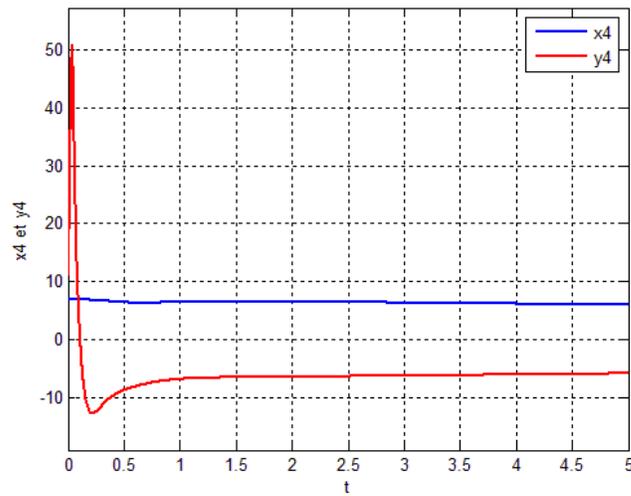


Fig 3.5-Anti synchronisation des états x_4 et y_4 pour les systèmes (2.29) et (2.30). cas identique.

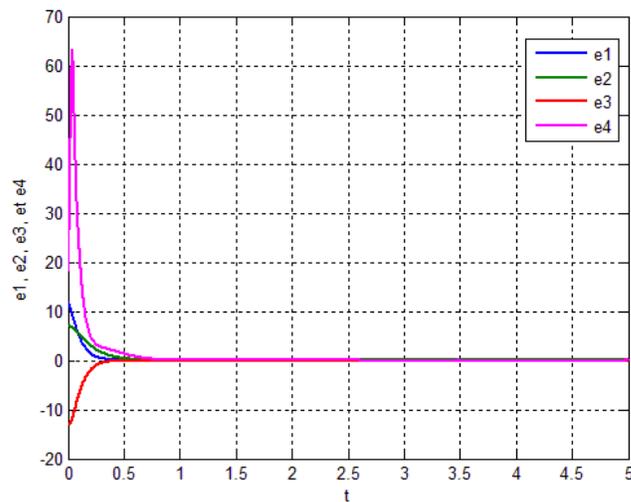


Fig 3.6-Historique temporel de l'erreur de la synchronisation hybrid des systèmes (2.29) et (2.30). cas identique.

3.3.2 Cas des systèmes hyper chaotiques non identiques

Pour cette synchronisation, nous choisissons le système financier (3.46) comme un système maître :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 + (x_2 - a)x_1 + x_4 \\ \dot{x}_2 = 1 - bx_2 - x_1^2 \\ \dot{x}_3 = -x_1 - cx_3 \\ \dot{x}_4 = -dx_1x_2 - kx_4 \end{cases} \quad (3.46)$$

et le système esclave que nous avons utilisé est le système hyper chaotique contrôlé du système (3.1) donné par :

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = -\alpha(y_2 + y_1) + y_4 + u_1 \\ \frac{dy_2}{dt} = -y_2 - \alpha y_1 y_3 + u_2 \\ \frac{dy_3}{dt} = \beta + \alpha y_1 y_2 + u_3 \\ \frac{dy_4}{dt} = -\delta y_4 - \gamma y_1 y_3 + u_4 \end{cases} \quad (3.47)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les paramètres du système.

L'erreur de la synchronisation hybride entre les deux systèmes hyper chaotiques (3.46) et (3.47) est :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 + x_2 \\ e_3 = y_3 - x_3 \\ e_4 = y_4 + x_4 \end{cases} \quad (3.48)$$

Donc :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = \dot{y}_1 - \dot{x}_1 \\ \dot{e}_2 = \dot{y}_2 + \dot{x}_2 \\ \dot{e}_3 = \dot{y}_3 - \dot{x}_3 \\ \dot{e}_4 = \dot{y}_4 + \dot{x}_4 \end{cases} \quad (3.49)$$

Alors, l'erreur dynamique de la synchronisation hybride est :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -\alpha(y_2 + y_1) + y_4 - (x_3 + (x_2 - a)x_1 + x_4) + u_1 \\ \dot{e}_2 = -y_2 - \alpha y_1 y_3 + (1 - bx_2 - x_1^2) + u_2 \\ \dot{e}_3 = \beta + \alpha y_1 y_2 - (-x_1 - cx_3) + u_3 \\ \dot{e}_4 = -\delta y_4 - \gamma y_1 y_3 + (-dx_1x_2 - kx_4) + u_4 \end{cases} \quad (3.50)$$

Prenons la loi du contrôle adaptatif, alors :

$$\begin{cases} u_1(t) = \hat{\alpha}(t)(y_2 + y_1) - y_4 + (x_3 + (x_2 - \hat{a}(t))x_1 + x_4) - k_1 e_1 \\ u_2(t) = y_2 + \hat{\alpha}(t)y_1 y_3 - (1 - \hat{b}(t)x_2 - x_1^2) - k_2 e_2 \\ u_3(t) = -\hat{\beta}(t) - \hat{\alpha}(t)y_1 y_2 + (-x_1 - \hat{c}(t)x_3) - k_3 e_3 \\ u_4(t) = \hat{\delta}(t)y_4 + \hat{\gamma}(t)y_1 y_3 - (-\hat{d}(t)x_1x_2 - \hat{k}(t)x_4) - k_4 e_4 \end{cases} \quad (3.51)$$

Mettant (3.51) dans (3.50), le système (3.50) devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -(\alpha - \hat{\alpha})(y_2 + y_1) + (a - \hat{a}(t))x_1 - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -(\alpha - \hat{\alpha}(t))y_1 y_3 - (b - \hat{b}(t))x_2 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = (\beta - \hat{\beta}(t)) + (\alpha - \hat{\alpha}(t))y_1 y_2 + (c - \hat{c}(t))x_3 - k_3 e_3 \\ \dot{e}_4 = -(\delta - \hat{\delta}(t))y_4 - (\gamma - \hat{\gamma}(t))y_1 y_3 - (d - \hat{d}(t))x_1 x_2 - (k - \hat{k})x_4 - k_4 e_4. \end{cases} \quad (3.52)$$

Alors, les paramètres des estimations des erreurs sont :

$$\begin{cases} e_\alpha = (\alpha - \hat{\alpha}); e_\delta = (\delta - \hat{\delta}); e_\beta = (\beta - \hat{\beta}); e_\theta = (\gamma - \hat{\gamma}). \\ e_a = (a - \hat{a}); e_b = (b - \hat{b}); e_c = (c - \hat{c}); e_d = (d - \hat{d}); e_k = (k - \hat{k}). \end{cases} \quad (3.53)$$

il implique que :

$$\begin{cases} \frac{de_\alpha}{dt} = -\frac{d\hat{\alpha}}{dt}, \frac{de_\delta}{dt} = -\frac{d\hat{\delta}}{dt}, \frac{de_\beta}{dt} = -\frac{d\hat{\beta}}{dt}, \frac{de_\gamma}{dt} = -\frac{d\hat{\gamma}}{dt}. \\ \frac{de_a}{dt} = -\frac{d\hat{a}}{dt}, \frac{de_b}{dt} = -\frac{d\hat{b}}{dt}, \frac{de_c}{dt} = -\frac{d\hat{c}}{dt}, \frac{de_d}{dt} = -\frac{d\hat{d}}{dt}, \frac{de_k}{dt} = -\frac{d\hat{k}}{dt}. \end{cases} \quad (3.54)$$

Remplaçant (3.53) dans (3.52), donc l'erreur dynamique devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -e_\alpha(y_2 + y_1) + e_a x_1 - k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -e_\alpha y_1 y_3 - e_b x_2 - k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = e_\beta + e_\alpha y_1 y_2 + e_c x_3 - k_3 e_3 \\ \dot{e}_4 = -e_\delta y_4 - e_\gamma y_1 y_3 - e_d x_1 x_2 - e_k x_4 - k_4 e_4. \end{cases} \quad (3.55)$$

Considérons la fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 + e_d^2 + e_\alpha^2 + e_\beta^2 + e_\delta^2 + e_\gamma^2 + e_k^2)}{2}. \quad (3.56)$$

V est une fonction définie positive dans \mathbb{R}^{13} .

Différenciant la fonction de Lyapunov V et obtenant le résultat suivant :

$$\begin{cases} \dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_4^2 + e_a [x_1 e_1 - \frac{d\hat{a}}{dt}] \\ + e_b [-x_2 e_2 - \frac{d\hat{b}}{dt}] + e_c [x_3 e_3 - \frac{d\hat{c}}{dt}] + e_d [-x_1 x_2 e_4 - \frac{d\hat{d}}{dt}] + e_\alpha [-(y_2 + y_1)e_1 - y_1 y_3 e_2 + y_1 y_2 e_3 - \frac{d\hat{\alpha}}{dt}] \\ + e_\beta [e_3 - \frac{d\hat{\beta}}{dt}] + e_\delta [-y_4 e_4 - \frac{d\hat{\delta}}{dt}] + e_\gamma [-y_1 y_3 e_4 - \frac{d\hat{\gamma}}{dt}] + e_k [-x_4 e_4 - \frac{d\hat{k}}{dt}]. \end{cases} \quad (3.57)$$

À partir de (3.57), on prend les paramètres de la loi de mise à jour comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{a}}{dt} = x_1 e_1 \\ \frac{d\hat{b}}{dt} = -x_2 e_2 \\ \frac{d\hat{c}}{dt} = x_3 e_3 \\ \frac{d\hat{d}}{dt} = -x_1 x_2 e_4 \\ \frac{d\hat{\alpha}}{dt} = -(y_2 + y_1) e_1 - y_1 y_3 e_2 + y_1 y_2 e_3 \\ \frac{d\hat{\beta}}{dt} = e_3 \\ \frac{d\hat{\delta}}{dt} = -y_4 e_4 \\ \frac{d\hat{\gamma}}{dt} = -y_1 y_3 e_4 \\ \frac{d\hat{k}}{dt} = -x_4 e_4 \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Remplaçant (3.58) dans (3.57), la fonction \dot{V} devient :

$$\dot{V} = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2 - k_4 e_4^2. \quad (3.59)$$

\dot{V} est une fonction définie négative dans \mathbb{R}^4 . Par conséquent, nous avons prouvé le résultat suivant.

Théorème 3.2 *Les systèmes hyper chaotiques non identiques (3.46), (3.47) avec des paramètres inconnus sont synchronisés globalement et exponentiellement par la loi de contrôle adaptatif (3.51), et la loi de mise à jour pour les paramètres des estimations (3.58).*

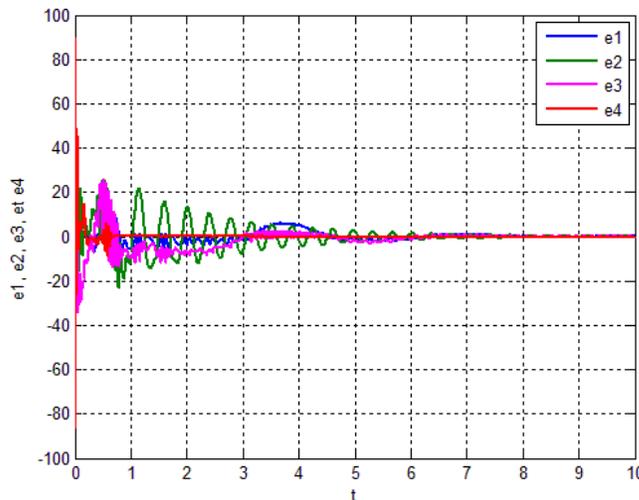


Fig 3.7-Historique temporel de l'erreur de la synchronisation hybride cas non identique du systèmes (3.46) et (3.47).

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons considéré la synchronisation hybride pour quelques systèmes chaotiques (identiques et non identiques) à temps continu selon la méthode de contrôle adaptatif avec des paramètres inconnus. Aussi des simulations numériques sont utilisées pour illustrer l'efficacité et la justesse de l'approche considérée pour cette synchronisation.

3.5 Conclusion générale

Un grand nombre de méthodes de contrôle ont été appliqués au cours de la dernière décennie pour la synchronisation du système chaotique ou système hyper chaotique tel que ; Méthode OYG, commande adaptative, méthode de conception en recul, commande en mode coulissant, méthode de synchronisation PC, commande passive, Contrôle flou, contrôle actif non linéaire ... etc. Le but essentiel dans ce travail est de donner une idée générale sur le contrôle et la synchronisation des systèmes chaotiques et hyper chaotiques (identiques et non identiques) continus par la méthode de contrôle adaptatif.

Ce mémoire contient trois chapitres, le premier est un chapitre préliminaire contient quelques notions fondamentales concernons les systèmes dynamiques (discrets et continus) et le deuxième est consacré sur l'utilisation de la méthode de contrôle adaptatif pour réaliser certaines type de synchronisation pour quelques systèmes chaotiques (identiques et non identiques) à temps continu .

Dans le troisième chapitre, nous considérons la synchronisation hybride pour quelques systèmes chaotiques (identiques et non identiques) à temps continu selon cette méthode de contrôle.

Pour atteindre les objectifs de ce mémoire nous avons donné le schéma adaptatif pour les types de synchronisation réaliser puis nous appliquons ces schémas à quelques systèmes chaotiques et hyper chaotiques dans les deux cas identiques et non identiques sur la base de la théorie de stabilité de Lyapunov lorsque les paramètres sont inconnus ou initialement incertains.

En outre, dans une méthode adaptative, la loi de commande et la loi de mise à jour des paramètres sont conçues de manière à ce que le système de réponse chaotique se comporte comme un système de commande chaotique. En conséquence, la méthode adaptatif maintient les performances constantes d'un système en présence d'incertitude et de variations des paramètres de l'installation. La technique de contrôle adaptatif est différente des autres méthodes de contrôle car elle n'a pas besoin d'informations a priori sur les limites de ces paramètres incertains ou variables dans le temps car cette méthode de contrôle est concernée par la loi de contrôle se changer.

Enfin, des simulations numériques en **Matlab** sont utilisées pour illustrer l'efficacité et la justesse de l'approche de chaque type de synchronisation selon cette méthode de contrôle.

Bibliographie

- [1] P. Maneville. Systèmes dynamiques et chaos. Ecole polytechnique, Palaiseau. 1999.
- [2] R. Lozi. Un Attracteur étrange du type (?) de l'attracteur de Hénon. Journal de Physique. Colloque C5, 39 (1978): 9-10.
- [3] Z. T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde. Bifurcations and chaos in piecewise-smooth dynamical systems. World scientific, Singapore. 2003.
- [4] Z. T. Zhusubaliyev, E. Mosekilde, S. Banerjee. Transitions from phase-locked dynamics to chaos in a piecewise-linear map. Phys. Rev. E, 77 (2008): 1-9.
- [5] H. Nusse, J. Yorke. Border-collision bifurcation including period two to period three for piecewise smooth systems. Physica D, 57 (1992): 39-57.
- [6] H. Nusse, J. Yorke. Border-collision bifurcations for piecewise smooth one-dimensional maps. Int. J. Bif. Chaos, 5 (1995): 189-207.
- [7] I. Djellit, I. Boukemara. Dynamics of a three parameter-family of piecewise maps. Facta Universitatis, 20 (2007): 85-92.
- [8] I. Sushko, A. Agliari, L. Gardini. Bistability and border-collision bifurcations for a family of unimodal piecewise smooth maps. Disc. Cont. Dyn. Syst., 5 (2005): 881-897.
- [9] D. Aharonov, R. L. Devaney, U. Elias. The dynamics of a piecewise linear map and its smooth approximation. Int. J. Bif. Chaos, 7 (1997): 351-372.
- [10] P. S. Linsay. Period doubling and chaotic behavior in a driven an harmonic-oscillator. Physical Review Letters, 47 (1981): 1349-1352.
- [11] J. Schweizer, M. Hasler. Multiple access communication using chaotic signals. In Circuits & System. Connecting the World. IEEE International Symposium, 3 (1996): 108-111.
- [12] A. Abel, A. Bauer, K. Kerber, W. Schwarz. Chaotic codes for CDMA application. Proc. ECCTD, 97 (1997): 306-311.

-
- [13] M. K. J. Johansson. Piecewise linear control systems: A computational approach. Springer, Berlin. 2003.
- [14] S. Banerjee, G. C. Verghese. Nonlinear Phenomena in Power Electronics: Attractors, Bifurcations, Chaos, and Nonlinear Control. IEEE Press, New York. 2001.
- [15] S. Banerjee, S. Parui, A. Gupta. Dynamical Effects of Missed Switching in Current-Mode Controlled dc-dc Converters IEEE Trans. Circuits & Systems–II, 51 (2004): 649–654.
- [16] R. Rajaraman, I. Dobson, S. Jalali. Nonlinear Dynamics and Switching Time Bifurcations of a Thyristor Controlled Reactor Circuit, IEEE Trans. Circuits & Systems–I, 43 (1996): 1001–1006.
- [17] T. K. Tse. Complex Behavior of Switching Power Converters. CRC Press, Boca Raton. 2003.
- [18] S. Banerjee, C. Grebogi. Border collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps. Physical Review E. 59 (1999): 4052–4061.
- [19] V. Botella-Soler, J. Oteo, J. Ros. Dynamics of a map with a power-law tail. J. Phys A. Math. Theor. 42 (2009): 385101
- [20] V. Botella-Soler, J. Castelo, J. Oteo, J. Ros. Bifurcations in the Lozi map. J. Phys A. Math. Theor. 44 (2011): 305101.
- [21] K. Matsuyama. Growing through cycles. Econometrica. 67 (1999): 335–347.
- [22] V. Avrutin, M. Schanz. On multi-parametric bifurcations in a scalar piecewise-linear map. Nonlinearity. 19 (2006): 1875–1906.
- [23] V. Avrutin, M. Schanz. On the fully developed bandcount adding scenario. Nonlinearity. 21 (2008): 1077–1103.
- [24] G. Varley, G. Gradwell, M. Hassell. Insect population ecology : an analytical approach. Blackwell, Oxford. 1993.
- [25] R. May, G. Oster. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. American Naturalist. 110 (1976): 573-599.
- [26] R. Devaney. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Addison-Wesley, New York. 1989.
- [27] S. Wiggins. Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos. Springer-Verlag, New York. 2003.
- [28] K. Alligood, T. Sauer, J. Yorke. Chaos – An Introduction to Dynamical Systems. Springer-Verlag, New York. 1997.

- [29] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano. Determining Lyapunov Exponents From a Time Series. *Physica D*, 16 (1985): 285-317.
- [30] C. Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag, New York. 1982.
- [31] I.Talbi. *Systèmes Dynamiques Non Linéaires et Phénomène de Chaos (Application à la Cryptographie)*. Université Mentouri de Constantine. 2010.
- [32] S. Rezzag. *Etude et estimation des bornes de systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques*. Université Larbi Ben M'hidi.
- [33] L. Guessas. *Backstepping Backstepping adaptatif pour le contrôle la poursuite et la synchronisation des systèmes dynamiques non linéaires chaotiques*. Université Ferhat ABBAS – Sétif. 2012.
- [34] A. Ouannas. *Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets*. Université Frères Mentouri à Constantine. 2015.
- [35] T. Hamaizia. *Systemes Dynamiques et Chaos "Application à l'optimisation a l'aide d'algorithme chaotique"*. l'Université de Constantine - 1-. 2013.
- [36] G. Zhang, F. Zhang, X. Liao, D. Zhou, On the dynamics of new 4D Lorenz-type chaos systems. *Advances in Difference Equations*, Springer Open Journal (2017) 2017 :217.
- [37] H. Tirandaz, On Complete Control and Synchronization of Zhang Chaotic System with Uncertain Parameters using Adaptive Control Method.
Received March 8,2017 ;accepted August 26,2017.
- [38] E. Zeraoulia. *Etude de Quelques Types de Systèmes Chaotiques : Generalisation d'un Modèle Issu du Modèle de Chen*. Université Mentouri de Constantine. 2006.
- [39] T. Yang, CM.Yang, LB.Yang, A Detailed Study of Adaptive Control of Chaotic Systems with Unknown Parameters. *Dynamics and Control*, Springer 1998.
- [40] T. Yang, CM.Yang, LB.Yang, A Detailed Study of Adaptive Control of Chaotic Systems with Unknown Parameters. *Dynamics and Control*, Springer 1998.
- [41] S. Vaidyanathan. Hybrid Synchronization of LIU and LÜ Chaotic Systems Via Adaptive Control. *International Journal of Advanced Information Technology (IJAIT)* Vol. 2011
- [42] S. Vaidyanathan, K.Rajagopal, Global Chaous Synchronization Of PAN And LÜ Chaotic Systems Via Adaptive Control. *International Journal of Information Technology Convergence and Services (IJITCS)* Vol.1, 2011.

- [43] G. Cai, L.Yao, P. Hu, & X.Fang, (2013). Adaptive full state hybrid function projective synchronization of financial hyperchaotic systems with uncertain parameters. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-B*, 18(8), 2019.
- [44] M. M. Al-sawalha, Hybrid adaptive synchronization of hyperchaotic systems with fully unknown parameters. *Applied Mathematics*, 4(12), 1621-1628. (2013).
- [45] F. Hannachi. Analysis, dynamics and adaptive control synchronization of a novel chaotic 3-D system. *SN Applied Sciences*, 1(2), 158. (2019).
- [46] F. Hannachi, & E. Zeraoulia. *Attracteurs étranges et chaos* (Doctoral dissertation, université oum el bouaghi). (2018).
- [47] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, and J.A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D : Nonlinear Phenomena*,16, 285-317 (1985)
- [48] W. Hahn, *The Stability of Motion*, Springer, New York, USA (1967).