Table des matières

:/Users/hamza/AppData/Local/Temp/graphics/M4SMFN01$_{1.pdf}$

الملخص

في هذه المذكرة, تطرقنا لمناقشة مشاكل وجود المحلي والكلي و الانفجار في زمن محدد لحلول بعض المعادلات ذات المشتقات الجزئية الكسرية. في البداية قمنا بعرض التراميز والمفاهيم الأساسية. ثم سنقوم بدراسة معادلتين غير خطيتين؛ المعادلة الأولى مع مشتقات كسرية بالنسبة للزمن و المكان والمعادلة الثانية مع تطور النمو الأسي.

الكلمات المفتاحية

المعادلات التفاضلية الجزئية الكسرية, معادلة التطور الغير محلي, الوجود المحلي, الوجود الكلي, انفجار الحلول, فترة الحياة, مشتق كسري

ABSTRACT

In this Graduation Note, we have been interested in problems of the presence of the local, global and of the explosion at a precise moment for the length of certain equations with fractional derivatives. At the beginning, we introduced coding and basic concepts. Then, we studied two nonlinear equations : The first equation with fractional derivatives with respect to time and space, and the second equation is exponentially growing.

KEYWORDS

Fractional partial differential equations, non-local evolution equation, local existence, global existence, blow-up of solutions, life span, fractional derivative.

RÉSUMÉ

Dans ce Mémoire ,nous avons intéressé des problèmes de la présence du local, global et de l'explosion à un moment précis pour la longueur de certaines équations avec des dérivés fractionnaires. Au début, nous avons introduit le codage et les concepts de base. Ensuite, nous avons étudié deux équations non linéaires : La première équation aux dérivées fractionnaires par rapport au temps et à l'espace, et la deuxième équation est à croissance exponentielle.

LES MOTS CLÉS

Équations aux dérivées partielles fractionnaires, équation de développement non local, équation de temps spatial pour diffusion partielle, existence locale, existence globale, explosion des solutions, dérivé fractionnaire.

Introduction

Le calcul fractionnaire est la branche d'analyse mathématique qui étudie la géneralisation des notions de dérivation et d'intégration à des ordres non nécessairement entiers. Les origines du calcul fractionnaire remontaient à la fin du 17 iéme siècle, partant de quelques spéculations de Leibniz concernant la question de l'Hopital, posée le 30/09/1695, sur la signcation de $\frac{d^n f}{dt^n}$ si $n = \frac{1}{2}$; le calcule fractionaire a été longuement considéré comme simple théorie mathématique sans aucune explication réelle où pratique. Son intérêt n'est reconnu que durant les deux dernieres décennies du 20 iéme siècle où de nombreuses applications ont été développées utilisant ce concept.
Le calcul traditionnel étant basé sur la différentiation et l'intégration d'ordre entier, le concept du calcul fractionnaire a le potentiel énorme de changer la manière dont nous voyons, modélisons, et commandons la "nature" autour de nous. Les sujets d'existence local, existence global, comportement asymptotique et éventuellement l'explosion en temp fini pour les problémes d'évolution classique ont été traités par différentes formes. L'opérateur différentiel fractionnaire est un operateur généralisant un operateur différentiel classique du moment que son ordre est réel. Dans ce mémoire, on va aborder certains problémes d'évolution fractionnaires et de les étudier du point de vue existence et non existence de solutions globales.
Ce mémoire est composé de trois chapitres : Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions préliminaires concernant les espaces fonctionnelles, les inégalités utiles, la dérivation et l'intégration fractionnaire, et quelques applications des dérivées fractionnaires.
Au deuxième chapitre, nous étudions une équation d'évolution fractionnaire avec un terme source à croissance polynomiale.
Le troisième chapitre est consacré à l'étude d'une équation d'évolution fractionnaire avec un terme source à croissance exponentielle.
Enfin, ce travail se termine par une conclusion résumant les principaux résultats étudiés.

Chapitre 1

Notions préliminaires

1.1 Notations et notions de base

1.1.1 Espaces fonctionnels

On désigne par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$ l'espace de fonctions u mesurables sur Ω telles que

$$\int_\Omega |u|^p \, dx < \infty,$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p(\Omega)} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega |u|^p \, dx.$$

On désigne par $L^\infty(\Omega)$ l'espace de fonctions u mesurable sur Ω et vérifient

$$|u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega,$$

où C est une constante positive. $L^\infty(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{t\in(0,T)} ess \, |u\,(x)| = inf \left\{C, |u| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\right\}.$$

On définit les espaces $L^p([0,T],X)$, $1 \leq p < \infty$ et $L^\infty([0,T],X)$ comme suit

$$L^p([0,T],X) = \left\{u : [0,T] \to X \text{ mesurable}, \int_0^T \|u\|^p_X < \infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|^p_{L^p([0,T],X)} = \int_0^T \|u\|^p_X \,.$$

$$L^{\infty}([0,T],X)=\left\{u:[0,T]\rightarrow X \text{ mesurable, } \sup_{t\in(0,T)} ess\,\|u\|_X^p<\infty\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p([0,T],X)}^p=\sup_{t\in(0,T)} ess\,\|u\|_X^p\,.$$

$C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ tendant vers zéro lorsque x tend vers l'infini.
$H^1(\Omega)$ est l'espace de **Sobolev** défini par

$$H^1\left(\Omega\right)=\left\{u\in L^2\left(\Omega\right):\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2\left(\Omega\right),1\leq i\leq n\right\},$$

D'une façon générale pour $m\in\mathbb{N}^*$ et $1\leq p\leq\infty$, les espaces de **Sobolev** $H^m(\Omega)$ et $W^{m,p}\left(\Omega\right)$ sont définis comme suit

$$H^m\left(\Omega\right)=\left\{u\in L^2\left(\Omega\right):D^{\alpha}u\in L^2\left(\Omega\right)\text{ pour tout }\alpha\in\mathbb{N}^n\text{ vérifiant }\left|\alpha\right|\leq m\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{H^m(\Omega)}^2=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_{\Omega}\left|D^{\alpha}u\right|^2dx=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

$$W^{m,p}\left(\Omega\right)=\left\{u\in L^p\left(\Omega\right):D^{\alpha}u\in L^p\left(\Omega\right),\left|\alpha\right|\leq m\right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{m,p}^p=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

où $D^{\alpha}=\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+..+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}+\partial x_2^{\alpha_2}+...+\partial x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$ est la dérivée au sens des distributions.
$L_{loc}^{\infty}\left(\Omega\right)$ est l'espace des fonctions localement intégrable défini par

$$L_{loc}^{\infty}\left(\Omega\right)=\left\{u:\Omega\rightarrow\mathbb{R}\text{ mesurable, }\int_K|u|^p\,dx<\infty\text{ pour tout compact de }\Omega\right\}.$$

1.1.2 Inégalités utiles

• Inégalité de Hölder

Soient $1 < p,\, q < \infty$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et u une fonction de $L^p(\Omega)$ et v une fonction de $L^q(\Omega)$. Alors l'inégalité de Hölder s'écrit

$$\int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

• Inégalité de Young

Soient a, b deux nombres réels et p, q deux nombres réels tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors on a l'inégalité de Young suivante

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

• Inégalité de Young avec ε

Soient $X \geq 0$, $Y \geq 0$ et p, q deux nombres réels positifs tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors l'inégalité de $\varepsilon-$Young s'écrit comme suit

$$XY \leq \varepsilon X^P + C\,(\varepsilon)\, Y^q.$$

• Inégalité de Ju

Soient $N \geq 1$, $\delta \in [0.2]$ et $q \geq 1$, pour toute fonction non négative de Schwartz Ψ, on a

$$(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}}\, \psi^q \leq q\psi^{q-1}\,(-\triangle)^{\frac{\delta}{2}}\, \psi.$$

où $\triangle$ est le Laplacien.

1.1.3 Existence locale et globale de solutions

L'étude de l'éxistence locale et de l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles est basée sur la théorie d'existence pour des équations différentielles semi-linéaires abstraites (voir A. Friedman, D. Henry, A. Pazy). Soit $(X, \|.\|)$ un espace de Banach et soit $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur linéaire, et $f : X \to X$,

Considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} - Au = f,\ t > 0, \\ u\,(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Définition 1.1 *On dit qu'une fonction u de la variable $t \geq 0$ à valeurs dans X est une solution locale du problème (1.1), s'il existe un intervalle maximal $[0, T)$, sur le quel u est définie, et elle est l'unique solution de (1.1) dans $C^1([0,T), X)$.*

En particulier, l'une des deux éventualités suivantes a lieu
i) $T = +\infty$
ii) $T < +\infty$ et $\lim_{t \to T} \|u\| = +\infty$
On dit que la solution est globale si i)est satisfaite, et que la solution explose en temps fini si on a ii).

1.2 Intégration fractionnaire

1.2.1 Fonctions spéciales

Dans cette section, nous présentons certaines fonctions dites fonctions spéciales. Ces fonctions jouent un role trés important dans la théorie du calcul différentiel d'ordre fractionnaire.

• Fonction Gamma

La fonction Gamma est une fonction complexe, considérée également comme une fonction spéciale. Elle prolonge la fonction factorielle à l'ensemble des nombres complexe (exepté en certains points)

Définition 1.2 *La fonction Gamma d'Euler est définie par l'intégrale suivante :*

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} exp(-t) \times t^{x-1} dt \quad , \qquad x > 0.$$

Quelques propriétés de la fonction Gamma :

a▶ La propriété importante de la fonction Gamma $\Gamma(x)$ est la relation de récurence suivante :

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \ , \qquad x > 0.$$

Qu'on peut démontre par une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{\infty} exp(-t) \times t^x dt \\ &= [-exp(-t) \times t^x]_0^{+\infty} + x \int_0^{\infty} exp(-t) \times t^{x-1} dt \\ &= x\Gamma(x). \end{aligned}$$

b▶ Comme conséquence de la propriété précédente, on a :

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x! \ , \qquad \forall x \in \mathbb{N}, \\ \Gamma(x) &= (x-1)! \ , \quad \forall x \in \mathbb{N}^*.\end{aligned}$$

Ce qui permet de dire que la fonction Gamma généralise la notion de factorielle.

c▶ Et aussi, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= 1 \quad , \\ \Gamma(0_+) &= +\infty. \\ \Gamma(\frac{1}{2}) &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

d▶ $\Gamma(x)$ est une fonction monotone et strictement décroissante pour $0 < x \leq 1$.

e▶ Si $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.$$

Exemple 1.1 *Pour* $x = \frac{1}{2}$ *, on a par définition :*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt.$$

Posons

$$t = u^2,$$

donc

$$dt = 2udu,$$

il s'ensuit :

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} e^{-u^2} 2udu \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du.\end{aligned}$$

L'intégrale de Gauss est donnée par :

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

d'où

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$

• **Fonction Bêta**

Comme la fonction gamma, la fonction bêta est elle aussi définie par une intégrale.

la fanction est définie par :

$$\beta\left(x,y\right)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, x,y\geq 0$$

Liens entre la fonction Gamma et la fonction Bêta

La fonction Bêta est reliée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$\beta(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} \quad , \quad \forall x,y>0.$$

1.2.2 Formule de Cauchy pour l'intégration successive

Soit f une fonction continue sur l'intervalle [a, b]. On considère l'intégrale

$$I^{(1)}f\left(x\right)=\int_a^x f\left(t\right)dt.$$

Les primitives d'ordre supérieur sont données par :

$$\begin{aligned}
I^{(2)}f\left(x\right) &= \int_a^x I^{(1)}f\left(u\right)du \\
&= \int_a^x\left(\int_a^x f\left(t\right)dt\right)du \\
&= \int_a^x\left(\int_a^x du\right)f\left(t\right)dt \\
&= \int_a^x\left(x-t\right)f\left(t\right)dt.
\end{aligned}$$

De même façon, on a

$$\begin{aligned}
I^{(3)}f\left(x\right) &= \int_a^x I^{(2)}f\left(u\right)du \\
&= \frac{1}{2}\int_a^x\left(x-t\right)^2 f\left(t\right)dt.
\end{aligned}$$

Plus généralement la n-ième itération de l'opérateur I peut s'écrire :

$$I^{(n)}f(x) = \int_a^{x_1} dx_1 \int_a^{x_2} dx_2 ... \int_a^{x_{n-1}} f(x_n)\, dx_n = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^{x} (x-1)^{(n-1)} f(t)\, dt.$$

pour tout entier n .
Cette formule est appelée formule de Cauchy, et depuis la généralisation du factoriel par la fonction Gamma : $\Gamma(n) = (n-1)!$; Riemann rendu compte que le second membre paurrant avoir un sens même quand n prenant une valeur non-entière.

1.2.3 Intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

La notion d'intégrale fractionnaire d'ordre α $(\alpha > 0)$; selon l'approche de Riemann-Liouville, généralise la célèbre formule (attribuée à Cauchy) d'intégrale répété n fois :

$$I_a^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \quad , \qquad n \in \mathbb{N}^*.$$

On adopte alors, la définition suivante :

Définition 1.3 *Soient α un réel positif et f une fonction intégrable sur $[a,b]$. On appelle intégrale de Riemann-Liouville d'ordre de f l'intégrale suivante* :

$$I_a^\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{(\alpha-1)} f(t)dt.$$

Exemple 1.2 *Considérons le monôme :*

$$f(x) = x^\beta.$$

En remplaçant dans l'intégrale de Riemann-Luoiville, on obtient :

$$I^\alpha(x^\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^x (x-t)^{(\alpha-1)} t^\beta dt.$$

En faisant le changement de variable :

$$u = \frac{t}{x},$$

on obtient :

$$I^\alpha x^\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (1-u)^{(\alpha-1)} x^{(\alpha-1)} x u^\beta du$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha+\beta} \int_0^1 u^{\beta}(1-u)^{(\alpha-1)} du \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} B(\beta+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\alpha+\beta+1)} x^{\alpha+\beta}.
\end{aligned}
$$

D'ou :

$$I^{\alpha} x^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} x^{\alpha+\beta}.$$

La formule précédente est une généralisation du $\alpha = 1$.
En effet, pour$\alpha = 1$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
I^1 x^{\beta} &= \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+2)} x^{\beta+1} \\
&= \frac{\Gamma(\beta+1)}{(\beta+1)\Gamma(\beta+1)} x^{\beta+1} \\
&= \frac{1}{(\beta+1)} x^{\beta+1}.
\end{aligned}
$$

En particulier, pour$\alpha = \frac{1}{2}$ et pour$\beta = 0, 1, 2$ on a :

$$
\begin{aligned}
I^{\frac{1}{2}} x^0 &= \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\frac{3}{2})} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}, \\
I^{\frac{1}{2}} x^1 &= \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{5}{2})} x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x^3}{\pi}}, \\
I^{\frac{1}{2}} x^2 &= \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{7}{2})} x^{\frac{5}{2}} = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{x^5}{\pi}}.
\end{aligned}
$$

De ce qui précède, on déduit que l'intégrale fractionnaire d'ordreα d'une constante k est donnée par :

$$I^{\alpha} k = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha}.$$

1.3 Dérivation fractionnaire

Il y a beaucoup d'approches pour la dérivation fractionnaire, nous allons citer les approches qui sont fréquemment utilisées dans les applications

1.3.1 Approche de Grünwald-Letnikov

L'idée de cette approche est de généraliser la définition classique de la dérivation entière d'une fonction à des ordres de dérivée arbitraires.
On sait que la dérivée d'une fonction f est définie comme :

$$D^1 f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

On peut exprimer la dérivée d'ordre n d'une fonction f par la formule suivante :

$$D^n f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-n} \sum_{m=0}^{n} (-1)^m C_n^m f\left(x - mh\right),$$

avec

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}.$$

On peut généraliser cette formule pourα non entier :$0 < n-1 < \alpha < n$.
Comme

$$\begin{aligned} (-1)^m C_n^m &= \frac{-n(1-n)\ldots(m-n-1)}{m!} \\ &= \frac{\Gamma(m-n)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-n)}, \end{aligned}$$

on obtient :

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{-\alpha} \sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(-\alpha)} f(x-mh),$$

et

$$I^\alpha f(x) = \lim_{h \longrightarrow 0} h^{\alpha} \sum_{m=0}^{n} \frac{\Gamma(m+\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(\alpha)} f(x-mh).$$

Si f est de classeC^n, alors en utilisant une intégration par parties, on obtient :

$$I^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n+\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n+\alpha-1} f^{(n)}(t) dt,$$

et

$$D^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(a)(x-a)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

Pour $a = 0$, on obtien

$$tD^\alpha f(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)(x)^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(t) dt.$$

Exemple 1.3 *La dérivée fractionnaire au sens de* ***Grünwald-Letnikov*** *d'une fonction constante n'est pas nulle en générale.*

Si $f(t) = c$ et p est un nombre non entier positif on a

$$f^{(k)}(c) = 0, k = 1, 2, ..., n,$$

$$\begin{aligned} {}^{G}D^{p} f(t) &= \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau \\ &= \frac{c}{\Gamma(n-p)}(t-a)^{-p}. \end{aligned}$$

Exemple 1.4 *Soit* $f(t) = (t-a)^{\alpha}$. *Soit* p *est un nombre non entier tel que* $0 \leq n-1 < p < n$, *avec* $\alpha > n-1$, *alors on a*

$$f^{(k)}(a) = 0, k = 0, 1, 2, ..., n-1,$$

et

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(\tau-a)^{\alpha-n}.$$

Donc on obtient

$${}^{G}D^{p} f(t) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} (\tau-a)^{-p} d\tau.$$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on trouve

$$\begin{aligned} {}^{G}D^{p}(t-a)^{\alpha} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha-n} d\tau \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \int_a^t (1-s)^{n-p-1} s^{\alpha-n} ds \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\beta(\alpha-p, \alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)}{\Gamma(n-p)\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha-p+1)}(t-a)^{\alpha-p} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)}(t-a)^{\alpha-p}. \end{aligned}$$

À titre d'exemple, on a

$$ {}^{G}D^{\frac{1}{2}}t = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(1.5)}\sqrt{t} = \frac{\sqrt{t}}{\Gamma(1.5)}. $$

1.3.2 Approche de Riemann-Liouville

L'idée est de définir la dérivée fractionnaire en utilisant la définition de l'intégrale fractionnaire.
Soit f une fonction intégrable sur $[a,t]$, alors la dérivée fractionnaire d'ordre p, avec $n-1 \leq p < n$, au sens de **Riemann-Liouville** est définie par

$$ {}^{RL}D^{p}f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)\,d\tau = \frac{d^n}{dt^n}\left(I^{n-p}f(t)\right). $$

Remarque 1.1 *Si f est de classe $\mathcal{C}^m$, alors après des intégrations par parties et des dérivées répétées, on obtient*

$$ {}^{RL}D^{p}f(t) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p)}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f^{(n)}(\tau)\,d\tau = {}^{G}D^{p}f(t). $$

On voit dans ce cas que l'approche de **Riemann-Liouville** et l'approche de **Grünwald-Letnikov** sont équivalentes.

Exemple 1.5 *La dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** de la fonction constante, en générale, n'est pas*

nulle ni constante, et pour $f(t) = c$, on a

$$ {}^{RL}D^{p}c = \frac{c}{\Gamma(1-p)}(t-a)^{-p}. $$

Exemple 1.6 *Soit $f(t) = (t-a)^{\alpha}$. Soit p un nombre non entier, $0 \leq n-1 \leq p < n$ et $\alpha > -1$, alors on a*

$$ {}^{RL}D^{p}(t-a)^{\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1}(\tau-a)^{\alpha}\,d\tau. $$

Utilisant le changement de variables $\tau = a + s(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
{}^{RL}D^{p}\left(t-a\right)^{\alpha} &= \frac{1}{\Gamma\left(1-p\right)}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(t-a\right)^{n+\alpha-p}\int_{a}^{t}\left(1-s\right)^{n-p-1}s^{\alpha}ds \\
&= \frac{\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)\beta\left(n-p,\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(n+\alpha-p+1\right)\Gamma\left(\alpha-p+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\alpha-p+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

À titre d'exemple

$${}^{RL}D^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}=\frac{\Gamma\left(1.5\right)}{\Gamma\left(1\right)}=\Gamma\left(1.5\right).$$

Propriétés

1)- Composition avec l'intégrale fractionnaire

L'opérateur de dérivation fractionnaire au sens de **Riemann-Liouville** est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire, c-à-d

$${}^{RL}D^{p}\left(I^{p}f\left(t\right)\right)=f\left(t\right).$$

Mais en générale, on a

$${}^{RL}D^{p}\left(I^{q}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{p-q}f\left(t\right),$$

Si $p-q<0, {}^{RL}D^{p-q}f(t)=I^{q-p}f(t)$.

Généralement les opérateurs de dérivation et d'intégration fractionnaires ne commutent pas

$${}^{RL}D^{-p}\left({}^{RL}D^{q}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{q-p}f(t)-\sum_{k=1}^{m}\left({}^{RL}D^{q-k}f(t)\right)_{t=a}\frac{\left(t-a\right)^{p-k}}{\Gamma\left(p-k+1\right)},$$

avec $m-1\leq q<m$.

2)- Composition avec les dérivées d'ordre entier

La dérivation fractionnaire et la dérivation classique ne commutent que si
$f^{(k)}\left(a\right)=0, k=0,1,2,....n$, on a dans ce cas

$$\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left({}^{RL}D^{p}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{n+p}f\left(t\right),$$

et

$${}^{RL}D^{p}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right)={}^{RL}D^{n+p}f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p-n}}{\Gamma\left(k-p-n+1\right)}.$$

3)- Composition avec les dérivées fractionnaires

Soit $n-1 \leq p < n$ et $m-1 \leq q < m$, alors

$$^{RL}D^{p}\left(^{RL}D^{q}f\left(t\right)\right) =^{RL} D^{p+q}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\left[D^{q-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-p-k}}{\Gamma\left(p-k+1\right)},$$

et

$$^{RL}D^{q}\left(^{RL}D^{p}f\left(t\right)\right) =^{RL} D^{q+p}f(t) - \sum_{k=1}^{m}\left[D^{p-k}f(t)\right]_{t=a}\frac{(t-a)^{-q-k}}{\Gamma\left(q-k+1\right)}.$$

Donc pour que les opérateurs de dérivations fractionnaires $^{RL}D^{q}$ et $^{RL}D^{p}$ $(p \neq q)$, commutent , il faut que $\left[D^{q-k}f(t)\right]_{t=a} = 0$, et $\left[D^{p-k}f(t)\right]_{t=a} = 0$. pour tout $k = 0$,1,2...,m.

1.3.3 Approche de Caputo

L'avantage principal de l'approche de **Caputo** est que les conditions initiales des équations différentielles fractionnaires avec des dérivées de **Caputo** acceptent la même forme comme pour les équations différentielles d'ordre entier, c-à-d, contient les valeurs limites des dérivées d'ordres entiers des fonctions inconnues en borne inférieur $x = a$.

Définition 1.4 *Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \in \mathbb{N}^{*})$ et f une fonction telle que $\frac{d^n}{dt^n}\ f \in L_1[a,b]$.*

La dérivée fractionnaire d'ordre p de f au sens de **Caputo** est définie par

$$^{C}D^{p}f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(n-p\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-p-1}f^{(n)}\left(\tau\right)d\tau = I^{n-p}\left(\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\left(t\right)\right).$$

Propriétés

1)-Relation avec la dérivée de Riemann-Liouville

Soit $p > 0$ avec $n-1 < p < n$, $(n \in \mathbb{N}^{*})$, supposons que f est une fonction telle que $^{C}D^{p}f(t)$ et $^{RL}D^{p}f(t)$ existent, alors

$$^{C}D^{p}f(t) =^{RL} D^{p}f(t) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma\left(k-p+1\right)},$$

et on remarque que si $f^{(k)}(a) = 0$, pour $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, on aura

$$^{C}D^{p}f(t) =^{RL} D^{p}f(t).$$

2)-Composition avec l'opérateur d'intégration fractionnaire

Si f est une fonction continue, on a

$$^{C}D^{p}I_{a}^{p}f\left(t\right)=f\left(t\right)\text{ et }I_{a}^{p C}D^{p}f(t)=f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{k}.$$

Donc l'opérateur de dérivation de **Caputo** est un inverse gauche de l'opérateur d'intégration fractionnaire

mais n'est pas un inverse à droite.

Exemple 1.7 *La dérivée d'une fonction constante au sens de **Caputo** est nulle. Alors pour $f(t)=c$, on a*

$$^{C}D^{p}c=0.$$

Exemple 1.8 *Soit $f(t)=(t-a)^{\alpha}$. Soit p un entier avec $0\leq n-1<p<n$; et $\alpha>n-1$, alors on a*

$$f^{(n)}\left(\tau\right)=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\alpha-n+1\right)}\left(\tau-a\right)^{\alpha-n},$$

d'où

$$^{C}D^{p}\left(t-a\right)^{\alpha}=\frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha-n+1\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-p-1}\left(\tau-a\right)^{\alpha-n}d\tau.$$

Utilisant le changement de variables $\tau=a+s(t-a)$, on obtient

$$\begin{aligned}
^{C}D^{p}\left(t-a\right)^{\alpha} &= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha-n+1\right)}\int_{a}^{t}\left(t-\tau\right)^{n-p-1}\left(\tau-a\right)^{\alpha-n}d\tau \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha-n+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p}\int_{a}^{t}\left(1-s\right)^{n-p-1}s^{\alpha-n}ds \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)\beta\left(n-p,\alpha-n+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha-n+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha-n+1\right)}{\Gamma\left(n-p\right)\Gamma\left(\alpha-n+1\right)\Gamma\left(\alpha-p+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p} \\
&= \frac{\Gamma\left(\alpha+1\right)}{\Gamma\left(\alpha-p+1\right)}\left(t-a\right)^{\alpha-p}.
\end{aligned}$$

Quelques propriétés générale des dérivées fractionnaires

1)-Linéarité : La dérivée fractionnaire est une opération linéaire

$$D^{\alpha}(\lambda f(t)+\mu g(t))=\lambda D^{\alpha}f(t)+\mu D^{\alpha}g(t).$$

2)- Régle de Leibniz : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,t]$ ainsi que toutes leurs dérivées ; la formule de **Leibniz** est

$$D^{\alpha}(f(t)\times g(t))=\sum_{k=o}^{n}\binom{p}{k}f^{(k)}(t)D^{(p-k)}g(t),$$

où n est un entier et D^{α} est la dérivée de **Grünwild-letnikov** et de **Riemann-Liouville**.

1.4 Applications des intégrales et des dérivées fractionnaires

Les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires ce qui simplifient leur usage pour résoudre des problèmes appliqués dans plusieurs champs de la science. Cependant, le calcul fractionnaire est né le 30 septembre 1695 mais il n'y avait pas d'interprétation géométrique et physique acceptable de ces opérations pour plus de 300 années.

1.4.1 Interprétation physique de l'intégrale de Riemann-Liouville

Pour donner l'interprétation physique de l'intégration non entière, nous considérons l'exemple d'un conducteur d'une voiture. Supposons que la voiture est équipée de deux appareils de mesure, le compteur de vitesse qui enregistre la vitesse de conducteur et l'horloge qui affiche le temps τ. Cependant, le temps τ affiché par l'horloge est incorrect. Nous supposons que la relation entre le temps incorrect (affiché par l'horloge et dont le conducteur considère comme le temps exact), et le temps exact T est donnée par la fonction $g_t(\tau)$ telle que $T=g_t(\tau)$ et

$$g_t(\tau)=\frac{1}{\Gamma(t)}\left[t^{\alpha}-(t-\tau)^{\alpha}\right]. \tag{1.2}$$

Ceci signifie que si le conducteur mesure l'intervalle de temps $d\tau$, le vrai intervalle de temps est $dT=dg_t(\tau)$.

Le conducteur A représente le conducteur de la voiture ; ignorant l'erreur de l'horloge, calcule la distance parcourue au moyen d'une intégrale classique

$$S_A(t)=\int_0^t V(\tau)\,d\tau, \tag{1.3}$$

Un observateur O, lui en connaissance de la mauvaise mesure de l'horloge et de la fonction $g_t(\tau)$ reliant le temps incorrect au temps exact, calcule la distance réellement parcourue par la voiture

$$S_0(t)=\int_0^t V(\tau)\,dg_t(\tau)=I^{\alpha}V(t), \tag{1.4}$$

avec

$$I^{\alpha}V(t) = \frac{1}{\Gamma(t)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} V(\tau)\, d\tau.$$

L'intégrale donnée par l'équation (2) peut être interprétée comme la distance parcourue par un mobile pour lequel nous avons effectué deux mesures :
Une mesure correct de la vitesse et une mesure incorrect du temps. L'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** donnée par l'équation (3) peut être interprétée comme la véritable distance parcourue par l'objet mobile, pour le quel nous avons enregistré ses valeurs locales de la vitesse $V(\tau)$ (c'est sa vitesse individuelle) et la valeur locale du temps τ (temps individuel), sachant que la relation entre le temps enregistré localement et le temps cosmique est donnée par la fonction $g_t(\tau)$.
La fonction $g_t(\tau)$ décrit le temps échelle non homogène, qui dépend non seulement de τ, mais aussi du paramètre t qui représente la dernière valeur mesurée du temps individuel de l'objet mobile. quand t change, l'intervalle de temps cosmique change également.
La notion du temps cosmique est reliée au changement de la gravité dans l'espace temps d'un corps en déplacement. En effet un corps mobile change sa position dans l'espace temps, le champ de la gravité dans l'espace-temps tout entier change également en raison de mouvement. Par conséquent ; l'intervalle de temps cosmique, qui correspond à l'histoire du mouvement de l'objet mobile, change. Ceci affecte le calcul de la vraie distance $S_0(t)$ parcourue par cet objet mobile.
Donc, l'intégrale fractionnaire de **Riemann-Liouville** de la vitesse individuelle $V(\tau)$, d'un objet mobile, pour lequel la relation entre son temps individuel τ, et le temps cosmique T à chaque instant t est donnée par la fonction connue
$T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation (1) représente la véritable distance $S_0(t)$ parcourue par cet objet.

1.4.2 Interprétation physique de la dérivation fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

En utilisant les propriétés de la dérivation et de l'intégration fractionnaire, on peut exprimer l'expression de la vitesse individuelle $V(\tau)$ à partir de la véritable distance parcourue $S_0(t)$.
La dérivée fractionnaire de **Riemann-Liouville** de la vraie distance $S_0(t)$ parcourue par le mobile permet de donner l'expression de la vitesse individuelle $V(t)$: $V(\tau) = D^{\alpha}S_0(t)$ avec

$$D^{\alpha}S_0(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{S_0(t)}{(t-\tau)^{\alpha}} d\tau \ 0 \leq \alpha \leq 1.$$

On peut aussi dériver la valeur de la véritable distance par rapport à la variable de temps t qui donne la relation entre la vitesse $V_0(t) = S_0'(t)$ du mouvement de point de vue de l'observateur indépendant O et la vitesse individuelle $V(t)$:

$$V_0(t) = \frac{d}{dt} I^{\alpha} V(t) = D^{1-\alpha} V(t).$$

Par conséquent, la dérivée au sens de **Riemann-Liouville** d'ordre $(1-\alpha)$, de la vitesse individuelle $V(t)$ est égale à la vitesse de vue de l'observateur indépendant $V_0(t)$, si le temps individuel τ et le temps cosmique T sont reliés par la fonction $T = g_t(\tau)$, décrite par l'équation

$$g_t(\tau) = \frac{1}{\Gamma(t)} \left[t^{\alpha} - (t-\tau)^{\alpha} \right],$$

pour $\alpha = 1$, quand il n'y a aucune déformation dynamique de l'échelle de temps, les deux vitesses coïncident :

$$V_0(t) = V(t).$$

Chapitre 2

Etude d'une équation d'évolution fractionnaire avec un terme source à croissance polynomiale

2.1 Introduction

Dans ce chapitre (voir [32]), nous considérons l'équation fractionnaire suivante :

$$ {}_0^C D_t^\alpha u + (-\Delta)^{\beta/2} u =_0 J_t^\gamma \, |u|^{p-1} \, u \; , \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2.1} $$

avec la donnée initiale :

$$ u(x,0) = u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N) \; , \tag{2.2} $$

où $C_0(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de toutes les fonctions continues et décroissantes vers zéro à l'infini, $N \geq 1, 0 < \alpha < 1-\gamma, 0 < \gamma < 1, 0 < \beta \leq 2, p > 1$ et ${}_0^C D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire de **caputo** d'ordre α définie, pour une fonction différentiable u, par :

$$ {}_0^C D_t^\alpha u(t) =_0 J_t^{1-\alpha} u'(t), $$

${}_0 J_t^{1-\alpha}$ désigne l'intégrale fractionnaire à gauche de **Riemann-Liouville** d'ordre $1-\alpha$ définie, pour une fonction intégrable u, par :

$$ {}_0 J_t^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds, $$

où Γ est la fonction gamma. L'opérateur non-locale $(-\Delta)^{\beta/2}$ est défini par :

$$ (-\Delta)^{\beta/2} v(x) = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^\beta \, \mathcal{F}(v)(\xi))(x), $$

pour tout $v \in D((-\Delta)^{\beta/2}) = H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$, où $H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de Sobolev homogène d'ordre β, défini par :

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{v \in S'; (-\Delta)^{\beta/2} v \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}, \qquad \text{si } \beta \notin \mathbb{N},$$

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{v \in L^2(\mathbb{R}^N); (-\Delta)^{\beta/2} v \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\}, \quad \text{si } \beta \in \mathbb{N},$$

où S' est l'espace des distributions de Schwartz, $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier, $\mathcal{F}^{-1}$ est son inverse.

Le Laplacien fractionnaire $(-\Delta)^{\beta/2}$ est lié aux vols de Lévy en physique. De nombreuses observations et expériences liées aux vols de Lévy (super-diffusion), par exemple la diffusion collective de glissement sur des surfaces solides, l'optique quantique ou la diffusion turbulente de Richardson, ont été réalisées ces derniéres années. Les processus symétriques β-stables, $0 < \beta < 2$, sont les caractéristiques de base pour une classe de processus de Lévy sautants. En comparaison au processus brownien continu $\beta = 2$, les processus symétriques β-stables ont des sauts infinis dans une période de temps arbitraire. Les sauts importants de ces processus rendent leurs variance et leurs attentes infinies selon $0 < \beta < 2$ où $0 < \beta \leq 1$, respectivement (voir $[25]$). Rappelons que lorsque $\beta = 3/2$, les processus symétriques β-stables apparaissent dans l'étude de la dynamique stellaire (voir $[12]$).

Le calcul fractionnaire a acquis une importance considérable en raison de son application dans nombreuses disciplines telles que la physique, la mécanique, la chimie, l'ingénierie, etc. En conséquence, de nombreux auteurs ont largement étudié les équations différentielles ordinaires et partielles d'ordre fractionnaires (voir $[13, 25, 31, 36, 47-49]$). Rappelons d'abord quelques résultats précédents sur les équations de diffusion fractionnaires.

Lorsque $\alpha = 1$ et $\beta = 2$, le problème $(2.1)-(2.2)$ se réduit a l'équation de la chaleur semi-linéaire :

$$u_t - \Delta u = |u|^{p+1} u, \quad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2.3}$$

avec (2.2). Dans $[21]$, Fujita a montré que si $u \geq 0$, $u_0(x) \not\equiv 0$ et $p < 1 + 2/N$, alors u explose en temps fini, et si $p > 1 + 2/N$, alors pour toute donnée initiale suffisamment petite, la solution du problème (2.2)-(2.3) existe globalement. Le cas critique $p = 1 + 2/N$ s'est avéré par la suite (voir $[23-29]$). Dans $[47]$, Weissler a prouvé que si la valeur initiale u_0 est suffisamment petite dans $L^{qc}(\mathbb{R}^N)$, $qc = N(p-1)/2 > 1$, la solution de (2.2)-(2.3) existe globalement. Dans $[26]$, Kirane, Laskri et Tatar ont discuté de l'équation d'évolution :

$$ {}_0^C D_t^{\alpha} u_t + (-\Delta)^{\beta/2} u = h(x,t) \, |u|^{p-1}, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2.4}$$

où $u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N), 0 < \alpha < 1, 0 < \beta \leq 2, p > 0, h(x,t) \geq C\,|x|^\sigma\, t^\rho$ pour $x \in \mathbb{R}^N, t > 0, C > 0, \sigma, \rho$ et satisfaire à certaines conditions. Ils ont prouvé que si $0 < p \leq 1+(\alpha(\sigma+\beta)+\beta\rho)/(\alpha N+\beta(1-\alpha))$, le problème (2.2)-(2.4) n'a pas de solutions globales. Dans [8] ,Cazenave, Dickstein et Weissler ont prouvé que toutes les solutions non triviales et non négatives de l'équation :

$$u_t - \Delta u = \int_0^t (t-s)^{-\gamma}\,|u(s)|^{p-1}\,u(s)ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2.5}$$

avec $(2.1.2)$, où $u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N), 0 < \gamma < 1$, explosent en temps fini lorsque $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$ et $p \leq \max\{1+\beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+, 1/\gamma\}$, et si $u_0 \in L^{q_{sc}}(\mathbb{R}^N), q_{sc} = N(p-1)/(4-2\gamma)$ avec $\|u_0\|$ suffisamment petit et $p > \max\{1+\beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+, 1/\gamma\}$, alors la solution est globale. Lorsque $\gamma = 0$, toutes les solutions non triviales explosent comme l'a prouvé par Souplet [41] .Dans [20], Fino et Kirane ont considéré l'équation :

$$u_t + (-\Delta)^{\beta/2}u = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-s)^{-\gamma}\,|u(s)|^{p-1}\,u(s)ds, \qquad x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \tag{2.6}$$

avec (2.2), où $u_0(x) \in C_0(\mathbb{R}^N), 0 < \beta \leq 2, 0 < \gamma < 1, p > 1$; ils ont prouvé que si $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$ et $p \leq \max\{1+\beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+, 1/\gamma\}$, alors toute solution explose en temps fini, et que si $u_0 \in L^{q_{sc}}(\mathbb{R}^N)$, où $q_{sc} = N(p-1)/\beta(2-\gamma)$ avec $\|u_0\|$ suffisamment petit et $p > \max\{1+\beta(2-\gamma)/(N-\beta+\beta\gamma)_+, 1/\gamma\}$, alors u existe globalement.

2.2 Définitions et résultas préliminaires

Dans cette section, nous pésentons quelques préliminaires qui seront utilisés dans la suite de cette étude.

La fonction de **Mittag-Leffler** est définie pour $z \in \mathbb{C}$ (voir[25]) par :

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(1+\alpha k)},\ \ \alpha \in \mathbb{C},\ \Re e(\alpha) > 0,\ z \in \mathbb{C},$$

et son intégrale fractionnaire **Riemann-Liouville** satisfait :

$${}_0J_t^{1-\alpha}(t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\lambda t^\alpha)) = E_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha).$$

Nous avons besoin de la fonction de type Wright qui a été considérée par Mainardi (voir [30]) :

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k}{k!\Gamma(-\alpha k+1-\alpha)}\\ &= \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z)^k\Gamma(k+1)\sin(\pi(k+1)\alpha)}{k!},\ \ 0 < \alpha < 1;\end{aligned}$$

ϕ_α est une fonction entière a les propriétés suivantes :
(a) $\phi_\alpha(\theta) \geq 0$, pour $\theta \geq 0$ et $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)d\theta = 1$;
(b) $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)\theta^r d\theta = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\alpha r)}$, pour $r > -1$;
(c) $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)\exp(-z\theta)\, d\theta = E_{\alpha,1}(-z), z \in \mathbb{C}$;
(d) $\alpha \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)\exp(-z\theta)\, d\theta = E_{\alpha,\alpha}(-z), z \in \mathbb{C}$.
Maintenant, nous énonçons certaines propriétés des dérivés fractionnaires et des intégrales fractionnaires. Soit $T > 0$ et $0 < \alpha < 1$, si ${}_0^C D_t^\alpha f \in L^1(0,T), g \in C^1([0,T])$ et $g(T) = 0$, alors nous avons la formule suivante d'intégration par parties (voir par exemple [39]) :

$$\int_0^T g(t) {}_0^C D_t^\alpha f(t)dt = \int_0^T (f(t) - f(0)) {}_t^C D_T^\alpha g(t)dt, \tag{2.7}$$

où

$$ {}_t^C D_T^\alpha g(t) = -\frac{d}{dt} {}_t J_T^{1-\alpha} g(t),$$
$$ {}_t J_T^{1-\alpha} g(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_t^T (s-t)^{-\alpha} g(s)ds,$$

pour $T > 0$ et $n > 0$, si on pose $\varphi(t) = (1 - \frac{t}{T})_+^n$,
alors
${}_t^C D_T^\alpha \varphi(t) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+1-\alpha)} T^{-\alpha}(1 - \frac{t}{T})^{n-\alpha}, t \leq T$.
Soit $T(t) = \exp\left(-t(-\Delta)^{\beta/2}\right)$. Comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^N)$, (voir par exemple [14, 15]) , et pour $t > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, on a :

$$\begin{aligned} T(t)u_0 &= \int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x-y,t)u_0(y)dy \qquad , \\ G_\beta(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} \exp\left(ix\xi - t\,|\xi|^\beta\right) d\xi. \end{aligned}$$

Il est bien connu que $G_\beta(x,t)$ satisfait :

$$G_\beta(x,1) \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^1(\mathbb{R}^N) \ , G_\beta(x,t) \geq 0 \ , \int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,t)dx = 1.$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Young pour la convolution et la forme $G_\beta(x,t) = t^{-N/\beta} G_\beta(xt^{-1/\beta}, 1)$, nous avons :

$$\|G_\beta(t) * v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq Ct^{-\frac{N}{\beta}(\frac{1}{r}-\frac{1}{q})} \|v\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}, \tag{2.8}$$

pour tout $v \in L^r(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq r \leq q \leq \infty$.

On définit les opérateurs $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ par :

$$P_{\alpha,\beta}(t)u_0 = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)u_0 d\theta,\ t \geq 0, \tag{2.9}$$

et

$$S_{\alpha,\beta}(t)u_0 = \alpha\int_0^\infty \theta\phi_\alpha(\theta)T(t^\alpha\theta)u_0 d\theta,\ t \geq 0. \tag{2.10}$$

Considérons l'équation de diffusion fractionnaire linéaire suivante :

$$\begin{cases} {}_0^C D_t^\alpha u(x,t) + (-\Delta)^{\beta/2}u(x,t) = f(x,s), & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ \quad u(x,0) = u_0(x) \quad , \end{cases} \tag{2.11}$$

où $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $f \in L^1((0,T), C_0(\mathbb{R}^N))$. Si u est une solution de (2.11), alors elle satisfait (voir $[43, 5]$) :

$$u(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)f(x,s)ds,$$

où $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ sont respectivement données par (2.9) et (2.10)

On pose, pour $0 < \alpha < 1$:

$$K(x,t) = \int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)G_\beta(x, t^\alpha\theta)d\theta\ ,\ \ x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, t > 0.$$

Notons que, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}^N \backslash \{0\}, G_\beta(x, t^\alpha\theta) \to 0$ quand $\theta \to 0$, alors K est bien défini. Puisque $\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)d\theta = 1$, $\int_{\mathbb{R}^N} G_\beta(x,t)dx = 1$, on a :

$$\|K(t,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1, \qquad t > 0.$$

On annonce maintenant les lemmes suivants qui donnent quelques propriétés utiles aux opérateurs $P_{\alpha,\beta}(t)$ et $S_{\alpha,\beta}(t)$ (voir$[46]$).

Lemme 2.1 *L'opérateur $P_{\alpha,\beta}(t)$, $t > 0$ a les propriétés suivantes :*
(a) si $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ et $\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}$,
(b) si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} < \frac{\beta}{N}$, alors

$$\|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq (4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{\beta r}} \frac{\Gamma(1-N/\beta r)}{\Gamma(1-\alpha N/\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.12}$$

Lemme 2.2 *Pour l'opérateur $S_{\alpha,\beta}(t), t > 0$, nous avons les résultats suivants :*
(a) Si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors $S_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ et

$$\left\|S_{\alpha,\beta}(t)u_0\right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)};$$

(b) Pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$, soit $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, si $\frac{1}{r} < \frac{2\beta}{N}$, alors

$$\left\|S_{\alpha,\beta}(t)u_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha(4\pi t^\alpha)^{\frac{-N}{\beta r}} \frac{\Gamma(2-N/\beta r)}{\Gamma(1+\alpha-\alpha N/\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.13}$$

Lemme 2.3 *Soit $A=(-\Delta)^{\beta/2}$. Pour $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, nous avons $P_{\alpha,\beta}(t)u_0 \in D(A)$, pour $t>0$, et*

$$ {}_0^C D_t^\alpha P_{\alpha,\beta}(t)u_0 = AP_{\alpha,\beta}(t)u_0, \quad t>0, $$

$$ \|AP_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{C}{t^\alpha}\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad t>0, $$

pour certaine constante $C>0$.

Lemme 2.4 *Supposons que $f \in L^q((0,T),C_0(\mathbb{R}^N))$, $q>1$, et que*

$$ z(t)=\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)f(s)ds\ , $$

alors

$$ {}_0J_t^{1-\alpha} z(t) = \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)f(s)ds. $$

De plus, si $\alpha q>1$, alors $z \in C((0,T),C_0(\mathbb{R}^N))$.

2.3 Existence locale de solutions

Dans cette section, en utilisant le théorème du point fixe, nous prouvons l'existence locale pour le problème (2.1)-(2.2).

Premièrement, nous donnons la définition de la solution douce de (2.1)-(2.2)

Définition 2.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $T>0$.On dit que $u \in C([0,T],C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution douce de (2.1)-(2.2), si u satisfait*

$$ u(x,t)=P_{\alpha,\beta}(t)u_0(x)+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)(x,s)ds, \qquad t\in[0,T]. \tag{2.14} $$

Théorème 2.1 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps maximale $T_{\max}=T(u_0)>0$ et une unique solution douce $u \in C([0,T_{\max}],C_0(\mathbb{R}^N))$ du problème (2.1)-(2.2). De plus, soit $T_{\max}=+\infty$, ou $T_{\max}<+\infty$ avec $\|u\|_{L^\infty((0,t),C_0(\mathbb{R}^N))} \to +\infty$ quand $t \to T_{\max}$. Si, en outre, $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$, alors $u(t) \geq P_{\alpha,\beta}(t)u_0 > 0$ pour $t \in (0,T_{\max})$. De plus, si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour un certain $r \in [1,\infty)$, alors $u \in C([0,T_{\max}),L^r(\mathbb{R}^N))$.*

Preuve. Pour $T>0$ et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, on définit

$$ E_T=\left\{u \mid u \in C([0,T],C_0(\mathbb{R}^N)) : \|u\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\right\}, $$

et

$$d(u,v) = \max_{t\in[0,T]} \|u(t) - v(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \qquad u, v \in E_T.$$

Puisque $C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, il en résultat que (E_T, d) est un espace métrique complet.

Maintenant, nous définissons l'opérateur

$$G(u)(t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds, \qquad u \in E_T.$$

Ensuite, en utilisant (2.13), nous avons

$$\begin{aligned}
&\|G(u)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
= \quad & \left\| P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq \quad & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} {}_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u) d\sigma ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq \quad & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (t-s)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} \|u(\sigma)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^p d\sigma ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
= \quad & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{\gamma t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))}^p \\
\leq \quad & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^p \gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^p \\
= \quad & \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} + \frac{2^p \gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Si nous choisissons T assez petit telle que

$$\frac{2^p \gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \leq 1,$$

nous obtenons

$$\|G(u)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \leq 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}.$$

D'autre part, pour $u, v \in E_T$, nous avons

$$\begin{aligned}
& \|G(u)(t) - G(v)(t)\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
= & \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds \right. \\
& \left. + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0J_s^\gamma(|v|^{p-1}v)ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)} \left\| \int_0^t \int_0^s (s-t)^{\alpha-1}(s-\sigma)^{\gamma-1} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
= & \frac{\gamma t^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \left\| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{C(p)2^p\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
\leq & \frac{1}{2} \|u-v\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))},
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité suivante

$$\left| |u|^{p-1}u - |v|^{p-1}v \right| \leq C(p)\,|u-v|\,(|u|^{p-1} + |v|^{p-1}),$$

où T est choisi tel que

$$\frac{C(p)2^p\gamma T^{\alpha+\gamma}}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)} \|u_0(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, G est contractif sur E_T. Donc, G a un point fixe unique $u \in E_T$ par l'argument du point fixe de Banach. Ensuite, en utilisant l'unicité des solutions, nous concluons l'unicité de la solution sur un intervalle maximal $[0, T_{\max})$, où

$$T_{\max} = \sup\left\{T > 0 : \text{il existe une solution douce } u \in L^\infty([0,T], C_0(\mathbb{R}^N)) \text{ pour } (3.1.1) - (3.1.2)\right\}.$$

Supposons que $T_{\max} < \infty$ et qu'il existe une constante positive M telle que

$$\|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M, \qquad t \in [0, T_{\max}).$$

Puisque $P_{\alpha,\beta}(t)u_0$ est uniformément continu sur $[0, T_{\max}]$, donc la limite $\lim_{t\to T_{\max}} u(x,t)$ existe. On note $u_{T_{\max}} = \lim_{t\to T_{\max}} u(x,t)$. Donc, $u \in C([0, T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N))$ et par le Lemme 3.4 nous avons

$$\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) {}_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds \in C([0, T_{\max}], C_0(\mathbb{R}^N)).$$

Pour $h > 0$, $\delta > 0$, soit

$$E_{h,\delta} = \left\{u \in C([T_{\max}, T_{\max}+h], C_0(\mathbb{R}^N)) : u(T_{\max}) = u_{T_{\max}}, d(u, u_{T_{\max}}) \leq \delta\right\},$$

où

$$d(u,v) = \max_{t\in[T_{\max},T_{\max}+h]} \|u-v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \qquad u,v \in E_{h,\delta}.$$

Comme $C([T_{\max}, T_{\max}+h], C_0(\mathbb{R}^N))$ est un espace de Banach, alors $(E_{h,\delta}, d)$ est un espace métrique complet.
Nous définissons l'opérateur G sur $E_{h,\delta}$ par

$$\begin{aligned} G(v)(t) &= P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^{T_{\max}} (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^\gamma(|u|^{p-1} u)ds \\ &\quad + \int_{T_{\max}}^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^\gamma(|v|^{p-1} v)ds, \end{aligned}$$

pour $v \in E_{h,\delta}$. Clairement, on a $G(v) \in C([T_{\max}, T_{\max}+h], C_0(\mathbb{R}^N))$, et $G(v)(T_{\max}) = u(T_{\max})$.
En répétant l'argument ci-dessus, nous pouvons prouver que G a un point fixe $v \in E_{h,\delta}$.
Puisque

$$v(T_{\max}) = G(v)(T_{\max}) = u(T_{\max}),$$

si on pose

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} u(x,t), & t \in [0, T_{\max}), \\ v(x,t), & t \in [T_{\max}, T_{\max}+h] \end{cases},$$

alors $\tilde{u} \in C([T_{\max}, T_{\max}+h], C_0(\mathbb{R}^N))$ et

$$\tilde{u}(x,t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^\gamma(|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{u})ds.$$

Ensuite, $\tilde{u}$ est une solution de (2.1)-(2.2), ce qui est en contradiction avec la définition de $T_{\max}$.
Supposons que $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \le r < \infty$, alors nous répétons le même argument que ci-dessus dans l'espace suivant

$$\begin{aligned} E_{T,r} &= \{u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)), \text{ tel que} \\ \|u\|_{L^\infty([0,T],L^\infty(\mathbb{R}^N))} &\le 2\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, \quad \|u\|_{L^\infty([0,T],L^r(\mathbb{R}^N))} \le 2\|u_0\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}\}. \end{aligned}$$

En estimant de $\|u^p\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ par $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}^{p-1} \|u\|_{L^r(\mathbb{R}^N)}$ dans le théorème de mappage de contraction, en utilisant (2.13), nous obtenons une solution unique dans $E_{T,r}$. Puis nous concluons que

$$u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^r(\mathbb{R}^N)).$$

Si $u_0 \ge 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, alors nous pouvons construire une solution non négative de (2.1)-(2.2) sur $[0,T]$ en appliquant l'argument ci-dessus dans l'ensemble $E_T^+ = \{u \in E_T : u \ge 0\}$. En particlier, il résulte de (2.14) que $u(t) \ge 0$ sur $(0, T_{\max})$. ■

2.4 Explosion de solutions

Premièrement, nous donnons la définition de la solution faible de (2.1)-(2.2) et après nous prouvons l'explosion de solutions.

Définition 2.2 *Soit* $u_0 \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right), 0 < \beta \leq 2, 0 < \alpha < 1-\gamma, 0 < \gamma < 1$ *et* $T > 0$. *On dit que* $u \in L^p((0,T), L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right))$ *est une solution faible de (2.1.1)-(2.1.2) si*

$$\begin{aligned} & \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\, {}_t^C D_T^\alpha \psi(x,t)dxdt \\ = & \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(-\Delta)^{\beta/2}\psi(x,t)dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\, {}_t^C D_T^\alpha\psi(x,t)dxdt, \end{aligned} \tag{2.15}$$

pour toute fonction test $\psi \in C^1([0,T], H^\beta(\mathbb{R}^N))$ *avec* $\operatorname{supp}_x \psi \subset\subset \mathbb{R}^N$ *et* $\psi(.,T) = 0$.

Nous donnons maintenant le lemme suivant qui prouve que toute solution douce du problème (2.1)-(2.2) est une solution faible.

Lemme 2.5 *Soit* $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, *et* $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ *une solution douce de (2.1.1)-(2.1.2). Alors* u *est une solution faible de (2.1.1)-(2.1.2), pour tous* $0 < \beta \leq 2$, $0 < \alpha < 1-\gamma$, $0 < \gamma < 1$ *et* $T > 0$.

Preuve. Supposons que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ est une solution douce de (2.1)-(2.2), alors nous avons

$${}_0J_t^{1-\alpha}(u-u_0) ={}_0 J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0) +_0 J_t^{1-\alpha}(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds)).$$

En utilisant le Lemme 3.4, nous obtenons

$${}_0J_t^{1-\alpha}(u-u_0) ={}_0 J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}u_0 - u_0) + \int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)ds.$$

Alors, pour tout $\psi \in C^1([0,T], H_\beta(\mathbb{R}^N))$ avec $\operatorname{supp}_x \psi \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\psi(x,T) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{1-\alpha}(u-u_0)\psi dx &= \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^\gamma(|u|^{p-1}u)\psi dsdx + \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}u_0 - u_0)\psi dx \\ &= H_1(t) + H_2(t). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Par le Lemme 3.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dH_2}{dt} &= \int_{\mathbb{R}^N} {}_0^C D_t^{\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0)\psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0)\psi_t dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} A(P_{\alpha,\beta}(t)u_0)\psi dx + \int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{1-\alpha}(P_{\alpha,\beta}(t)u_0 - u_0)\psi_t dx. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Soit $h > 0, t \in [0,T)$ et $t+h \to T$, alors on a

$$\begin{aligned} \frac{H_1(t+h) - H_1(t)}{h} &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t+h-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi(x,t+h)dxds \\ &\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)dxds \\ &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi(x,t+h)d\theta dxds \\ &\quad -\frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{\infty} \Phi_\alpha(\theta)T((t-s)^\alpha\theta)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi(x,t)d\theta dxds \\ &= H_3 + H_4 + H_5, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} H_3 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_t^{t+h}\int_0^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)T((t+h-s)^\alpha\theta)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\ &\qquad \times \psi(x,t+h)dx, \\ H_4 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{t}\int_0^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)\left(T((t+h-s)^\alpha\theta) - T((t-s)^\alpha\theta)\right)_0 J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\ &\qquad \times \psi(x,t)dx, \\ H_5 &= \frac{1}{h}\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^{t}\int_0^{\infty}\Phi_\alpha(\theta)\left(T((t+h-s)^\alpha\theta) - T((t-s)^\alpha\theta)\right)_0 J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)d\theta ds \\ &\qquad \times (\psi(x,t+h) - \psi(x,t))dx. \end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, quand $h \to 0$, nous concluons que

$$
\begin{aligned}
H_3 &\longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dx,\\
H_4 &\longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t P_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds\psi_t dx,\\
H_5 &\longrightarrow \int\limits_{\mathbb{R}^N}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)dsA\psi dx.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, la dérivée droite de H_1 sur $[0,T)$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
\frac{dH_1}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dx + \int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi_t dxds\\
&\quad + \int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)A\psi dxds.
\end{aligned}
$$

Alors, on a

$$
\begin{aligned}
\frac{dH_1}{dt} &= \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dx\\
&\quad + \int\limits_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{1-\alpha}\left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds\right)\psi_t dx\\
&\quad + \int_0^t\int\limits_{\mathbb{R}^N}(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)A\psi dxds, \qquad (2.18)
\end{aligned}
$$

pour $t\in[0,T)$. Par (2.17)-(2.4.19), nous avons

$$
\int_0^T \frac{dH_1}{dt}+\frac{dH_2}{dt}dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{1-\alpha}(u-u_0)\psi dxdt = 0.
$$

Par conséquent, nous avons

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} P_{\alpha,\beta}(t)u_0(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}(u-u_0)\,{}_0^C D_T^{\alpha}\psi dxdt\\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} {}_0J_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dxdt\\
&+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0J_s^{\gamma}(|u|^{p-1}u)ds(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt\\
=\ & 0.
\end{aligned}
$$

Enfin, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}{}_0J_t^{\gamma}(|u|^{p-1}u)\psi dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u_0\,{}_t^CD_T^{\alpha}\psi dxdt\\=&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u(-\Delta)^{\beta/2}\psi dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u\,{}_t^CD_T^{\alpha}\psi dxdt,\end{aligned}$$

ce qui complète la preuve du Lemme. ■
Maintenant, nous donnons un résultat d'explosion pour les solutions du problème (2.1)-(2.2).

Définition 2.3 *On dit que la solution du probléme (2.1.1)-(2.1.2) explose en temps fini, si*

$$\lim_{t\to T}\|u(.,t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}=+\infty.$$

Théorème 2.2 *Soit $u_0\in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u_0\geq 0, u_0\not\equiv 0$. Si*

$$\int_{\mathbb{R}^N}u_0\varphi_1\left(x\right)dx>0,$$

où $\varphi_1\geq 0$, pour tout $x\in\mathbb{R}^N$. Alors, la solution douce du problème (3.1.1)-(3.1.2) explose en temps fini.

Preuve. D'après le Lemme 3.5, toute solution douce de (2.1)-(2.2) est une solution faible. En utilisant la définition 3.2 avec

$$\psi\left(x,t\right)={}_t^CD_T^{\gamma}\varphi\left(x,t\right)={}_t^CD_T^{\gamma}\left(\varphi_1\left(x\right)\varphi_2\left(t\right)\right),0<\gamma<1,$$

pour tout $\varphi\in C^1([0,T],H^\beta(\mathbb{R}^N))$ où $\operatorname{supp}_x\varphi\subset\subset\mathbb{R}^N$ et $\varphi(x,T)=0$, le fait que

$${}_tJ_T^{\gamma}({}_t^CD_T^{\gamma}\varphi\left(x,t\right))=\varphi(x,t),$$

et la formule d'intégration par parties (3.2.7), on obtient

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u^p\varphi dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u_0\left(x\right){}_t^CD_T^{\alpha+\gamma}\varphi\left(x,t\right)dxdt\\=&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi\left(x,t\right)dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}u\,{}_t^CD_T^{\alpha}\varphi\left(x,t\right)dxdt,\end{aligned}$$

Ici, on prend φ_1 est le premier vecteur propre de $(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}$ dans un domaine borné Ω, associé à la première valeur propre $\lambda=\lambda_1^{\beta/2}$, tel que

$$(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1=\lambda_1^{\beta/2}\varphi_1,x\in\Omega;\varphi_1=0,x\in\partial\Omega\text{ et }\int_\Omega\varphi_1dx=1,$$

où $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : |x| \leq 2R^{\frac{\alpha}{\beta}} \right\}, R > 0$. Ainsi, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega u^p \varphi_1 \varphi_2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega u_0(x) \varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dx dt \\ = \; & \lambda_1^{\beta/2} \int_0^T \int_\Omega u \varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega u \; \varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dx dt, \end{aligned}$$

Par conséquent, par l'inégalité de Jensen, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left(\int_\Omega u \varphi_1 dx \right)^p \varphi_2 dt + \int_0^T \int_\Omega u_0(x) \varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dx dt \\ \leq \; & \lambda_1^{\beta/2} \int_0^T \int_\Omega u \varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 dx dt + \int_0^T \int_\Omega u \; \varphi_1 \, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dx dt. \end{aligned}$$

Soit $f(t) = \int_{\mathbb{R}^N} u \varphi_1 dx$. Pour R tend vers ∞, on a

$$\int_0^T f^p \varphi_2 dt + \int_0^T f(0) {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt \leq \lambda_1^{\beta/2} \int_0^T f {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 dt + \int_0^T f {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt. \tag{2.19}$$

En appliquant l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{1}{2p} a^p + \frac{2^{q-1}}{q} b^q, \;\; pq = p + q, \;\; a, b > 0, \;\; p, q > 1,$$

dans le côté droit de (3.4.20), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_0^T f^p \varphi_2 dt + \int_0^T f(0) {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt \\ \leq \; & \lambda_1^{\beta/2} \int_0^T f \varphi_2^{\frac{1}{p}} \varphi_2^{\frac{-1}{p}} \; {}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 dt + \int_0^T f \varphi_2^{\frac{1}{p}} \varphi_2^{\frac{-1}{p}} \; {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt \\ \leq \; & \frac{1}{2p} \int_0^T f^p \varphi_2 dt + C \int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \; \left({}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\ & + \frac{1}{2p} \int_0^T f^p \varphi_2 dt + C \int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \; \left({}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p-1}} dt. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \int_0^T f^p \varphi_2 dt + \int_0^T f(0) {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt \;\; \leq \;\; & C \int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \; \left({}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p-1}} dt \\ & + C \int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \; \left({}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 \right)^{\frac{1}{p-1}} dt. \end{aligned}$$

En prenant

$$\varphi_2(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right)^m, \quad t \in [0, T], \; m \geq \max\left\{2, \frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}\right\},$$

nous trouvons

$$\begin{aligned}
\int_0^T f(0)\,{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2 dt &= C f(0) \int_0^T T^{-\alpha-\gamma} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{m-\alpha-\gamma} dt \\
&= C f(0) T^{-\alpha-\gamma} \left[\frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m-\alpha-\gamma+1}}{-\frac{1}{T}(m-\alpha-\gamma+1)}\right]_0^T \\
&= C f(0) T^{-\alpha-\gamma+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C\int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \left({}_t^C D_T^{\gamma} \varphi_2\right)^{\frac{p}{p-1}} dt &= C\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{-m}{p-1}} T^{-\frac{\gamma p}{p-1}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{(m-\gamma)p}{p-1}} dt \\
&= C T^{-\frac{\gamma p}{p-1}} \left[\frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m-\frac{\gamma p}{p-1}+1}}{-\frac{1}{T}\left(m - \frac{\gamma p}{p-1} + 1\right)}\right]_0^T \\
&= C T^{1-\frac{\gamma p}{p-1}},
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
C\int_0^T \varphi_2^{\frac{-1}{p-1}} \left({}_t^C D_T^{\alpha+\gamma} \varphi_2\right)^{\frac{p}{p-1}} dt &= C\int_0^T \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{-m}{p-1}} T^{\frac{(-\gamma-\alpha)p}{p-1}} \left(1 - \frac{t}{T}\right)^{\frac{(m-\gamma-\alpha)p}{p-1}+1} dt \\
&= C T^{\frac{(-\gamma-\alpha)p}{p-1}} \left[\frac{\left(1-\frac{t}{T}\right)^{m+\frac{(-\gamma-\alpha)p}{p-1}+1}}{-\frac{1}{T}\left(m + \frac{(-\gamma-\alpha)p}{p-1} + 1\right)}\right]_0^T \\
&= C T^{-\frac{(\gamma+\alpha)p}{p-1}}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous trouvons

$$\left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_0^T f^p \varphi_2 dt + C T^{1+\gamma-\alpha} f(0) \leq C \left(T^{1-\frac{p\gamma}{p-1}} + T^{1-\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}}\right).$$

Alors

$$f(0) \leq C \left(T^{\alpha+\gamma-\frac{p\gamma}{p-1}} + T^{-\frac{\alpha+\gamma}{p-1}}\right). \tag{2.20}$$

En laissant $T \to \infty$ dans (2.4.21), nous obtenons $f(0) \leq 0$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse, ce qui prouve que la solution explose en temps fini. ■

Théorème 2.3 *Soit* $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ *et* $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$. *Si*

$$1 < p < 1 + \frac{\beta\left(\alpha+\gamma\right)}{\alpha N},$$

alors toute solution du problème (2.1.1)-(2.1.2) explose en temps fini.

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que u est une solution globale douce pour le problème (2.1.1)-(2.1.2). En utilisant le Lemme 3.5 et la Définition 3.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} J_t^{\gamma}\left(|u|^{p-1}u\right)\psi\left(x,t\right)dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\, {}_t^C D_T^{\alpha}\psi\left(x,t\right)dxdt \\ = &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\psi\left(x,t\right)dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\, {}_t^C D_T^{\alpha}\psi\left(x,t\right)dxdt, \end{aligned}$$

pour tout $\psi \in C^1([0,T],H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ avec $\mathrm{supp}_x\,\psi \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\psi(.,T) = 0$, où $0 < \alpha < 1-\gamma$ et $0 < \gamma < 1$.
Soit $\Phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ tel que $\Phi(s) = 1$ pour $|s| \leq 1$, $\Phi(s) = 0$ pour $|s| > 2$ et $0 \leq \Phi(s) \leq 1$.
Maintenant, nous prenons

$$\psi\left(x,t\right) = {}_t^C D_T^{\gamma}\varphi\left(x,t\right) = {}_t^C D_T^{\gamma}\left(\varphi_1^l\left(x\right)\varphi_2\left(t\right)\right), l \geq \frac{p}{p-1},$$

pour tout $\Phi \in C^1([0,T],H^{\beta}(\mathbb{R}^N))$ avec $\mathrm{supp}_x\,\varphi \subset\subset \mathbb{R}^N$ et $\varphi(x,T) = 0$, avec

$$\varphi_1\left(x\right) = \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}}\right), \varphi_2\left(t\right) = \left(1-\frac{t}{T}\right)^m, m \geq \max\left\{2, \frac{p\left(\alpha+\gamma\right)}{p-1}\right\},$$

pour $t \in [0,T]$. Ainsi

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\varphi_1^l\left(x\right){}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)dxdt \\ = &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1^l\, {}_t^C D_T^{\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\varphi_1^l\left(x\right)\, {}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)dxdt. \quad (2.21) \end{aligned}$$

D'aprés l'inégalité de Ju (voir [1])

$$\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\left(\varphi_1^l\right) \leq l\varphi_1^{l-1}\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1,$$

on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\varphi_1^l\left(x\right)_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)dxdt\\
\leq\ & C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\varphi_1^{l-1}\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1\ {}_t^C D_T^{\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)\right|dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\left(x,t\right)\varphi_1^l\left(x\right)\ \left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)\right|dxdt,
\end{aligned}$$

pour une constante positive C indépendante de T. Ensuite, par l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\psi dxdt+CT^{1-\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\varphi_1^l\left(x\right)dx\\
\leq\ & C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\ \varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_1^{l-1}\left|\left(-\triangle^{\frac{\beta}{2}}\right)\varphi_1\ {}_t^C D_T^{\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)\right|dxdt+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u\ \varphi^{\frac{1}{p}}\varphi^{-\frac{1}{p}}\varphi_1^l\left(x\right)\ \left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)\right|dxdt\\
\leq\ & \frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt+\frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^{l-q}\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_1^l\right|^q\left|{}_t^C D_T^{\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)\right|^q dxdt\\
&+\frac{1}{2p}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt+\frac{2^{q-1}}{q}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N}\varphi_1^l\varphi_2^{\frac{-1}{p-1}}\left|{}_t^C D_T^{\alpha+\gamma}\left(\varphi_2\left(t\right)\right)\right|^q dxdt.
\end{aligned}$$

Dans cette étape, on introduit le changement de variables suivant

$$\tau=\frac{t}{T},\quad \xi=\frac{x}{T^{\frac{\alpha}{\beta}}},$$

nous obtenons

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u^p\varphi dxdt+T^{1-\alpha-\gamma}\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\varphi_1^l\left(x\right)dx\leq CT^{1+\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}}. \tag{2.22}$$

Par conséquent

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\left(x\right)\varphi_1^l\left(x\right)dx\leq CT^{\frac{\alpha N}{\beta}-\frac{p(\alpha+\gamma)}{p-1}}.$$

Donc, si une solution de (2.1.1)-(2.1.2) existe globalement, alors en prenant $T\rightarrow+\infty$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0\varphi_1^l dx=0\Rightarrow u_0\equiv 0, \tag{2.23}$$

ce qui est une contradiction. Donc la solution de (2.1.1)-(2.1.2) explose en temps fini. ■

Maintenant, en fonction des résultats d'explosion précédents, nous pouvons déduire le théorème suivant qui donne l'explosion de L^∞–solutions du problème (2.1.1)-(2.1.2). Soit $T_\varepsilon=\sup\left\{T\in[0,\infty)\,;\ \text{il existe une solution unique } u\in C\left([0,T),L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right.\text{ de }(3.1.1)-(3.1.2)\right)\}$ le temps d'existence maximal de L^∞-solutions. Alors nous avons le résultat suivant :

Théorème 2.4 *Soit $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$. Si $1 < p < 1 + \beta(\alpha+\gamma)/\alpha N$, alors la durée de vie $T_\varepsilon < +\infty$ et la norme*
L^∞ de solutions explose en $t = T_\varepsilon$,

$$\liminf_{t \to T_\varepsilon} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = +\infty. \tag{2.24}$$

Preuve. Supposons que $T_\varepsilon = +\infty$. Alors u est la solution globale faible de (2.1.1)-(2.1.2) au sens de la définition 3.2 et du Théorème 3.3 nous avons $u \equiv 0$. D'autre part, par l'identité (2.4.22), nous déduisons que

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_0 \varphi_1^l dx = 0 \Rightarrow u_0 \equiv 0,$$

ce qui est une contradiction. Nous avons donc $T_\varepsilon < +\infty$. Ensuite, nous prouvons un éclatement de la norme L^∞ de la solution locale u. D'abord, nous assumons

$$\liminf_{t \to T_\varepsilon} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < +\infty,$$

alors il existe une suite $\{t_n\}_{n\geq 1} \subset [0, T_\varepsilon)$ et une constante positive $M > 0$ telle que

$$\lim_{n \to \infty} t_n = T_\varepsilon,$$

et

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \leq M. \tag{2.25}$$

Ainsi, pour tout $t_n \in \{t_n\}_{n\geq 1}$, par l'estimation (2.4.26) et le théorème de l'existence locale, il existe une constante positive $T(M)$ indépendant de t_n telle que nous pouvons construire une solution

$$u \in X = C\left(\left[t_n, t_n + T(M), L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right)\right)\right),$$

de (2.1.1)-(2.1.2).
De plus, puisque la limite de t_n existe, on peut prendre $t_n \in [0, T_\varepsilon)$ tel que $T_\varepsilon - T(M) < t_n \leq T_\varepsilon$. Pour cela nous pouvons aussi construire une solution $u \in X$. Mais l'estimation $t_n + T(M) > T_\varepsilon$ est en contradiction avec la définition de T_ε. Par conséquent nous obtenons

$$\liminf_{t \to T_\varepsilon} \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = +\infty.$$

Ce qui complète la preuve du théorème. ■

2.5 Existence globale de solutions

Dans cette section, nous étudions l'existence globale de solutions du problème (2.1)-(2.2).

Théorème 2.5 *Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ et $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$. Si $p \geq 1 + \beta(\alpha+\gamma)/\alpha N$ et $\|u_0\|_{L^{q_c}(\mathbb{R}^N)}$ est suffisamment petit, où*
$q_c = \alpha N(p-1)/\beta(\alpha+\gamma)$, alors la solution de (2.1.1)-(2.1.2) existe globalement.
Notons que nous pouvons prendre $|u_0(x)| \leq C|x|^{-\beta(\alpha+\gamma)/(p-1)}$ au lieu de $u_0 \in L^{q_c}(\mathbb{R}^N)$.

Preuve. Nous construisons la solution globale de (2.1)-(2.2) par le principe de mappage de contraction.
Puisque

$$p \geq 1 + \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha N} > 1 + \frac{\beta(\alpha+\gamma)}{\alpha N + \beta - \beta(\alpha+\gamma)},$$

on peut choisir une constante positive $q > 0$ telle que

$$\frac{\alpha+\gamma}{p-1} - \frac{1}{p} < \frac{\alpha N}{\beta q} < \frac{\alpha+\gamma}{p-1}, \tag{2.26}$$

et

$$\frac{\alpha+\gamma}{p-1} - \alpha < \frac{\alpha N}{\beta q}. \tag{2.27}$$

Soit

$$\kappa = \frac{\alpha N}{\beta}\left(\frac{1}{q_c} - \frac{1}{q}\right) = \frac{\alpha+\gamma}{p-1} - \frac{\alpha N}{\beta q}. \tag{2.28}$$

Ainsi, il découle de (2.27)-(2.29) que

$$q > \frac{N(p-1)}{\beta} > q_c, 0 < p\kappa < 1, \alpha+\gamma = \frac{\alpha N(p-1)}{\beta q} + (p-1)\kappa. \tag{2.29}$$

Comme $u_0 \in L^{q_c}$, en utilisant (2.13) et (2.29), on obtient pour $t > 0$,

$$\sup_{t>0} t^{\kappa} \|P_{\alpha,\beta}(t) u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C \|u_0\|_{L^{q_c}(\mathbb{R}^N)} = \eta. \tag{2.30}$$

Si $u_0(x) \leq C|x|^{-\beta(\alpha+\gamma)/(p-1)}$ pour une constante $C > 0$, alors

$$\|T(t) u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C t^{\frac{N}{\beta q} - \frac{\alpha+\gamma}{\alpha(p-1)}}.$$

Par conséquent

$$\|P_{\alpha,\beta}(t) u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C t^{\frac{\alpha N}{\beta q} - \frac{\alpha+\gamma}{p-1}} \int_0^{\infty} \phi_\alpha(\theta)\, \theta^{\frac{N}{\beta q} - \frac{\alpha+\gamma}{\alpha(p-1)}} d\theta.$$

Puisque $N/\beta q - (\alpha+\gamma)/\alpha(p-1) > -1$,

$$\int_0^\infty \phi_\alpha(\theta)\,\theta^{\frac{N}{\beta q}-\frac{\alpha+\gamma}{\alpha(p-1)}}\,d\theta<\infty.$$

Par conséquent, nous pouvons également voir que (2.5.31) est satisfaite.
Soit

$$Y=\left\{u\in\left(L^\infty(0,\infty),L^q\left(\mathbb{R}^N\right)\right):\|u\|_Y<\infty\right\},$$

où

$$\|u\|_Y=\sup_{t>0}t^\kappa\|u(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}.$$

Pour $u\in Y$, nous définissons

$$\Phi(u)(t)=P_{\alpha,\beta}(t)\,u_0+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0\,J_s^\gamma\left(|u|^{p-1}u\right)ds.$$

Notons $B_M=\{u\in Y:\|u\|_Y\le M\}$. Pour $u,v\in B_M$, $t\ge 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&t^\kappa\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\\
=\;&t^\kappa\left\|\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0\,J_s^\gamma\left(|u|^{p-1}u\right)ds+\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}S_{\alpha,\beta}(t-s)_0\,J_s^\gamma\left(|v|^{p-1}v\right)ds\right\|\\
\le\;&t^\kappa\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|S_{\alpha,\beta}(t-s)_0\,J_s^\gamma(|u|^p-|v|^p)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,ds. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Puisque $q>p>N(p-1)/2\beta$, donc $p/q-1/q<2\beta/N$. Ensuite, par le Lemme 3.2, nous avons

$$\begin{aligned}
&t^\kappa\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\\
\le\;&Ct^\kappa\int_0^t(t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta r}}\int_0^s(s-\sigma)^{\gamma-1}\|u^p-v^p\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\,d\sigma ds\\
\le\;&Ct^\kappa\int_0^t(t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta}\left(\frac{p}{q}-\frac{1}{q}\right)}\int_0^s(s-\sigma)^{\gamma-1}\|u^p-v^p\|_{L^{\frac{q}{p}}(\mathbb{R}^N)}\,d\sigma ds\\
\le\;&Ct^\kappa\int_0^t\int_0^s(t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)}(s-\sigma)^{\gamma-1}\left(\|u\|^{p-1}_{L^q(\mathbb{R}^N)}-\|v\|^{p-1}_{L^q(\mathbb{R}^N)}\right)\|u-v\|_{L^q(\mathbb{R}^N)}\,d\sigma ds\\
\le\;&Ct^\kappa M^{p-1}\int_0^t\int_0^s(t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)}(s-\sigma)^{\gamma-1}\sigma^{-p\kappa}d\sigma ds\,\|u-v\|_Y. \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant (2.5.27) et $p\kappa<1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^s (t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)}(s-\sigma)^{\gamma-1}\sigma^{-p\kappa}d\sigma ds \\
=\;& \left(\int_0^1 (1-\sigma)^{\gamma-1}\sigma^{-p\kappa}d\sigma\right)\int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)}}{s^{p\kappa-\gamma}}ds \\
=\;& Ct^{\alpha+\gamma-p\kappa-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)} = Ct^{-\kappa},
\end{aligned} \tag{2.33}$$

pour tout $t \geq 0$. Donc, on déduit de (2.33) et (2.34) que

$$t^{\kappa}\left\|\Phi(u)-\Phi(v)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq CM^{p-1}\left\|u(t)-v(t)\right\|_Y.$$

Si on choisit M assez petit pour que $CM^{p-1} < \frac{1}{2}$, alors nous obtenons

$$t^{\kappa}\left\|\Phi(u)-\Phi(v)\right\|_Y \leq \frac{1}{2}\left\|u-v\right\|_Y.$$

Puisque

$$\begin{aligned}
t^{\kappa}\left\|\Phi(u)(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} &\leq \eta + CM^p t^{\kappa}\int_0^t\int_0^s (t-s)^{\alpha-1-\frac{\alpha N}{\beta q}(p-1)}(s-\sigma)^{\gamma-1}\sigma^{-p\kappa}d\sigma ds \\
&\leq \eta + CM^p,
\end{aligned}$$

On peut choisit η et M assez petit pour que

$$\eta + CM^p \leq M.$$

Par conséquent, par le principe de mappage de contraction, nous déduisons que Φ a un point fixe unique $u \in B_M$.

Ensuite, nous allons prouver que $u \in C([0,\infty), C_0(\mathbb{R}^N))$. Tout d'abord, nous prouvons que pour $T > 0$ assez petit, $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$.

En fait, la preuve ci-dessus montre que u est la solution unique dans

$$B_{M,T} = \{u \in \left(L^{\infty}(0,T), L^q\left(\mathbb{R}^N\right)\right) : \sup_{0<t<T} t^{\kappa}\left\|u(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq M\}.$$

D'après le Théorème 3.1 et le fait que $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$, le problème (3.1)-(3.2) a une solution unique $\tilde{u} \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^q\left(\mathbb{R}^N\right))$, pour $T > 0$ assez petit.

Par conséquent, nous pouvons prendre T assez petit pour que

$$\sup_{0<t<T} t^{\kappa}\left\|\tilde{u}(t)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq M.$$

Ensuite, par unicité, nous avons $u \equiv \tilde{u}$ pour $t \in [0,T]$ et $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N))$.
Ensuite, nous montrons que $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ par l'argument "bootstrap". Pour $t > T$, nous avons

$$\begin{aligned} u - P_{\alpha,\beta}(t) u_0 &= \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^{\gamma}\left(|u|^{p-1} u\right) ds \\ &= \int_0^T (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^{\gamma}\left(|u|^{p-1} u\right) ds \\ &\quad + \int_T^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)_0 J_s^{\gamma}\left(|u|^{p-1} u\right) ds \\ &= H_6 + H_7. \end{aligned}$$

D'après $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$, il s'ensuit que $H_6 \in C([T,\infty], C_0(\mathbb{R}^N) \cap L^q(\mathbb{R}^N))$. Supposons que $T_1 > T$, alors nous avons $u^p \in L^\infty((T,T_1), L^{q/p}(\mathbb{R}^N))$, et ${}_0J_t^{\gamma}(|u|^p) \in L^\infty((T,T_1), L^{q/p}(\mathbb{R}^N))$. Notant que $q > N(p-1)/\beta$, on peut choisir $r > q$ tel que $N(p/q - 1/r)/\beta < 1$. Par le Lemme 3.2 et en répétant les mêmes calculs que ci-dessus, nous obtenons $H_7 \in C([T,T_1), L^r(\mathbb{R}^N))$. Et puisque la constante T_1 est arbitraire, on a $H_7 \in C([T,\infty), L^r(\mathbb{R}^N))$, alors $u \in C\left([T,\infty], L^r(\mathbb{R}^N)\right)$.
Posons $r = q\delta^i$ et notons que $\delta^i > 1$,

$$\frac{N}{\beta}\left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q\delta^i}\right) < 1, i = 1, 2, ...,$$

alors nous déduisons par les mêmes arguments que ceux utilisés précédemment que

$$u \in C\left([T,\infty], L^{q\delta^i}(\mathbb{R}^N)\right).$$

Par des étapes finies, nous obtenons

$$\frac{p}{q\delta^i} < \frac{\beta}{N},$$

alors

$$u \in C\left([0,\infty), C_0(\mathbb{R}^N)\right).$$

■

Chapitre 3

Etude d'une équation d'évolution fractionnaire avec un terme source à croissance exponentielle

3.1 Intoduction

Dans ce chapitre (voir [6]), nous considérons le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} D_{0|t}^{\alpha}u + (-\Delta)^{\beta/2}u = J_{0|t}^{1-\alpha}(e^u), & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.1}$$

où $N \geq 1, 0 < \alpha \prec 2, 0 < \beta \leq 2$, $D_{0|t}^{\alpha}$ est l'opérateure dérivé fractionnaire de Caputo d'ordre α, $J_{0|t}^{1-\alpha}(e^u)$ est l'intégrale fractionnelle de Riemann-Liouville d'ordre $1-\alpha$ pour e^u définie par

$$J_{0|t}^{1-\alpha}(e^u) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{u(s)} ds,$$

ou Γ est la fonction gamma,$(-\Delta)^{\beta/2}$ est l'opérareur Laplacian défini par

$$(-\Delta)^{\beta/2}u(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(|\xi|^{\beta} \mathcal{F}(u)(\xi)\right)(x),$$

pour $u\epsilon\, D\left((-\triangle)^{\beta/2}\right) = H^{\beta}\left(\mathbb{R}^N\right)$, ou $H^{\beta}(\mathbb{R}^N)$ l'espace de Sobolev homogène

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in S'; (-\Delta)^{\beta/2}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\} \qquad \text{si } \beta \notin \mathbb{N},$$

$$H^{\beta}(\mathbb{R}^N) = \left\{u \in L^2(\mathbb{R}^N); (-\Delta)^{\beta/2}u \in L^2(\mathbb{R}^N)\right\} \qquad \text{si } \beta \in \mathbb{N},$$

où S' est l'espace de Schwartz et $\mathcal{F}$ est la transformation de Fourier et$\mathcal{F}^{-1}$ son invers et $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$ où $C_0(\mathbb{R}^N)$ est l'espace de toutes les fonctions continues sur $\mathbb{R}^N$ tendants vers zero lorsque x tend vers l'infini.
Si $D^{\alpha}_{0|t}$ est remplacé les premiers opérrateurs différentiels nou avons le problème suivant étudié par Ahmed et al[5]

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2}u = J^{1-\alpha}_{0/t}\left(e^u\right) \ , & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \ , & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

Ils sont prouvé l'existence d'une solution locale unique et dans certains conditions appropriées sur les données initiales, il ont prouvé que la solution explosait en temps fini et ont étudié leur profil de gonflement temporel.Lorsque le problème est égalment considéré avec une non-linéarité la forme $J^{1-\alpha}_{0/t}\left(|u|^{p-1}u\right)$ il se lit

$$\begin{matrix} u_t + (-\Delta)^{\beta/2}u = J^{1-\alpha}_{0/t}\left(|u|^{p-1}u\right) \ , & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \ , & x \in \mathbb{R}^N, \end{matrix}$$

Ce problème a été considéré par Fino et Kirane. D'abord, ils ont validé l'équation par un résultat d'existence unique. Ensuite, ils ont montré que l'explosion de ces solutions exite et ont étudié leur profil d'explosion en temps fini.
Ce chapitre est organisé comme suit : Dans la section 2, nous présentons quelques définitions et résultas qui seront utilisés tout au long de cette étude. Dans la section 3, l'existence locale et lunicité des solution douces du problème(1) sont établies. Dans la section 4, nous montrons que l'explosion de ces solutions exite, tandis que dans la section 5, nous établissons une estimation de la durée de vie des solutions d'explosion.

3.2 Définitions et résultas préliminaires

Dans cette section, nous présentons quelques définitions et résultats qui seront utilisés dans les sections suivantes.
La derivé de Caputo d'ordre α défini par

$$D^{\alpha}_{0|t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f'(s)\, ds.$$

La derivée de Riemann-Liouville d'ordre α de la fonction continue f définie par

$$D^{\alpha}_{0|t} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\, ds,$$

$$D_{t|T}^{\alpha} f(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_t^T (t-s)^{-\alpha} f(s)\, ds. \tag{3.2}$$

Pour chaque $f, g \in C([0,T])$ et $D_{0|t}^{\alpha} f(t), D_{t|T}^{\alpha} g(t)$ sont existent et sont continues, on a la formule d'intégration par parties suivante

$$\int_0^T g(t)\, D_{0|t}^{\alpha} f(t)\, dt = \int_0^T f(t)\, D_{t|T}^{\alpha} g(t)\, dt.$$

La relation entre Caputo et R-L est donnée par

$$D_{0|t}^{\alpha} f(t) = D_{0|t}^{\alpha} [f(t) - f(0)].$$

Si pour $T \succ 0$ et $\gamma \gg 1$, on pose

$$\varphi_1(t) = \left(\frac{1-t}{T}\right)_+^{\gamma},$$

alors nous avons

$$D_{t|T}^{\alpha} \varphi_1(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} T^{-\alpha} \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\gamma-\alpha},$$

$$D_{t|T}^{1-\alpha} \varphi_1(t) = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha)} T^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\gamma+\alpha-1}, \tag{3.3}$$

et

$$\frac{d}{dt} \varphi_1(t) = -\gamma T^{-1} \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^{\gamma-1}. \tag{3.4}$$

La fonction de Minardi est donnée par

$$M_{\alpha}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k!\,\Gamma(-\alpha k + 1 - \alpha)}, 0 \prec \alpha \prec 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

De plus, $M_{\alpha}(z) \geq 0$ pour tous $t \geq 0$ et satisfait à l'égalité suivante

$$\int_0^{\infty} t^r M_{\alpha}(t)\, dt = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(\alpha r + 1)}, \quad r \succ -1, \ \ 0 \prec \alpha \prec 1.$$

La fonction de Mittag-Leffler est défini par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta \succ 0\,, \ \ z \in \mathbb{C}.$$

Soit $T(t) = e^{-t(-\Delta)^{\beta/2}}$. Alors, puisque $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint défini positif dans $L^2(\mathbb{R}^N)$, on peut en déduire que $T(t)$ est un semi-groupe fortement continu sur $L^2(\mathbb{R}^N)$ engendré par l'opérateur $(-\Delta)^{\beta/2}$. De plus $T(t) = S_{\beta}(t) * v$, pour tous $v \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $t \succ 0$, et

$$S_{\beta}(t)(x) = S_{\beta}(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{ix\xi - t|\xi|^{\beta}} d\xi,$$

où S_β satisfait les propriétés suivantes

$$S_\beta(1) \in L^\infty\left(\mathbb{R}^N\right) \cap L^1\left(\mathbb{R}^N\right), \quad S_\beta(t,x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}^N} S_\beta(t,x)\,dx = 1,$$

pour tous $x \in \mathbb{R}^N$ et $t \succ 0$ .En utilisant l'inégalité de Young pour la convulatioun et la forme auto-adjoint de S_β nous avons

$$\left\|S_\beta(t) * v\right\|_q \leq Ct^{(-N/\beta)(1/r-1/q)} \left\|v\right\|_r ,$$

pour tous $v \in L^r\left(\mathbb{R}^N\right)$ et tous $1 \leq r \leq q \leq \infty$, $t \succ 0$; et

$$\left\|S_\beta(t) * v\right\|_q \leq \left\|v\right\|_q ,$$

pour tous $v \in L^q\left(\mathbb{R}^N\right)$ et tous $1 \leq q \leq \infty$, $t \succ 0$.
De plus, comme $(-\Delta)^{\beta/2}$ est un opérateur auto-adjoint , nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} u(x)(-\Delta)^{\beta/2} v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^N} v(x)(-\Delta)^{\beta/2} u(x)\,dx,$$

pour tous $u, v \in D\left((-\Delta)^{\beta/2}\right) = H^\beta\left(\mathbb{R}^N\right)$.
Les opérateurs de Mittag-Leffler basés sur le semi-groupe $T(t)$ engendré par l'opérateur $(-\Delta)^{\beta/2}$ sont définis par

$$P_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^\infty M_\alpha(s)\,T(st^\alpha)\,ds = \int_0^\infty M_\alpha(s)\,e^{-st^\alpha(-\Delta)^{\beta/2}}ds,$$

et

$$S_{\alpha,\beta}(t) = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)\,T(st^\alpha)\,ds = \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s)\,e^{-st^\alpha(-\Delta)^{\beta/2}}ds.$$

Lemme 3.1 *(Inégalité de Ju) Supposons que la fonction $\varphi \geq 0$ soit lisse et bornée. Alors*

$$l\varphi^{l-1}(-\Delta)^{\beta/2}\varphi \geq^\alpha (-\Delta)^{\beta/2}\varphi^l \tag{3.5}$$

Lemme 3.2 *Si $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ et $1/r = 1/p \prec \beta/N$, alors l'opérateur $\{P_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\succ 0}$ a la propriété suivante*

$$\left\|P_{\alpha,\beta}(t)\,u_0\right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(1 - N/(\beta r))}{\Gamma(1-\alpha N/(\beta r))} \left\|u_0\right\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Preuve. Par (2) et les propriétés de M_α, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^\infty M_\alpha(s) T(st^\alpha) u_0 ds \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\
\leq & \int_0^\infty M_\alpha(s) (t^\alpha s)^{-N/(\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} ds \\
= & \; t^{\frac{-N}{\beta r}\alpha} \int_0^\infty M_\alpha(s) s^{-N/(\beta r)} ds \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
= & \; t^{\frac{-N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(1 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 - \alpha N/(\beta r))} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.3 Lemme 3.4 *Pour l'opérateur* $\{S_{\alpha,\beta}(t)\}_{t\succ 0}$. *nous avons le résultat suivant*

$$\|S_{\alpha,\beta}(t) u_0\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq \alpha t^{\frac{-N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(2 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 + \alpha - \alpha N/(\beta r))} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} ,$$

pour $1 \leq p \leq q \leq +\infty$ *,* $1/r = 1/p - 1/q$ *et* $1/r \prec 2\beta/N$ *.*

Preuve. La preuve est similaire à celle du lemme, nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\left\| \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) T(st^\alpha) u_0 ds \right\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \\
\leq & \int_0^\infty \alpha s M_\alpha(s) (t^\alpha s)^{-N/(\beta r)} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} ds \\
= & \; \alpha t^{\frac{-N}{\beta r}\alpha} \int_0^\infty M_\alpha(s) s^{1-N/(\beta r)} ds \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
= & \; \alpha t^{\frac{-N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(2 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 + \alpha - \alpha N/(\beta r))} \|u_0\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} .
\end{aligned}$$

■

3.3 Existence locale de solutions

Cette section est consacrée à la preuve de l'existence locale et l'unicité de la solution douce du probléme (3.1). Tout d'abord nous donnons la définition d'une solution douce de (3.1).

Définition 3.1 *(Solution douce).Soit* $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, *et* $T > 0$.*On dit que* $u \in C([0,T], C_0(\mathbb{R}^N))$ *est une solution douce du problème (3.1.1) si* u *satisfait à l'équation intégrale suivante*

$$u(t) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) J_{0/s}^{1-\alpha}(\exp u(\tau)) ds, \quad t \in [0,T] . \tag{3.6}$$

Théorème 3.1 *(Existence locale). Soit $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^N)$, il existe un temps maximale $T_{\max} > 0$ et une solution douce unique $u \in C([0, T_{\max}), C_0(\mathbb{R}^N))$ au problème (3.1.1). Par ailleurs, soit $T_{\max} = +\infty$ sinon $T_{\max} < +\infty$ et $tT_{\max} \|u(t)\|_{L^\infty((\mathbb{R}^N)} = +\infty$. De plus, si $u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0$, alors $u(t) > 0$ pour tout $0 < t < T_{\max}$. En outre, si $u_0 \in L^r(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq r < \infty$, alors $u \in C([0, T_{\max}), L^r(\mathbb{R}^N))$.*

Preuve. Pour $T > 0$ arbitraire, Nous définissons l'espace de Banach

$$E_T = \left\{ u \in C\left([0,T]; C_0(\mathbb{R}^N)\right); \|u\|_1 \leq 2\|u_0\|_{L^\infty} \right\},$$

où $\|.\|_1 = \|.\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))}$. Ensuit, pour chaque $u \in E_T$, nous définissons

$$\psi(u) = P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) J_{0/s}^{1-\alpha}(\exp u(\tau))ds.$$

Nous prouvons l'éxitence locale par le théorème du point fixe de Banach

• $\psi : E_T \to E_T$: Soit $u \in E_T$, en utilisant (2.4), nous obtenons avec $\|.\|_\infty = \|.\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}$,

$$\begin{aligned}
\|\psi(u)\|_1 &= \left\| P_{\alpha,\beta}(t)u_0 + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) J_{0/s}^{1-\alpha}(\exp u(\tau))ds \right\|_1 \\
&\leq \|P_{\alpha,\beta}(t)u_0\|_{L^\infty(0,T)} + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s) J_{0/s}^{1-\alpha}(\exp u(\tau))ds \right\|_{L^\infty((0,T),L^\infty(\mathbb{R}^N))} \\
&\leq t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(1 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 - \alpha N/(\beta r))} \|u_0\|_\infty + \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \alpha t^{\frac{-N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(2 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 + \alpha - \alpha N/(\beta r))} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|\exp u(\tau)\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty((0,T)} \\
&\leq t^{-\frac{N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(1 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 - \alpha N/(\beta r))} \|u_0\|_\infty + \alpha t^{\frac{-N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(2 - N/(\beta r))}{\Gamma(1 + \alpha - \alpha N/(\beta r))} \\
&\quad \times \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|\exp u(\tau)\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq \|u_0\|_\infty + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|\exp u(\tau)\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq \|u_0\|_\infty + C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|\exp u(\tau)\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq \|u_0\|_\infty + T \exp \|u\|_1 \\
&\leq \|u_0\|_\infty + T \exp 2 \|u_0\|_\infty ,
\end{aligned}$$

ou $C_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}$

Maintenant, si nous choisissons

$$T \exp 2 \|u_0\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty , \tag{3.7}$$

nous concluons que $\|\psi(u)\|_1 \leq 2\|u_0\|_\infty$, et alors $\psi(u) \in E_T$.

$\bullet\psi$ **est contractante** : pour $u, v \in E_T$, nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi(u)-\psi(v)\|_1 &\leq \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} S_{\alpha,\beta}(t-s)\, J_{0/s}^{1-\alpha}(\exp u(\tau) - \exp v(\tau))ds \right\|_1 \\
&\leq \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \alpha t^{\frac{-N}{\beta r}\alpha} \frac{\Gamma(2-N\diagup(\beta r))}{\Gamma(1+\alpha-\alpha N\diagup(\beta r))} \right. \\
&\quad \left. \times \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|\exp u(\tau) - \exp v(\tau)\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq C_1 \left\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|\exp u(\tau) - \exp v(\tau)\|_\infty d\tau ds \right\|_{L^\infty(0,T)} \\
&\leq T\|\exp u - \exp v\|_1 \\
&\leq T \exp\|\lambda u(s) + \mu v(s)\| \, \|u(s) - v(s)\|_1 \\
&\leq T \exp 2\|u_0\|_\infty \|u-v\|_1 \\
&\leq \frac{1}{2}\|u-v\|_1 .
\end{aligned}$$

grâce à l'inégalité suivante

$$|\exp u(s) - \exp v(s)| = \exp \lambda u(s) + \mu v(s)\, |u(s) - v(s)|, \quad 0 \prec \lambda, \mu \prec 1, \quad \lambda + \mu = 1 \tag{3.8}$$

T est choisi telle que

$$2T \exp 2\|u_0\|_\infty \leq 1. \tag{3.9}$$

Puis, est contractuel sur E_T .Alors par le théorème du point fixe de Banach, il existe une solution douce unique $(u, v) \in E_T$ au problème (3.1). ■

Maintenant, nous prouvons l'unicité de la solution. Soit $u, v \in E_T$ sont deux solutions douces dans E_T pour $T > 0$, en utilisant (3.4) et (3.3), on obtient

Preuve.

$$\begin{aligned}
\|u(t) - v(t)\|_\infty &\leq C_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \int_0^s (s-\tau)^{-\alpha} \|\exp u(\tau) - \exp v(\tau)\|_\infty d\tau ds \\
&\leq \exp 2\|u_0\|_\infty \int_0^t \|u(s) - v(s)\|_\infty ds.
\end{aligned}$$

Alors l'unicité découle de l'inégalité de **Granwall** (voir[9]) ;,alors nous avons $u = v$.

Ensuite, cette unicité implique l'existence d'une solution sur un intervalle maximale $[0, T_{\max})$ avec l'alternative décrite dans le théoréme (voir Fino et Kirane). ■

Positivité des solutions : Si $u_0 \geq 0$ et $u_0 \not\equiv 0$, nous avons

$$u(t) \geq P_{\alpha,\beta}(t)\, u_0 \succ 0, \quad t \in (0, T_{\max})$$

Regularité des solutions : Si $u_0 L^r\left(\mathbb{R}^N\right) \cap C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, pour $1 \leq r < \infty$, alors répétant l'argument du point fixe dans l'espace

$$E_{T,r} = \left\{u \in C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right) L^r\left(\mathbb{R}^N\right)\right); \|u\|_1 \leq 2\|u_0\|_\infty, \quad \|u\|_{\infty,r} \leq 2\|u_0\|_r\right\},$$

à la place de E_T, où

$$\|u\|_{\infty,r} = \|u\|_{L^\infty((0.T),L^r(\mathbb{R}^N))}\,.$$

nous obtenons une solution douce unique dans $E_{T,r}$

3.4 Explosion de solutions

Définition 3.2 *2 (Solution faible) Soit $u_0 \in L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)$ et $T > 0$. On dit que u est une solution faible du problème (2.1), si $u \in L^p\left((0,T), L^\infty_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$, et u vérifait l'équation suivante*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_0 D^\alpha_{t|T}\Psi(x,t)\,dxdt + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} J^{1-\alpha}_{0|t}(\exp u)\,\Psi(x,t)\,dxdt \\ = &\int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\,\Psi(x,t) + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,D^\alpha_{t|T}\Psi(x,t)\,dxdt, \end{aligned} \tag{3.10}$$

pour toute fonction test $\Psi \in C^1\left([0,T], H^\beta\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ à support compact telle que $\Psi(x,T) = 0$.

Lemme 3.5 *On considère $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$, et soit $u \in C\left([0,T], C_0\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ une solution douce du problème (2.1), alors u est une solution faible pour (2.1)*

Théorème 3.2 *(Explosion) Soit $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ tel que $u_0 \geq 0$, $u_0 \not\equiv 0$. la solution douce de (3.1) explose en temps fini .*

Preuve. La preuve est par contradiction. Supposons que u soit une solution douce globale de (3.1), alors u est une solution du ce problème dans $C\left([0,T], C_0\left(R^N\right)\right)$ pour tout $T \ggg 1$ tel que $u(t) > 0$ pour tout $t \in [0,T]$.
Soit $\Psi(x,t) = D^{1-\alpha}_{t|T}\varphi(x,t)$ avec $\varphi \in C^1\left([0,T]; H^\beta\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ tel que

$$\varphi(x,t) = \varphi_1(t)\,\varphi_2^l(x), \quad l \gg 1,$$

ou

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \left(1 - \frac{t}{T}\right)_+^\gamma, \quad \gamma \gg 1, \\ \varphi_2(x) &= \Phi\left(\frac{|x|}{T^{\alpha/\beta}}\right), \end{aligned}$$

et Φ est une fonction régulière, telle que

$$\Phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ \searrow & \text{si } 1 \leq x \leq 2, \\ 0 & \text{si } x \geq 2, \end{cases}$$

Ensuite, selon la définition 2 et le lemme 1, nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} u_0(x)\,\varphi(x,0)\,dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \exp(u)\,\varphi(x,t)\,dxdt \\ = \; & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|T}^{1-\alpha}(\varphi(x,t))\,dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u(x,t)\,\varphi_t(x,t)\,dxdt, \end{aligned} \tag{3.11}$$

et si nous fixons $\Omega_T = [0,T] \times \Omega$, tel que $\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^N ; |x| \leq 2T^{\frac{1}{\beta}} \right\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1(0)\,dx + \int_{\Omega_T} \exp(u)\,\varphi(x,t)\,dxdt \\ = \; & \int_{\nleq_T} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2^l(x)\, D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_{\Omega_T} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{\Delta t)dxdt.} \end{aligned}$$

En utilisant $\varphi_1(0) = 1$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1(0)\,dx + \int_{\Omega_T} \exp(u(x,t))\,\varphi(x,t)\,dxdt \\ = \; & \int_{\nleq_T} u(x,t)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2^l(x)\, D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_{\Omega_T} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{\Delta t)dxdt.} \end{aligned}$$

Maintenant en utilisant (4) on obtient

D'aprés l'inégalité de Ju, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} u_0(x)\,\varphi_2^l(x) + \int_{\Omega_T} \exp(u(x,t))\,\varphi(x,t) \\ \leq \; & l \int_{\nleq_T} u(x,t)\,\varphi_2^{l-1}(x)\,(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x)\, D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t)\,dxdt - \int_{\Omega_T} u(x,t)\,\varphi_2^l(x)\,\varphi_1^{\Delta t)dxdt} \\ \leq \; & l \int_{\nleq_T} u(x,t) \left| (-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} \varphi_2(x) \right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t)\,dxdt + \int_{\Omega_T} u(x,t) \left| \varphi_1^{\Delta t)} \right| dxdt \\ = \; & lI + J. \end{aligned} \tag{3.12}$$

D'autre part, en utilisant (2.13), on peut écrire

Par conséquent,en utilisant l'inégalité de Young $(e = \exp(1))$

$$AB \leq e^A + B \ln \frac{B}{e\varepsilon}, \text{pour } A, B > 0, \varepsilon > 0, \tag{3.13}$$

avec $\varepsilon=\frac{1}{4l}\varphi\left(x,t\right), A=u\left(x,t\right)$ et $B=\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_{2}\left(x\right)\right|D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_{1}\left(t\right)$ dans I, on obtient

$$I\leq\int\limits_{\Omega_{T}}\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_{2}\left(x\right)\right|D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_{1}\left(t\right)\ln\left(\frac{4l\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_{2}\left(x\right)\right|D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_{1}\left(t\right)}{e\varphi_{2}^{l}\left(x\right)\varphi_{1}\left(t\right)}\right)+\frac{1}{4l}\int\limits_{\Omega_{T}}e^{u(x,t)}\varphi\left(x,t\right).$$

De meme, pour J avec $\varepsilon=\frac{1}{4}\varphi\left(x,t\right), A=u\left(x,t\right)$ et $B=\left|\varphi_{1}^{\Delta(t)}\right|$, on obtient

$$J\leq\int\limits_{\Omega_{T}}\left|\varphi_{1}^{\Delta(t)}\right|\ln\left(\frac{4\left|\varphi_{1}^{\Delta(t)}\right|}{e\varphi_{2}^{l}\left(x\right)\varphi_{1}\left(t\right)}\right)+\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_{T}}e^{u(x,t)}\varphi\left(x,t\right).$$

On utilise les formules (2) et (3) , nous constatons que

$$\begin{aligned}I\ \leq\ &\int\limits_{\Omega_{T}}\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_{2}\left(x\right)\right|D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_{1}\left(t\right)\\&\ln\left(\frac{C_{3}\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_{2}\left(x\right)\right|T^{\alpha-1}\left(1-t/T\right)_{+}^{\gamma+\alpha-1}}{\varphi_{2}^{l}\left(x\right)\left(1-t/T\right)_{+}^{\gamma}}\right)+\frac{1}{4l}\int\limits_{\Omega_{T}}e^{u(x,t)}\varphi\left(x,t\right),\end{aligned}\tag{3.14}$$

et

$$J\leq\int\limits_{\Omega_{T}}\left|\varphi_{1}^{\Delta(t)}\right|\ln\left(\frac{C_{4}T^{-1}\left(1-t/T\right)_{+}^{\gamma-1}}{\varphi_{2}^{l}\left(x\right)\left(1-t/T\right)_{+}^{\gamma}}\right)+\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_{T}}e^{u(x,t)}\varphi\left(x,t\right),$$

où

$$C_{3}=\frac{4l\Gamma\left(\gamma+1\right)}{e\Gamma\gamma+\alpha},\quad\text{et}\ \ C_{4}=\frac{4\gamma}{e}.\tag{3.15}$$

Puis

$$\begin{aligned}I\ \leq\ &\int\limits_{\Omega_{T}}\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_{2}\left(x\right)\right|D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_{1}\left(t\right)\\&\ln\left(\frac{C_{3}\left|\left(-\triangle\right)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_{2}\left(x\right)\right|T^{\alpha-1}\left(1-t/T\right)_{+}^{\alpha-1}}{\varphi_{2}^{l}\left(x\right)}\right)+\frac{1}{4l}\int\limits_{\Omega_{T}}e^{u(x,t)}\varphi\left(x,t\right),\end{aligned}$$

et

$$J\leq\int\limits_{\Omega_{T}}\left|\varphi_{1}^{\Delta(t)}\right|\ln\left(\frac{C_{4}T^{-1}\left(1-t/T\right)_{+}^{-1}}{\varphi_{2}^{l}\left(x\right)}\right)+\frac{1}{4}\int\limits_{\Omega_{T}}e^{u(x,t)}\varphi\left(x,t\right).$$

On en déduit enfin que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_2^l(x) + \int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t) \\
\leq\ & l\int_{\Omega_T} \left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2(x)\right| D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t)\ln\left(\frac{C_3\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2(x)\right|T^{\alpha-1}(1-t/T)_+^{\alpha-1}}{\varphi_2^l(x)}\right) \\
&+\int_{\Omega_T}\left|\varphi_1^{\prime}(t)\right|\ln\left(\frac{C_4T^{-1}(1-t/T)_+^{-1}}{\varphi_2^l(x)}\right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

En utilisant le changement de variables $\tau = \frac{t}{T}$ et $y = \frac{x}{T^{\alpha/\beta}}, T \gg 1$, on obtient

$$\begin{aligned}
dxdt &= T^{\frac{\alpha N}{\beta}+1}dyd\tau, \\
(-\triangle_x)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2 &= T^{-\alpha}(-\triangle_y)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2, \\
D_{t|T}^{1-\alpha}\varphi_1(t) &= C_5T^{\alpha-1}(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha-1},
\end{aligned}$$

et

$$\left|\varphi_1^{\prime}(t)\right| = \gamma T^{-1}(1-\tau)_+^{\gamma-1},$$

où

$$C_5 = \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}.$$

Maintenant, nous définissons $\Omega_2 = [0,T]\times\left\{y\in\mathbb{R}^N; |y|\leq 2\right\}$. Donc, on peut écrire (3.16) comme suite

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} u_0(x)\varphi_2^l(x) + \frac{1}{2}\int_{\Omega_T} e^{u(x,t)}\varphi(x,t) \\
\leq\ & C_5\int_{\Omega_2}\left|(-\triangle_y)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2\left(T^{\alpha/\beta}y\right)(1-\tau)_+^{\gamma+\alpha-1}\right| dxdt\ln\left(\frac{C_3T^{-1}\left|(-\triangle)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2\left(T^{\alpha/\beta}y\right)\right|(1-\tau)_+^{\alpha-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha/\beta}y\right)}\right) \\
&+\gamma T^{\frac{\alpha N}{\beta}}\int_{\Omega_2}(1-\tau)_+^{\alpha-1}\left(\frac{C_4T^{-1}(1-\tau)_+^{-1}}{\varphi_2^l\left(T^{\alpha/\beta}y\right)}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, nous avons deux fonction bornées φ_2 et $(-\triangle_y)^{\frac{\beta}{2}}\varphi_2$ dans Ω_2 et

$$\varphi_2 \longrightarrow 1 \text{ comme } T \longrightarrow +\infty.$$

En utilisant le théorème de convergance de Lebesgue, nous déduisons que le coté droit diverge vers -∞ lorsque $T \longrightarrow +\infty$, tandis que le coté gauche est positif. Cela conduit à une contradiction.

■

3.5 Temps de vie des solutions

Dans cette section, nous donnons une estimation de la durée de vie des solutions avec une donnée initiale spéciale. Dans ce but, nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} D_{0/t}^{\alpha} u_\epsilon + (-\Delta)^{\beta/2} u_\epsilon = J_{0/t}^{1-\alpha}\left(e^{u_\epsilon}\right) & x \in \mathbb{R}^N, t > 0, \\ u_\epsilon(x,0) = \epsilon u_0(x) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases}$$

où $\epsilon \succ 0, 0 \prec \alpha \prec 1, 0 \prec \beta \leq 2$ et $u_0 \in C_0\left(\mathbb{R}^N\right)$ satisfait

$$u_0(x) \geq C_0 |x|^{-\delta}, |x| \geq \epsilon_0, N \prec \delta \prec \frac{\beta}{\alpha},$$

pour certaines canstantes positives C_0 et ϵ_0.

Théorème 3.3 *Supposons que l'hypothèse (11) est vérifiée . Soit $[0, T_\epsilon)$ la durée de vie de la solution u_ϵ du problème (10). Alors, il existe une constante positive C telle que*

$$T_\epsilon \leq C\epsilon^{\frac{1}{\theta}}, \theta = \frac{\alpha\delta}{\beta} - 1 \prec 0.$$

Preuve. Soit u la solution douce de (10) . En utilisant lemme 1, definition 2 et en prenant $\Psi(x,t)$ du Théorème 2, nous obtenons

$$\begin{aligned} & I + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} e^{u_\epsilon} \varphi(x,t)\, dxdt \\ = & \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_\epsilon(x,t) (-\triangle)^{\frac{\beta}{2}} D_{t|T}^{1-\alpha} \varphi(x,t)\, dxdt - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} u_\epsilon(x,t) \varphi_t(x,t)\, dxdt, \end{aligned}$$

où

$$I = \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \varphi_2^l(x)\, dx.$$

Nous choisissons $T \in [0, T_\epsilon)$ tel que $T \geq T_0 \succ 0$. En posant le changement de variable $y = \frac{x}{T^{\alpha/\beta}}$ et en utilisant l'hypothèse (11) ; on obtient

$$\begin{aligned} I &= \epsilon \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \varphi_2^l(x)\, dx \\ &\geq \epsilon \int_{|x| \geq \epsilon_0} u_0 \varphi_2^l(x)\, dx \\ &\geq \epsilon C_0 T^{\frac{\alpha(N-\delta)}{\beta} \int_{|y| \geq \frac{\epsilon_0}{T_0^{\alpha/\beta}}} |y|^{-\delta} \Phi^l(|y|) dy} \\ &\geq \epsilon C_0 T^{\frac{\alpha(N-\delta)}{\beta}} \int_{|y| \geq \frac{\epsilon_0}{T_0^{\alpha/\beta}}} |y|^{-\delta} \Phi^l(|y|)\, dy. \end{aligned}$$

D'autre part, par (9), on en déduit qu'il existe une constante positive telle que

$$I \leq C_0 T^{\frac{\alpha N}{\beta}-1}.$$

De (12) et (13). il s'ensuit que

$$\epsilon \leq C_7 T^{\theta},$$

pour une constante positive C_7, où

$$\theta = \frac{\alpha\delta}{\beta} - 1 \prec 0.$$

Par conséquant, nous obtenons

$$T \leq C\epsilon^{\frac{1}{\beta}},$$

pour une constante positive C. Ceci complète la preuve du théorème. ■

Chapitre 4

Conclusion

Après avoir présenté les notions préliminaires utiles pour la bonne compréhension de ce travail, nous avons présenté des résultats d'existence des solutions locales et globales, ainsi que des resultats d'explosion en temps fini pour certains problèmes d'évolution fractionnaires en temps et en espace avec des termes sources non-linéaires de croissance polynômiale et exponentielle. Ces resultats montre que la solution est globale dans le cas sur-critique pour toute donnée initiale ayant une mesure assez petite, tandis que dans le cas sous-critique la solution explose en temps fini.

Au terme de ce mémoire, nous estimons que les résultats présentés contribueront au développement de l'étude des équations d'évolution fractionnaires, en ouvrant de noueaux horizons à la recherche scientifique sur cette thématique émergente.

Bibliographie

[1] A. Alsaedi, B. Ahmad, M. Kirane, A survey of useful inequalities in fractional calculus, Calc. Appl. Anal. 20 (3) (2017), 574–594, http ://dx.doi.org/10.1515/fca-2017-0031.

[2] D. Andreucci, A. F. Tedeev, Universal bounds at the blow-up time for nonlinear parabolic equations, Adv. Differential Equations 10 (2005), no. 1, 89-120.

[3] P. Baras, R. Kersner, Local and global solvability of a class of semilinear parabolic equations, J. Differential Equations 68 (1987), no. 2, 238-252.

[4] P. Baras, M. Pierre,Critère d'existence de solutions positives pour des equations semi-lin eaires non monotones, Ann. Inst. H. Poincar e Anal. Non Lin eaire 2 (1985), 185-212.

[5] E.G. Bazhlekova, Subordination principle for fractional evolution equations, Fract. Calc. Appl. Anal. 3 (2000), 213-230.

[6] A. Bekkai, B. Rebiai and M. Kirane, On local existence and blowup of solutions for a time-space fractional diffusion equation with exponential nonlinearity, Math. Meth. Appl. Sci., 42(12) (2019), 1819-1830.

[7] M. Birkner, J. A. Lopez-Mimbela, A.Wakolbinger, Blow-up of semilinear PDE's at the critical dimension. A probabilistic approach (English summary), Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), no. 8, 2431-2442.

[8] K. Bogdan, T. Byczkowski, Potential theory for the -stable Schrodinger operator on bounded Lipschitz domains, Studia Mathematica 133 (1999), no. 1, 53-92.

[9] T. Cazenave, F. Dickstein, F. D. Weissler, An equation whose Fujita critical exponent is not given by scaling, Nonlinear Analysis 68 (2008), 862-874.

[10] T. Cazenave, A. Haraux, Introduction aux problèmes d'évolution semi-linèaires, Ellipses, Paris, (1990).

[11] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy, Rev. Mod. Phys. 15 (1943) 1-89.

[12] M. Chlebik, M. Fila, From critical exponents to blow-up rates for parabolic problems, Rend. Mat. Appl. (7) 19 4 (1999), 449-470.

[13] S. Chandrasekhar, Stochastic problems in physics and astronomy, Rev. Mod. Phys. 15 (1943), 1-89.

[14] S. Dipierro, E. Valdinoci, A simple mathematical model inspired by the Purkinje cells : from delayed travelling waves to fractional diffusion, Bull. Math. Biol. 80 (2018) 1849-1870, http ://dx.doi.org/10.1007/s11538-018-0437-z.

[15] J. Droniou et C. Imbert, Fractal first order partial differential equations, Arch. Ration. Mech. Anal. 182 (2) (2006) 299-331.

[16] S. D. Eidelman, A. N. Kochubei, Cauchy problem for fractional diffusion equations, J. Differential Equations 99 (2004), no. 2, 211-255.

[17] M. Fila, P. Quittner, The blow-up rate for a semilinear parabolic system, J. of Mathematical Analysis and Applications 238 (1999), 468-476.

[18] A. Fino, G. Karch, Decay of mass for nonlinear equation with fractional Laplacian, J. Monatsh. Math. 160 (2010), 375-384.

[19] A. Fino, M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation. 2009. <hal-00398110v6>

[20] A. Z. Fino, M. Kirane, Qualitative properties of solutions to a time-space fractional evolution equation, Quart. Appl. Math. 70 (2012), 133-157.

[21] H. Fujita, On the blowing up of solutions f the problem for $u_t = \Delta u + u^{1+\alpha}$, J. Fac. Sci.Univ. Tokyo 13 (1966), 109-124.

[22] M. Guedda, M. Kirane, Criticality for some evolution equations, Dierential Equations 37(2001), 511-520.

[23] K. Hayakawa, On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations, Proc. Japan Acad. 49 (1973), 503-505.

[24] N. Ju, The maximum principle and the global attractor for the dissipative 2-D quasi-geostrophic equations, Comm. Pure. Appl. Ana. (2005), 161-181.

[25] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, Theory and applications of fractional diferential equations, 2006.

[26] M. Kirane, Y. Laskri, N.-e. Tatar, Critical exponents of Fujita type for certain evolution equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J. Math. Anal. Appl.312 (2005), 488-501.

[27] M. Kirane, M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear Reaction-Di usion systems, J. Math. Analysis and Appl. 268 (2002), 217-243.

[28] K. Kobayashi, On some semilinear evolution equations with time-lag, Hiroshima Math. J. 10(1980), 189-227.

[29] F. Mainardi, On the initial value problem for the fractional diffusion-wave equation, in : S. Rionero, T. Ruggeri (Eds.), Waves and Stability in continuous Media, World Scientific, Singapore, 1994, pp. 246-251.

[30] R. Metzler, J. Klafter, The restaurant at the end of the random walk : recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics, J. Phys A. 37 (2004), 161-208.

[31] E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, A priori estimates and blow-up of solutions to nonlinear partial diferential equations and inequalities, Proc. Steklov. Inst. Math. 232 (2001), 240–259.

[32] A. Nabti, Life span of blowing-up solutions to the Cauchy problem for a time–space fractional diffusion equation, Computers and Mathematics with Applications (2018), https ://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.10.034.

[33] M. Nagasawa, T. Sirao, Probabilistic treatment of the blowing up of solutions for a nonlinear integral equation, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969), 301-310.

[34] J. Prüss, Evolutionary integral equations and applications, Vol. 87, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland, 1993.

[35] C. A. Roberts, W. E. Olmstead, Blow-up in a subdi usive medium of in nite extent, Fract.Calc. Appl. Anal. 12 (2009), no. 2, 179-194.

[36] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, Fractional integrals and derivatives, Theory and Applications, Gordon and Breach Science Publishers, 1987.

[37] I. M. Sokolov, J. Klafter, From di usion to anomalous di usion : a century after Einstein's Brownian Motion, Chaos 15 (2005), 6103-6109.

[38] P. Souplet, Blow-up in nonlocal reaction-di usion equations, SIAM J. Math. Anal. 29 (1998),1301-1334.

[39] P. Souplet, Monotonicity of solutions and blow-up for semilinear parabolic equations with nonlinear memory, Z. angew. Math. Phys. 55 (2004), 28-31.

[40] R. N. Wang, D. H. Chen, T. J. Xiao, Abstract fractional Cauchy problems with almosectorial operators, J. Differential Equations 252 (2012), 202-235.

[41] K. Yosida, Functional analysis, sixth Edition, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1980.