الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة العربي التبسي – تبسة -

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم الرياضيات والإعلام الآلي

مذكرة التخرج لنيل شهادة ماستر

ميدان : الرياضيات والإعلام الآلي

شعبة : الرياضيات

تخصص: معادلات تفاضلية جزئية وتطبيقاتها

الموضوع:

مزامنة بعض أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية

من إعداد الطلبة:

رضوان شايب

عبد الفتاح حمانة

أمام لجنة المناقشة:

الأستاذة: أحلام قصري	أستاذ محاضر –ب-	جامعة العربي التبسي	رئيسا
الأستاذ: حناشي فارح	أستاذ محاضر –ب-	جامعة العربي التبسي	مناقشا
الأستاذ: عادل وناس	أستاذ محاضر –أ-	جامعة العربي التبسي	مؤطرا

تاريخ المناقشة: 08-07-2019

شكر وتقدير

بسم الله الرحمن الرحيم و الصلاة و السلام على اشرف المرسلين

الحمد لله تعالى على فضله العظيم علينا بنعمة العلم و الذي وهبنا الصبر و يسر لنا الطريق في انجاز هذا العمل المتواضع

نتقدم باسمى معاني الشكر و التقدير الى استاذنا عادل وناس الذي كلف نفسه عناء الاشراف على مذكرتنا و بذله كل الجهد في توجيهنا و ارشادنا و الذي لم يبخل علينا بالنصائح القيمة رغم مشاغله و مسؤولياته، و لاننسى شكر اعضاء لجنة المناقشة.

نوجه الشكر ايضا لكل من اعطى لنا يد العون في مشوارنا الدراسي من قريب أو من بعيد سواء كانوا أهلا أو اساتذة أو زملاء.

ملخص

في هذه المذكرة، تم معالجة مسألة المزامنة التامة بين أنظمة معادلات تفاضلية جزئية من النوع تفاعل-انتشار. بالإعتماد على نظرية ليابينوف للإستقرار، تم إقتراح مراقبة خطية وأخرى غير خطية لتحقيق مزامنة تامة بين أنظمة تفاعل-انتشار في شكلها العام. كذلك تم إعطاء مثال عددي يوضح من خلاله فعالية طرق المراقبة المقترحة.

الكلمات المفتاحية

المزامنة، أنظمة تفاعل-انتشار، نظرية الإستقرار، دالة ليابينوف .

Résumé

Dans ce mémoire, le problème de la synchronisation complète des systèmes différentielles partielles de type réaction-diffusion a était traitée. Basé sur la théorie de stabilité de Lyapunov, un contrôle linéaire et un autre non linéaire donné pour obtenir la synchronisation complète d'un couple de système de réaction-diffusion dans ça forme générale. Aussi, un exemple numérique est donné, illustrant l'efficacité des méthode de contrôle proposée a été donné.

Les mots-clé

La synchronisation, système de réaction-diffusion, la théorie de stabilité, fonction de Lyapunov.

Abstract

In this thesis, the problem of the complete synchronization of partial differential reaction-diffusion type systems has been dealt with. Based on Lyapunov's theory of stability, a linear control and a non-linear one to obtain the complete synchronization of a reaction-diffusion system couple in this general form. Also, a numerical example is given, illustrating the effectiveness of the proposed control method was given .

Keyword

Synchronization, reaction-diffusion system, theory of stability, Lyapunov function.

المقدمة العامة

تزامن الأنظمة الحركية هي العملية التي يحدث فيها محاولة ربط نظامين أو أكثر وذلك من خلال ضبط خواص معينة من حركتهم أو إجبارهم على اتخاذ سلوك مشترك .

جذبت هذه الظاهرة اهتمام العديد من الباحثين من مختلف المجالات بسبب إمكانية تطبيقاتها في الفيزياء والبيولوجيا والكيمياء و الهندسة. منذ العمل الرائد الذي قام به بيكورا وكارول[1]، تم تقديم أنواع التزامن المختلفة مثل التزامن التام، تأخر التزامن، التزامن المتوقع، التزامن بالإسقاط، التزامن المعمم، وتزامن Q-S.

معظم الجهود البحثية قد كرست لدراسة مشكلات التحكم في الأنظمة الديناميكية منخفضة الأبعاد. مزامنة الأنظمة عالية الأبعاد - التي بها متغيرات الحالة لا يعتمد فقط على الزمن ولكن أيضًا على الموقع المكاني - بقي تحديا. هذه الأنظمة تتم نمذجتها عموما في المجال المكاني والزماني بإستخدام أنظمة معادلات تفاضلة جزئية.

في الآونة الأخيرة ، انتقل البحث عن التزامن إلى ديناميكية الأنظمة عالية الأبعاد غير الخطية. خلال السنوات الماضية ، حققت بعض الدراسات تزامن بعض هذه الأنظمة الديناميكية مثل العمل المقدم في [2–3]. ديناميكيات التزامن من أنظمة تفاعل-انتشار تمت دراستها في [2 ، 4]، وقد تبين أن أنظمة تفاعل-انتشار يمكن أن يظهر فيها التزامن بطريقة مماثلة للأنظمة العادية .

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة مشكلة التزامن التام لثنائي من أنظمة تفاعل-انتشار، لذلك قسمنا العمل إلى ثلاثة فصول وخاتمة .

في الفصل الأول تناولنا بعض التعاريف والمبرهنات الأساسية ، ثم نمذجة معادلات التفاعل والإنتشار وتقديم بعض الأمثلة على هذه الأنظمة .

الفصل الثاني تم تخصيصه لنظرية المزامنة ، حيث قدمنا في المزامنة التامة، المزامنة المزاحة ،المزامنة الإسقاطية،و والمعممة، ثم تطرقنا إلى بعض طرق المزامنة المشهورة .

الفصل الثالث يمثل عمل المذكرة ، فهو عبارة عن دراسة للمزامنة التامة بين نظامين تفاعل-انتشار ، مع اقتراح دوال تحكم خطية وغير خطية ، ومرفق بمثال تطبيقي على نظامين lengyel-epstein بمحاكاة عددية لنتائج الدراسة .

واختتمنا العمل بخاتمة عامة تقارن بين نتائج الفصل الثالث بالنسبة لدوال التحكم الخطية وغير الخطية .

الفصل 1 عموميات ومفاهيم أساسية

1. تعاريف ومبرهنات أساسية :

1.1 تعاريف

1.1.1 تعريف

لتكن الدالة $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث : $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

تدرج الدالة $\boldsymbol{u}$: هو حقل الأشعة المعرف بـ :

$$\boldsymbol{grad}u(x) = \nabla u(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(x), \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\right)^T \;;\; x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T . \quad (1.1)$$

2.1.1 تعريف

لتكن الدالة $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ حيث : $u(x) = \big(u_1(x), \dots, u_n(x)\big)^T$

تباعد الدالة $\boldsymbol{u}$: هو الدالة المعرفة بـ :

$$\boldsymbol{div}u(x) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}(x) + \dots + \frac{\partial u_n}{\partial x_n}(x) \;; x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \quad (2.1)$$

3.1.1 تعريف

لتكن الدالة $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ، حيث $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$.

مؤثر لابلاس للدالة u هو الدالة المعرفة بـ :

$$\Delta \boldsymbol{u}(x) = \boldsymbol{div}(\nabla u)(x) = \frac{\partial^2 u_1}{\partial {x_1}^2}(x) + \frac{\partial^2 u_2}{\partial {x_2}^2}(x) + \dots + \frac{\partial^2 u_n}{\partial {x_n}^2}(x) . \quad (3.1)$$

4.1.1 تعريف

ليكن Ω منطقة من $\mathbb{R}^n$ ذات حافة $\partial\Omega$ منتظمة ، و $u: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ، η هو ناظم الوحدة الخارجي لـ $\partial\Omega$.

مشتقة الدالة u وفق الناظم η هي الدالة التي نرمز لها بـ $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ ومعرفة بـ :

$$\frac{\partial u}{\partial \eta}(x) = \nabla u(x) \cdot \eta(x) \ ; x \in \partial\Omega \quad (4.1)$$

5.1.1 تعريف

ليكن النظام الديناميكي المعرف بـ :

$$\dot{x}(t) = f\big(x(t)\big) \ , \quad (5.1)$$

حيث : $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

نقول أن النقطة x_e : هي نقطة توازن للنظام الديناميكي (5.1) إذا كان : $x(t) = x_e$ حل للمعادلة (5.1).

6.1.1 تعريف [8]

ليكن النظام الديناميكي المعرف بـ (5.1) ، و x_e نقطة توازن لهذا النظام .

- نقول أن x_e مستقرة بمفهوم ليابينوف إذا تحقق :

$$\forall \varepsilon > 0 \ ; \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ ; \big(\|x(0) - x_e\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow \forall t \geq 0 : \|x(t) - x_e\| < \varepsilon\big) . \quad (6.1)$$

- نقول أن x_e مستقرة تقاربيا إذا كانت مستقرة بمفهوم ليابينوف وحققت :

$$\exists \delta > 0 \ ; \|x(0) - x_e\| < \delta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \ . \quad (7.1)$$

- نقول أن x_e مستقرة تقاربيا كليا إذا كانت مستقرة بمفهوم ليابينوف وحققت :

$$\forall x(0) \in \mathbb{R}^n \ ; \lim_{t \to +\infty} \|x(t) - x_e\| = 0 \ . \quad (8.1)$$

2.1 مبرهنات أساسية

ليكن Ω مفتوح من $\mathbb{R}^n$ ، حافته $\partial\Omega$ منتظمة .

1.2.1 مبرهنة [9]

إذا كان $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ فإن :

$$\int_{\Omega} \Delta \boldsymbol{u} dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma \tag{9.1}$$

2.2.1 مبرهنة [9]

إذا كان $v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ و $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ فإن :

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = -\int_{\Omega} u \Delta v dx + \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma \tag{10.1}$$

3.2.1 مبرهنة [9]

إذا كان $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ فإن :

$$\int_{\Omega} (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\sigma \tag{11.1}$$

4.2.1 مبرهنة [8]

ليكن النظام الديناميكي المعرف بـ (5.1) ، و $x_e = 0$ نقطة توازن لهذا النظام .

إذا وجدت دالة V معرفة على جوار $U(0)$ للصفر وتحقق :

i. $V(x) = 0$ إذا وفقط إذا كان $x = 0$.

ii. $\forall x \in U(0) \setminus \{0\} ; \ V(x) > 0$

iii. $\forall x \in U(0) ; \ \dot{V}(x) = \nabla V \cdot f(x) \leq 0$

فإن نقطة التوازن x_e مستقرة بمفهوم ليابونوف .

- وإذا تحقق - زيادة على الشروط السابقة - الخاصية التالية :

$$\forall x \in U(0) \setminus \{0\} ; \ \dot{V}(x) = \nabla V \cdot f(x) < 0$$

فإن نقطة التوازن $x_e = 0$ مستقرة تقاربيا .

2. معادلات تفاضلية جزئية من الصنف تفاعل-انتشار

1.2. نمذجة معادلات تفاعل-انتشار

معادلات تفاعل-انتشار (les équations de réaction-diffusion) هي نماذج رياضية لوصف ظواهر تخضع لعمليتين : عملية انتشار لأفراد المجتمع المراد دراسته ، وعملية تفاعل بين أفراد هذا المجتمع ، تظهر هذه المعادلات في بعض الميادين مثل : نمذجة التفاعلات الكيميائية ، في دراسة تطور السكان ، أو إنتشار مرض معين وغيرها من الميادين .

يمكن الحصول على هذه المعادلات كالتالي :

نأخذ مادة معينة موزعة داخل منطقة Ω حافتها $\partial\Omega$ منتظمة – في الحالة العامة Ω منطقة من $\mathbb{R}^n$ - ،

نرمز بـ : $u(t,x)$ لكثافة هذه المادة عند النقطة x وفي اللحظة t .

هذه المادة تتفاعل وتتكاثر ،لتكن $f(u)$ الدالة التي تصف هذا التفاعل .

نأخذ حجما V من Ω حافته ∂V منتظمة ، كمية المادة الموجودة في الحجم V عند اللحظة t هي :

$$m(t) = \int_V u(t,x)dx \tag{12.1}$$

أثناء عملية التفاعل وانتشار المادة تتغير كمية هذه المادة داخل الحجم V ،

فيكون : التغير في كمية المادة داخل الحجم V مساو للكمية المتشكلة داخل الحجم V ناقص الكمية التي عبرت السطح ، ونترجم ذلك رياضيا بـ :

$$\frac{\partial m(t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int_V u(t,x)dx = \int_V f dx - \int_{\partial V} J.\eta d\sigma \tag{13.1}$$

حيث : J هو تدفق هذه المادة

وبتطبيق نظرية غرين – استروجرادسكي :

$$\int_{\partial V} J.\eta d\sigma = \int_V divJ dx \tag{14.1}$$

نجد :

$$\int_V \left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + divJ - f\right) dx = 0 \qquad (15.1)$$

وبما أن الحجم V كيفي فإن :

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + divJ - f = 0 \ ;\forall x \in \Omega \ et \ t > 0 \qquad (16.1)$$

- لكن حسب قانون فيك (loi de fick) : التدفق J متناسب مع تدرج الكثافة u ،

أي يوجد ثابت $d > 0$ حيث : $J = -d \times gradu$

بتعويض قيمة J في (16.1) نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - d\Delta u - f = 0 \ ; x \in \Omega \ et \ t > 0 \qquad (17.1)$$

أي :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f \ ; x \in \Omega \ et \ t > 0 \qquad (18.1)$$

هذ النوع من المعادلات – تفاضلية جزئية - يسمى : معادلات تفاعل-انتشار .

نضيف للمعادلة (18.1) :

الشرط الإبتدائي: $u(0,x) = u_0(x)$ حيث : u_0 دالة معطاة + الشروط الحدية .

نتحصل مثلا على معادلة تفاعل-انتشار بشروط حدية متجانسة لنيومان :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u + f \ ; x \in \Omega \ et \ t > 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \ ; \ x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \, ; \quad sur \ \partial\Omega \end{cases} \qquad (19.1)$$

2.2. أنظمة تفاعل-انتشار

إذا كان لدينا عدة مواد M_i في تفاعل داخل Ω ، فإنه يكون لدينا :

$$\forall i = \overline{1,m}\ ;\ \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i \Delta u_i + f_i(u_1; u_2; \dots; u_m)\ \ ; x \in \Omega\ et\ t > 0 \tag{20.1}$$

بوضع $u = (u_1; u_2; \dots; u_m)^T$ نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + f(u)\ \ ; x \in \Omega\ et\ t > 0 \tag{21.1}$$

حيث :

$D = diag(d_1; d_2; \dots; d_m)$ ، $f(u) = \big(f_1(u); f_2(u); \dots; f_m(u)\big)^T$ ،

$\Delta u = (\Delta u_1; \Delta u_2; \dots; \Delta u_m)^T$.

3.2. أمثلة عن معادلات تفاعل-انتشار

1.3.2. معادلات fisher-kpp [5]

في الحالة البسيطة لما $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ لدينا معادلة فيشر :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + ru(1-u)\ \ ; x \in \Omega\ et\ t > 0 \tag{22.1}$$

حيث : $r > 0$.

- يمكن اعتبار الشكل العام لها :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u) \tag{23.1}$$

والتي تعرف بمعادلات : fisher-kpp نسبة إلى : فيشر و كولموغوروف و بيتروفسكي وبيسكونوف .

- لما $f(u) = u(1-u)(u-\alpha)$ نجد :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)(u-\alpha) \tag{24.1}$$

حيث : $0 < \alpha < 1$

يسمى هذا النوع من المعادلات بـ : معادلات **Zeldovitch** .

2.3.2. معادلات تفاعل كيميائية [5]

ليكن التفاعل : $A + B \underset{k_2}{\overset{k_1}{\leftrightarrows}} C + D$ نضع :

$$a = [A]\,;\;\; b = [B]\;\; ; c = [C]\,;\;\; d = [D] \tag{25.1}$$

يمكن نمذجته بنظام المعادلات التالي :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = d_1 \Delta a - k_1 ab + k_2 cd \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = d_2 \Delta b - k_1 ab + k_2 cd \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = d_3 \Delta c + k_1 ab - k_2 cd \\ \dfrac{\partial d}{\partial t} = d_4 \Delta d + k_1 ab - k_2 cd \end{cases} \tag{26.1}$$

حيث k_1 ، k_2 ، d_1 ،d_2 ، d_3 و d_{14} ثوابت موجبة تماما .

- نأخذ مثلا التفاعل التالي : $2SO_2 + O_2 \underset{k_2}{\overset{k_1}{\leftrightarrows}} 2SO_3$:

$$a = [SO_2]\,;\;\; b = [O_2]\;\; ; c = [SO_3] \tag{27.1}$$

نجد :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial a}{\partial t} = d_1 \Delta a + 2(-k_1 a^2 b + k_2 c^2) \\ \dfrac{\partial b}{\partial t} = d_2 \Delta b - k_1 a^2 b + k_2 c^2 \\ \dfrac{\partial c}{\partial t} = d_3 \Delta c + 2(k_1 a^2 b - k_2 c^2) \end{cases} \tag{28.1}$$

مع شروط ابتدائية موجبة ، وشروط حدية .

3.3.2. أنظمة لوتكا-فولتيرا [5]

يمكن كتابتها على الشكل العام :

$$\forall i = \overline{1,m}\,;\ \frac{\partial u_i}{\partial t} = d_i \Delta u_i + e_i u_i + u_i \sum_{j=1}^{m} p_{i,j}\, u_j \qquad (29.1)$$

حيث : $e_i; p_{i,j} \in \mathbb{R}$ و $d_i > 0$.

الفصل 2 نظرية المزامنة

1. مقدمة

التزامن – أو المزامنة – تعني على معناها اللغوي: الاتفاق في الزمن ، أو وقوع حدثين في نفس الزمن . إذن الهدف من المزامنة هو محاولة جعل نظامين يتطابقان في الزمن . مفهوم المزامنة يلزم منه نظامين : نظام ديناميكي حر غير متحكم فيه ، يسمى بـ : **النظام القائد** ، ونظام ديناميكي آخر يسمى بـ : **النظام التابع** ، نتحكم فيه بوسيط تحكم يسمى أحيانا المراقب .

نعتبر نظام قائد معرف بـ :

$$\dot{X}(t) = F\big(X(t)\big) \ , \qquad (1.2)$$

ونظام تابع معرف بـ :

$$\dot{Y}(t) = G\big(Y(t)\big) + U \ , \qquad (2.2)$$

حيث : $X(t), Y(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $F, \mathrm{G} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ و U وسيط تحكم مطلوب إيجاده ، إذن هدف المزامنة هو إيجاد U بحيث الحل $Y(t)$ يتطابق في الزمن مع $X(t)$.

2. أنواع المزامنات :

1.2. المزامنة التامة

نعرف خطأ المزامنة التامة بـ :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \ , \qquad (3.2)$$

مشكلة المزامنة التامة هو إيجاد وسيط تحكم U يحقق :

$$\lim_{t\to+\infty} \|e(t)\| = \lim_{t\to+\infty} \|Y(t) - X(t)\| = 0 \ . \qquad (4.2)$$

ملاحظة *1*

- إذا كان : $F = G$ نقول أن عملية المزامنة تامة متطابقة
- إذا كان $F \neq G$ نقول أن عملية المزامنة تامة غير متطابقة

2.2. ضد المزامنة

ضد المزامنة : هي المزامنة التامة بين النظام التابع وعكس النظام القائد ، أي هي المزامنة بين $Y(t)$ و $-X(t)$

في هذه الحالة خطأ ضد المزامنة يكون :

$$e(t) = Y(t) + X(t)\ , \qquad (5.2)$$

ونقول أنه لدينا ضد مزامنة للثنائي قائد-تابع (1.2) و (2.2) إذا كان :

$$\lim_{t\to+\infty} \|e(t)\| = \lim_{t\to+\infty} \|Y(t) + X(t)\| = 0\ . \qquad (6.2)$$

3.2. المزامنة المزاحة

1.3.1. المزامنة المزاحة المتأخرة

نقول أنه لدينا مزامنة مزاحة متأخرة إذا وجد عدد موجب تماما τ يحقق :

$$\lim_{t\to+\infty} \|Y(t) - X(t-\tau)\| = 0\ . \qquad (7.2)$$

2.3.2. المزامنة المزاحة المتقدمة

نقول أنه لدينا مزامنة مزاحة متأخرة إذا وجد عدد موجب تماما τ يحقق :

$$\lim_{t\to+\infty} \|Y(t) - X(t+\tau)\| = 0\ . \qquad (8.2)$$

4.2. المزامنة الإسقاطية

نقول أنه لدينا تزامن إسقاطي إذا كانت كل مركبة $y_i(t)$ للنظام التابع $Y(t)$ تتزامن بثابت ضربي مع المركبة $x_i(t)$ للنظام القائد $X(t)$ ، أي :

$$\forall i = \overline{1;n}\,; \exists \alpha_i \neq 0\,; \lim_{t\to+\infty} |y_i(t) - \alpha_i x_i(t)| = 0\,. \qquad (9.2)$$

<u>ملاحظة 2</u>

- في حالة : $\forall i = \overline{1;n}\,; \alpha_i = 1$ تصبح المزامنة تامة .
- في حالة : $\forall i = \overline{1;n}\,; \alpha_i = -1$ تصبح المزامنة عكسية .

5.2. المزامنة FSHP :

Full state hybrid projective synchronization

نقول أنه لدينا مزامنة **FSHP** إذا كانت كل مركبة $y_i(t)$ للنظام التابع $Y(t)$ تتزامن مع مزج خطي لمركبات النظام القائد $X(t)$ ، أي :

$$\forall i = \overline{1;n}\ ; \exists \beta_{i,j} \in \mathbb{R}\ ; \lim_{t\to+\infty} \left| y_i(t) - \sum_{j=1}^{n} \beta_{i,j} x_j(t) \right| = 0\ , \qquad (10.2)$$

ملاحظة 3

المزامنة **FSHP** هي تعميم للمزامنة الإسقاطية .

6.2. المزامنة المعممة

المزامنة المعمم هي تعميم للمزامنات السابقة في حالة اختلاف بعدي النظام القائد والنظام التابع .

لذلك نعتبر النظامين قائد-تابع التالي :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F\big(X(t)\big)\ , \\ \dot{Y}(t) = G\big(Y(t)\big) + U\ , \end{cases} \qquad (11.2)$$

حيث : $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ، $Y(t) \in \mathbb{R}^m$ هي متغيرات الحالة للنظام القائد والنظام التابع على الترتيب ، $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ، $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ، $U = (u_i)_{1\le i\le m}$ وسيط تحكم .

- إذا وجد وسيط تحكم U و دالة : $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ حيث :

$$\lim_{t\to+\infty} \left\| Y(t) - \Phi\big(X(t)\big) \right\| = 0\ , \qquad (12.2)$$

نقول أن النظامين قائد-تابع يتزامنان بالمعنى العام بالنسبة للدالة Φ .

7.2. المزامنة Q-S :

نقول أنه لدينا مزامنة **Q-S** للنظام قائد-تابع (11.2) في البعد d إذا وفقط إذا :

وجد وسيط تحكم U ودالتان : $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ و $S : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^d$ بحيث :

$$\lim_{t \to +\infty} \left\| S\big(Y(t)\big) - Q\big(X(t)\big) \right\| = 0 , \qquad (13.2)$$

<u>ملاحظة *4*</u>

مزامنة **Q-S** هي تعميم للمزامنة المعممة .

3. طرق المزامنة

1.3. طريقة المتحكم النشط

ليكن الثنائي قائد-تابع :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F\big(X(t)\big) , \\ \dot{Y}(t) = G\big(Y(t)\big) + U \ , \end{cases} \qquad (14.2)$$

خطأ المزامنة هو :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \ , \qquad (15.2)$$

الخطأ يعطى بالنظام الديناميكي التالي :

$$\dot{e}(t) = G\big(Y(t)\big) - F\big(X(t)\big) + U \ , \qquad (16.2)$$

إذا استطعنا كتابة $G\big(Y(t)\big) - F\big(X(t)\big)$ من الشكل :

$$G\big(Y(t)\big) - F\big(X(t)\big) = Ae(t) + N\big(X(t), Y(t)\big) \ , \qquad (17.2)$$

فإنه يكون عندئذ :

$$\dot{e} = Ae + N(X, Y) + U \ , \qquad (18.2)$$

حيث : A مصفوفة ثابتة ، N دالة غير خطية .

- وسيط التحكم U نضعه كالتالي :

$$U = V - N(X,Y)\ , \tag{19.2}$$

حيث : V هو المتحكم النشط المعرف بـ :

$$V = -Le\ , \tag{20.2}$$

و L مصفوفة تحكم .

بتعويض (19.2) في (18.2) نجد النظام الديناميكي التالي :

$$\dot{e} = (A - L)e\ , \tag{21.2}$$

وهو نظام ديناميكي خطي .

إذن : حولنا مشكلة المزامنة إلى مشكلة إستقرار نظام ديناميكي ، لدينا عندئذ النظرية التالية :

1.1.3. نظرية

الثنائي قائد-تابع (14.2) متزامنان كليا تحت قانون التحكم المعرف بـ :

$$U = V - N(X,Y)\ ,$$

إذا وفقط إذا وجدت مصفوفة L بحيث يكون الجزء الحقيقي للقيم الذاتية للمصفوفة $A - L$ كلها سالبة .

2.3. طريقة Backstepping

نعتبر أن الثنائي قائد-تابع معرفان بـ :

$$\begin{cases} \dot{x_1} = f_1(x_1, x_2)\ , \\ \dot{x_2} = f_2(x_1, x_2, x_3)\ , \\ \qquad \vdots \\ \dot{x_n} = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\ , \end{cases} \tag{22.2}$$

و

$$\begin{cases} \dot{y_1} = f_1(y_1, y_2) \ , \\ \dot{y_2} = f_2(y_1, y_2, y_3) \ \ , \\ \qquad \vdots \\ \dot{y_n} = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) + u \ \ , \end{cases} \tag{23.2}$$

حيث : f_1 دالة خطية ، $f_i \quad (i = 2,3, \dots, n)$ دوال غير خطية ، u وسيط تحكم مجهول .

خطأ المزامنة يعرف بالنظام الديناميكي :

$$\begin{cases} \dot{e_1} = y_1 - x_1 \ , \\ \dot{e_2} = y_2 - x_2 \ , \\ \qquad \vdots \\ \dot{e_n} = y_n - x_n \ , \end{cases} \tag{24.2}$$

أي :

$$\begin{cases} \dot{e_1} = g_1(e_1, e_2) \ , \\ \dot{e_2} = g_2(e_1, e_2, e_3) \ , \\ \qquad \vdots \\ \dot{e_n} = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u \ , \end{cases} \tag{25.2}$$

حيث : g_1 دالة خطية .

- **الهدف هو** : إيجاد تحكم u بحيث e_i تتقارب نحو الصفر ، من أجل ذلك نقسم النظام الديناميكي إلى أنظمة جزئية :

$$e_1; (e_1, e_2); (e_1, e_2, e_3); \dots ; (e_1, e_2, \dots , e_n) \ , \tag{26.2}$$

ومن أجل كل نظام جزئي نعرف دالة ليابونوف :

$$V_j\left(e_j, u_j, \alpha_j\right)$$

حيث j هي رتبة النظام ، u_j قانون التحكم ، α_j التحكم الواقعي للنظام الجزئي الذي رتبته j .

نختار u_j و α_j بحيث يكون :

$$\dot{V_j} < 0 \ . \tag{27.2}$$

3.3. طريقة الوضع المنزلق :

ليكن الثنائي قائد-تابع :

$$\dot{X}(t) = AX(t) + f\big(X(t)\big)\ , \qquad (28.2)$$

و

$$\dot{Y}(t) = AY(t) + f\big(Y(t)\big) + U\ , \qquad (29.2)$$

حيث : A مصفوفة ثابتة ، f دالة غير خطية .

الخطأ يعرف بالنظام الديناميكي :

$$\dot{e} = Ae + \eta(X,Y) + U\ , \qquad (30.2)$$

حيث :

$$\eta(X,Y) = f(Y) - f(X)\ , \qquad (31.2)$$

بالأعتماد على مبدأ طريقة المتحكم النشط ، نختار دالة تحكم U كما يلي :

$$U = Bv - \eta(X,Y) \qquad (32.2)$$

حيث : v هو وسيط المتحكم النشط ، B شعاع ثابت يطلب تعيينه بحيث يكون الثنائية (A,B) قابلة للتحكم .

نجد عندئذ :

$$\dot{e} = Ae + Bv\,. \qquad (33.2)$$

إذن : مشكلة المزامنة تم تحويلها إلى مشكلة إستقرار الحل $e = 0$ للنظام (33.2) باختيار متحكم مناسب .

- نعرف سطح الانزلاق s بـ :

$$s(e) = Ce = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i\ , \qquad (34.2)$$

حيث : C شعاع ثابت مطلوب إيجاده .

النظام يجب أن يحقق :

$$\dot{s}(e) = 0 \quad \text{و} \quad s(e) = 0 \;. \tag{35.2}$$

لدينا :

$$\dot{s}(e) = C(Ae + Bv)\,, \tag{36.2}$$

ومنه نجد :

$$v = -(CB)^{-1}CAe\,, \tag{37.2}$$

نختار C بحيث يكون : $CB \neq 0$ و $(CB)^{-1}$ موجودة .

إذن بالتعويض في النظام الديناميكي (33.2) نجد :

$$\dot{e} = [I - B(CB)^{-1}C]Ae\,, \tag{38.2}$$

من أجل ضمان تقارب e نحو الصفر ، يجب اختيار C بحيث يكون الجزء الحقيقي للقيم الذاتية للمصفوفة $[I - B(CB)^{-1}C]A$ سالب تماما .

- في بعض المراجع التحكم بالوضع المنزلق يعطى بـ :

$$\dot{s} = -q \times sgn(s) - ks\;, \tag{39.2}$$

حيث : $sgn(.)$ هي دالة الإشارة ، k و q ثوابت موجبة .

إذن نجد :

$$v = -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + q \times sgn(s)] \tag{40.2}$$

لدينا النظرية التالية :

1.3.3. نظرية

الثنائي قائد-تابع (28.2) و (29.2) متزامنان كليا تحت تحت قانون التحكم :

$$U = Bv - \eta(X, Y) \, ,$$

حيث : v معرف بالعلاقة (40.2) ، (A, B) قابلة للتحكم ، ، k و q ثوابت موجبة .

الفصل 3 مزامنة أنظمة معادلات تفاضلية جزئية من الصنف تفاعل-انتشار

1. وصف المسألة

ليكن الثنائي : قائد-تابع التالي :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{1j}\Delta u_j + \sum_{j=1}^{2} a_{1j}u_j + f_1(u_1,u_2)\,, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{2j}\Delta u_j + \sum_{j=1}^{2} a_{2j}u_j + f_2(u_1,u_2)\ , \end{cases} \tag{1.3}$$

و

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{1j}\Delta v_j + \sum_{j=1}^{2} a_{1j}v_j + f_1(v_1,v_2) + U_1\,, \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{2j}\Delta v_j + \sum_{j=1}^{2} a_{2j}v_j + f_2(v_1,v_2) + U_2\,, \end{cases} \tag{2.3}$$

حيث : $\left(u_1(t,x),u_2(t,x)\right)^T$; $\left(v_1(t,x),v_2(t,x)\right)^T$ هي متغيرات الحالة للنظام القائد والنظام التابع على الترتيب ، $x \in \Omega$ حيث Ω منطقة محدودة من $\mathbb{R}^n$ حافتها $\partial\Omega$ منتظمة ، $\left(d_{ij}\right) \in \mathbb{R}^2$ ثوابت الإنتشار ، $A = \left(a_{ij}\right)_{2\times 2}$مصفوفة ثابتة ، f_1 و f_2 دوال غير خطية مستمرة ، U_1 و U_1 دوال التحكم المراد إيجادها .

ونضع شروط حدية متجانسة لنيومان :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = \frac{\partial v_2}{\partial \eta} = 0 \ ; \ \forall x \in \partial\Omega \tag{3.3}$$

حيث η ناظم الوحدة الخارجي لـ $\partial\Omega$.

- الغاية من المزامنة هو جعل خطأ المزامنة المعرف بـ :

$$e_i = v_i - u_i \ ; i = 1,2 \tag{4.3}$$

يؤول نحو الصفر .

نفرض أن :

$$d_{11}; d_{22} \geq 0 \ \text{و}\ d_{12} = -d_{21} \tag{5.3}$$

- النظام الديناميكي للأخطاء يحقق :

$$\frac{\partial e_1}{\partial \eta} = \frac{\partial e_2}{\partial \eta} = 0;\ \forall x \in \partial\Omega \qquad (6.3)$$

من أجل تحقيق المزامنة التامة للثنائي قائد-تابع (1.3) و (2.3) سندرس استقرار النظام الديناميكي للأخطاء .

2. المزامنة بدوال تحكم غير خطية :

باشتقاق طرفي المعادلة (4.3) بالنسبة للزمن t نجد :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e_1}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{1j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2} a_{1j}e_j + f_1(v_1,v_2) - f_1(u_1,u_2) + U_1 , \\ \dfrac{\partial e_2}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{2j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2} a_{2j}e_j + f_2(v_1,v_2) - f_2(u_1,u_2) + U_2 , \end{cases} \qquad (7.3)$$

إذن :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e_1}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{1j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2} (a_{1j} - c_{1j})e_j + R_1 + U_1 , \\ \dfrac{\partial e_2}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{2j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2} (a_{2j} - c_{2j})e_j + R_2 + U_2 , \end{cases} \qquad (8.3)$$

حيث :

$$\begin{cases} R_1 = f_1(v_1,v_2) - f_1(u_1,u_2) + \sum_{j=1}^{2} c_{1j}e_j , \\ R_1 = f_2(v_1,v_2) - f_2(u_1,u_2) + \sum_{j=1}^{2} c_{2j}e_j , \end{cases} \qquad (9.3)$$

و $C = (c_{ij})_{2\times 2}$ مصفوفة يطلب تعيينها لاحقا .

- لدينا النظرية التالية :

نظرية 1.3.

إذا كانت C مصفوفة حيث المصفوفة $A-C$ معرفة سالبة ، فإنه لدينا مزامنة تامة للثنائي قائد-تابع المعرف بـ (1.3) و (1.3) التحكم التالي :

$$\begin{cases} U_1 = -R_1 \ , \\ U_2 = -R_2 \ . \end{cases} \qquad (10.3)$$

الإثبات :

بتعويض قيمة U_1 و U_2 في المعادلة (8.3) نجد :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial e_1}{\partial t}(t,x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} d_{1j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}(a_{1j}-c_{1j})e_j \ , \\ \dfrac{\partial e_2}{\partial t}(t,x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{2} d_{2j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}(a_{2j}-c_{2j})e_j \ , \end{cases} \qquad (11.3)$$

نعرف دالة ليابينوف :

$$V = \frac{1}{2}\int_{\Omega} e^T e \ , \qquad (12.3)$$

باشتقاق الدالة V بالنسبة للزمن نجد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= \int_{\Omega} \left(e_1 \frac{\partial e_1}{\partial t} + e_2 \frac{\partial e_2}{\partial t}\right) \\ &= \int_{\Omega} \left[e_1\left(\sum_{j=1}^{2} d_{1j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}(a_{1j}-c_{1j})e_j\right) + e_2\left(\sum_{j=1}^{2} d_{2j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}(a_{2j}-c_{2j})e_j\right)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{jj}e_j(\Delta e_j) + \int_{\Omega} d_{12}e_1\Delta e_2 + \int_{\Omega} d_{21}e_2\Delta e_1 + \int_{\Omega} e^T(A-C)e \end{aligned}$$

باستعمال صيغة غرين نجد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{jj}(\nabla e_j)^2 + \int_{\partial\Omega}\left(d_{12}e_1\frac{\partial e_2}{\partial \eta} + d_{21}e_2\frac{\partial e_1}{\partial \eta}\right)d\sigma - \int_{\Omega}(d_{21}+d_{12})\nabla e_1 \nabla e_2 \\ + \int_{\Omega} e^T(A-C)e \end{aligned}$$

وباستعمال الفرض (5.3) و الخاصية (6.3) نجد :

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{jj}(\nabla e_j)^2 + \int_{\Omega} e^T(A-C)e < 0 \ ,$$

إذن حسب نظرية ليابينوف للإستقرار فإن نقطة التوازن $e = 0$ للنظام (11.3) مستقرة كليا عند الصفر .

إذن :

$$\lim_{t\to+\infty} e_1 = \lim_{t\to+\infty} e_2 = 0\,, \qquad (13.3)$$

من أجل أي شرط ابتدائي للنظامين (1.3) و (2.3) ، ومنه ينتج أن النظامين متزامنين كليا .

3. المزامنة بدوال تحكم خطية :

في هذا الجزء نفرض أن :

$$\begin{aligned} |f_1(v_1,v_2) - f_1(u_1,u_2)| &\le \alpha_1|v_1-u_1| + \alpha_2|v_2-u_2| \\ |f_2(v_1,v_2) - f_2(u_1,u_2)| &\le \beta_1|v_1-u_1| + \beta_2|v_2-u_2| \end{aligned} \qquad (14.3)$$

حيث : α_1 ، α_2 ، β_1 و β_2 ثوابت موجبة .

لدينا النظرية التالية :

نظرية 2.3.

لتكن $L = (l_{ij})_{2\times 2}$ بحيث تكون : $A - L$ معرفة سالبة .

لدينا مزامنة تامة للثنائي قائد-تابع (1.3) و (2.3) تحت قانون التحكم :

$$\begin{cases} U_1 = -\sum_{j=1}^{2} l_{1j}e_j - \left(\alpha_1 + \frac{(\beta_1+\alpha_2)^2}{4}\right)e_1 \ , \\ U_2 = -\sum_{j=1}^{2} l_{2j}e_j - (\beta_1+1)e_2 \ . \end{cases} \qquad (15.3)$$

الإثبات:

نعوض (19.3) في (7.3) نجد :

$$\begin{cases}\frac{\partial e_1}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{1j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}\left(a_{1j} - l_{1j}\right)e_j + f_1(v_1,v_2) - f_1(u_1,u_2) - \left(\alpha_1 + \frac{(\beta_1+\alpha_2)^2}{4}\right)e_1 \\ \frac{\partial e_2}{\partial t}(t,x) = \sum_{j=1}^{2} d_{2j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}\left(a_{2j} - l_{2j}\right)e_j + f_2(v_1,v_2) - f_2(u_1,u_2) - (\beta_1+1)e_2\end{cases} \tag{16.3}$$

ولتكن دالة ليابينوف :

$$V = \frac{1}{2}\int_{\Omega} e^T e \tag{17.3}$$

باشتقاق الدالة V بالنسبة للزمن نجد :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= \int_{\Omega}\left(e_1\frac{\partial e_1}{\partial t} + e_2\frac{\partial e_2}{\partial t}\right) \\
&= \int_{\Omega}\Bigg[e_1\left(\sum_{j=1}^{2} d_{1j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}\left(a_{1j}-l_{1j}\right)e_j + f_1(v_1,v_2) - f_1(u_1,u_2) - \left(\alpha_1 + \frac{(\beta_1+\alpha_2)^2}{4}\right)e_1\right) \\
&\qquad + e_2\left(\sum_{j=1}^{2} d_{2j}\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}\left(a_{2j}-l_{2j}\right)e_j + f_2(v_1,v_2) - f_2(u_1,u_2) - (\beta_1+1)e_2\right)\Bigg] \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{1j}e_1\Delta e_j + \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{2j}e_2\Delta e_j + \int_{\Omega}\left(e_1\sum_{j=1}^{2}\left(a_{1j}-l_{1j}\right)e_j + e_2\sum_{j=1}^{2}\left(a_{2j}-l_{2j}\right)e_j\right) \\
&\qquad + \int_{\Omega} e_1\left(f_1(v_1,v_2) - f_1(u_1,u_2)\right) + \int_{\Omega} e_2\left(f_2(v_1,v_2) - f_2(u_1,u_2)\right) \\
&\qquad - \int_{\Omega}\left(\alpha_1 + \frac{(\beta_1+\alpha_2)^2}{4}\right)e_1^2 - \int_{\Omega}(\beta_1+1)e_2^2 \\
&= \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{jj}e_j\Delta e_j + \int_{\Omega}\left(d_{12}e_1\Delta e_2 + d_{21}e_2\Delta e_1\right) + \int_{\Omega}\left(e_1\sum_{j=1}^{2}\left(a_{1j}-l_{1j}\right)e_j + e_2\sum_{j=1}^{2}\left(a_{2j}-l_{2j}\right)e_j\right) \\
&\qquad + \int_{\Omega} e_1\left(f_1(v_1,v_2) - f_1(u_1,u_2)\right) + \int_{\Omega} e_2\left(f_2(v_1,v_2) - f_2(u_1,u_2)\right) \\
&\qquad - \int_{\Omega}\left(\alpha_1 + \frac{(\beta_1+\alpha_2)^2}{4}\right)e_1^2 - \int_{\Omega}(\beta_1+1)e_2^2 \\
&\le \sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{jj}e_j\Delta e_j + \int_{\Omega}\left(d_{12}e_1\Delta e_2 + d_{21}e_2\Delta e_1\right) + \int_{\Omega}\left(e_1\sum_{j=1}^{2}\left(a_{1j}-l_{1j}\right)e_j + e_2\sum_{j=1}^{2}\left(a_{2j}-l_{2j}\right)e_j\right) \\
&\qquad + \int_{\Omega} |e_1||f_1(v_1,v_2) - f_1(u_1,u_2)| + \int_{\Omega} |e_2||f_2(v_1,v_2) - f_2(u_1,u_2)| \\
&\qquad - \int_{\Omega}\left(\alpha_1 + \frac{(\beta_1+\alpha_2)^2}{4}\right)e_1^2 - \int_{\Omega}(\beta_1+1)e_2^2
\end{aligned}$$

باستعمال صيغة غرين والشرط (14.3) نجد :

$$\frac{\partial V}{\partial t} \leq -\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{jj}(\nabla e_j)^2 + \int_{\Omega} e^T(A-L)e + \int_{\Omega} |e_1|(\alpha_1|e_1|+\alpha_2|e_2|) + \int_{\Omega} |e_2|(\beta_1|e_1|+\beta_2|e_2|)$$
$$-\int_{\Omega}\left(\alpha_1+\frac{(\beta_1+\alpha_2)^2}{4}\right)e_1^2 - \int_{\Omega}(\beta_1+1)e_2^2$$
$$\leq -\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{jj}(\nabla e_j)^2 + \int_{\Omega} e^T(A-L)e + \int_{\Omega}\left[\frac{(\beta_1+\alpha_2)^2}{4}e_1^2 + e_2^2 - (\beta_1+\alpha_2)|e_2e_1|\right]$$
$$\leq -\sum_{j=1}^{2}\int_{\Omega} d_{jj}(\nabla e_j)^2 + \int_{\Omega} e^T(A-L)e - \int_{\Omega}\left(\frac{\beta_1+\alpha_2}{2}|e_1|-|e_2|\right)^2$$

بما أن : $A-L$ معرفة سالبة ينتج :

$$\frac{\partial V}{\partial t} < 0$$

منه : حسب نظرية ليابينوف للإستقرار فإن نقطة التوازن $e=0$ للنظام مستقر تقاربيا كليا .

أي :

$$\lim_{t\to+\infty} e_1 = \lim_{t\to+\infty} e_2 = 0 \qquad (18.3)$$

ومنه ينتج أن النظامين متزامنين كليا .

4. تطبيق عددي ومحاكاة :

في هذا الجزء سنعرض محاكاة عددية للنتائج المتحصل عليها في الدراسة السابقة ، من أجل نموذج lengyel-epstein كحالة خاصة من أنظمة تفاعل-انتشار .

تعبر الثنائي قائد-تابع التالي :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 5\gamma - u_1 - \dfrac{4u_1u_2}{1+{u_1}^2} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t}(t,x) = \delta\left(d\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_1 - \dfrac{u_1u_2}{1+{u_1}^2}\right) \end{cases} \qquad (19.3)$$

و

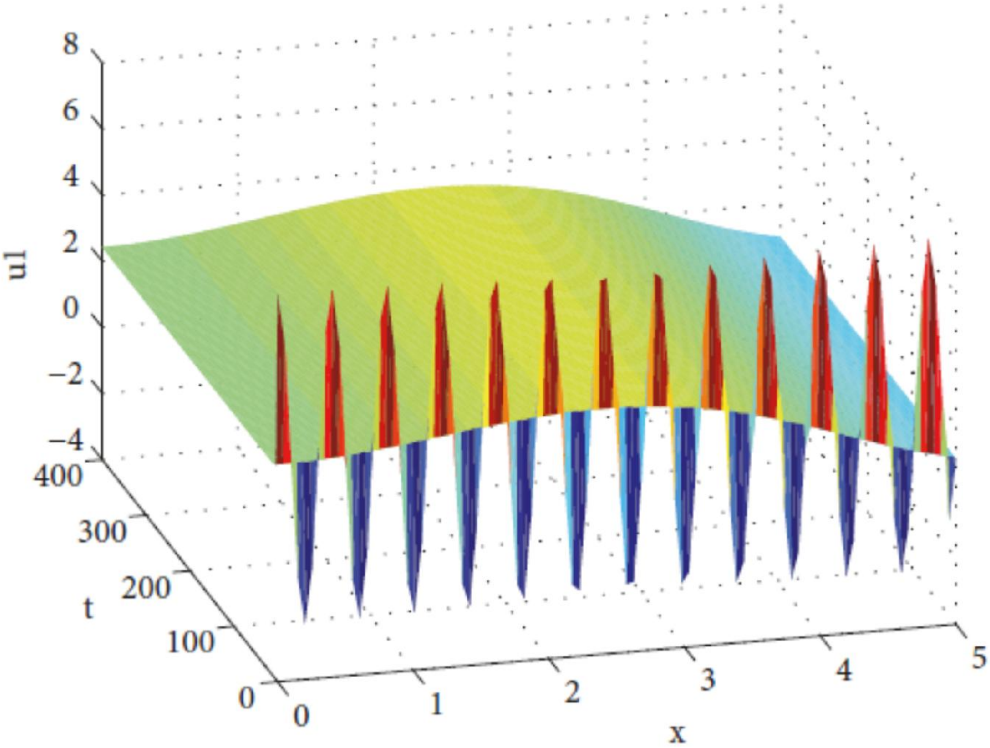
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t}(t,x) = \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + 5\gamma - v_1 - \dfrac{4v_1 v_2}{1+{v_1}^2} + U_1 \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t}(t,x) = \delta\left(d\dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + v_1 - \dfrac{v_1 v_2}{1+{v_1}^2}\right) + U_2 \end{cases} \quad (20.3)$$

حيث: $x \in (0,\theta)$ ، $(\delta;\gamma;\theta;d) = (9.7607; 2.7034; 13.03; 1.75)$ ، $(U_1,U_2)^T$ دوال التحكم المراد إيجادها .

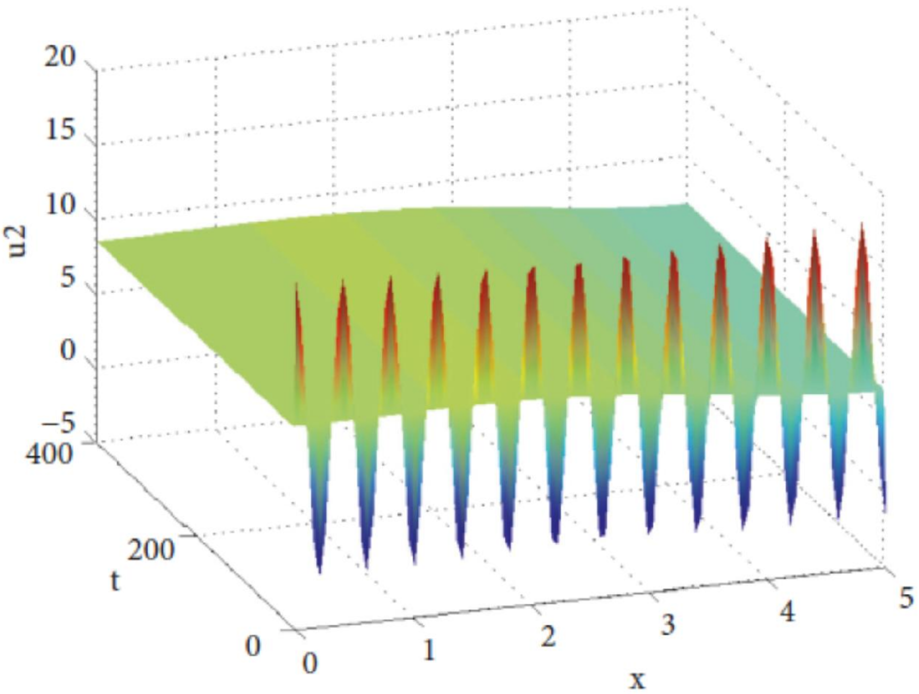
وليكن الشرط الإبتدائي للنظام القائد :

$$\left(u_1(0,x), u_2(0,x)\right) = (\theta + 0.2\cos(5\pi x), 1 + \theta^2 + 0.6\cos(5\pi x)) \quad (21.3)$$

عندئذ الحل u_1 و u_2 ممثل في الشكلين 1 و 2 .



الشكل **1** : التمثيل البياني للحل u_1 .

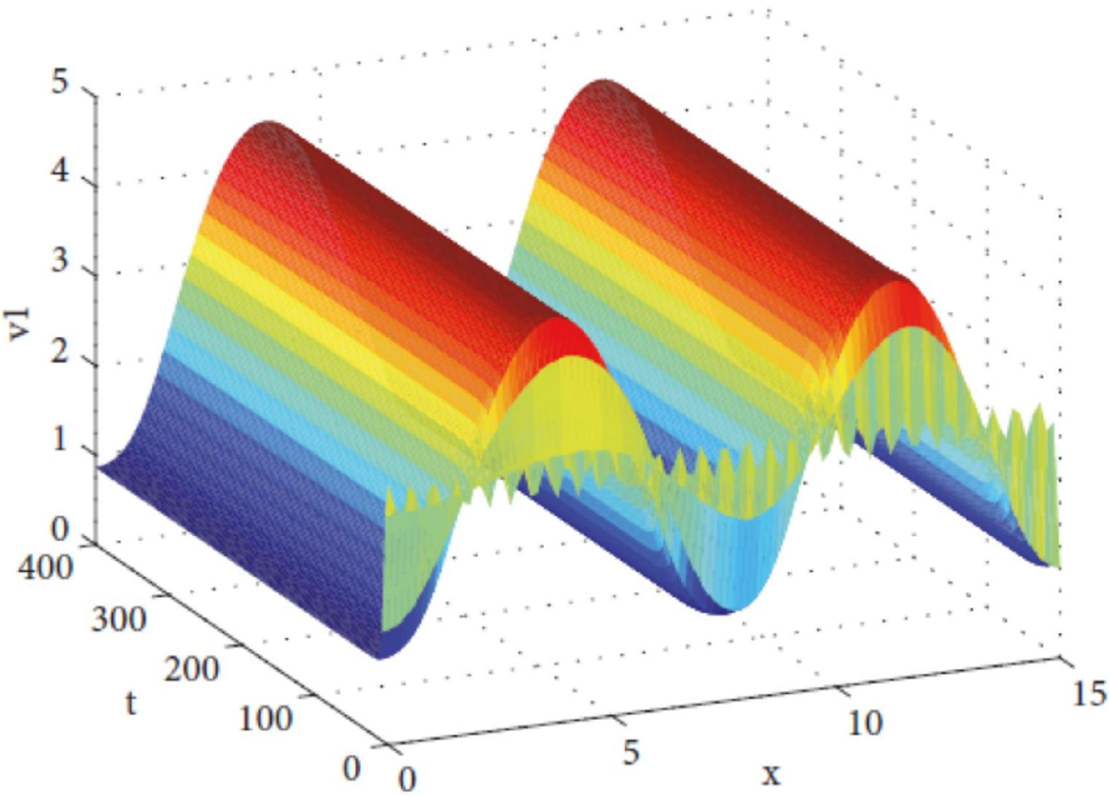


الشكل **2** : التمثيل البياني للحل u_2 .

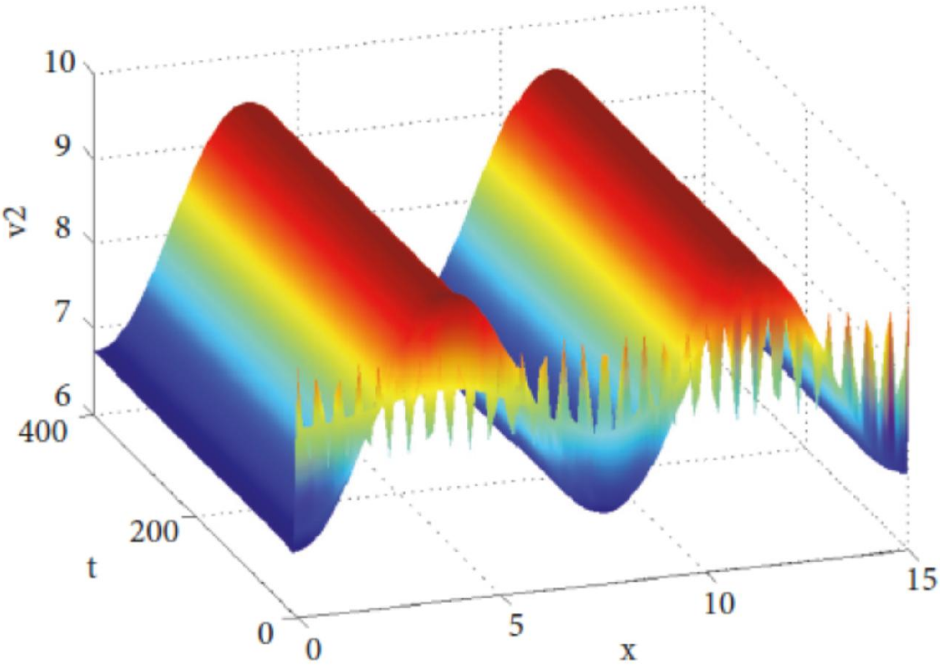
- من أجل $U_1 = U_2 = 0$ والشرط الإبتدائي :

$$\big(v_1(0,x), v_2(0,x)\big) = (\theta + 0.2\cos(4\pi x)\,, 1 + \theta^2 + 0.6\cos(4\pi x)) \tag{22.3}$$

الحل ممثل في الشكلين 3 و 4 .



الشكل **3**: التمثيل البياني للحل $\boldsymbol{v_1}$.



الشكل **4** : التمثيل البياني للحل v_2 .

بمقارنة النظامين (19.3) و (20.3) مع النظامين (1.3) و (2.3) نجد أن :

$$(d_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta d \end{pmatrix}$$

$$A = (a_{ij})_{2\times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ \delta & 0 \end{pmatrix}$$

ولدينا أيضا الشروط الحدية متجانسة لنيومان :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \eta} = \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = \frac{\partial v_1}{\partial \eta} = \frac{\partial v_2}{\partial \eta} = 0 \;\; ; \; x = 0; \theta \;\; et \; t > 0 \qquad (24.3)$$

1.4. الحالة الأولى : دوال تحكم غير خطية

بالرجوع إلى الدوال المقترحة في الجزء السابق ، وبأخذ المصفوفة : $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \delta & 2 \end{pmatrix}$

نجد : $A - C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

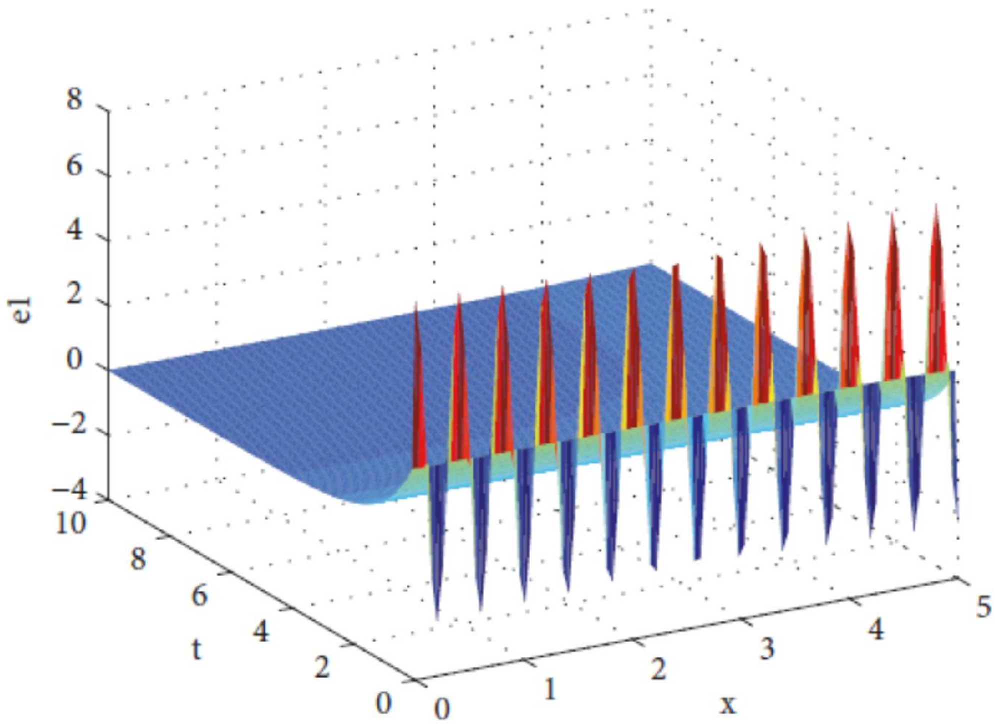
إذن : $A - C$ مصفوفة معرفة سالبة .

نجد عندئذ :

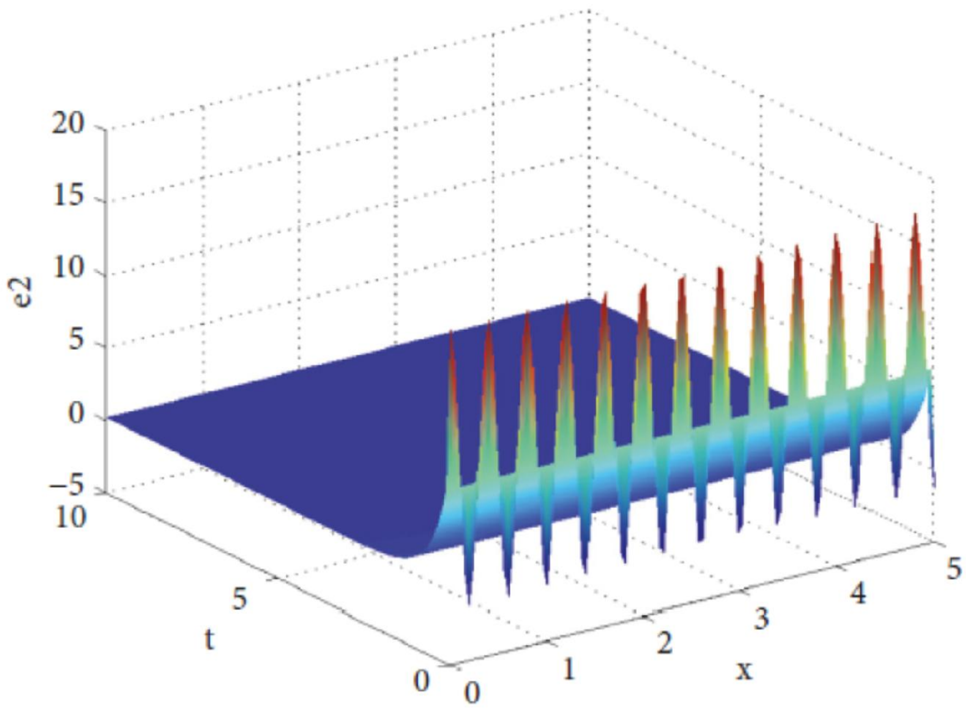
$$\begin{cases} U_1 = \dfrac{4v_1v_2}{1+{v_1}^2} - \dfrac{4u_1u_2}{1+{u_1}^2} \\ U_2 = -\delta(v_1-u_1) - 2(v_2-u_2) + \dfrac{\delta v_1 v_2}{1+{v_1}^2} - \dfrac{\delta u_1 u_2}{1+{u_1}^2} \end{cases} \tag{25.3}$$

إذن حسب **النظرية *1.3.*** فإن النظامين متزامنين كليا .

- التطور الزمني للخطأ e_1 و e_2 موضحة في الشكلين 5 و 6 .



الشكل **5**: التطور الزمني لخطأ المزامنة غير الخطية $\boldsymbol{e_1}$



الشكل **6**: التطور الزمني لخطأ المزامنة غير الخطية e_2 .

2.4. الحالة الثانية : دوال تحكم خطية :

لدينا :

$$|f_1(v_1,v_2)-f_1(u_1,u_2)| \le |v_1-u_1|+4|v_2-u_2|$$
$$(26.3)$$
$$|f_2(v_1,v_2)-f_2(u_1,u_2)| \le |v_1-u_1|+\delta|v_2-u_2|$$

باختيار المصفوفة L كما يلي : $L=\begin{pmatrix}0 & 0\\ \delta & 1\end{pmatrix}$

نجد أن : $A-L=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

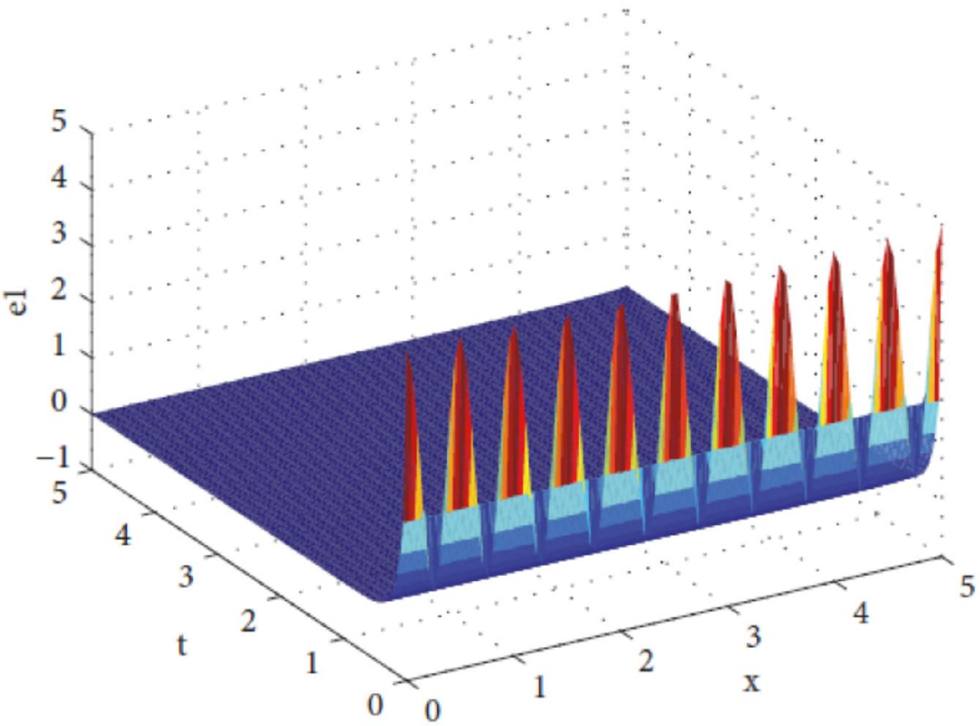
إذن : $A-L$ مصفوفة معرفة سالبة .

دوال التحكم U_1 و U_2 يمكن اختيارهم بالشكل :

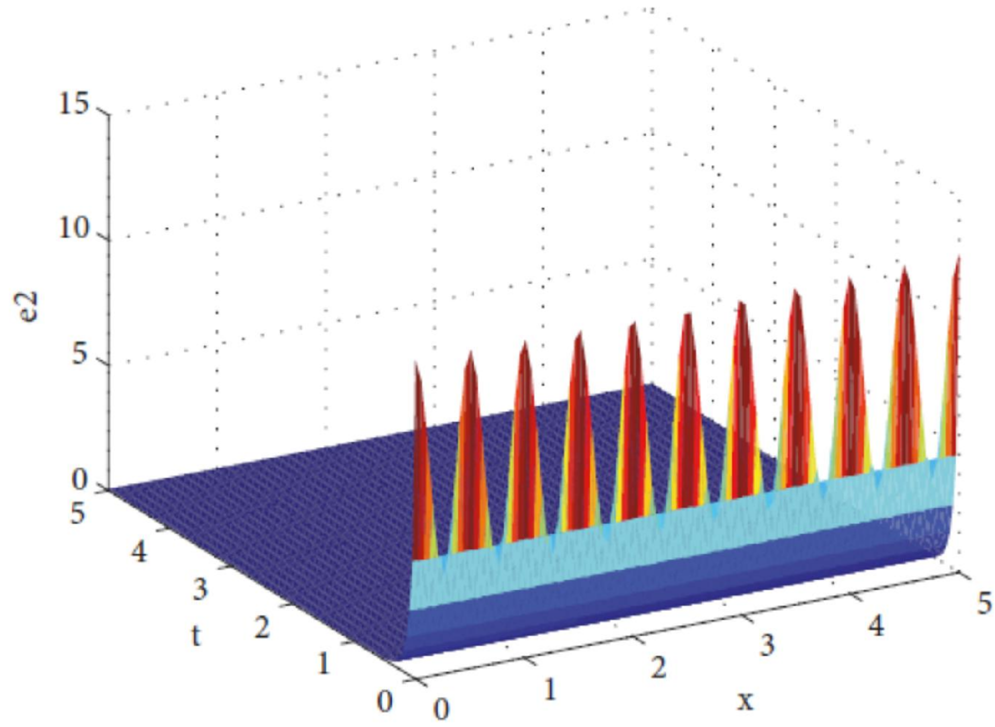
$$\begin{cases} U_1 = -\dfrac{29}{4}(v_1 - u_1) \\ U_2 = -\delta(v_1 - u_1) - (\delta + 2)(v_2 - u_2) \end{cases} \tag{27.3}$$

إذن حسب **حسب النظرية *2.3*.** فإن النظامين متزامنين كليا .

التطور الزمني للخطأ e_1 و e_2 ممثل في الشكلين 7 و 8 .



الشكل **7**: التطور الزمني لخطأ المزامنة الخطية $\boldsymbol{e_1}$.



الشكل **8** : التطور الزمني لخطأ المزامنة الخطية e_2 .

خاتمة عامة

في هذه المذكرة تمت دراسة تزامن بعض المعادلات التفاضلية الجزئية، مع اقتراح نموذج من المعادلات التفاضلية الجزئية من النوع تفاعل-انتشار في شكلها العام، مع إيجاد طريقة للتحكم في مزامنة هذا النوع من الأنظمة ، وتتضمن هذه الطريقة حالة متحكم خطي وآخر غير خطي .تعتمد نتائج المزامنة المعطاة في هذه المذكرة على نظرية ليابونوف للإستقرار .

بمقارنة المحاكاة العددية الموضحة في الأشكال 5 و 6 و 7 و 8 ، يمكننا أن نلاحظ بسهولة أن التحكم الخطي يدرك التزامن بشكل أسرع من حالة غير الخطي. أيضا ، يتطلب نظام التحكم غير الخطي إزالة العبارات غير الخطية من نظام التابع ، والتي قد تزيد من تكلفة دوال التحكم. لذلك ، فإن التكلفة في حالة المتحكم غير خطي هي أكثر من التكلفةفي الحالة الخطية.

تؤكد النتائج أن مشكلة المزامنة التامة لأنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية يمكن أن يتحقق باستخدام دوال تحكم خطية وغير خطية. أيضا ، يمكننا أن نرى بسهولة أن نتائج الدراسة التي تم الحصول عليها في هذا العمل يمكن أن تمتد إلى أنواع أخرى كثيرة من أنظمة المعادلات التفاضلية الجزئية من الصنف انتشار-تفاعل .

قائمة المراجع

[1] L. M . Pecora and T.L Carroll , "Synchronization in chaotic systems," Physical Review Letters,vol.64,no.8,pp.821–824, 1990.

[2] H. Nakao, T. Yanagita, and Y. Kawamura, "Phase-reduction approach to synchronization of spatiotemporal rhythms in reaction-difusion systems," Physical Review X,vol.4,no.2, Article ID 021032, 2014.

[3] A. Ouannas and Z. Odibat, "Generalized synchronization of diferent dimensional chaotic dynamical systems in discrete time,"Nonlinear Dynamics,vol.81,no.1-2,pp.765–771,2015.

[4] Y. Kawamura, S. Shirasaka, T. Yanagita, and H. Nakao, "Optimizing mutual synchronization of rhythmic spatiotemporal patterns in reaction-difusion systems," Physical Review E: Statistical, Nonlinear, and SoMatter Physics,vol.96,no.1, Article ID 012224, 2017.

[5] M. PIERRE , " Reaction-Diusion systems with positivity and mass control: global existence and singular limits " Analytical and Numerical Aspects of Evolution Equations

March 28 - April 1, 2011, University Duisburg-Essen .

[6] A. Ouannas , " Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets " .

[7] A. Ouannas , M . Abdelli , Z. Odibat , Xiong Wang , Viet-Thanh Pham, Giuseppe Grassi , A. Alsaedi , " Synchronization Control in Reaction-Diffusion Systems:Application to Lengyel-Epstein System " , Hindawi Complexity Volume 2019, Article ID 2832781.

[8] H. Saoud , " É TUDE DES PROBLÈMES UNILATÉRAUX :ANALYSE DE RÉCESSION, STABILITÉ DE LYAPUNOV ET APPLICATIONS EN ÉLECTRONIQUE ET EN MÉCANIQUE " , Thèse pour obtenir le grade de DOCTEUR DE L' UNIVERSITÉ DE L IMOGES , 8 juin 2009 .

[9] H. Brezis , " Analyse fonctionnelle, théorie et applications ", MASSON; Paris,1983. .

الفهرس: