



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique  
**Université Larbi Tébessi -Tébessa-**  
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la  
Nature et de la Vie*  
Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....  
Série :.....

### Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

### Master

Option : *Physique de la Matière Condensée*

### Thème



## Calcul des propriétés thermodynamiques des oscillateurs relativistes unidimensionnelles par le biais de la fonction Zeta

Présenté par :

*Sahra Kamilia et Sabrina Abdelhai*

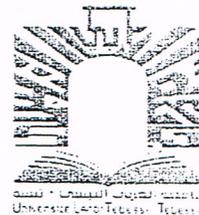
*Devant le jury*

Abdelmalek Boumali	<b>Rapporteur</b>	Université Larbi-Tébessi, Tébessa
Bouhelal Mouna	<b>Président</b>	Université Larbi-Tébessi, Tébessa
Tag Mouhamed Amine	<b>Examineur</b>	Université Larbi-Tébessi, Tébessa

Date de Soutenance : 24 /Mai/2017

Note : 18.00 .....

Mention : *Excellent* .....



**Déclaration sur l'honneur de non-plagiat**

(à joindre obligatoirement au mémoire, remplie et signée)



Je soussigné(e),

Nom, Prénom :

Abdelhaji Sabrine Sahra Kami lia

Régulièrement inscrit(e) en Master au département :

Science de la matière

N° de carte d'étudiant :

40 2787 / 12

40 19790 / 11

Année universitaire :

2016 / 2017

Domaine :

Science de la matière

Filière :

Physique

Spécialité :

Physique de la matière condensée

Intitulé du mémoire :

Calcul des propriétés thermodynamiques des oscillateurs relativistes unidimensionnelles par le biais de la fonction Zeta.

Atteste que mon mémoire est un travail original et que toutes les sources utilisées ont été indiquées dans leur totalité. Je certifie également que je n'ai ni recopié ni utilisé des idées ou des formulations tirées d'un ouvrage, article ou mémoire, en version imprimée ou électronique, sans mentionner précisément leur origine et que les citations intégrales sont signalées entre guillemets.

**Sanctions en cas de plagiat prouvé :**

L'étudiant sera convoqué devant le conseil de discipline, les sanctions prévues selon la gravité du plagiat sont :

- L'annulation du mémoire avec possibilité de le refaire sur un sujet différent ;
- L'exclusion d'une année du master ;
- L'exclusion définitive.

Fait à Tébessa, le :

31-05-2017

Signature de l'étudiant(e) :

Sabrina



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la  
Recherche Scientifique

**Université Larbi Tébessi -Tébessa-**  
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la  
Nature et de la Vie*

*Département : Sciences de la Matière*



N d'ordre :.....

Série :.....

### **Thèse**

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

**Master**

Option : *Physique de la Matière Condensée*

### **Thème**

# **Calcul des propriétés thermodynamiques des oscillateurs relativistes unidimensionnelles par le biais de la fonction Zeta**

Présenté par :

*Sahra Kamilia et Sabrina Abdelhai*

*Devant le jury*

Abdelmalek Boumali	<b>Rapporteur</b>	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Bouhela Mouna	<b>Président</b>	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Tag Mouhamed Amine	<b>Examineur</b>	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>

Date de Soutenance : 24 /Mai/2017

© *Mémoire effectué au*  
*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique*



**Calcul des propriétés thermodynamiques des oscillateurs  
relativistes unidimensionnelles par le biais de la fonction  
Zeta**

*Sahara Kamilia et Sabine Abdelhai*

## ملخص

في هذه المذكرة قمنا بدراسة الخواص الحرارية احادية البعد للهزازات النسبية لكلا النوع من الجسيمات البوزونية والفرميونية . هذه الخواص استنتجت انطلاقا من نموذجين : نموذج يعتمد على معادلة اولير ماكلورين والاخر على خصائص الدالة زيتا

## **Abstract**

In this thesis, we study the thermodynamic properties of one dimensional relativistic oscillator for both bosonic and fermionic particles. These properties are obtained via two approaches based on the Euler-Maclaurin formula and the method of the Zeta function.

## Résumé

Dans ce mémoire, nous avons étudié les propriétés thermodynamiques unidimensionnelle pour les deux types d'oscillateurs bosoniques et fermioniques. Ces propriétés sont obtenues via deux approches théoriques basant sur la formule d'Euler-Maclaurin et aussi sur la méthode de la fonction Zeta.

## *Dédicace*

*A ma mère et mon père ,  
A mes sœurs ,  
A mes frères ,  
A ma famille ,  
A tout mes amis ,  
A tout mes collègues ,  
Et à tout mes enseignants ,  
Et Spécialement à mon encadreur Professeur Boumali Abdelmalek ,*

*Je dédie cet humble travail.*

## *Remerciements*

*Je remercie en premier lieu ALLAH le tout puissant de nous avoir accordé la puissance et la volonté, la chance de poursuivre pour terminer ce travail.*

*Je tiens vivement à exprimer ma profonde reconnaissance à Monsieur Abdelmalek Boumali, Professeur à l'université de Tébessa, pour avoir dirigé ce sujet, pour son suivi permanent, ses conseils judicieux et l'aide constante qu'il m'a prodigué au cours de l'élaboration de ce travail.*

*je remercie vivement Mlle Mouna Bouhelal, Maître de Conférence A à l'Université de Tébessa, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire*

*J'exprime mes remerciements à Monsieur Tag Mouhamed Amine, Maître Assistant à l'Université de Tébessa, qui a accepté d'être examinateurs de cet mémoire.*

*J'adresse mes vifs remerciements à tout mes amis de partout et d'ailleurs pour leur présence et leur aide.*

# Table des matières

<b>ملخص</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Dédicace</b>	<b>iv</b>
<b>Remerciements</b>	<b>v</b>
<b>Liste des Tableaux</b>	<b>vii</b>
<b>Liste des Figures</b>	<b>viii</b>
<b>Liste des symboles</b>	<b>xi</b>
<b>Les Chapitres</b>	
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Les Chapitres</b>	
<b>1 Les équations relativistes : Rappel</b>	<b>2</b>
1.1 0L'équation de Klein-Gordon . . . . .	2

1.2	L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) . . . . .	4
1.2.1	L'équation libre de DKP . . . . .	4
1.2.2	Calcul du courant . . . . .	5
1.3	L'équation de Dirac . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Les solutions exactes des oscillateurs relativistes</b>	<b>10</b>
2.1	L'oscillateur de Klein-Gordon . . . . .	10
2.2	L'oscillateur de Kemmer (DKP) . . . . .	11
2.2.1	Cas du spin $S = 1$ . . . . .	11
2.2.2	Cas du spin $S = 0$ . . . . .	14
2.3	L'oscillateur de Dirac . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Les propriétés thermodynamiques des oscillateurs relativistes</b>	<b>18</b>
3.1	Les propriétés thermodynamiques des oscillateurs fermioniques et bosoniques . . . . .	18
3.1.1	L'approche d'Euler-Maclaurin . . . . .	18
3.1.2	L'approche de la fonction Zeta . . . . .	20
3.2	Résultats et Discussions . . . . .	21
	<b>Conclusion</b>	<b>28</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>29</b>
	<b>Les Annexes</b>	<b>33</b>
<b>A</b>	<b>L'oscillateur de Dirac (DO)</b>	<b>33</b>
1.1	Interprétation physique . . . . .	33

# Liste des tableaux

<b>Table</b>	<b>page</b>
<b>Table</b>	<b>page</b>

# Liste des Figures

<b>Figure</b>	<b>page</b>
<b>Figure</b>	<b>page</b>
3.1 $\frac{E}{mc^2}$ en fonction de nombre quantique $n$ . . . . .	23
3.2 Les propriétés thermodynamiques unidimensionnelle pour les oscillateurs bosoniques et fermioniques obtenues par l'application de la méthode de la fonction Zeta pour différentes valeurs de $r$ . . . . .	24
3.3 Les propriétés thermodynamiques unidimensionnelle pour les oscillateurs bosoniques et fermioniques obtenues par l'application de l'approche d'Euler-Maclaurin pour $r=0.98$ . . . . .	25
3.4 Comparaison entre les deux méthodes concernant les propriétés thermodynamiques des oscillateurs bosoniques et fermioniques pour $r=0.98$ . . . . .	26

# Nomenclature

$j^\mu$  Le quadricourant

$A^\nu$  Le quadripotentiel

$H_D$  L'Hamiltonien de Dirac

$\square$  Le dalembertien

$(DO)$  L'oscillateur de Dirac

$H_n(x)$  La Fonction de Hermite

$\beta$  Les matrices de Kemmer

$\vec{\alpha}$  Les matrices de Dirac

$\Delta$  Laplacien

$\psi_{KG}$  La fonction d'onde de Klein-Gordon

$\psi_D$  La fonction d'onde de Dirac

$\psi_{DKP}$  La fonction d'onde de Duffin-Kemmer-Petiau

$\eta^a_b$  La métrique de l'espace Minkowskien

$g_{\mu\nu}$  Le tenseur fondamental

$\vec{\gamma}$  Les matrices gamma de Dirac

$\zeta$  La fonction Zeta

$F$  Energie Libre

$C$  La chaleur spécifique

$S$  L'entropie

$U$  Energie Totale

$Z$  La fonction de partition

# Introduction

---

L'oscillateur de Dirac était pour la première fois étudié par Ito et al [1]. Ils ont estimé une équation de Dirac dans laquelle le moment  $\vec{p}$  est remplacé par  $\vec{p} - im\omega\gamma^0\vec{r}$ , dont  $\vec{r}$  étant le vecteur de position,  $m$  la masse de la particule, et  $\omega$  la fréquence de l'oscillateur. L'intérêt pour le problème a été revivé par Moshinsky et Szczepaniak [2], qui leur donna le nom de l'oscillateur de Dirac (DO) parce que, dans la limite non-relativiste, il devient un oscillateur harmonique avec un terme de couplage spin-orbite très fort. Physiquement, l'interaction du moment magnétique anormal avec un champ électrique linéaire.

L'oscillateur de Dirac a attiré beaucoup d'intérêt à la fois parce qu'il constitue l'un des exemples rares qui ont des solutions exactes, et aussi en raison de ses nombreuses applications en physique. En mécanique quantique relativiste, le (DO) a été étudié à partir de nombreux points de vue, y compris : (i) les études sur les propriétés de la covariance de l'équation de Dirac en présence de l'interaction de l'oscillateur de Dirac, (ii) la détermination du spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes, (iii) l'étude des propriétés algébriques du groupe de Lie, (iv) la supersymétrie, (v) enfin l'invariance conforme. La relation entre l'oscillateur de Dirac et l'optique quantique par le biais de son modèle bien connue par le nom du modèle Jaynes-Cumming est bien mise en évidence dans les deux cas de l'espace commutatif et noncommutatif [3–23]

Ainsi, notre contribution s'insère dans l'étude des propriétés thermodynamiques pour deux types d'oscillateurs : les oscillateurs fermioniques (équation de Dirac) pour le cas des particules de spin- $\frac{1}{2}$  et les oscillateurs bosoniques (équation de Klein-Gordon et de DKP). En premier lieu, nous résoudrons les deux types d'oscillateurs pour le cas d'une interaction de l'oscillateur de Dirac, ensuite nous calculons les propriétés thermiques en utilisant deux approches théoriques.

Ce mémoire comporte trois chapitres composés de la façon suivante : dans le premier, on fait un rappel sur quelques généralités sur les équations relativistes bien connues tels que l'équation de Klein-Gordon pour les particules scalaires et l'équation de DKP pour les particules vectorielles, et enfin l'équation de Dirac (particules spinorielles). Le deuxième chapitre est consacré aux solutions des oscillateurs de Klein-Gordon, Kemmer et de Dirac à une dimension. Le troisième chapitre donne les résultats concernant les propriétés thermiques des trois oscillateurs calculés par le biais de la fonction de partition  $Z$  et en utilisant deux approches : la formule d'Euler-Maclaurin et la fonction Zeta. Enfin, nous terminons notre mémoire par une conclusion.

## Les équations relativistes : Rappel

Dans ce chapitre on fait un petit rappel sur les équations relativistes de particules bosoniques et fermioniques, et précisément les trois équations fondamentales tels que l'équation de Klein-Gordon (spin-0), de Dirac (spin-1/2) et enfin l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (spin 0 et 1).

### 1.1 L'équation de Klein-Gordon

L'équation de Shrodinger pour une fonction d'onde  $\psi$  [24, 25]

$$H\psi = E\psi. \tag{1.1}$$

ou'  $H$  est l'Hamiltonian d'une particule relativiste. En mécanique quantique, on peut établir l'équation de Schrodinger en s'appuyant sur la règle de la correspondance suivante

$$E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.2}$$

$$P^i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{1.3}$$

Le principe de correspondance appliqué à l'expression de l'énergie d'une particule massive non relativiste

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\vec{x}), \tag{1.4}$$

Conduit à l'équation de Schrodinger pour la fonction d'onde  $\psi(\vec{x}, t)$  noté maintenant

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{x}) \right\} \psi(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t), \tag{1.5}$$

dont  $\nabla^2 = \Delta$  est le laplacien. Par la même façon, en appliquant le principe de correspondance à l'expression de l'énergie d'une particule relativiste libre, dont

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (1.6)$$

Ce qui conduit à l'équation de Klein-Gordon

$$\left( \frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \nabla^2 + m^2 c^2 \right) \psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (1.7)$$

Elle est donnée aussi par

$$(\square + \lambda^2) \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.8)$$

avec  $\square = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$  est le d'Alembertien, que l'on écrit aussi sous une forme covariante par  $\square = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu$ , avec  $g_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  est le tenseur fondamental de l'espace Minkowski [26] et  $\lambda = \frac{mc}{\hbar}$ .

A partir de maintenant, nous adoptons des unités telles que  $\hbar = c = 1$ , si bien que nous écrivons (3.8) sous la forme

$$(g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu + \lambda^2) \psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (1.9)$$

On peut écrire aisément une équation de Klein-Gordon couplé au champ électromagnétique si on admet le principe de couplage minimal, qui consiste à remplacer les dérivées  $\partial_\mu$  par une dérivé covariante (covariante vis à vis des transformations de jauge) [24, 27, 28].

$$\partial^\mu \longmapsto \partial^\mu - ieA^\mu, \quad (1.10)$$

dont

$$A^\mu = (\varphi, \vec{A}). \quad (1.11)$$

Ainsi, nous avons

$$\{g_{\mu\nu} (\partial - ieA)^\mu (\partial - ieA)^\nu + \lambda^2\} \psi(\vec{x}) = 0. \quad (1.12)$$

Le complexe conjugué de l'équation (3.7) est

$$\left( \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta + \lambda^2 \right) \psi^*(x) = 0 \quad (1.13)$$

En multipliant l'équation (3.7) et l'équation (3.12) respectivement par  $\psi^*$  et  $\psi$ , on obtient

$$\frac{1}{c^2} \left( \psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi^* \right) = \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*, \quad (1.14)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( \psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) = \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (1.15)$$

Ainsi, on définit l'équation de contunuité par la relation

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (1.16)$$

$J^\mu$  est donnée dont le quadricourant par

$$J^\mu = (J^0, \vec{J}), \quad (1.17)$$

avec  $J^0 = \rho$ , ou

$$J^\mu = \psi^* (\partial^\mu \psi) - (\partial^\mu \psi^*) \psi. \quad (1.18)$$

A partir des deux équations (3.16) et (3.17), on a

$$\rho = \frac{J^0}{c} = (\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*), \quad (1.19)$$

donnant la densité du courant

$$\vec{J} = \psi^* (\vec{\nabla} \psi) - \psi (\vec{\nabla} \psi)^*. \quad (1.20)$$

Enfin le tenseur énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$  du champ Klein-Gordon est donnée par la relation

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \partial_\nu \bar{\psi} - \mathcal{L} g_{\mu\nu}, \quad (1.21)$$

avec  $\mathcal{L}$  est la densité lagrangienne dont

$$\mathcal{L}_{KG} = \partial_\mu \psi^* \partial^\mu \psi - \lambda^2 \psi^* \psi. \quad (1.22)$$

## 1.2 L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP)

L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau est une extension du formalisme covariant de Dirac, aux particules scalaires de spin-0 et vectorielles de spin-1, et dans lequel on remplace les matrices  $\gamma^\mu$  par des matrices  $\beta^\mu$  vérifiant une algèbre plus compliquée connue sous le nom de l'algèbre de Kemmer [8–11, 16, 29]

### 1.2.1 L'équation libre de DKP

L'équation relativiste libre de Duffin-Kemmer-Petiau pour d'une particule de masse  $m$  est

$$(i\partial_\mu \beta^\mu - m)\psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (1.23)$$

Où  $\beta^\mu$  ( $\mu = 0, 1, 2, 3$ ) sont des matrices qui vérifient les relations suivantes

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu, \quad (1.24)$$

dont  $g^{\mu\nu}$  est le tenseur métrique relatif à l'espace temps de Minkowski  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ . On choisit une représentation pour les  $\beta^\mu$  dans laquelle  $\beta^{k+} = -\beta^k$ , et  $\beta^{0+} = \beta^0$ , et on écrit pour le spin-0

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \Theta_{2 \times 2} & 0_{2 \times 3} \\ 0_{3 \times 2} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}; \beta^i = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & \rho_{2 \times 3}^i \\ -\rho_{3 \times 2}^i & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, i = (1, 2, 3) \quad (1.25)$$

avec

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

et  $\rho_T$  représente la matrice transposée de  $\rho$ . Pour le cas de spin-1, les matrices  $\beta^\mu$  sont

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & \bar{0} & e_i & \bar{0} \\ \bar{0}^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & -is_i \\ -e^T & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \\ \bar{0}^T & -is_i & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} \end{pmatrix}, i = (1, 2, 3) \quad (1.27)$$

dont  $I_{3 \times 3}$  est la matrice unité et  $\bar{0}, e_i$  sont données par

$$\bar{0} = (0, 0, 0), e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1). \quad (1.28)$$

Les matrices  $s_i$  sont les matrices standards non-relativistes du spin-1

$$S_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

### 1.2.2 Calcul du courant

Dans le cas de l'interaction avec un champ électromagnétique  $A^\mu$ , l'équation (3.22) prend la forme

$$\{i\beta^\mu(\partial_\mu + ieA_\mu) - m\} \psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (1.30)$$

Maintenant, conjugons l'équation (3.22)

$$i\partial_\mu \psi^+ \beta^\mu + m\psi^+ = 0. \quad (1.31)$$

Avec

$$\bar{\psi} = \psi^+ \left\{ 2(\beta^0)^2 - 1 \right\}, \quad (1.32)$$

d'ou'

$$\bar{\psi} \beta^0 = \psi^+ \beta^0, \quad (1.33)$$

dont  $\bar{\psi}$  étant l'adjoint de  $\psi$  qui vérifié l'équation adjointe suivante

$$i(\partial_\mu - ieA_\mu) \bar{\psi} \beta^\mu + m\bar{\psi} = 0. \quad (1.34)$$

Sachons que

$$\bar{\psi} \beta^\mu \beta^0 = \psi^+ \beta^{\mu+} \beta^0, \quad (1.35)$$

on tire l'équation de continuité

$$\partial_\mu J^\mu = 0, \quad (1.36)$$

avec  $J^\mu$  s'écrit

$$J^\mu = (J^0, J^k), k = (1, 2, 3) \quad (1.37)$$

et

$$J^\mu = \bar{\psi} \beta^\mu \psi, \quad (1.38)$$

ou

$$J^k = \bar{\psi} \beta^k \psi, \quad (1.39)$$

donc la densité de probabilité est donnée par

$$J^0 = \bar{\psi} \beta^0 \psi, \quad (1.40)$$

Calculons, le tenseur énergie-impulsion  $T^{\mu\nu}$ , L'expression de ce tenseur est donnée par

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \psi)} \partial^\nu \psi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \bar{\psi})} \partial^\nu \bar{\psi} - \delta^{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad (1.41)$$

avec  $\mathcal{L}$  est la densité lagrangienne qui est défini par

$$\mathcal{L} = -i \frac{1}{2} (\partial_\mu \bar{\psi} \beta^\mu \psi - \bar{\psi} \beta^\mu \partial_\mu \psi) + m \bar{\psi} \psi. \quad (1.42)$$

Cette relation est utilisée dans le calcul  $T^{\mu\nu}$  pour obtenir

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left\{ \psi^+ \beta^\nu \frac{\hbar}{i} \partial^\mu \psi - \left( \frac{\hbar}{i} \partial^\mu \psi^+ \right) \beta^\nu \psi \right\}. \quad (1.43)$$

Ou

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0, \quad (1.44)$$

avec  $x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Nous obtenons a partir des équations (3.22) et (3.23)

$$\psi^+ \beta^\nu \beta^\mu \psi = \psi^+ \beta^\nu \delta^{\lambda\mu} \partial_\lambda \psi = \psi^+ (\beta^\nu \beta^\mu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu - \delta^{\mu\nu} \beta^\lambda) \partial_\lambda \psi, \quad (1.45)$$

posons que

$$\theta^{\mu\nu} = imc^2 \left\{ \psi^+ (\beta^\mu \beta^\nu + \beta^\nu \beta^\mu) \psi - \delta^{\mu\nu} \psi^+ \psi \right\}. \quad (1.46)$$

Alors

$$T^{\mu\nu} = -i \frac{\hbar c}{2} \frac{\partial}{\partial x^\lambda} \psi^+ (\beta^\lambda \beta^\mu \beta^\nu - \beta^\nu \beta^\mu \beta^\lambda) \psi + \theta^{\mu\nu}, \quad (1.47)$$

avec

$$\frac{\partial \theta^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (1.48)$$

Maintenant, passons à l'équation de Dirac pour les fermions .

### 1.3 L'équation de Dirac

Selon l'idée de Dirac, essayons de trouver une racine carrée  $p^2 + m^2 = -\Delta + m^2$ , en utilisant une représentation matricielle

$$H\psi = \left( \frac{1}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m \right) \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad (1.49)$$

Ou  $\psi$  et  $m$  son respectivement la fonction d'onde et la masse de la particule relativiste, et  $\alpha$  et  $\gamma^0$  sont des matrices Hermitiennes, de telle façon que l'opérateur  $H$  défini par le membre de droite soit lui même Hermitien. On demande aussi que l'équation (2.49) soit compatible avec l'équation (3.7), chaque composante de

$\psi$  satisfaisant cette équation. Si les matrices satisfont les relations d'anticommutation Dans la représentation de Dirac, ces matrices prennent la forme suivante

$$\begin{aligned} \{\alpha_i, \alpha_j\} &= \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0, \\ \{\alpha_i, \gamma^0\} &= \alpha_i \gamma^0 + \gamma^0 \alpha_i = 0, \text{ Si } (i \neq j) \\ \alpha_i^2 &= (\gamma^0)^2 = I \end{aligned} \quad (1.50)$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, i = (1, 2, 3). \quad (1.51)$$

On calcul

$$(-i\alpha_i \nabla + \gamma^0 m)^2 \psi = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \sum_{i \neq j} \{\alpha_i, \alpha_j\} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{i} m \sum_{i=1}^3 \{\alpha_i, \gamma^0\} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + (\gamma^0)^2 m^2 \psi = (-\Delta + m^2) \psi. \quad (1.52)$$

Les fonctions d'ondes sont alors des spineurs de rang 4 de la forme suivante

$$\psi(\vec{x}, t) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T. \quad (1.53)$$

Mettons l'équation de Dirac(2.49) sous une forme covariante en introduisant ce qui suivie

$$\gamma^0 = \gamma_0, \quad (1.54)$$

$$\gamma^i = -\gamma_i = \gamma^0 \alpha^i, \quad (1.55)$$

A partir de l'équation(2.50), on aboutit à

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2 (\gamma^0)^2 = 2 \times I_{4 \times 4}. \quad (1.56)$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = (\gamma^0)^2 \alpha_i + \gamma^0 \alpha_i \gamma^0 = 0. \quad (1.57)$$

$$\{\gamma^i, \gamma^k\} = \gamma^0 \alpha_i \gamma^0 \alpha_k + \gamma^0 \alpha_k \gamma^0 \alpha_i = -\alpha_i \alpha_k - \alpha_k \alpha_i = -2\delta_{ij}, \quad (1.58)$$

Qui satisfont donc

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (1.59)$$

avec  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  est le tenseur métrique. Noter, ici, que puisque les matrices  $\alpha^i$  et  $\gamma^0$  sont hermitiennes et anticommulent, la matrice  $\gamma^0$  est hermitienne mais les  $\gamma^i, i = (1, 2, 3)$  sont antihermitiennes. Il sera utile d'utiliser aussi les matrices  $\gamma$  avec des indices covariants

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3), \quad (1.60)$$

ainsi que la notation slash de Feynman

$$\not{\partial} = a^\mu \gamma_\mu, \quad (1.61)$$

L'équation de Dirac pu écrire de cette façon

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0 \equiv (i\not{\partial} - m)\psi = 0. \quad (1.62)$$

et on se réfère à l'opérateur différentiel  $(i\cancel{\partial}-m)$  comme l'opérateur de Dirac. On vérifie que

$$(i\cancel{\partial} - m)(i\cancel{\partial} + m) = (i\cancel{\partial} + m)(i\cancel{\partial} - m) = -(\square + m^2). \quad (1.63)$$

Le conjugué du spineur de Dirac est défini par

$$\bar{\psi} = \psi^+ \gamma^0. \quad (1.64)$$

avec lequel la densité de probabilité et son courant deviennent le quadricourant

$$j^\nu = (\rho, \vec{j}) = (\psi^+ \psi, \psi^+ \vec{\alpha} \psi) = \psi^+ (1, \vec{\alpha}) \psi = \psi^+ \gamma^0 (\gamma^0, \gamma^0 \vec{\alpha}) \psi = \bar{\psi} (\gamma^0, \vec{\gamma}) \psi. \quad (1.65)$$

tels que

$$j^\nu = \bar{\psi} \gamma^\nu \psi. \quad (1.66)$$

La multiplication de la charge de la particule aboutira à la densité du courant électromagnétique. On peut conclure que la forme de l'équation de Dirac ne peut être appliquée que pour les particules libres.

Nous allons essayer d'incorporer l'interaction électromagnétique. La relation entre l'énergie et l'impulsion d'une particule libre classique est donnée par

$$\zeta^2 = p^2 + m^2, \quad (1.67)$$

Avec

$$p^\nu = (\zeta, \vec{p}). \quad (1.68)$$

Elle se généralise à une particule de charge  $e$  qui existe dans un champ électromagnétique dérivant du quadripotentiel

$$A^\nu = (\varphi, \vec{A}), \quad (1.69)$$

En opérant la substitution suivante

$$p^\nu \mapsto p^\nu - eA^\nu, \quad (1.70)$$

avec  $\vec{p}$  est l'impulsion généralisée, l'énergie totale, qui se distingue de l'impulsion ordinaire  $\vec{p}$  par l'addition du terme  $-e\vec{A}$ . Le passage à la mécanique quantique se fait en remplaçant la substitution (2.70) par

$$p_\nu \mapsto i\partial_\nu, \text{ soit } p \mapsto i\partial_\nu - eA_\nu, \quad (1.71)$$

Nous incorporons donc l'interaction électromagnétique dans l'équation de Dirac (2.62) en faisant la substitution

$$i\partial_\nu \mapsto i\partial_\nu - eA_\nu, \quad (1.72)$$

ce qui donne

$$\{\gamma^\nu (i\partial_\nu - eA_\nu) - m\} \psi = 0. \quad (1.73)$$

Multiplions l'équation de Dirac à gauche par  $\gamma^0$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + \gamma^0 \gamma^i (i\partial_i - eA_i) - \gamma^0 m \right) \psi = 0, \quad (1.74)$$

ou

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = (-\alpha_i\partial_i + \gamma^0 m)\psi + (eA_0 - e\gamma^0\gamma_i A_i)\psi. \quad (1.75)$$

dont

$$H_0 = -\alpha_i\partial_i + \gamma^0 m \quad (1.76)$$

Cette dernière équation ressemble à une équation de Schrodinger, même si la fonction d'onde est spinorielle. Il se manifeste que notre formalisme du calcul de perturbation s'applique, avec un Hamiltonien non perturbé  $H_0$ , dont les ondes planes données par la formule (2.76) sont des fonctions propres, et la perturbation

$$V(\vec{x}, t) = eA_0 + e\gamma^0\gamma^i A_i = e\gamma^0\gamma^\nu A_\nu(\vec{x}, t). \quad (1.77)$$

Pour illustration, nous écrivons ce potentiel de manière explicite dans la représentation standard

$$V(\vec{x}, t) = e \begin{pmatrix} A_0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{A} \\ \vec{\sigma}\cdot\vec{A} & A_0 \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

Dans le cas particulier où  $A^\nu = (\varphi, 0)$ , le potentiel se réduit au potentiel électrique multiplié par la charge  $e$  de la particule, et par la matrice unité

$$V(\vec{x}, t) = e\varphi(\vec{x}, t), \quad (1.79)$$

Enfin, calculons le tenseur énergie d'impulsion  $T^{\mu\nu}$  de Dirac. La densité lagrangienne est donnée par

$$\mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi; \bar{\psi}\partial_\mu\bar{\psi}) = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi. \quad (1.80)$$

Ainsi, le tenseur  $T^{\mu\nu}$  sera alors

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\nu\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\partial_\nu\bar{\psi} - \delta_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (1.81)$$

ou

$$T_{\mu\nu} = i\hbar(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_\nu\psi - \delta_{\mu\nu}\bar{\psi}\gamma^\rho\partial_\rho\psi) + \delta_{\mu\nu}m_0c^2\bar{\psi}\psi. \quad (1.82)$$

## Les solutions exactes des oscillateurs relativistes

Dans ce chapitre, nous allons solutionner les trois oscillateurs de Klein-Gordon et DKP pour les particules bosoniques, et l'oscillateur de Dirac pour les particules fermioniques, en présence de l'interaction de l'oscillateurs de Dirac à une dimension.

### 2.1 L'oscillateur de Klein-Gordon

L'oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnelle est donné par [9, 14]

$$\left( P_x^2 - \frac{E^2 - m^2 c^4}{c^2} \right) \psi_{KG} = 0. \quad (2.1)$$

En présence de l'interaction de l'oscillateur de Dirac, il devient

$$\{ c^2 (P_x + im\omega x) (P_x - im\omega x) - E^2 + m^2 c^4 \} \psi_{KG} = 0, \quad (2.2)$$

ou  $\omega$  est la fréquence et  $m$  est la masse de la particule. Ici on a utilisé la substitution suivante

$$P_x \mapsto P_x + im\omega x. \quad (2.3)$$

En remplaçant le terme  $(P_x + im\omega x) (P_x - im\omega x)$  dont

$$(P_x + im\omega x) (P_x - im\omega x) = P_x^2 + m^2 \omega^2 x^2 - im\omega [P_x, x], \quad (2.4)$$

dans l'équation (3.2), on obtient le résultat suivant

$$\{ c^2 (P_x^2 + m^2 \omega^2 x^2) \} \psi_{KG} = (E^2 - m^2 c^4 + m\omega \hbar c^2) \psi_{KG}. \quad (2.5)$$

La division par  $2mc^2$ , donne

$$\left(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right) \psi_{KG} = \bar{E}\psi_{KG}, \quad (2.6)$$

avec

$$\bar{E} = \frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} + \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (2.7)$$

L'équation (3.6) est une équation unidimensionnelle d'un oscillateur harmonique. Ainsi, on peut écrire

$$\bar{E}_n = \frac{E^2 - m^2c^4 + \hbar\omega mc^2}{2mc^2} = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right), n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

alors le spectre d'énergie aura la forme suivante

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2rn}, \quad (2.9)$$

dont  $r = \frac{\hbar\omega}{mc^2}$  est le paramètre donnant la limite non relativiste.

La fonction d'onde est donnée par

$$\psi_{KG}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right) \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right), \quad (2.10)$$

ou les fonctions  $H\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x\right)$  sont les fonction de Hermite.

## 2.2 L'oscillateur de Kemmer (DKP)

L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau libre unidimensionnelle s'écrit par

$$(\beta^0 E - c\beta^1 P_x - mc^2) \psi_{DKP} = 0, \quad (2.11)$$

avec  $\psi$  est la fonction d'onde du boson,  $m$  la masse de la particule, et  $\beta$  sont des matrices qui satisfont aux relations de commutations suivante

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\mu, \quad (2.12)$$

ou  $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  est le tenseur métrique de l'espace de Minkowski. Notons qu'il ya 126 éléments linéaires indépendants pour cette algèbre. Le rang des matrices s'avère 16 et la représentation correspondante peut être décomposée en trois représentations irréductibles, avec les dimension 1,5, et 10. La représentation unidimensionnelle est insignifiante, par contre les deux dimensions cinq et dix représentent les particules scalaires de spin  $S = 0$  et les particules vectoriel de spin  $S = 1$ . Les matrices  $\beta$  sont des matrices  $5 \times 5$  pour le cas de  $S = 0$ , et  $10 \times 10$  pour l'autre cas [13, 14, 16, 17, 30]

### 2.2.1 Cas du spin $S = 1$

En présence du potentiel unidimensionnel d'oscillateur de Dirac, l'opérateur  $P_x$  dans l'équation libre de DKP est remplacé par le  $P_x - im\omega\eta^0 x$  avec  $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$  et  $(\eta^0)^2 = I_{10 \times 10}$ , dont  $I_{10 \times 10}$  est la matrice unitaire.

Dans ce cas, l'équation de DKP en présence de l'interaction d'oscillateur de Dirac est

$$[\beta^0 E - c\beta^1 (P_x - im\omega\eta^0 x) - mc^2] \psi_{DKP} = 0 \quad (2.13)$$

ou les matrices  $\beta$  peuvent être choisies comme suit

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \phi_{3 \times 3} & \phi_{3 \times 3} & -I_{3 \times 3} & \bar{0}^\dagger \\ \phi_{3 \times 3} & \phi_{3 \times 3} & \phi_{3 \times 3} & \bar{0}^\dagger \\ -I_{3 \times 3} & \phi_{3 \times 3} & \phi_{3 \times 3} & \bar{0}^\dagger \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix}; \beta^k = \begin{pmatrix} \phi_{3 \times 3} & \phi_{3 \times 3} & \phi_{3 \times 3} & ik^{l\dagger} \\ \phi_{3 \times 3} & \phi_{3 \times 3} & S_{3 \times 3}^l & \bar{0}^\dagger \\ \phi_{3 \times 3} & -S_{3 \times 3}^l & \phi_{3 \times 3} & \bar{0}^\dagger \\ ik^l & \bar{0} & \bar{0} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

avec  $l=(1,2,3)$  les éléments des matrices  $10 \times 10$  et

$$\phi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

$$S^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}; S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}; S^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

$$k^1 = (1, 0, 0), k^2 = (0, 1, 0), k^3 = (0, 0, 1), \bar{0} = (0, 0, 0). \quad (2.17)$$

L'état stationnaire  $\psi$  est une fonction d'onde à dix-composants de l'équation de DKP, écrite sous la forme

$$\psi(x) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6, \psi_7, \psi_8, \psi_9, \psi_{10})^T. \quad (2.18)$$

En remplaçant l'équation (3.17) dans l'équation (3.12), nous obtenons les équations algébriques suivantes

$$-mc^2\psi_1 - E\psi_7 - c(P_x + im\omega x)\psi_{10} = 0, \quad (2.19)$$

$$-mc^2\psi_2 - E\psi_8 = 0, \quad (2.20)$$

$$-mc^2\psi_3 - E\psi_9 = 0, \quad (2.21)$$

$$-mc^2\psi_5 + c(P_x - im\omega x)\psi_9 = 0, \quad (2.22)$$

$$\psi_4 = 0, \quad (2.23)$$

$$-mc^2\psi_6 - c(P_x - im\omega x)\psi_8 = 0, \quad (2.24)$$

$$-mc^2\psi_7 - E\psi_1 = 0, \quad (2.25)$$

$$-mc^2\psi_8 - E\psi_2 - c(P_x + im\omega x)\psi_6 = 0, \quad (2.26)$$

$$-mc^2\psi_9 - E\psi_3 + c(P_x + im\omega x)\psi_5 = 0, \quad (2.27)$$

$$-mc^2\psi_{10} - c(P_x - im\omega x)\psi_1 = 0. \quad (2.28)$$

A partir de ces équations, nous obtenons les résultats suivants

$$\psi_4 = 0, \psi_2 = -\frac{E}{mc^2}\psi_8, \psi_7 = -\frac{E}{mc^2}\psi_1, \psi_6 = -\frac{(P_x - im\omega x)}{mc}\psi_8, \quad (2.29)$$

$$\psi_{10} = \frac{(P_x - im\omega x)}{mc} \psi_1, \psi_5 = \frac{(P_x - im\omega x)}{mc} \psi_9, \quad (2.30)$$

$$\{c^2 (P_x + im\omega x) (P_x - im\omega x) + (E^2 - m^2 c^4)\} \psi = 0, \quad (2.31)$$

avec

$$\psi = (\psi_1, \psi_8, \psi_9)^T. \quad (2.32)$$

En employant la relation bien connue

$$[P_x, x] = i\hbar, \quad (2.33)$$

l'évaluation du terme  $(P_x + im\omega x) (P_x - im\omega x)$  donne

$$(P_x + im\omega x) (P_x - im\omega x) = P_x^2 + m^2 \omega^2 x^2 - m\omega \hbar. \quad (2.34)$$

Notons ici que les composants  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_8(x)$ , et  $\psi_9(x)$  suivent la même équation différentielle. Ainsi, nous choisissons de résoudre cette équation  $\psi_1(x)$  et les autres composants, c'est à dire,  $\psi_8(x)$  et  $\psi_9(x)$  prennent une forme semblable à celle du composant  $\psi_1(x)$ .

Ainsi, l'équation d'onde de  $\psi_1(x)$  vérifie

$$\{c^2 (P_x^2 + m^2 \omega^2 x^2 - m\omega \hbar) + (E^2 - m^2 c^4)\} \psi_1(x) = 0. \quad (2.35)$$

L'équation (2.35) peut être reformulés sous une autre forme comme suit

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 + \left( \frac{m\omega}{\hbar} - \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) \right] \psi_1(x) = 0. \quad (2.36)$$

En utilisant les abréviations suivantes

$$\lambda = \frac{m\omega}{\hbar}, k^2 = \left( \frac{m\omega}{\hbar} - \frac{E^2 - m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right), \quad (2.37)$$

nous pouvons réécrire l'équation différentielle par

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (k^2 - \lambda^2 x^2) \right] \psi_1(x) = 0. \quad (2.38)$$

L'équation (2.38) est identifiée comme équation de la différentiation de Weber.

Maintenant, en introduisant une nouvelle variable  $y = \lambda x^2$ , on trouve

$$y \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left( \frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4} y \right) \psi = 0. \quad (2.39)$$

Nous essayons d'écrire

$$\psi_1(x) = e^{-\frac{y}{2}} \varphi(y), \quad (2.40)$$

nous obtenons alors

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2} \varphi(y) \right] e^{-\frac{y}{2}}, \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{4} \varphi(y) \right] e^{-\frac{y}{2}}, \quad (2.41)$$

que l'on peut écrire par

$$y \frac{\partial^2 \varphi(y)}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{2} - y\right) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial y} + \left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}\right) \varphi(y) = 0, \quad (2.42)$$

ou

$$\kappa = \frac{k^2}{2\lambda}. \quad (2.43)$$

La solution de l'équation (2.42) est [24, 25, 31, 32]

$$\varphi(y) = A_1 F_1\left(a; \frac{1}{2}; y\right) + B Y_1^{\frac{1}{2}} F_1\left(a + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; y\right), \quad (2.44)$$

avec

$$a = -\left(\frac{\kappa}{2} - \frac{1}{4}\right), \quad (2.45)$$

et  ${}_1F_1(a; c; y)$  est la fonction hypergéométrique confluente.

Après un simple compensation, on arrive à

$$\psi_1(x) = A e_1^{-\frac{\lambda x^2}{2}} F_1\left(a; \frac{1}{2}; \lambda x^2\right) + B e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \sqrt{\lambda} x_1 F_1\left(a + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \lambda x^2\right), \quad (2.46)$$

ou A et B sont des facteurs de Normalisation. Les solutions d'équation (2.46) selon le paramètre (a) peuvent être décomposés en deux cas possible.

- Pour  $a = -n$  et  $B = 0$ , les solutions sont

$$E_n = \pm \sqrt{mc^4 + 4nmc^2 \hbar \omega}, \quad (2.47)$$

$$\psi_1(x) = N_n e_1^{-\frac{\lambda x^2}{2}} F_1(-n; \frac{1}{2}; \lambda x^2). \quad (2.48)$$

- Pour  $a + \frac{1}{2} = -n$  et  $A = 0$ , les solutions sont

$$E_n = \pm \sqrt{mc^4 + (4n + 2) \hbar \omega mc^2}, \quad (2.49)$$

$$\psi_1(x) = N_n e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \sqrt{\lambda} x_1 F_1(-n; \frac{3}{2}; \lambda x^2). \quad (2.50)$$

## 2.2.2 Cas du spin $S = 0$

L'oscillateur de DKP pour une particule de spin  $S = 0$  est défini par

$$\{\beta^0 E - c\beta^1 (P_x - im\omega\eta^0 x) - mc^2\} \Phi(x) = 0, \quad (2.51)$$

ou  $\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1$ , et  $(\eta^0)^2 = I_{5 \times 5}$ , avec

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \beta^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.52)$$

$$\eta^0 = 2(\beta^0)^2 - 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \beta^1 \eta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.53)$$

L'état stationnaire  $\Phi$  est une fonction d'onde de cinq composants de l'équation de DKP, qui peut être écrite comme

$$\Phi(x) = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Phi_5)^T. \quad (2.54)$$

Après un calcul direct, nous obtenons

$$-mc^2 \Phi_1 - iE \Phi_5 = 0, \quad (2.55)$$

$$-mc^2 \Phi_2 - ic(P_x + im\omega x) \Phi_5 = 0, \quad (2.56)$$

$$-mc^2 \Phi_3 = 0, \quad (2.57)$$

$$-mc^2 \Phi_4 = 0, \quad (2.58)$$

$$iE \Phi_1 - ic(P_x - im\omega x) \Phi_2 - mc^2 \Phi_5 = 0. \quad (2.59)$$

A partir de ces équations, on obtient les résultats suivants:

$$\Phi_1 = -\frac{iE}{mc^2} \Phi_5, \Phi_2 = \frac{-i(P_x + im\omega x)}{mc} \Phi_5, \quad (2.60)$$

$$\Phi_3 = 0, \Phi_4 = 0. \quad (2.61)$$

Un calcul direct donne

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2} x^2 + \left( \frac{m\omega}{\hbar} - \frac{E^2 + m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right) \right] \Phi_5(x) = 0. \quad (2.62)$$

Posons que

$$\lambda^2 = \frac{m^2 \omega^2}{\hbar^2}, \quad (2.63)$$

$$\chi^2 = \frac{m\omega}{\hbar} - \frac{E^2 + m^2 c^4}{\hbar^2 c^2}, \quad (2.64)$$

on peut réécrire l'équation différentiel par

$$\frac{\partial^2 \Phi_5(x)}{\partial x^2} + (\chi^2 - \lambda^2 x^2) \Phi_5(x) = 0. \quad (2.65)$$

De la même façon que comme dans le cas du spin  $S = 1$ , nous obtenons les solutions de l'équation (2.65) comme suit

$$\Phi_5(x) = C e_1^{-\frac{\lambda x^2}{2}} F_1(b; \frac{1}{2}; \lambda x^2) + D e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \sqrt{\lambda} x_1 F_1(b + \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \lambda x^2), \quad (2.66)$$

ou

$$b = -\left( \frac{\chi^2}{4\lambda} - \frac{1}{4} \right). \quad (2.67)$$

Les solutions d'équation (2.66) selon le paramètre b peuvent être d'écouplés en deux cas comme suit

- Pour  $b = -n$  et  $D = 0$  donc

$$E_n = \pm \sqrt{mc^4 + 4nmc^2\hbar\omega}, \quad (2.68)$$

$$\Phi_5(x) = N_n e_1^{-\frac{\lambda x^2}{2}} F_1\left(-n; \frac{1}{2}; \lambda x^2\right). \quad (2.69)$$

- Pour  $b + \frac{1}{2} = -n$  et  $C = 0$  on obtient les solutions suivantes

$$E_n = \pm \sqrt{mc^4 + (4n + 2)\hbar\omega mc^2}, \quad (2.70)$$

$$\Phi_5(x) = N_n e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} \sqrt{\lambda} x_1 F_1\left(-n; \frac{3}{2}; \lambda x^2\right). \quad (2.71)$$

Passons maintenant, à l'oscillateur de Dirac pour les particules de spin  $S = \frac{1}{2}$  (le cas des oscillateurs fermioniques).

## 2.3 L'oscillateur de Dirac

L'oscillateur de Dirac unidimensionnelle est [5-7, 18, 19, 33]

$$\{c.\alpha_x.(P_x - im\omega\gamma^0.x) + \gamma^0 mc^2\} \psi_D = E\psi_D, \quad (2.72)$$

ou  $m$  est la masse de la particule et  $\omega$  est la fréquence. Via les matrices de Pauli

$$\alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

et la définition de la fonction d'onde  $\psi_D$

$$\psi_D = (\psi_1, \psi_2)^T, \quad (2.74)$$

L'Hamiltonian de Dirac est alors donné par

$$H_D = \{c.\alpha_x.(P_x - im\omega\gamma^0.x) + \gamma^0 mc^2\}. \quad (2.75)$$

ou dans sa forme matricielle par

$$H_D = \begin{pmatrix} mc^2 & c(P_x + im\omega x) \\ c(P_x - im\omega x) & -mc^2 \end{pmatrix}. \quad (2.76)$$

En insérant les équations(2.76)et(2.74) dans l'équation de Dirac, on aura

$$\begin{pmatrix} mc^2 & c(P_x + im\omega x) \\ c(P_x - im\omega x) & -mc^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (2.77)$$

A partir de cette équation, on trouve le système d'équation suivant

$$mc^2\psi_1 + c(P_x + im\omega x)\psi_2 = E\psi_1, \quad (2.78)$$

$$c(P_x - im\omega x)\psi_1 - mc^2\psi_2 = E\psi_2, \quad (2.79)$$

On trouve alors

$$\psi_2(x) = \frac{c(P_x - im\omega x)}{E + mc^2}\psi_1(x), \quad (2.80)$$

Un calcul direct donne

$$c^2(P_x^2 + (m\omega x)^2)\psi_1 = (E^2 - m^2c^4 + m\omega\hbar c^2)\psi_1, \quad (2.81)$$

ou

$$\left(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\psi_1 = \left(\frac{E^2 - m^2c^4}{2mc^2} + \frac{1}{2}\hbar\omega\right)\psi_1 \equiv \bar{E}\psi_1, \quad (2.82)$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique unidimensionnelle avec

$$\bar{E} = \left(\frac{E^2 - m^2c^4 + \hbar\omega mc^2}{2mc^2}\right). \quad (2.83)$$

De la même manière dans le cas des particules bosonique, nous obtenons les solutions suivantes

$$E_n = \pm mc^2\sqrt{1 + 2\bar{r}n}, \quad (2.84)$$

dont  $\bar{r} = \frac{\hbar\omega}{mc^2}$  est le paramètre qui permet l'accès à la limite non relativiste.

La fonction d'onde est donnée par

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right), \quad (2.85)$$

ou

$$\psi_D(x) = \left(\frac{1}{\frac{c(P_x - im\omega x)}{E + mc^2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2\right). \quad (2.86)$$

## Les propriétés thermodynamiques des oscillateurs relativistes

La détermination des propriétés thermodynamiques des oscillateurs bosoniques et fermioniques se fait par la détermination de la fonction de partition. Dans notre cas nous suggérons deux méthodes théoriques permettant de calculer cette fonction.

### 3.1 Les propriétés thermodynamiques des oscillateurs fermioniques et bosoniques

#### 3.1.1 L'approche d'Euler-Maclaurin

La fonction de partition  $Z$  est définie par [3, 11, 34]

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(E_n - E_0)}, \quad (3.1)$$

ou  $\beta = \frac{1}{k_B T}$ , avec  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $E_0 = \pm mc^2$  est l'énergie correspondant de l'état fondamental  $n = 0$ .

L'énergie de l'oscillateur relativiste pour les deux types des particules s'écrit sous la forme

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2rn}, \quad (3.2)$$

avec  $r = \frac{\hbar\omega}{mc^2}$  est le paramètre qui contrôle la limite non relativiste.

Par la substitution de l'équation (3.2) dans l'équation (3.1), on obtient

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\sqrt{m^2 c^4 + 2rnm c^2} - \sqrt{m^2 c^4})}. \quad (3.3)$$

Mettons que

$$b = m^2 c^4, a = 2mc^2 r, \quad (3.4)$$

alors l'équation (3.3), devient

$$Z = e^{\beta\sqrt{b}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\sqrt{b+an}}. \quad (3.5)$$

Maintenant, testons la convergence de la série de l'équation. (3.5) : le test d'intégral est le moyen efficace pour ce genre d'étude. On transforme notre somme infinie en intégral, puis la convergence de notre intégral implique la convergence de notre série. Le passage de la somme en intégral est bien mis donné en utilisant la formule de la transformation d'Euler Maclaurin.

Ainsi, si on pose que

$$f(x) = e^{-\beta\sqrt{b+ax}}, \quad (3.6)$$

dont  $f(x)$  est une fonction positive décroissante, alors l'intégral

$$\int_0^{\infty} f(x) dx = \int_0^{\infty} e^{-\beta\sqrt{b+ax}} dx = \frac{2}{a\beta^2} e^{-\beta\sqrt{b}} (1 + \beta\sqrt{b}). \quad (3.7)$$

converge, et par suite la fonction de partition Z.

La formule d'Euler-Maclaurin définie comme suit

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(2p)!} B_{2p} f^{(2p-1)}(0) - R_k, \quad (3.8)$$

dont

$$R_k = \int_0^{\infty} \frac{B_k(1-2p)}{2p!} f^{(2p)} dx, \quad (3.9)$$

est le terme résidu tendant vers zéro pour certaine valeurs de  $p$ ,  $B_{2p}$  sont les nombres de Bernoulli, et  $f^{(2p-1)}$  sont les dérivées d'ordre  $(2p-2)$ .

En se limitant à l'ordre  $p = 4$ , on trouve

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{2!} B_2 f^{(1)}(0) - \frac{1}{4!} B_4 f^{(3)}(0) - \frac{1}{6!} B_6 f^{(5)}(0) - \frac{1}{8!} B_8 f^{(7)}(0), \quad (3.10)$$

dont  $B_2 = \frac{1}{6}$ ,  $B_4 = -\frac{1}{30}$ ,  $B_6 = \frac{1}{42}$ ,  $B_8 = -\frac{1}{30}$ .

Dans ce cas, cette somme devient

$$\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \frac{1}{12} f^{(1)}(0) + \frac{1}{720} f^{(3)}(0) - \frac{1}{30240} f^{(5)}(0) - \frac{1}{(8! \times 30)} f^{(7)}(0). \quad (3.11)$$

L'évaluation des dérivées figurant dans la formule d'Euler-Maclaurin au point  $x = 0$  donne

$$f^{(1)}(0) = -\frac{a\beta}{2\sqrt{b}} e^{-\beta\sqrt{b}}, \quad (3.12)$$

$$f^{(3)}(0) = \left[ \frac{-3\beta a^3}{8(b)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\beta^2 a^3}{8(b)^2} - \frac{\beta^3 a^3}{8(b)^{\frac{3}{2}}} \right] e^{-\beta\sqrt{b}}, \quad (3.13)$$

$$f^{(5)}(0) = \left[ \frac{-105\beta a^5}{32(b)^{\frac{9}{2}}} - \frac{105\beta^2 a^5}{32(b)^4} - \frac{35\beta^3 a^5}{32(b)^{\frac{7}{2}}} - \frac{8\beta^4 a^5}{32(b)^3} - \frac{\beta^5 a^5}{32(b)^{\frac{5}{2}}} \right] e^{-\beta\sqrt{b}}, \quad (3.14)$$

$$f^{(7)}(0) = \left[ \frac{8505\beta^2 a^7}{128(b)^6} - \frac{314\beta^4 a^7}{128(b)^7} - \frac{139\beta^5 a^7}{128(b)^{\frac{9}{2}}} - \frac{4095\beta^3 a^7}{128(b)^{\frac{11}{2}}} - \frac{263\beta^6 a^7}{4096(b)^5} - \frac{10395\beta a^7}{128(b)^{\frac{13}{2}}} - \frac{\frac{63}{2}\beta^5 a^7}{(1024)^2(b)^{\frac{11}{2}}} \right] \quad (3.15)$$

À partir des équations (3.11), (3.12), (3.13) et (3.14), la fonction de partition devient

$$\begin{aligned} Z = & \frac{1}{2} + \frac{2}{a\beta^2}(\beta\sqrt{b} + 1) + \frac{\beta a}{24\sqrt{b}} + \frac{1}{720} \left( \frac{-3\beta a^3}{8(b)^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\beta^2 a^3}{8(b)^2} - \frac{\beta^3 a^3}{8(b)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & - \frac{1}{30240} \left( \frac{-105\beta a^5}{32(b)^{\frac{9}{2}}} - \frac{45\beta^2 a^5}{16(b)^{\frac{7}{2}}} - \frac{35\beta^3 a^5}{8(b)^{\frac{5}{2}}} - \frac{29\beta^4 a^5}{32(b)^3} - \frac{\beta^5 a^5}{32(b)^{\frac{3}{2}}} \right) \\ & - \frac{1}{1209600} \left( \frac{8505\beta^2 a^7}{128(b)^6} - \frac{314\beta^4 a^7}{128(b)^7} - \frac{139\beta^5 a^7}{128(b)^{\frac{9}{2}}} - \frac{4095\beta^3 a^7}{128(b)^{\frac{11}{2}}} - \frac{263\beta^6 a^7}{4096(b)^5} - \frac{10395\beta a^7}{128(b)^{\frac{13}{2}}} - \frac{\frac{63}{2}\beta^5 a^7}{(1024)^2(b)^{\frac{11}{2}}} \right). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Après un calcul direct, la forme finale de la fonction de partition prendra la forme suivante :

$$\begin{aligned} Z(\tau, r) = & \frac{1}{2} + \frac{\tau}{2r} + \frac{\tau^2}{2r} + \left( \frac{r}{6} - \frac{r^3}{30} \right) \frac{1}{\tau} - \frac{r^3}{30} \frac{1}{\tau^2} - \frac{r^3}{90} \frac{1}{\tau^3} \\ & + \frac{1}{945} \left( \frac{105r^5}{\tau} + \frac{90r^5}{\tau^2} + \frac{1120r^5}{\tau^3} + \frac{29r^5}{\tau^4} + \frac{r^5}{\tau^5} \right) \\ & + r^7 10395 \left( \frac{1}{\tau^2} - \frac{1}{\tau} \right) - \frac{4725r^7}{\tau^3} - \frac{1260r^7}{\tau^4} - \frac{210r^7}{\tau^5} - \frac{21r^7}{\tau^6} - \frac{r^7}{\tau^7}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

avec  $\tau = \frac{k_B T}{mc^2}$  est la température réduite.

Définissons maintenant l'approche basant sur la fonction Zeta.

### 3.1.2 L'approche de la fonction Zeta

La définition de la fonction de partition est [12-15, 34-36]

$$Z = \sum_n e^{-\beta E_n}, \quad (3.18)$$

ou  $\beta = \frac{1}{k_B T}$  avec  $k_B$  est la constante de Boltzman. L'énergie de l'oscillateur relativiste s'écrit sous la forme suivante :

$$E_n = \pm mc^2 \sqrt{1 + 2rn}. \quad (3.19)$$

En remplaçant cette dernière dans la fonction de partition, on trouve

$$Z = \sum_n e^{-\beta mc^2 \sqrt{1+2rn}}, \quad (3.20)$$

En faisant les changements de variables suivants :

$$\gamma = \sqrt{2r}, \alpha = \frac{1}{2r}, \tau = \frac{k_B T}{mc^2}, \quad (3.21)$$

La fonction  $Z$  peut être écrite comme suit

$$Z = \sum_n e^{-\frac{\gamma}{\tau} \sqrt{\alpha+n}}. \quad (3.22)$$

En posant que

$$x = \frac{\gamma}{\tau} \sqrt{\alpha+n}, \quad (3.23)$$

donc

$$Z = \sum_n e^{-x}. \quad (3.24)$$

En utilisant la transformation de Mellin pour la fonction exponentielle

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i} \int ds x^{-s} \Gamma(s), \quad (3.25)$$

alors

$$\sum_n e^{-\frac{\gamma}{\tau} \sqrt{\alpha+n}} = \frac{1}{2\pi i} \int ds \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{-s} \sum_n (n+\alpha)^{-\frac{s}{2}}, \quad (3.26)$$

ou

$$Z = \frac{1}{2\pi i} \int ds \left(\frac{\gamma}{\tau}\right)^{-s} \zeta_H\left(\frac{s}{2}, \alpha\right) \Gamma(s), \quad (3.27)$$

avec  $\Gamma(s)$  et  $\zeta_H\left(\frac{s}{2}, \alpha\right)$  sont la fonction gamma et la fonction Hurwitz respectivement.

En appliquant le théorème des Résidus, pour les deux poles  $s = 0$  et  $s = 2$ , on obtient

$$Z = \zeta_H(0, \alpha) + \frac{\tau^2}{\gamma^2}. \quad (3.28)$$

Maintenant, en utilisant la relation suivante

$$\zeta_H(0, \alpha) = \frac{1}{2} - \alpha, \quad (3.29)$$

La fonction final de partition est

$$Z(\tau, r) = \frac{\tau^2}{2r} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2r}, \quad (3.30)$$

La dernière équation détermine la fonction de partition basant sur le formalisme de la fonction Zeta.

## 3.2 Résultats et Discussions

La détermination de toutes les propriétés thermique comme l'énergie libre, la chaleur spécifique, l'énergie totale et l'entropie pour être obtenu par la fonction de partition  $Z$  via les relations suivantes [3]

- Pour l'énergie libre

$$\frac{F}{mc^2} = -\frac{k_B T}{mc^2} \ln(Z) = -\tau \ln(Z).$$

- Pour l'énergie totale

$$\frac{U}{mc^2} = \tau^2 \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau}.$$

- L'entropie

$$\frac{S}{k_B} = \ln(Z) + \tau \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau}.$$

- et enfin, pour la chaleur spécifique

$$\frac{C}{k_B} = 2\tau \frac{\partial \ln(Z)}{\partial \tau} + \tau^2 \frac{\partial^2 \ln(Z)}{\partial \tau^2}.$$

Avant d'entamer le calcul numérique concernant les propriétés thermodynamiques, des remarques pertinentes nous semblent intéressantes : nous nous limiterons dans notre calcul au cas des états stationnaires d'énergie positive. La raison pour ce cela est triple : (i) selon les travaux de [37–39], l'équation de DKP possédait une transformation exacte de Foldy-Wouthuysen (FWT) : par conséquent, les solutions énergétiques positives et négatives ne se mélangent jamais. (ii) Les solutions de nos oscillateurs illustrent la forme de l'énergie en fonction de  $n$ . De la Figure. 3.1, on observe que tous les niveaux d'énergie émergent de la position continue (négatif) de l'énergie afin qu'il soit plausible pour les identifier avec des niveaux de particules (antiparticules). Il ressort de ce cela que pour le spectre énergétique-énergétique, on constate que le quantum le plus bas Les nombres correspondent aux plus petits agrégats devrait être pour les niveaux d'énergie des particules. D'autre part, pour le spectre d'énergie négative, cela présente un comportement similaire mais les niveaux d'énergie les plus élevés sont étiquetés par le plus bas numéros quantiques et doivent être identifiés comme des antiparasitaires [40]. Enfin, (iii) il est exact que le cas des bosons est très différent de celle des fermions : tous les bosons peuvent occupés le même niveau, contrairement au cas des fermions où ils sont contrôlés par le principe de Pauli. Malgré ça, Nous pouvons étendre la méthode de remplissage de la mer de Dirac, la mer d'énergie pour le cas des fermions dans le cas des bosons (Nielsen et Ninomiya [41, 42]) : comme mentionné par ces Auteurs, les états bosons sont divisés en deux secteurs : Le secteur positif habituel composé d'états possédant un nombre de bosons et le secteur négatif, consistant des états avec un nombre négatif de bosons. Une fois un état entre dans le secteur négatif, il ne peut pas revenir au secteur positif par une interaction ordinaire, en raison de la présence d'une barrière. Ainsi, selon ces arguments, nous pouvons supposer que seules les particules à énergie positive sont disponibles afin de déterminer les propriétés thermodynamiques de notre oscillateur en question.

Maintenant, nous sommes en mesure de présenter les résultats concernant les propriétés thermodynamiques des oscillateurs fermioniques et bosoniques.

A partir des résultats trouvés dans le chapitre. 2, concernant le spectre d'énergie, nous constatons la similitude trouvé de ce dernier. Cela peut être attribuer à la disparition de l'effet de spin sur ces spectres pour les oscillateurs en questions. En plus, les propriétés thermodynamiques seront les même pour les deux types d'oscillateurs. Dans ce qui suit tous les résultat sont extensibles pour les deux types d'oscillateurs bosoniques et fermioniques.

Ces propriétés ont été obtenus par l'utilisation d'un logiciel dit Mathcad. Avant de commenter nos résultats théoriques obtenus, donnons l'ordre du grandeur concernant tous les paramètres figurant dans notre fonction de partition:

- la rangée des températures varié entre  $10^8 K$  (pour une énergie de 0.01Mev) et  $10^{10} K$  (pour une énergie de 1Mev).
- par contre, la valeur de la fréquence de notre oscillateur pour  $r = 1$  est de l'ordre de  $\omega = 10^{20} Hz$ : ainsi les valeurs des fréquences relativiste sont très élevées<sup>1</sup>.

1. il suffit de poser  $\hbar\omega = mc^2$ .

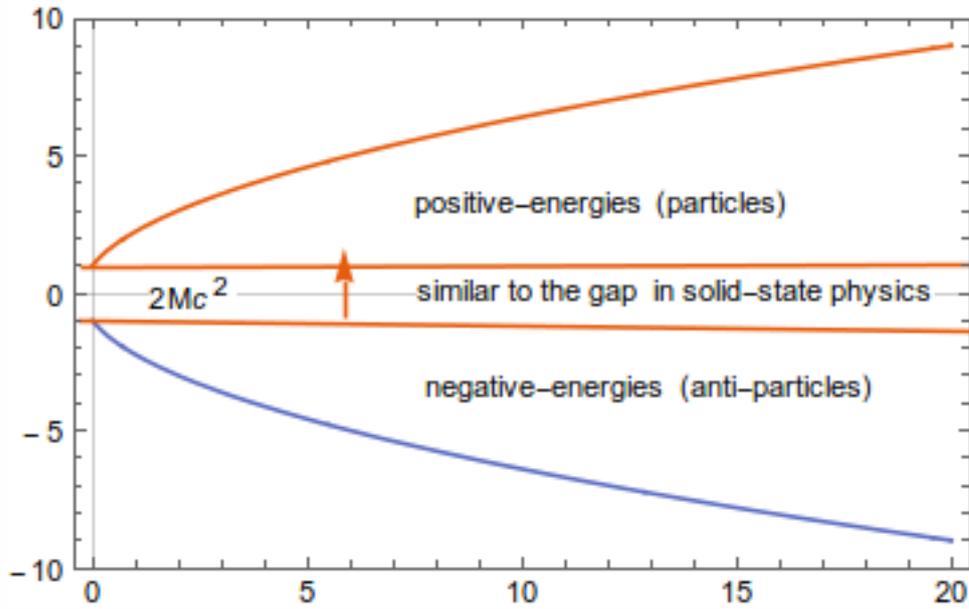


Fig. 3.1 :  $\frac{E}{mc^2}$  en fonction de nombre quantique  $n$ .

Nous sommes maintenant prêts à présenter nos calculs concernant les propriétés thermodynamiques des oscillateurs. Toutes les quantités ont été calculées en fonction d'un paramètre sans dimension  $\tau$ .

La Figure.3.2, présente les propriétés thermodynamiques des oscillateurs bosoniques et fermioniques pour différentes valeurs de  $r$  obtenues par l'application de la méthode de la fonction Zeta. Deux régions sont distinguées à partir de cette figure

- La première ou  $r \geq \frac{1}{2}$  (par exemple  $r = 0.98, r = 2$ ) correspond au régime relativiste.
- La deuxième, dont  $r < \frac{1}{2}$  ( $r = 0.01$ ) représente le régime non relativiste.

Aussi, à partir de la même figure, on constate que les courbes de la chaleurs spécifique converge à la limite  $2k_B$ .

La Figure.3.3, montre les propriétés thermodynamiques des oscillateurs bosoniques et fermioniques pour  $r = 0.98$  obtenues par l'application de l'approche d'Euler-Maclaurin. Nous pouvons voir à partir de cette figure, que les courbes de l'énergie libre, l'énergie totale, l'entropie et enfin la chaleur spécifiques sont identiques. Les courbes de la chaleur spécifique montrent une limite au voisinage de  $2k_B$ .

Enfin, la Figure.3.4, qui présente une comparaison entre ces deux méthodes pour le calcul des propriétés thermodynamiques, nous observons que les courbes sont pratiquement identiques sauf pour le cas de la chaleur spécifique malgré que les deux méthodes tendent vers la même limite. La différence entre ces deux approches se résume dans le temps qu'on a besoin pour schématiser les courbes dans la formule d'Euler-Maclaurin contrairement pour le cas utilisant la méthode de la fonction Zeta.

Enfin, notons que l'oscillateur harmonique non relativiste est utilisé comme un modèle pour décrire le confinement des quarks dans les mésons et les baryons, tandis que l'oscillateur de Dirac devrait donner une bonne description de confinement dans les systèmes de quarks lourds. Il a été aussi souligné que les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel sont pertinents pour la description

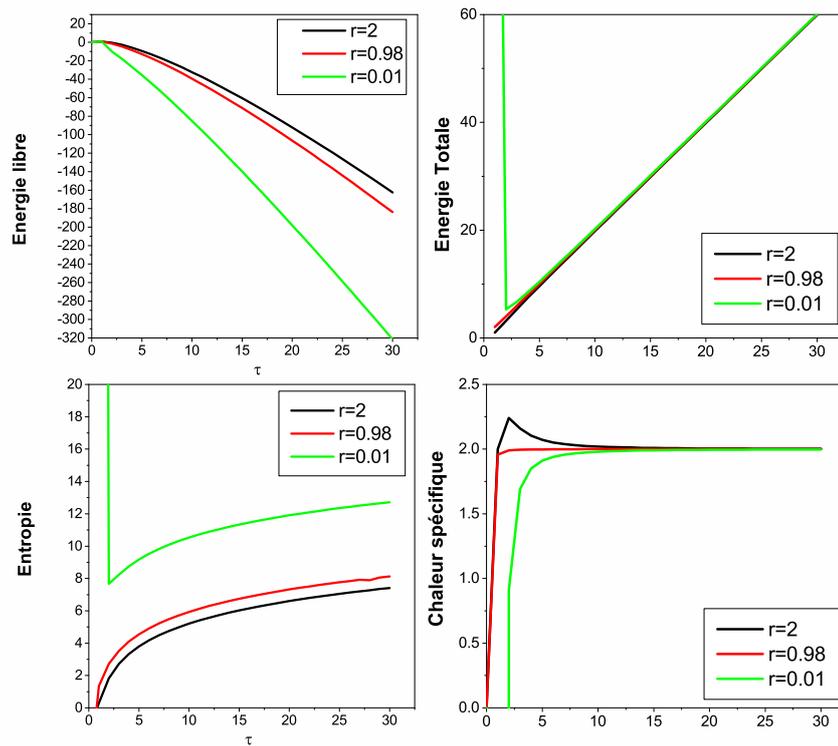


Figure 3.2: Les propriétés thermodynamiques unidimensionnelle pour les oscillateurs bosoniques et fermioniques obtenues par l'application de la méthode de la fonction Zeta pour différentes valeurs de  $r$ .

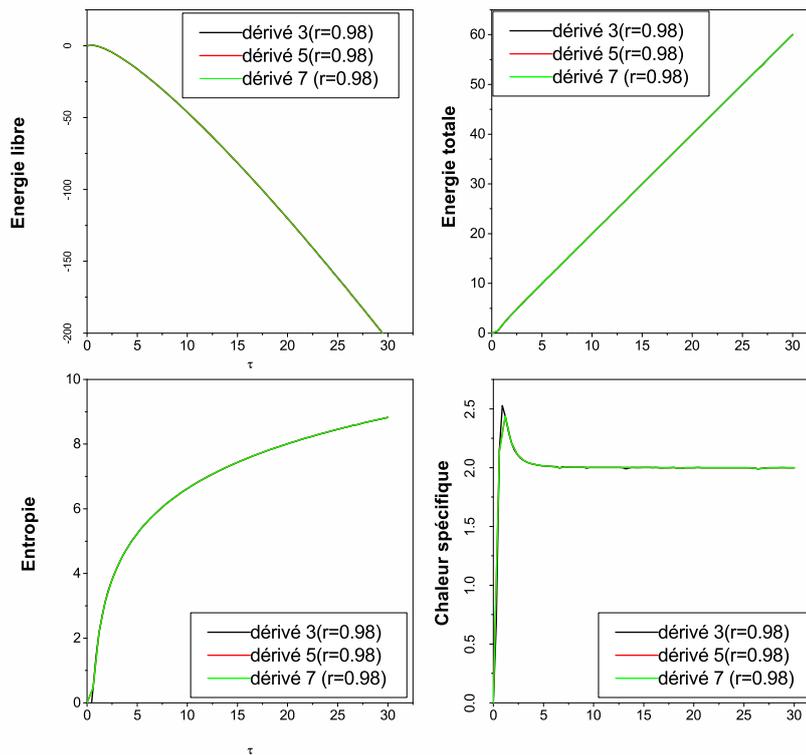


Figure 3.3: Les propriétés thermodynamiques unidimensionnelle pour les oscillateurs bosoniques et fermioniques obtenues par l'application de l'approche d'Euler-Maclaurin pour  $r=0.98$ .

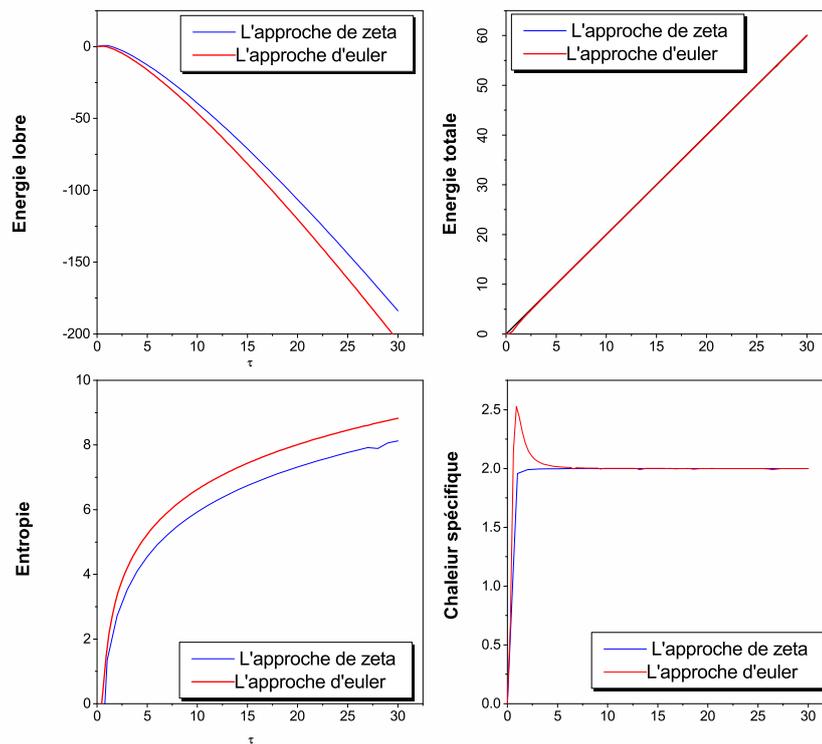


Figure 3.4: Comparaison entre les deux méthodes concernant les propriétés thermodynamiques des oscillateurs bosoniques et fermioniques pour  $r=0.98$ .

d'un plasma quark-gluon. Le plasma quark-gluon devrait être produit par les collisions d'ions lourds ultra-relativistes. Dans ce dernier procédé, un gaz de hadrons dense chaud subit une évolution vers un équilibre thermodynamique suivi par un refroidissement adiabatique essentiellement unidimensionnel. Ce constat justifie l'utilisation de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel dans un bain thermique pour décrire les propriétés thermodynamiques d'un tel processus . La transformation du gaz de hadrons en un plasma quark-gluon, appelée la phase de dé-confinement, se produit au-dessus d'une température  $T_C$ . Un calcul de QCD sur un réseau montre que la phase de dé-confinement se produit à une température de l'ordre  $T_C = 180\text{MeV}$ .

## Conclusion et Perspective

---

Dans ce mémoire, nous avons étudié les trois types d'équations relativistes bien connues: l'équation de Klein-Gordon, l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau pour les particules bosoniques et l'équation de Dirac pour les particules fermioniques, correspondant aux particules de spin-0, spin-1, spin- $\frac{1}{2}$ , respectivement. Ensuite, nous allons résoudre ces équations en présence d'un oscillateur harmonique relativiste connu sous le nom de l'interaction de l'oscillateur de Dirac à une dimension. On peut constater alors que

- Le spectre d'énergie est non-dégénéré pour les oscillateurs fermioniques et bosoniques à une dimension.
- La forme du spectre d'énergie est la même pour les trois cas
- Les propriétés thermodynamiques de ces oscillateurs seront les mêmes pour les deux types d'oscillateurs.
- Les résultats obtenus pour les deux types d'oscillateurs, sont en bon accord avec ceux trouvés dans la littérature.

Enfin, nous avons calculé les propriétés thermodynamiques de ces trois oscillateurs. Ces propriétés sont obtenues via deux approches théoriques basant sur la méthode de la fonction Zeta et aussi sur l'application de la formule d'Euler-Maclaurin. Les résultats trouvés sont récapitulés comme suit

- La fonction de partition est bien déterminée pour les deux types d'oscillateurs via les deux méthodes.
- Les deux méthodes ont bien donné toutes les propriétés thermodynamiques de ces oscillateurs.
- La différence entre les deux méthodes montre que les propriétés thermiques basées sur la fonction Zeta peuvent être considérées comme une amélioration par rapport à la méthode de la formule d'Euler-Maclaurin.

Notons ici que notre problème en question est très intéressant au niveau théorique et expérimental : au niveau théorique il sert comme un modèle réaliste pour des exemples qui ont des solutions exactes, par contre au niveau expérimental, notre oscillateur a été bien conçu et réalisé par le modèle d'un système of trapped atomic ions. L'oscillateur de Dirac, en utilisant le modèle trapped atomic ions, est bien réalisable expérimentalement comme le prévoit Berudez et al et Blatt et al [3, 7, 11, 13].

# Bibliographie

- [1] D. Ito, K. Mori, E. Carriere, *Nuovo Cimento A* **1967**, *51*, 1119.
- [2] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, *22*, L817.
- [3] Z. Bennadji, Ph.D. thesis, Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie, Université de Tébessa, **Juin 2014**.
- [4] J. Benitez, R. P. M. y Romero, H. N. Nunez-Yepe, A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett* **1990**, *64*, 1643–5.
- [5] A. Bermudez, M. M. Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. A* **2007**, *76*, 041801 (R).
- [6] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, A. Luis, *Phys. Rev. A* **2008**, *77*, 063815.
- [7] R.Blatt, C.F.Ross, *Nature Physics* **2012**.
- [8] A. Boumal, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* **2005**, *346*, 261–268.
- [9] A. Boumali, *Phys. Scr* **2007**, *76*, 669–673.
- [10] A.Boumali, *J.Math.Phys* **2008**, *49*, 022302.
- [11] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, *128*, 124.
- [12] A. Boumali, *arXiv* **2014**, 1409–6205v1.
- [13] A.Boumali **2015**.

- [14] A. Boumali, *EJTP* **2015**, *12*, 1–10.
- [15] A. Boumali, *Phys. Scr* **2015**, *90*, 045702.
- [16] A. Boumali, Doctorat, Université d'Annaba, **2006**.
- [17] J. A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, T. H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* **2013**, *111*, 170405.
- [18] B. P. Mandal, S. Verma, *Phys. Lett. A* **2010**, *374*, 1021.
- [19] B. P. Mandal, S. Verma, *Phys. Lett. A* **2012**, *376*, 2467.
- [20] R. P. Romero, A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys* **1992**, *33*, 1831.
- [21] B. Mirza, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C* **2004**, *32*, 583.
- [22] B. Mirza, R. Narimani, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C* **2006**, *48*, 641.
- [23] B. Mirza, R. Narimani, S. Zare, *Comm. Theor. Phys* **2011**, *55*, 405–409.
- [24] W. Greiner, *relativistic quantum mechanics*, spinger-Verlag, **1990**.
- [25] F. Schwabl, *Advanced Quantum Mechanics*, Spinger Verlag, **2008**.
- [26] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, **1965**.
- [27] H. Umezawa, *Quantum Field Theory*, **1965**.
- [28] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Theory*, **1964**.
- [29] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, *128*, 124.
- [30] A. Benchikha, L. Chetouani, *Modern Physics Letters A*, Vol. 28, No. 18, 1350079 **2013**.
- [31] H. Bethe, E. Salpeter, H.A. Bethe and E.E. Salpeter, *Quantum theory of One- and Two-Electron Systems, Handbuch der Physik, Band XXXV, Atome I*, Springer Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, (1957)., Berlin-Göttingen-Heidelberg (Ed.), Handbuch der Physik, Springer Verlag, **1957**.

- [32] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics wave equations*, Springer-Verlag Berlin, **2000**.
- [33] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. A* **2007**, *76*, 041801.
- [34] E. Elizalde, *Ten physical application of spectral zeta functions*, Spinger-Verlag Berlin Heidelberg, **1995**.
- [35] M.-A. Dariescu, C. Dariescu, *Chaos. Solitons and Fractals* **2007**, *33*, 776–781.
- [36] M.-A. Dariescu, C. D. Rom, *Jour. Phys* **2011**, *56*, 1043–1052.
- [37] A. J. Silenko, *Phys. Rev. D* (**2013**), *87*, 073015.
- [38] A. J. Silenko, *Phys. Rev. D* **2014**, *89*, 121701(R).
- [39] V. Tretynyk, *Proceedings of Institute of Mathematics of NAS of Ukraine* **2000**, *30*, 537.
- [40] L. B. Castro, *Eur. Phys. J. C* **2015**, *75*, 287.
- [41] H. B. Nielsen, M. Ninomiya, *Prog. Theor. Phys* **2005**, *113*, 603.
- [42] H. B. Nielsen, M. Ninomiya, *Prog. Theor. Phys* **2005**, *113*, 625.
- [43] M. M. M, A. Zentella, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, *22*, L821.

# Index

## E

Equation de Dirac, 1, 6–8, 16, 28, 33

Equation de DKP, 1, 4, 11, 12, 15, 28

Equation de Klein-Gordon, 1, 3, 28

## F

Fonction de partition, 1, 18–22, 28

Fonction Zeta, 1, 20, 21, 23, 28

Formule d'Euler-Maclaurin, 1, 19, 23, 28

## O

Oscillateur bosonique et fermionique, 22,  
23, 28

Oscillateur de Dirac, 1, 10–12, 16, 23,  
27, 28, 33, 34

Oscillateur de DKP, 14

Oscillateur de Klein-Gordon, 1, 10

Oscillateur harmonique, 11, 17, 23, 28

Oscillateur de Dirac, 1

Oscillateur harmonique, 1

# L'oscillateur de Dirac (DO)

## 1.1 Interprétation physique

En présence d'un champ magnétique, l'oscillateur de Dirac est donné par [2, 4, 20, 43]

$$\left\{ c\vec{\alpha} \left( \vec{P} - im\omega\gamma^0\vec{r} \right) + mc^2\gamma^0 \right\} \psi = E\psi \quad (1.))$$

avec

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.))$$

sont les matrices de Dirac, et  $\vec{\sigma}$  étant les matrices de Pauli. A partir de l'équation 1.)), L'Hamiltonien de Dirac est donnée par :

$$H_D = c\vec{\alpha} \left( \vec{P} - im\omega\gamma^0\vec{r} \right) + mc^2\gamma^0, \quad (3.))$$

qui s'écrit aussi dans une forme covariante comme :

$$\left\{ \gamma^\mu P_\mu - m + \left( \frac{ge}{4m} \right) \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \psi = 0. \quad (4.))$$

On a que :

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu], \gamma^\mu = (\gamma^0, \vec{\gamma}), \quad (5.))$$

le tenseur électromagnétique s'écrit sous la forme

$$A_\mu = \frac{1}{4} \{ 2x_\mu(U.x) - x^2 U_\mu \}, \quad (6.))$$

où  $A_\mu$  est le potentiel quadri-vecteur à l'oscillateur de Dirac dont  $g = \frac{2m}{e}$  est le moment magnétique anormal.

L'équation 4.)) est similaire à l'équation de Dirac pour des particules neutres ayant un moment magnétique anormal  $\mu$  ce qui donne l'équation de Dirac-Pauli suivante :

$$\left( \gamma^\mu P_\mu + \left( \frac{\mu}{2m} \right) \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m \right) \psi_D = 0. \quad (7.))$$

dont le terme  $\frac{\mu}{2}\gamma^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  a la forme suivante :

$$\frac{\mu}{2}\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + i\vec{\sigma}\vec{E} - \vec{\Sigma}\vec{B}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma}, \quad \Sigma^k = \frac{1}{2}\epsilon^{kij}\sigma^{ij}, \quad (8.))$$

ou  $\epsilon^{kij}$  c'est le tenseur Levi-Cevita. Maintenant soit :

$$\psi_D(\vec{r}, t) = \exp(-iEr) \Phi_D(\vec{r}), \quad (9.))$$

dans ce cas l'équation 1.)) devient :

$$H_D\Phi_D = E\Phi_D, \quad (10.))$$

ou  $H_D$  est définie par

$$H_D = c\vec{\alpha}\vec{P} + ic\mu\vec{\gamma}\vec{E} - \mu c\gamma^0\vec{\Sigma}\vec{B} + mc^2\gamma^0, \quad (11.))$$

pour  $\vec{B} = \vec{0}$ , cet l'Hamiltonien devient :

$$H_D = c\vec{\alpha}\vec{P} + ic\mu\vec{\gamma}\vec{E} + mc^2\gamma^0. \quad (12.))$$

En comparant l'équation 12.)) avec 3.), on peut voir, que l'oscillateur de Dirac est simplement un cas particulier des particules neutres de Dirac dans un champ électrique extérieur dont on peut faire la transformation suivante :

$$\mu\vec{E} \mapsto m\omega\vec{r} \quad (13.))$$