



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Tébessi -Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et informatique

Optimisation Sans Contraintes

Conformément aux programmes 3^{ème} année licence

LMD : Mathématiques

Dr : DEGAICHIA HAKIMA

OCTOBRE 2020

E-mail : [hakima.degaichia @ univ-tebessa.dz](mailto:hakima.degaichia@univ-tebessa.dz)

Table des matières

Introduction	iii
1 Ensembles Convexes et Théorèmes de Séparation:	1
1.1 Ensembles Convexes :	1
1.1.1 Définitions :	1
1.2 Exemples D'enveloppes Convexes :	3
2 Fonctions convexes	8
2.1 Définitions et Propriétés générales	8
2.2 Sous Gradient et sous différentiel	11
2.3 Fonctions convexes et différentiables	17
2.3.1 Fonctions convexes une fois différentiables	17
2.3.2 Fonctions convexes deux fois différentiables	19
3 Optimisation Convexe	23
3.1 Définitions et Exemples :	23
3.2 Propriétés fondamentales des programmes convexe	24
3.3 conditions d'optimalité des problème d'optimisation convexe :cas général	26
3.4 Condition d'optimalité des problemes d'optimisation convexe et différentiable	29
4 Optimisation sans contraintes	32
4.1 Direction de descente	33
4.2 Schéma général des algorithmes	34
4.3 Résultats d'existence et d'unicité	35
4.4 Conditions d'optimalité	38
4.5 Optimisation unidimensionnelle	40

4.5.1	Principe de méthode de descente	40
4.5.2	Recherche linéaire	44
4.5.3	Les recherches linéaires exactes	44
4.5.4	Recherches linéaires inexactes	46
4.6	Convergence des méthodes.	54
4.6.1	La condition de Zoutendijk	54
4.6.2	Notion de convergence globale	56
4.6.3	Notion de vitesse de convergence	56
4.7	Convergence des algorithmes et fonctions multivoques	57
5	Algorithmes d'optimisation sans contrainte	62
5.1	Méthode de la plus forte pente	62
5.1.1	Algorithme de la méthode de la plus forte pente	64
5.1.2	Inconvénients de la méthode de la plus forte pente	64
5.1.3	Quelques remèdes	65
5.1.4	Convergence de la méthode de la plus forte pente	66
5.2	Méthodes quasi-Newtoniennes	69
5.2.1	Méthode de Newton	69
5.2.2	Méthodes de Quasi-Newton	72
5.2.3	Formules de mise à jour de l'approximation du Hessien	73
5.2.4	Méthode de correction de rang un (SR1 [1960])	74
5.2.5	Méthode de Davidon-Fletcher-Powell (DFP)	78
5.2.6	Méthode de Broyden-Fletcher-Goldfard-Shanno (BFGS [1970])	85
5.2.7	Les méthodes de la classe Broyden	90
6	Travaux dirigés et travaux pratiques	92
6.1	Travaux dirigés	92
6.1.1	Solutions	100
6.2	Travaux pratiques	132
6.2.1	Solutions	134

Introduction

Les problèmes d'optimisation différentiable se posent lorsque l'on cherche à déterminer la valeur optimale d'un nombre fini de paramètres. L'optimalité signifie ici la minimalité d'un critère donné. La différentiabilité supposée des fonctions qui définissent le problème écarte d'emblée de notre propos l'optimisation combinatoire (les paramètres à optimiser ne prennent que des valeurs entières ou discrètes) et l'optimisation non lisse (les fonctions ont des irrégularités).

L'optimisation est un sujet très ancien. Taylor [1685-1731], Newton [1643-1727], Lagrange [1736-1813] et Cauchy [1789-1857] ont élaboré les bases des développements limités. L'optimisation a connu un nouvel essor depuis l'apparition des ordinateurs et s'applique désormais dans de très nombreux domaines : économie, gestion, planification, logistique, automatique, robotique, conception optimale, science de l'ingénieur, traitement du signal, etc.

Les méthodes numériques de l'optimisation ont principalement été développées après la seconde guerre mondiale, en parallèle avec l'amélioration des ordinateurs, et n'ont cessé depuis de s'enrichir. En optimisation non linéaire, on peut ainsi distinguer plusieurs vagues : méthodes de pénalisation, méthode du lagrangien augmenté (1958), méthodes de quasi-Newton (1959), méthodes newtoniennes ou SQP (1976), algorithmes de points intérieurs (1984). Une vague n'efface pas la précédente mais permet d'apporter de meilleures réponses à certaines classes de problèmes, comme ce fut le cas pour les méthodes de points intérieurs en optimisation semi-définie positive (SDP). Une attention particulière sera portée aux algorithmes pouvant traiter les problèmes de grande taille, ceux qui se présentent dans les applications.

Chapitre 1

Ensembles Convexes et Théorèmes de Séparation:

1.1 Ensembles Convexes :

1.1.1 Définitions :

Définition 1.1.1 Soit S un sous ensemble de \mathbb{R}^n . S est dit convexe si et seulement si

$$\forall x_1, x_2 \in S, \forall \lambda \in [0, 1], \quad \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S.$$

Soit

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda_j \text{ telle que } \lambda_j \geq 0 \text{ et } \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1$$

Tout expression de la forme suivante : $\sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$ s'appelle combi-

naison convexe des points x_j ou barycentre.

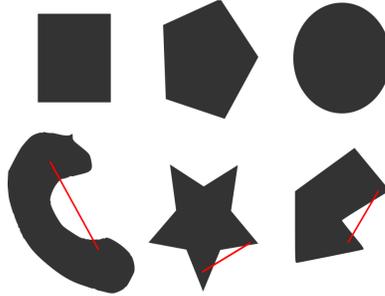


Figure 1.1

Figure 1.1 – En haut : quelques exemples des ensembles convexes en 2 dimensions. En bas : quelques exemples des ensembles non convexes (notez qu'il existe des segments dont les extrémités appartiennent à l'ensemble, qui ne sont pas entièrement contenus dans les ensembles).

Définition 1.1.2 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$. On appelle enveloppe convexe de S et on le note $H(S)$ l'ensemble de toutes les combinaisons convexe de S , en d'autres termes :

$$x \in H(S) \iff \exists x_1, x_2, \dots, x_k \in S \text{ et } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}_+$$

$$\text{telque } \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1 \quad \text{et} \quad x = \sum_{j=1}^k \lambda_j x_j$$

1.2 Exemples D'enveloppes Convexes :

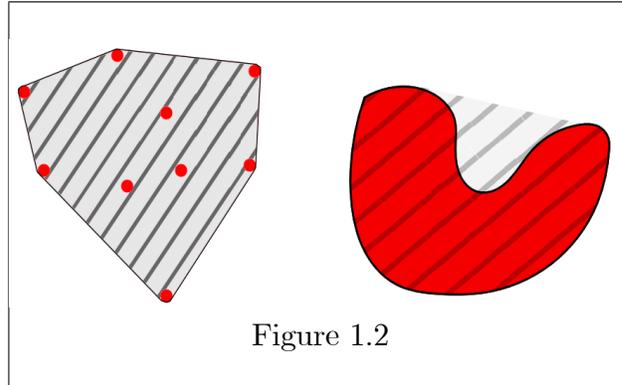


Figure 1.2

Figure 1.2 – Exemples d'enveloppes convexes. A gauche : enveloppe convexe d'un ensemble discret. A droite : enveloppe convexe d'un ensemble continu.

Proposition 1.2.1 : Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ quelconque alors $H(S)$ est un Convexe , C'est aussi le plus petit Convexe qui Contient S .

Preuve. Soient $x \in H(S)$ et $y \in H(S)$ alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l)$, $x_1, x_2, \dots, x_p \in S$, $y_1, y_2, \dots, y_l \in S$

$$\text{telles que } \lambda_j \geq 0, \mu_j \geq 0, \sum_{j=1}^p \lambda_j = 1, \sum_{j=1}^l \mu_j = 1$$

$$\text{et } x = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_p x_p, y = \mu_1 y_1 + \dots + \mu_l y_l$$

Soit $\beta \in [0, 1]$

$$\beta x + (1 - \beta)y = \beta \lambda_1 x_1 + \dots + \beta \lambda_p x_p + (1 - \beta) \mu_1 y_1 + \dots + (1 - \beta) \mu_l y_l$$

avec

$$\beta(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p) + (1 - \beta)(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_l) = \beta + (1 - \beta) = 1$$

donc $\beta x + (1 - \beta)y$ est un barycentre des points

$x_1, x_2, \dots, x_p, y_1, y_2, \dots, y_l$ appartenant à S . $\beta x + (1 - \beta)y$ appartient donc à $H(S)$ et par suite $H(S)$ est convexe.

Notons par ρ le plus petit convexe qui contient l'ensemble S . on doit démontrer que $H(S) = \rho$.

CHAPITRE 1. ENSEMBLES CONVEXES ET THÉORÈMES DE
SÉPARATION:

1. $\rho \subset H(S)$ car ρ est le plus petit convexe qui contient S et $H(S)$ est un convexe contenant S aussi (si $x \in S, x = 1.x \in H(S)$, donc $S \subset H(S)$).

2. $H(S) \subset \rho$.en effet on a $S \subset \rho \implies H(S) \subset H(\rho)$ et $H(\rho) = \rho$ car ρ est convexe. ■

Proposition 1.2.2 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$.L'intersection de tout les Convexe contenant S est le plus petit convexe qui contient S .

Preuve. Notons par β une telle intersection; $\beta = \bigcap_{i \in I} S_i$, S_i convexe

contenant S . On a.

a) β est un ensemble convexe .

b) $S \subset \beta$

c) Soit S^* un convexe quelconque qui contient S . alors $\exists i_0 \in I$ tel que $S^* = S_{i_0}$. donc $\beta \subset S_{i_0}$. ■

Proposition 1.2.3 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ un convexe non vide et $x_1 \in \bar{S}$ et $x_2 \in \text{int}(S)$ et $\lambda \in]0, 1[$, alors :

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{int}(S)$$

Preuve. $x_2 \in \text{int}(S) \implies \exists \varepsilon > 0$ tel que $B_0(x_2, \varepsilon) \subset S$, ou en d'autres termes $\{Z : \|z - x_2\| < \varepsilon\} \subset S$.

Considérons $y = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ ($\implies x_2 = \frac{y - \lambda x_1}{1 - \lambda}$)

Montrons qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ telle que $B_0(y, \varepsilon_1) \subset S$. En effet choisissons $\varepsilon_1 = (1 - \lambda)\varepsilon$ et prouvons que :

$$\left\{ z : \|z - y\| < \underbrace{(1 - \lambda)\varepsilon}_{\varepsilon_1} \right\} \subset S$$

en effet considérons z tel que $\|z - y\| < (1 - \lambda)\varepsilon$.

$$x_1 \in \bar{S} \implies \left\{ x : \|x - x_1\| < \frac{(1 - \lambda)\varepsilon - \|z - y\|}{\lambda} \right\} \cap S \neq \Phi.$$

plus particulièrement , il existe $z_1 \in S$ telque

$$\|z_1 - x_1\| < \frac{(1 - \lambda)\varepsilon - \|z - y\|}{\lambda}$$

1.2. EXEMPLES D'ENVELOPPES CONVEXES :

Soit z_2 telque :

$$z_2 = \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda} \implies \mathbf{z} = \lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2$$

Démontrons que

$$z_2 \in B_0(x_2, \varepsilon)$$

en encore : $\|z_2 - x_2\| < \varepsilon$. En effet

$$\begin{aligned} \|z_2 - x_2\| &= \left\| \frac{z - \lambda z_1}{1 - \lambda} - x_2 \right\| \\ &= \left\| \frac{z - \lambda z_1 - (y - \lambda x_1)}{1 - \lambda} \right\| \\ &\leq \frac{1}{1 - \lambda} (\|z - y\| + \lambda \|x_1 - z_1\|) \\ &< \frac{1}{1 - \lambda} (\|z - y\| + \frac{(1 - \lambda)\varepsilon - \|z - y\|}{\lambda}) \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

étant donné que ε à été choisi de sorte que $B_0(x_2, \varepsilon) \subset S$. et puisque $z_1 \in S$ et $z_2 \in S$.

S est convexe alors :

$$\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2 = z \in S$$

Donc

$$\exists \varepsilon_1 > 0 : B_0(y, \varepsilon_1) \subset S$$

Ce qui veut dire exactement que $y \in \text{int}(S)$. ■

Figure 1.3 : un ségment joignant un point interieur avec un point frontière de S

Corollaire 1.2.1 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ telque S est Convexe et $\text{int}(S) \neq \Phi$ alors $\text{int}(S)$ est convexe .

Preuve. Soit $x_1 \in \text{int}(S)$ alors $x_1 \in \bar{S}$. Considérons un autre point $x_2 \in \text{int}(S)$. d'après la Proposition 1.2.3.

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{int}(S).$$

Ce que implique que $\text{int}(S)$ est convexe . ■

Corollaire 1.2.2 Soit $S \subset \mathbb{R}^n, S$ convexe $\text{int}(S) \neq \Phi$, alors \bar{S} . est convexe.

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in \bar{S}$ et $z \in \text{int}(S)$, d'après la proposition 1.2.3 ,

$$\lambda x_2 + (1 - \lambda)z \in \text{int}(S).$$

Appliquons encore une la Proposition 1.2.3

au point $x_1 \in \bar{S}$ et au point $\lambda x_2 + (1 - \lambda)z \in \text{int}(S)$, on aura pour $\mu \in]0, 1[$

$$\mu x_1 + (1 - \mu)[\lambda x_2 + (1 - \lambda)z] \in \text{int}(S) \subset S$$

par passage à la limite quand $\lambda \rightarrow 1$

$$\mu x_1 + (1 - \mu)x_2 \in \bar{S}$$

Ceci implique que \bar{S} est convexe. ■

Définition 1.2.1 L'enveloppe convexe d'un nombre fini de points x_1, x_2, \dots, x_{k+1} dans \mathbb{R}^n s'appelle polytope .Si $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}$ sont tels que :

$x_2 - x_1, x_3 - x_1, \dots, x_k - x_1, x_{k+1} - x_1$ sont linéairement indépendants alors $H(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1})$ s'appelle simplexe avec les points x_1, x_2, \dots, x_{k+1} .

Remarque 1.2.1 Dans \mathbb{R}^n il n'existe pas de simplexe avec plus de $(n + 1)$ points.

1.2. EXEMPLES D'ENVELOPPES CONVEXES :

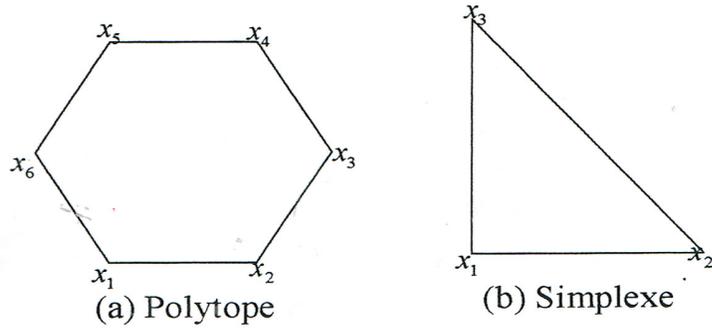


Figure 1.4 : Polytope et simplexe

Chapitre 2

Fonctions convexes

2.1 Définitions et Propriétés générales

Soient $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, où S est convexe non vide de \mathbb{R}^n . f est dit convexe dans S ssi $\forall x_1, x_2 \in S$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

f est dit strictement convexe dans S ssi $\forall x_1, x_2 \in S$ et $\forall \lambda \in [0, 1]$

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \quad \forall x_1 \neq x_2$$

f est dit concave dans S (strictement concave dans S) ssi $(-f)$ est convexe (strictement convexe dans S)

2.1. DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

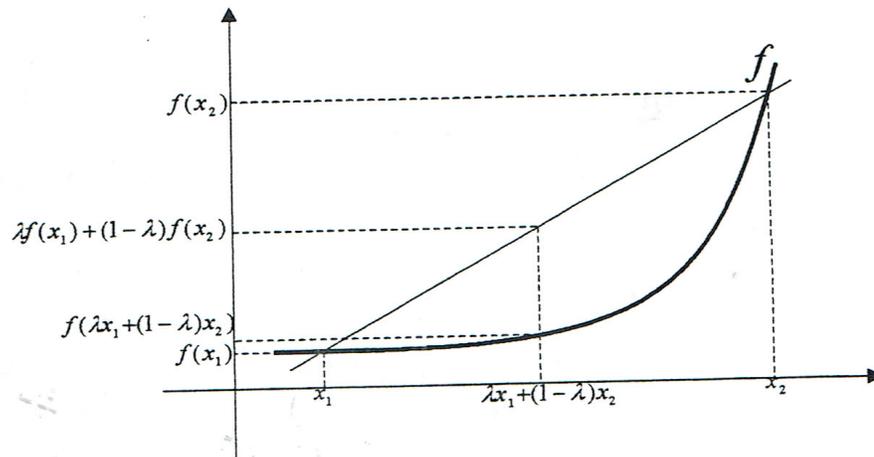


Figure 2.1 : Fonction convexe

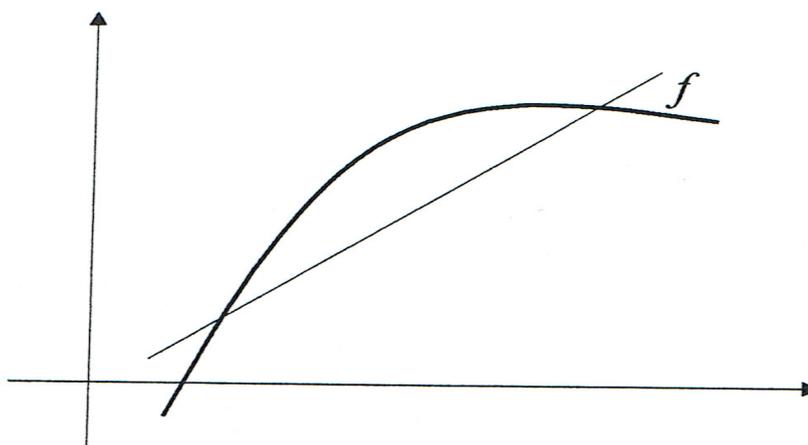


Figure 2.2 : Fonction concave

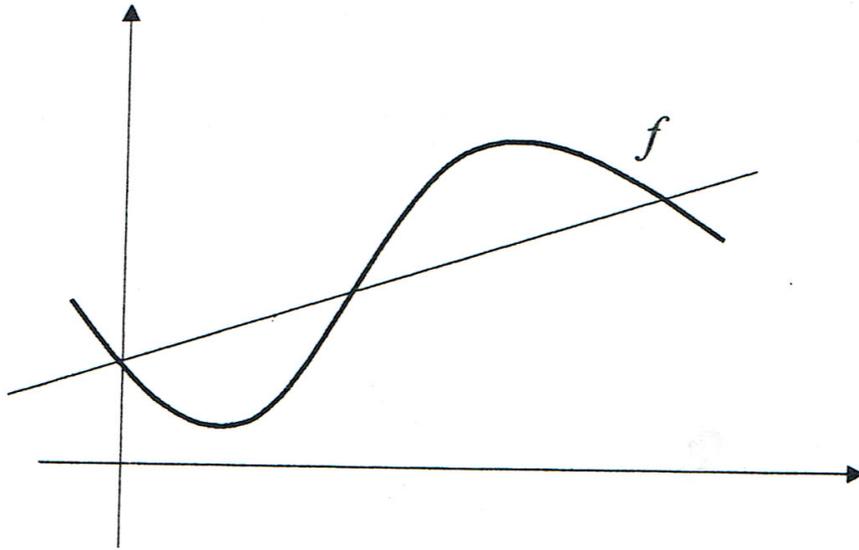


Figure 2.3 :Fonction ni convexe ni concave

Proposition 2.1.1 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe non vide , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $\alpha \in \mathbb{R}$,alors l'ensemble $S_\alpha = \{x \in S : f(x) \leq \alpha\}$ est convexe.

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in S_\alpha \iff f(x_1) \leq \alpha$ et $f(x_2) \leq \alpha$. Démontrons que pour $\lambda \in [0, 1]$.

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in S_\alpha.$$

en effet

$$\begin{aligned} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) &\leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \\ &\leq \alpha\lambda + (1 - \lambda)\alpha = \alpha. \end{aligned}$$

■

Théorème 2.1.1 (Continuité des foctions convexe) Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe non vide et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe .alors f est continue dans $\text{int}(s)$.

2.2. SOUS GRADIENT ET SOUS DIFFÉRENTIEL

Définition 2.1.1 Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ Convexe non vide et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in S$ et $d \in \mathbb{R}^n$ non null tel que : $\hat{x} + \lambda d \in S$ pour $\lambda > 0$ assez petit. la dérivée directionnelle de f au point \hat{x} dans la direction d , qu'on note $\acute{f}'(\hat{x}, d)$ est donné par la Limite Suivante si elle existe

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda}$$

Théorème 2.1.2 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe non vide et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in S$ et $d \in \mathbb{R}^n$ non null alors $\acute{f}'(\hat{x}, d)$ existe.

Remarque 2.1.1 Le Théorème 2.1.2 est un cas particulier de ce résultat :

$S \subset \mathbb{R}^n$ convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $\hat{x} \in \text{int}(S)$. alors $\acute{f}'(\hat{x}, d)$ existe.

2.2 Sous Gradient et sous différentiel

Beaucoup de problèmes concrets aboutissent après modélisation à des problèmes d'optimisation où la fonction objectif ou les contraintes ne sont pas nécessairement différentiables. les notions de sous gradient et sous différentiel permettent non seulement d'aborder ces problèmes non différentiables mais aussi d'avoir des résultats qui ressemblent dans un certain sens aux résultats de l'optimisation différentiable.

Définition 2.2.1 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, l'épigraphe de f qu'on note par $\text{epi}(f)$ est un sous ensemble de \mathbb{R}^{n+1} défini par

$$\{(x, y) \in S \times \mathbb{R}, y \geq f(x)\}$$

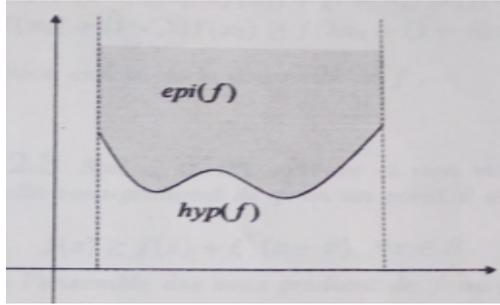


Figure 2.4 : Epigraphe d'une fonction

Théorème 2.2.1 Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. alors f est convexe ssi $\text{epi}(f)$ est convexe.

Preuve. Supposons que f est Convexe. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) appartenant à $\text{epi}(f)$. On a

$$y_1 \geq f(x_1) \text{ et } y_2 \geq f(x_2).$$

Soit $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 &\geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \\ &\geq f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2]. \end{aligned}$$

donc

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) \in \text{epi}(f).$$

puisque

$$(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \lambda(x_1, y_1) + (1 - \lambda)x_2(x_2, y_2).$$

On en déduit que $\text{epi}(f)$ est convexe.

2.2. SOUS GRADIENT ET SOUS DIFFÉRENTIEL

Réciproquement supposons que $\text{epi}(f)$ est Convexe. Soient $x_1, x_2 \in S$ remarquons que $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$ appartiennent à $\text{epi}(f)$ qui est convexe donc

$$\lambda(x_1, f(x_1)) + (1 - \lambda)(x_2, f(x_2)) \in \text{epi}(f)$$

$$\implies (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)) \in \text{epi}(f)$$

$$\implies \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2].$$

et ceci est la définition exacte de la convexité de f . ■

Définition 2.2.2 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe et non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ Convexe. ξ est appelé sous-gradient de f au point \hat{x}

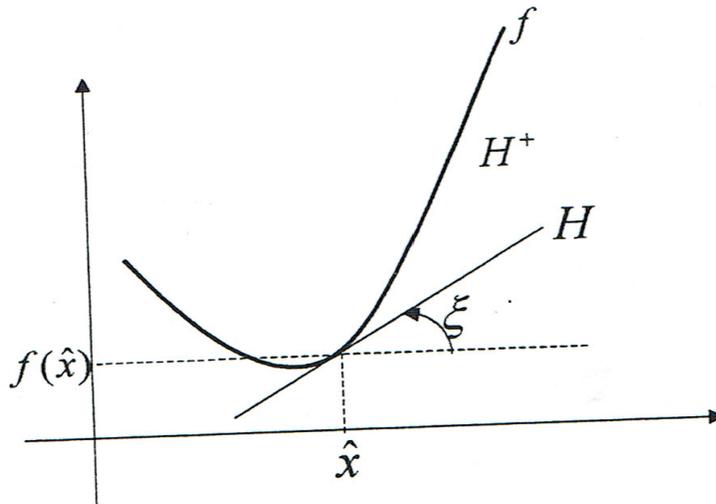


Figure 2.5 : Notion de sous-gradient

Remarque 2.2.1 on peut remarquer que la fonction $f(\hat{x}) + \xi^T(x - \hat{x})$ correspond à l'hyperplan qui supporte l'épigraphe de f au $(\hat{x}, f(\hat{x}))$.

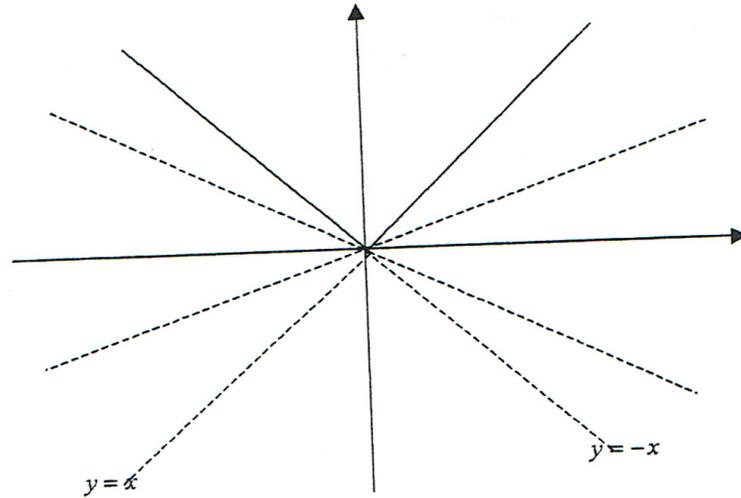


Figure 2.6 : Illustration de la fonction $f(x) = |x|$

Théorème 2.2.2 Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe non vide et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $\hat{x} \in \text{int}(S)$, alors il existe un vecteur ξ tel que l'hyperplan suivant

$$H = \{(x, y) : y = f(\hat{x}) + \xi^\top(x - \hat{x})\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$$

Supporte $\text{epi}(f)$ au point $(\hat{x}, f(\hat{x}))$. En Particulier

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi^\top(x - \hat{x}) \forall x \in S$$

C'est à dire que f admet au point \hat{x} au moins un sous gradient ξ .

Preuve. $\text{epi}(f)$ est convexe non vide $((\hat{x}, f(\hat{x})) \in \text{frontière } \text{epi}(f)$ qui est Fermé) donc il existe (ξ_0, μ) non nul telque :

$$\xi_0^\top(x - \hat{x}) + \mu(y - f(\hat{x})) \leq 0, \forall (x, y) \in \text{epi}(f) \quad (2.1)$$

Montrons que $\mu < 0$.

2.2. SOUS GRADIENT ET SOUS DIFFÉRENTIEL

D'abord montrons que $\mu \leq 0$. En effet si $\mu > 0$. (2.1) serait impossible du fait que y peut prendre des valeurs aussi grandes que l'on veuille. Supposons maintenant que $\mu = 0$, Alors (2.1) devient

$$\xi_0^\top(x - \hat{x}) \leq 0, \forall x \in S \quad (2.2)$$

$$\hat{x} \in \text{int}(S) \implies \exists \lambda > 0 \text{ telque } \hat{x} + \lambda \xi_0 \in S$$

$$(2.2) \implies \lambda \xi_0^\top \xi \leq 0, (\xi_0, \mu) = (0, 0) \text{ contradiction.}$$

ou encore

$$\lambda \|\xi_0\|^2 \leq 0 \implies \xi_0 = 0$$

D'ou finalement

$$(\xi_0, \mu) = (0, 0)$$

Contradiction avec le choix du vecteur (ξ_0, μ) non nul, donc $\mu < 0$.

Ceci étant ,considérons maintenant le vecteur $\xi = \frac{\xi_0}{|\mu|}$,divisons (2,1) par $|\mu|$ on obtient

$$\xi^\top(x - \hat{x}) + (f(\hat{x}) - y) \leq 0, \quad \forall (x, y) \in \text{epi}(f)$$

on encore

$$y \geq f(\hat{x}) + \xi^\top(x - \hat{x}), \quad \forall (x, y) \in \text{epi}(f)$$

Remarquons que $\forall x \in S, (x, f(x)) \in \text{epi}(f)$.par conséquent et d'après la dernière relation on a :

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi^\top(x - \hat{x}), \forall x \in S$$

Cela veut dire exactement que f admet un sous gradient ξ au point \hat{x} . ■

Théorème 2.2.3 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ strictement convexe et $\hat{x} \in \text{int}(S)$, alors il existe $\xi \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in S \quad x \neq \hat{x} :$

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi^\top(x - \hat{x})$$

Preuve. f strictement convexe $\implies f$ convexe .D'après le théorème 2.2.2, $\exists \xi \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\forall x \in S : f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi^\top(x - \hat{x}) \quad (2.3)$$

supposons le contraire du théorème 2.2.3 .alors

$$\exists \tilde{x} \neq \hat{x} \text{ et } f(\tilde{x}) = f(\hat{x}) + \xi^\top(\tilde{x} - \hat{x})$$

f est strictement convexe.

$$\begin{aligned} f[\lambda\hat{x} + (1 - \lambda)\tilde{x}] &< \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda)f(\tilde{x}) & (2.4) \\ &= \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda)[f(\hat{x}) + \xi^\top(\tilde{x} - \hat{x})] \\ &= f(\hat{x}) + (1 - \lambda)\xi^\top(\tilde{x} - \hat{x}) \end{aligned}$$

En posant $x = \lambda\hat{x} + (1 - \lambda)\tilde{x}$ dans (2.3)

$$\begin{aligned} f[\lambda\hat{x} + (1 - \lambda)\tilde{x}] &\geq f(\hat{x}) + \xi^\top[\lambda\hat{x} + (1 - \lambda)\tilde{x} - \hat{x}] \\ &= f(\hat{x}) + \xi^\top(1 - \lambda)(\tilde{x} - \hat{x}), \end{aligned}$$

contradiction avec (2.4). ■

Théorème 2.2.4 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.on suppose que f admet en chaque point $\hat{x} \in \text{int}(S)$ un sous gradient ξ ,c'est à dire

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi^\top(\hat{x} - x), \forall x \in S.$$

Alors f est convexe dans $\text{int}(S)$.

Preuve. Soient $x_1, x_2 \in \text{int}(S)$ et $\lambda \in]0, 1[$, $\text{int}(S)$ est convexe .Donc

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \text{int}(S)$$

D'après l'hypothèse du théorème : $\exists \xi$ un sous gradient de f en $(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)$,c'est-a-dire

$$\forall x \in S : f(x) \geq f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] + \xi^\top[x - (\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)] \quad (2.5)$$

Donc (2.5) prenons $x = x_1$,on obtient

$$f(x_1) \geq f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] + \xi^\top(1 - \lambda)(x_1 - x_2) \quad (2.6)$$

2.3. FONCTIONS CONVEXES ET DIFFÉRENTIABLES

prenons maintenant $x = x_2$ on aura

$$f(x_2) \geq f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] + \lambda \xi^\top (x_1 - x_2) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot (2.6) + (1 - \lambda) \cdot (2.7) &\implies \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \geq f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \\ &\implies f \text{ est convexe dans } \text{int}(S) \end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.2 Remarquons que l'existence d'un sous gradient n'est assurée qu'aux points intérieurs de S . Bientôt sur si l'ensemble S est ouvert, l'existence du sous gradient est assurée partout dans S .

Corollaire 2.2.1 soit $S \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f admet en chaque point $x \in \text{int}(S)$ un sous-gradient ζ avec

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \zeta^\top (\hat{x} - x), \forall x \in S, x \neq \hat{x}$$

Alors f est strictement convexe dans $\text{int}(S)$.

Preuve. Elle est exactement identique à la preuve du théorème 2.2.4. Les inégalités large sont remplacées par des inégalités strictes. ■

2.3 Fonctions convexes et différentiables

2.3.1 Fonctions convexes une fois différentiables

Définition 2.3.1 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\hat{x} \in \text{int}(S)$. f est dite différentiable au point \hat{x} , s'il existe un vecteur $A \in \mathbb{R}^n$ et une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{x}) + A^\top (x - \hat{x}) + \|x - \hat{x}\| \alpha(\hat{x}, x - \hat{x}) \\ \hat{\alpha} &: \alpha(\hat{x}, x - \hat{x}) \xrightarrow{x \rightarrow \hat{x}} 0. \end{aligned}$$

On montre dans le calcul différentiel que

$$A = \nabla f(\hat{x}) = \left(\frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f(\hat{x})}{\partial x_n} \right)$$

Théorème 2.3.1 Soit $s \subset \mathbb{R}^n$ convexe et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et $\hat{x} \in \text{int}(s)$. On suppose que f est différentiable au point \hat{x} , alors f admet en \hat{x} un seul sous gradient qui est $\nabla f(\hat{x})$. C'est-à-dire :

$$\partial f(\hat{x}) = \{ \nabla f(\hat{x}) \}.$$

Preuve. Théorème 2.2.2 $\implies \partial f(\hat{x}) \neq \emptyset$. Soit ξ un sous gradient appartenant à $\partial f(\hat{x})$. On a pour tout $d \in \mathbb{R}^n$ et pour un certain λ Choisi suffisamment petit ($\lambda > 0$)

$$f(\hat{x} + \lambda d) \geq f(\hat{x}) + \lambda \xi^\top d \tag{2.8}$$

f est différentiable en \hat{x}

$$f(\hat{x} + \lambda d) = f(\hat{x}) + \lambda \nabla f(\hat{x})^\top d + \lambda \|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d) \tag{2.9}$$

Soit en portant (2.9) dans (2.8) on obtient :

$$\lambda \{ d[\xi - \nabla f(\hat{x})^\top] - [\|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d)] \} \leq 0$$

$$d(\xi - \nabla f(\hat{x}))^\top \leq 0, \forall d \in \mathbb{R}^n \tag{2.10}$$

prenons $d = \xi - \nabla f(\hat{x})$, (2.10) devient

$$\|\xi - \nabla f(\hat{x})\| \leq 0.$$

Ceci implique nécessairement que

$$\xi = \nabla f(\hat{x}). \tag{2.11}$$

■

Théorème 2.3.2 Soit $s \subset \mathbb{R}^n$ convexe, non vide, ouvert et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable dans S , alors :

f est convexe dans S ssi pour tout $\hat{x} \in S$

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}), \forall x \in S$$

b) De même f est strictement convexe dans S si et seulement si pour tout $\hat{x} \in S$

$$f(x) \succ f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}), \forall x \in S \quad x \neq \hat{x}$$

Preuve. a) Supposons que f est convexe et que S est ouvert. Puisque $\text{int}(S) = S$ est d'après le théorème (2.2.2), f admet en tout point $\hat{x} \in S$ un sous gradient qui est (d'après le théorème 2.3.2) $\nabla f(\hat{x})$. Donc d'après la définition du sous gradient, on a

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}), \forall x \in S.$$

Réciproquement si la relation (2.11) est vérifiée pour tout $\hat{x} \in \text{int}(S) = S$, alors d'après le théorème (2.2.4), f est convexe dans l'ensemble $\text{int}(S) = S$.

b) La preuve est exactement la même que celle de (a) en utilisant le théorème (2.2.3) et le corollaire (2.2.1). ■

2.3.2 Fonctions convexes deux fois différentiables

Définition 2.3.2 Soit $s \subset \mathbb{R}^n$ non vide et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. f est dite deux fois différentiable au point $\hat{x} \in \text{int}(S)$ s'il existe un vecteur $\nabla f(\hat{x})$ et une matrice symétrique $H(\hat{x})$ d'ordre (n, n) appelée matrice hessienne, et une fonction $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in S : f(x) = f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} (x - \hat{x})^\top H(\hat{x}) (x - \hat{x}) + \|x - \hat{x}\|^2 \alpha(\hat{x}, x - \hat{x})$$

$$\text{avec} \quad : \quad \alpha(\hat{x}, x - \hat{x}) \xrightarrow{x \rightarrow \hat{x}} 0$$

On montre que (voir calcul différentiel) que si f est deux fois différentiable au point \hat{x} alors

$$H(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 f(\hat{x})}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

Définition 2.3.3 a) La matrice $H(\hat{x})$ est dite semi-définie positive

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^\top H(\hat{x})x \geq 0$$

b) $H(\hat{x})$ est dite définie positive

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : x^\top H(\hat{x})x > 0$$

Théorème 2.3.3 Soit $s \subset \mathbb{R}^n$ non vide, convexe et ouvert et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable dans S . Alors f est convexe dans S si et seulement si la matrice hessienne de f est semi-définie positive en tout point $\hat{x} \in S$.

Preuve. Supposons que f est convexe dans S . Soit $\hat{x} \in S$, montrons que $H(\hat{x})$ est semi-définie positive, c'est montrons que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : x^\top H(\hat{x})x \geq 0$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Il existe $\lambda > 0$ suffisamment petit tel que $\hat{x} + \lambda x \in S$. Théorème 2.3.1 et théorème 2.3.2 implique que

$$f(\hat{x} + \lambda x) \geq f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top x \tag{2.13}$$

2.3. FONCTIONS CONVEXES ET DIFFÉRENTIABLES

f est deux fois différentiable en \hat{x} , alors

$$f(\hat{x} + \lambda x) = f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top x + \frac{1}{2} \lambda^2 x^\top H(\hat{x}) x + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\hat{x}, x) \quad (2.14)$$

Soit en reportant (2.14) dans (2.13) on obtient

$$\frac{1}{2} \lambda^2 x^\top H(\hat{x}) x + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\hat{x}, \lambda x) \geq 0 \quad (2.15)$$

Divisons (2.15) par λ^2 et tendons $\lambda \rightarrow 0_+$ on obtient

$$x^\top H(\hat{x}) x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

On ne peut pas appliquer la même preuve pour démontrer que : Si f est strictement convexe, alors H est définie positive car le passage à la limite de l'inégalité stricte.

$$\frac{1}{2} \lambda^2 x^\top H(\hat{x}) x + \lambda^2 \|x\|^2 \alpha(\hat{x}, \lambda x) > 0$$

ne donne pas nécessairement

$$x^\top H(\hat{x}) x > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0,$$

mais plutôt

$$x^\top H(\hat{x}) x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Réciproquement : Supposons que $H(x)$ est semi-définie positive en tout point $x \in S$. Soit $x, \hat{x} \in S$. Alors on a d'après la formule de Taylor avec reste de Lagrange

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) + \frac{1}{2} (x - \hat{x})^\top H(\xi) (x - \hat{x}), \xi \in]x, \hat{x}[\\ &\Rightarrow f(x) - f(\hat{x}) - \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) = \frac{1}{2} (x - \hat{x})^\top H(\xi) (x - \hat{x}) \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} \xi \in S &\implies (x - \hat{x})^\top H(\xi) (x - \hat{x}) \geq 0 \\ &\implies f(x) \geq f(\hat{x}) + \nabla f(\hat{x})^\top (x - \hat{x}) \end{aligned}$$

Ceci implique (voir théorème 2.3.2) que f est convexe dans S . ■

Théorème 2.3.4 Soient $s \subset \mathbb{R}^n$ non vide, ouvert convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Si $H(x)$ est définie positive en tout $x \in S$. alors f est strictement convexe dans S .

Preuve. C'est exactement la même preuve que la réciproque du théorème 2.3.3, en remplaçant les inégalités larges du théorème 2.3.3 par des inégalités strictes. ■

Chapitre 3

Optimisation Convexe

Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ non vide et convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et (PC) le problème d'optimisation suivant :

$$\{\min f(x) : x \in S\} (PC)$$

Nous dirons dans ce cas que (PC) est un problème d'optimisation convexe .puisque toute fonction linéaire est convexe et que tout polyédre est aussi convexe ,les problèmes de minimisation linéaires sont convexe. Les problème d'optimisation convexe posèdent des propriétés exceptionnelles .Citons deux fondamentales .

La première est que si \hat{x} est une solution optimale local elle est aussi solution globale.La seconde est la suivante :

si S est convexe ouvert et si f :est différentiable alors

$\nabla f(\hat{x}) = 0$ est une condition nécessaire et suffisant d'optimalité ,alors que dans les problèmes non convexe ce n'est qu'une condition nécessaire d'optimalité local.

3.1 Définitions et Exemples :

Définition 3.1.1 Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ et (P) le problème d'optimisation suivant :

$$\{\min f(x) : x \in S\} (P)$$

a) Tout point $x \in S$ s'appelle solution réalisable de (P)

b) Soit $\hat{x} \in S$. \hat{x} est dite solution optimal globale de (P) si et si

$$\forall x \in S, \quad f(x) \geq f(\hat{x})$$

c) Soit $\hat{x} \in S$. \hat{x} est dite solution optimal locale (P) si et si il existe un voisinage $V_\epsilon(\hat{x})$ tel que

$$\forall x \in S \cap V_\epsilon(\hat{x}), \quad f(x) \geq f(\hat{x})$$

d) Soit $\hat{x} \in S$. \hat{x} est dite solution optimal locale stricte de (P) si et si il existe un voisinage $V_\epsilon(\hat{x})$ tel que

$$\forall x \in S \cap V_\epsilon(\hat{x}), \quad x \neq \hat{x} \quad f(x) \geq f(\hat{x})$$

e) Soit $\hat{x} \in S$. \hat{x} est dite solution optimal locale isolée de (P) si et si il existe un voisinage $V_\epsilon(\hat{x})$ tel que \hat{x} est la seule solution optimale locale de (P).

Remarque 3.1.1 *Toute solution optimal local isolée est une solution optimale locale stricte et la réciproque est en general fausse.*

exemple 3.1.1 $f(x) = cte$. *Tout point $\hat{x} \in S$ est un solution optimal globale et locale . IL n'existe ,locale stricte et locale isolée .*

exemple 3.1.2 $f(x) = |x|$. *Le point $\hat{x} = 0$ est en même temps une solution optimale locale ,globale, locale stricte et locale isolée.*

3.2 Propriétés fondamentales des programmes convexe

Théorème 3.2.1 *Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ non vide et convexe et $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et (PC) le problème d'optimisation convexe ou que suivant*

$$\{\min f(x) : x \in S\} (PC)$$

et $\hat{x} \in S$. On suppose que \hat{x} est une solution optimale locale de (PC) alors :

1) \hat{x} est aussi une solution optimale globale de (PC).

3.2. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES PROGRAMMES
CONVEXE

2) Si en plus f est strictement convexe ou que \hat{x} est un optimum local strict, alors \hat{x} est l'unique solution optimale globale de (PC)

Preuve. 1) Soit \hat{x} une solution optimale locale (PC). Alors il existe un voisinage $V_\epsilon(\hat{x})$ tel que

$$\forall x \in S \cap V_\epsilon(\hat{x}), \quad f(x) \geq f(\hat{x})$$

Supposons que \hat{x} n'est pas globale, alors il existe $\tilde{x} \in S$ tel que

$$f(\tilde{x}) < f(\hat{x})$$

f est convexe sur S , donc pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a :

$$\begin{aligned} f[\lambda(\tilde{x}) + (1 - \lambda)\hat{x}] &\leq \lambda f(\tilde{x}) + (1 - \lambda)f(\hat{x}) \\ &\leq \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda)f(\hat{x}) \\ &= f(\hat{x}) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Soit $V_\epsilon(\hat{x})$ un voisinage quelconque du point \hat{x} .

Puisque

$$S \cap V_\epsilon(\hat{x}) \cap \{x : x = \lambda(\tilde{x}) + (1 - \lambda)\hat{x}, \lambda \in [0, 1]\} \neq \Phi$$

alors $\lambda^* \in [0, 1]$ tel que

$$\lambda^*(\tilde{x}) + (1 - \lambda^*)\hat{x} \in S \cap V_\epsilon(\hat{x}) \cap \{x : x = \lambda(\tilde{x}) + (1 - \lambda)\hat{x}, \lambda \in [0, 1]\}$$

La relation (3.1) implique que

$$f[\lambda^*(\tilde{x}) + (1 - \lambda^*)\hat{x}] < f(\hat{x})$$

Ceci est contradiction avec le fait que \hat{x} est une solution optimale locale de (PC).

2) a) supposons que \hat{x} est une solution optimale locale stricte de (PC). D'après (1) \hat{x} est solution optimale globale. Reste à montrer qu'elle est unique.

Supposons le contraire. Alors il existe

$$\hat{x} \in S, \tilde{x} \neq \hat{x} \text{ et } f(\tilde{x}) = f(\hat{x})$$

Soit $\lambda \in [0, 1]$. Alors pour tout point

$$x_\lambda = \lambda\tilde{x} + (1 - \lambda)\hat{x}$$

on a :

$$\begin{aligned}\lambda f(\tilde{x}) + (1 - \lambda)f(\hat{x}) &= \lambda f(\hat{x}) + (1 - \lambda)f(\hat{x}) \\ &= f(\hat{x})\end{aligned}$$

Comme dans le point (1), pour tout voisinage $V_\epsilon(\hat{x})$ il existe $\lambda^* \in [0, 1]$ tel que

$$f(x_\lambda) \leq f(\hat{x})$$

Ceci est en contradiction avec le fait que \hat{x} est un solution optimale strict de (PC).

b) supposons que \hat{x} est une solution optimale locale de (PC) et que f est strictement convexe.

D'après (1) \hat{x} est solution optimal globale. Reste à montrer qu'elle est unique. Supposons le contraire. Alors il existe

$$\hat{x} \in S, \tilde{x} \neq \hat{x} \text{ et } f(\tilde{x}) = f(\hat{x})$$

Puisque f est strictement convexe, on aura pour le point

$$\tilde{x} = (1/2)\tilde{x} + (1/2)\hat{x} \in S$$

$$\begin{aligned}f(\tilde{x}) &< (1/2)f(\tilde{x}) + (1/2)f(\hat{x}) \\ &= (1/2)f(\hat{x}) + (1/2)f(\hat{x}) \\ &= f(\hat{x})\end{aligned}$$

Ceci est contradiction avec le fait que \hat{x} est un solution optimal globale . ■

3.3 conditions d'optimalité des problème d'optimisation convexe :cas général

Théorème 3.3.1 Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ non vide et convexe et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et (PC) le problème d'optimisation convexe suivant

$$\{\min f(x) : x \in S\} \text{ (PC)}$$

et $\hat{x} \in S$. Alors \hat{x} est une solution optimale de (PC) si et seulement si f admet en \hat{x} un sous gradient ε tel que

3.3. CONDITIONS D'OPTIMALITÉ DES PROBLÈME
D'OPTIMISATION CONVEXE :CAS GÉNÉRAL

$$\xi^t(x - \hat{x}) \geq 0$$

Preuve. a) supposons f admet en \hat{x} un sous gradient ξ tel que

$$\xi^t(x - \hat{x}) \geq 0, \quad \forall x \in S$$

étant un sous gradient de f au point \hat{x} , donc par définition nous avons

$$f(x) \geq f(\hat{x}) + \xi^t(x - \hat{x}) \geq 0, \quad \forall x \in S$$

$$\xi^t(x - \hat{x}) \geq 0, \quad \forall x \in S$$

implique que

$$f(x) \geq f(\hat{x}) \quad \forall x \in S$$

b) Supposons que \hat{x} est une solution optimale de (PC).

Considérons les deux ensemble suivants :

$$A_1 = \{(x - \hat{x}, y) : x \in \mathbb{R}^n, y > f(x) - f(\hat{x})\}$$

$$A_2 = \{(x - \hat{x}, y) : x \in S, y \leq 0\}$$

A_1 et A_2 sont convexe. Montrons que $A_1 \cap A_2 = \Phi$. En effet car si on suppose le contraire il extrait

$$(x^* - \hat{x}, y^*) \in A_1 \cap A_2$$

Donc

$$x^* \in S, y^* \leq 0 \text{ et } y^* > f(x^*) - f(\hat{x}).$$

Ceci implique nécessairement que

$$x^* \in S \text{ et } f(x^*) - f(\hat{x}) < 0$$

Ceci est contradiction avec le fait que \hat{x} est une solution optimal de (PC) A_1 et A_2 sont convexes et $A_1 \cap A_2 = \Phi$, alors il existe un hyperplan dans \mathbb{R}^{n+1} que sépare simplement A_1 et A_2 (séparation simple de deux ensemble convexes). En d'autres termes

$$\exists \varepsilon_0 \in \mathbb{R}^n, \mu_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \text{ telque } (\xi_0, \mu_0) \neq (\vec{0}, 0)$$

et

$$(\xi_0, \mu_0) + \mu_0 \cdot y \leq \alpha : x \in \mathbb{R}^n, y > f(x) - f(\hat{x}) \quad (3.2)$$

$$\xi^t(x - \hat{x}) - \mu_0 \cdot y \geq \alpha : x \in S, y \leq 0. \quad (3.3)$$

IL n'est difficile de montrer en faisant un bon choix de x , que les relations précédentes impliquent nécessairement que $\alpha = 0$ et que

$\mu_0 \leq 0$. Notons par $\xi_0 = -(\xi_0/\mu_0)$ et divisons (3.2) et (3.3) par $-\mu_0$, on obtient :

$$\xi^t(x - \hat{x}) - y \leq 0 : x \in \mathbb{R}^n, y > f(x) - f(\hat{x}) \quad (3.4)$$

$$\xi^t(x - \hat{x}) - y \geq 0, \quad x \in S, y \leq 0 \quad (3.5)$$

(3.5) donne pour

$$y = 0 : \xi^t(x - \hat{x}) \geq 0, \quad \forall x \in S \quad (3.6)$$

Montrons que (3.4) implique

$$f(x) - f(\hat{x}) \geq \xi^t(x - \hat{x}) : \forall x \in S. \quad (3.7)$$

En effet, supposons le contraire. Alors il existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x^*) - f(\hat{x}) \leq \xi^t(x^* - \hat{x}) \quad (3.8)$$

Donc il existe $y \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x^*) - f(\hat{x}) \leq y \leq \xi^t(x^* - \hat{x}) \quad (3.9)$$

(3.9) est en contradiction avec le fait que si

$$y \geq f(x^*) - f(\hat{x})$$

alors

$$y \geq \xi^t(x^* - \hat{x})$$

(voir (3.4)) De (3.6) et (3.7) on conclut qu'il existe un sous gradient ε tel que

$$\xi^t(x^* - \hat{x}) \geq 0 : \forall x \in S.$$

■

3.4. CONDITION D'OPTIMALITÉ DES PROBLEMES D'OPTIMISATION CONVEXE ET DIFFÉRENTIABLE

Théorème 3.3.2 Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ non vide, convexe et ouvert et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et (PC) le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\{\min f(x) : x \in S\} (PC)$$

et $\hat{x} \in S$. Alors \hat{x} est une solution optimale de (PC) si et seulement si f admet en \hat{x} un sous gradient nul.

Preuve. Du théorème 3.3.1 on déduit que \hat{x} une solution optimale de (PC) si et seulement si f admet en \hat{x} un sous gradient ξ tel que

$$\xi^t(x^* - \hat{x}) \geq 0 \quad : \forall x \in S. \quad (3.10)$$

si étant ouvert, il existe $\lambda > 0$ tel que $x_\lambda = \hat{x} - \lambda\xi \in S$. pour le point x_λ , la relation (3.10) donne

$$\xi^t(\lambda\xi) \geq 0$$

ou encore

$$-\lambda \|\xi\| > 0$$

Ceci implique, vu que $\lambda > 0$

$$\|\xi\| \leq 0$$

puisque

$$\|\xi\| \geq 0$$

Alors

$$\xi = 0$$

■

3.4 Condition d'optimalité des problèmes d'optimisation convexe et différentiable

Théorème 3.4.1 Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ non vide et convexe et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et (PC) le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\{\min f(x) : x \in S\} (PC)$$

et $\hat{x} \in S$. Alors \hat{x} est une solution optimale de (PC) si et seulement si

$$\nabla f(x)^\top (x - \hat{x}) \geq 0, \quad \forall x \in S \quad (3.11)$$

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 3.3.1 et du théorème 2.3.1. ■

Théorème 3.4.2 Soient $S \subset \mathbb{R}^n$ non vide et convexe et ouvert et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et (PC) le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\{\min f(x) : x \in S\} \text{ (PC)}$$

et $\hat{x} \in S$. Alors \hat{x} est une solution optimale de (PC) si et seulement si

$$\nabla f(x) = 0 \quad (3.12)$$

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème 3.3.2 et du théorème 2.3.1
■

exemple 3.4.1 considérons le problème d'optimisation convexe suivant :

$$\text{PC} \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } (x_1 - (3/2))^2 + (x_2 - 5)^2 \\ -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathbf{S} = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 11 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \end{array} \right\}$$

S est convexe fermé.

Pour caractériser les solutions optimales de problème (PC) on doit appliquer le théorème 3.4.1 et 3.4.2.

Remarquons d'abord que le point $(0, 0) \in S$ n'est pas solution optimale.

3.4. CONDITION D'OPTIMALITÉ DES PROBLÈMES
D'OPTIMISATION CONVEXE ET DIFFÉRENTIABLE

En effet soit

$$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n, (x_1, x_2) \neq (0, 0), \nabla f(x_1, x_2) = (2x_1 - 3, 2x_2 - 10).$$

Donc, $\nabla f(0, 0) = (-3, -10)$. Considérons maintenant la condition d'optimalité (3,11) appliqué au point $\hat{x} = (0, 0)$. Nous obtenons pour tout point $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$

$$\nabla f(0, 0)^t [(x_1, x_2) - (0, 0)] = (-3, -10)^t (x_1, x_2) = -3x_1 - 10x_2 < 0$$

car $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

considérons maintenant le point $\hat{x} = (1, 3)$. $\nabla f(1, 3) = (-1, -4)$.

La condition d'optimalité(3,11) appliqué au point donne

$$\begin{aligned} \nabla f(1, 3)^t [(x_1, x_2) - (1, 3)] &= (-1, -4)^t (x_1 - 1, x_2 - 3) \\ &= -x_1 + 1 - 4x_2 + 12 \\ &= (2 + x_1 - x_2) + (11 - 2x_1 - 3x_2) \end{aligned}$$

si $(x_1, x_2) \in S$, alors

$$(2 + x_1 - x_2) \geq 0 \quad \text{et} \quad (11 - 2x_1 - 3x_2) \geq 0$$

Donc

$$\nabla f(1, 3)^t [(x_1, x_2) - (1, 3)] \geq 0 \quad \forall (x_1, x_2) \in S$$

En appliquant la condition d'optimalité (3.11) au point $\hat{x} = (1, 3)$, on déduit que $\hat{x} = (1, 3)$ est une solution optimale de notre problème. D'ailleurs on pourrait voir graphiquement que le point $\hat{x} = (1, 3)$ est solution optimale.

Chapitre 4

Optimisation sans contraintes

Le problème que l'on étudie ici est celui de la recherche du minimum d'une fonction réelle f de n variables x_1, x_2, \dots, x_n .

Définition 4.0.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$, associe la valeur réelle

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) .$$

On cherche à résoudre le problème (P) :

$$(P) \quad \min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} .$$

Il s'agit donc de déterminer un point \hat{x} de \mathbb{R}^n tel que :

1. $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ s'appelle solution minimum global de (P) si et seulement si

$$f(\hat{x}) \leq f(x) : \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$f(\hat{x})$ s'appelle valeur minimum global .

2. $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ s'appelle solution minimum local de (P) si et seulement si il existe un voisinage $V_\varepsilon(\hat{x})$ tel que

$$f(\hat{x}) \leq f(x) : \forall x \in V_\varepsilon(\hat{x})$$

$f(\hat{x})$ s'appelle valeur minimum local .

3. $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ s'appelle solution minimum local strict de (P) si et seulement si il existe un voisinage $V_\varepsilon(\hat{x})$ tel que

$$f(\hat{x}) < f(x) : \forall x \in V_\varepsilon(\hat{x}), x \neq \hat{x}$$

$f(\hat{x})$ s'appelle valeur minimum local strict.

4.1 Direction de descente

Définition 4.1.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$ est dite direction de descente au point \hat{x} si et seulement si il existe un nombre strictement positive ($\delta > 0$) tel que :

$$f(\hat{x} + \lambda d) < f(\hat{x}) \quad : \forall \lambda \in]0, \delta[.$$

Donnons une condition suffisante pour que d soit une direction de descente.

Théorème 4.1.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $d \in \mathbb{R}^n$ une direction vérifiant la condition suivante :

$$f'(\hat{x}, d) = \nabla f(\hat{x})^t \cdot d < 0$$

alors d est une direction de descente au point \hat{x} .

Preuve. f est différentiable au point \hat{x} alors f continue et $\nabla f(\hat{x})$ existe, donc

$$f(\hat{x} + \lambda d) = f(\hat{x}) + \lambda \nabla f(\hat{x})^t \cdot d + \lambda \|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d)$$

alors

$$\begin{aligned} f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x}) &= \lambda \nabla f(\hat{x})^t \cdot d + \lambda \|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d) \\ \Rightarrow \frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} &= \nabla f(\hat{x})^t \cdot d + \|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d) \\ \Rightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} (\nabla f(\hat{x})^t \cdot d + \|d\| \alpha(\hat{x}, \lambda d)) \end{aligned}$$

avec

$$\alpha(\hat{x}, \lambda d) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

donc

$$f'(\hat{x}, d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} = \nabla f(\hat{x})^t \cdot d < 0$$

la limite étant strictement négative, alors il existe un voisinage de zéro

$V(0) =]-\delta, +\delta[$ tel que

$$\frac{f(\hat{x} + \lambda d) - f(\hat{x})}{\lambda} < 0 \quad , \forall \lambda \in]-\delta, +\delta[$$

la relation (2.1) est particulièrement vraie pour tout $\lambda \in]0, +\delta[$. on obtient le résultat cherché en multipliant la relation (2.1) par $\lambda > 0$. ■

4.2 Schéma général des algorithmes

Soit d_k une direction de descente au point x_k on peut considérer le point x_{k+1} le successeur de x_k comme suit :

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \lambda_k \in]0, +\delta[.$$

Démarrage : $x_0 \in \mathbb{R}^n, d_0 :$

$$\nabla f(x_0)^t \cdot d_0 < 0$$

$$x_1 = x_0 + \lambda_0 d_0$$

λ_0 vérifie :

$$f(x_0 + \lambda_0 d_0) < f(x_0)$$

Itération k : x_k, d_k telle que $\nabla f(x_k)^t \cdot d_k < 0$ et λ_k telle que :

$$f(x_k + \lambda_k d_k) < f(x_k)$$

alors

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$$

Le choix de d_k , et λ_k permet de construire une multitude d'algorithmes d'optimisation.

Exemple de choix de directions de descente :

Si on choisit : $d_k = -\nabla f(x_k)$, avec $\nabla f(\hat{x}_k) \neq 0$, on obtient la méthode de gradient.

Bien sur $d_k = -\nabla f(x_k)$ est une direction de descente, en effet :

$$\nabla f(x_k)^t d_k = \nabla f(x_k)^t (-\nabla f(x_k)) = -\nabla f(x_k)^t \cdot \nabla f(x_k) = -\|\nabla f(x_k)^t\|^2 < 0$$

Aussi si on choisit : $d_k = -(H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k)$ tel que :

$H(x_k)$ la matrice Hessienne. ($H(x_k) \in \mathcal{M}_{n \times n}$), $\nabla f(x_k)$ le vecteur de gradient.

($\nabla f(x_k) \in \mathcal{M}_{n \times 1}$), on obtient la méthode de Newton.

Si la matrice $H(x_k)$ est définie positive, alors

$$\nabla f(x_k)^t d_k = -\nabla f(x_k)^t (H(x_k))^{-1} \nabla f(x_k) < 0$$

Exemple de choix de pas λ_k :

On choisit λ_k vérifier

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k + \lambda d_k), \quad \forall \lambda \in]0, \delta[$$

la recherche d'une variable réelle λ_k qui s'appelle la recherche linéaire.

4.3 Résultats d'existence et d'unicité

Avant d'étudier les propriétés de la solution (ou des solutions) de (P) il faut s'assurer de leur existence . Nous donnerons en suite des résultats d'unicité .

Définition 4.3.1 : On dit que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est coercive si

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Ici $\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque de \mathbb{R}^n . On notera $\|\cdot\|_p$ ($p \in \mathbb{N}$) la norme l_p de \mathbb{R}^n :

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right]^{\frac{1}{p}} .$$

La norme infinie de \mathbb{R}^n est

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| .$$

Théorème 4.3.1 (Existence) : Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propre, continue et coercive, alors (P) admet au moins une solution.

Preuve. Soit $d = \inf (p)$; $d > +\infty$ car f est propre . Soit $(x_p)_{p \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^n$ une suite minimisante, c'est-à-dire telle que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f(x_p) = d$$

Montrons que (x_p) est bornée. Si ce n'était pas le cas on pourrait extraire de cette suite une sous-suite (encore notée (x_p)) telle

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x_p\| = +\infty$$

Par coercivité de f on aurait

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} f(x_p) = +\infty$$

ce qui contredit le fait que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|x_p\| = d < +\infty .$$

Comme (x_p) est bornée, on peut alors en extraire une sous-suite (encore notée (x_p)) qui converge vers $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Par continuité de f , on a alors

$$d = \lim_{p \rightarrow +\infty} f(x_p) = f(\bar{x}).$$

En particulier $d > -\infty$ et \bar{x} est une solution du problème (P) . ■

Théorème 4.3.2 (Unicité) : Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ strictement convexe. Alors problème (P) admet au plus une solution.

Preuve. Supposons que f admette au moins un minimum m et soient $x_1 \neq x_2$ (dans \mathbb{R}^n) réalisant ce minimum :

$$f(x_1) = f(x_2) = m.$$

Par stricte convexité de la fonction f on a alors :

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)) = m;$$

ceci contredit le fait que m est le minimum. Donc $x_1 = x_2$. Donnons pour terminer un critère pour qu'une fonction soit strictement convexe et coercive.

■

Théorème 4.3.3 : Soit f une fonction C^1 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (\nabla f(x) - \nabla f(y), x - y) \geq \alpha \|x - y\|^2 \quad (4.1)$$

Alors f strictement convexe et coercive; en particulier le problème (P) admet une solution unique.

Preuve. La condition (4.1) implique que ∇f est monotone et que f est convexe. De plus on a la stricte convexité de f . Enfin J est coercive : en effet, appliquons la formule de Taylor avec reste intégral

$$f(y) = f(x) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(x + t(y - x)) dt = f(x) + \int_0^1 (\nabla f(x + t(y - x)), y - x) dt.$$

Donc

$$f(y) = f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \int_0^1 (\nabla f(x + t(y - x)) - (\nabla f(x), y - x)) dt. \quad (4.2)$$

D'après (4.1) on obtient

$$f(y) \geq f(x) + (\nabla f(x), y - x) + \int_0^1 t\alpha \|x - y\|^2 dt$$

Finalement

$$f(y) \geq f(x) - \|\nabla f(x)\| \|y - x\| + \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2.$$

Fixons $x = 0$ par exemple ;il est alors clair que f est coercive . Par conséquent f admet un minimum unique x^* sur \mathbb{R}^n caractérisé par

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

■

La condition (4.1) nous amène à la définition suivante :

Définition 4.3.2 (Fonction elliptique) : On dit que $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est elliptique si la condition (4.1) est vérifiée, c'est-à-dire $\exists \alpha > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (D^2 f(x) y, y) \geq \alpha \|x - y\|^2$$

α est la constante d'ellipticité .

Proposition 4.3.1 : Une fonction $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable sur \mathbb{R}^n est elliptique si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \quad (D^2 f(x) y, y) \geq \alpha \|y\|^2.$$

Preuve. On utilise de nouveau la formule de Taylor appliquée à la fonction

$$\varphi : t \longrightarrow \varphi(t) = f(x + ty).$$

■

Il faut maintenant donner des conditions pour pouvoir calculer la (ou les) solutions. On va chercher à montrer que cette solution est solution de certaines équations, de sorte qu'il sera plus facile de la calculer.

4.4 Conditions d'optimalité

Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre

Théorème 4.4.1 soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, si \hat{x} est une solution minimaux local, alors $\nabla f(\hat{x}) = 0$.

Preuve. \hat{x} est une solution minimaux local, alors

$$f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in V(\hat{x}) \quad (4.3)$$

supposons le contraire $\nabla f(\hat{x}) \neq 0$, alors $-\nabla f(\hat{x})$ est une direction de descente alors $\exists \delta > 0$ tel que $\forall \alpha \in]0, \delta[$:

$$f(\hat{x} + \alpha(-\nabla f(\hat{x}))) < f(\hat{x})$$

on pose $\hat{x} + \alpha(-\nabla f(\hat{x})) = \bar{x}$ alors

$$f(\bar{x}) < f(\hat{x})$$

donc $\exists \bar{x} \in V(\hat{x})$ tel que :

$$f(\bar{x}) < f(\hat{x}) \quad (4.4)$$

la contradiction entre (4.3) et (4.4).

$$d'ou \left\{ \begin{array}{l} f \text{ différentiable} \\ \text{et} \\ f(\hat{x}) \leq f(x), \quad \forall x \in V(\hat{x}) \end{array} \right. \quad \text{alors} \quad \nabla f(\hat{x}) = 0. \quad \blacksquare$$

Condition nécessaire d'optimalité du second ordre

Théorème 4.4.2 soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, si \hat{x} est un minimaux local de (P) alors $\nabla f(\hat{x}) = 0$ et la matrice hessienne de f au point \hat{x} , qu'on note $H(\hat{x})$, est semi définie positive.

Preuve. soit $x \in \mathbb{R}^n$ quelconque, f étant deux fois différentiable au point \hat{x} on aura pour tout $\lambda \neq 0$

$$f(\hat{x} + \lambda x) = f(\hat{x}) + \frac{1}{2} \lambda^2 x^t H(\hat{x}) x + \lambda^2 \|x^2\| \alpha(\hat{x}, \lambda x), \quad \alpha(\hat{x}, \lambda x) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0$$

Ceci implique

$$\frac{f(\hat{x} + \lambda x) - f(\hat{x})}{\lambda^2} = \frac{1}{2} x^t H(\hat{x}) x + \|x^2\| \alpha(\hat{x}, \lambda x) \quad (4.5)$$

\hat{x} est un optimum local, il existe alors $\delta > 0$ tel que

$$\frac{f(\hat{x} + \lambda x) - f(\hat{x})}{\lambda^2} \geq 0, \quad \forall \lambda \in]-\delta, +\delta[$$

si on prend en considération (4.5) et on passe à la limite quand $\lambda \rightarrow 0, \lambda \neq 0$, on obtient

$$x^t H(\hat{x}) x \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

■

Condition suffisante d'optimalité

Théorème 4.4.3 soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois différentiable au point $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, Si $\nabla f(\hat{x}) = 0$ et $H(\hat{x})$ est définie positive alors \hat{x} est un minimum local strict de (P) .

Preuve. f étant deux fois différentiable au point \hat{x} , on aura pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f(x) = f(\hat{x}) + \frac{1}{2} (x - \hat{x})^t H(\hat{x}) (x - \hat{x}) + \|(x - \hat{x})\|^2 \alpha(\hat{x}, (x - \hat{x})), \quad (4.6)$$

$\alpha(\hat{x}, (x - \hat{x})) \xrightarrow{x \rightarrow \hat{x}} 0, (\nabla f(\hat{x}) = 0)$. Supposons que \hat{x} n'est pas un optimum local strict.

Alors il existe une suite $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que $x_k \neq \hat{x} : \forall k$ et

$$x_k \neq \hat{x} : \forall k, x_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \hat{x} \text{ et } f(x_k) \leq f(\hat{x}). \quad (4.7)$$

Dans (4.6) prenons $x = x_k$, division le tout par $\|(x - \hat{x})\|^2$ et notons $d_k = \frac{(x_k - \hat{x})}{\|(x_k - \hat{x})\|}$, on obtient

$$\frac{f(x_k) - f(\hat{x})}{\|(x_k - \hat{x})\|^2} = \frac{1}{2} d_k^t H(\hat{x}) d_k + \alpha(\hat{x}, (x_k - \hat{x})), \alpha(\hat{x}, (x_k - \hat{x})) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0. \quad (4.8)$$

(4.7) et (4.8) impliquent

$$\frac{1}{2} d_k^t H(\hat{x}) d_k + \alpha(\hat{x}, (x_k - \hat{x})) \leq 0, \quad \forall k.$$

d'autre part la suite $\{d_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ est bornée ($\|d_k\| = 1, \forall n$). Donc il existe une sous suite $\{d_k\}_{k \in N_1 \subset \mathbb{N}}$ telle que

$$d_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty, k \in N_1} \bar{d}.$$

Finalement lorsque $k \rightarrow \infty, k \in N_1$, on obtient

$$\frac{1}{2} \bar{d}^t H(\hat{x}) \bar{d} \leq 0.$$

La dernière relation et le fait que $\bar{d} \neq 0$ ($\|\bar{d}\| = 1$) impliquent que la matrice hessienne $H(\hat{x})$ n'est pas définie positive. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse. ■

4.5 Optimisation unidimensionnelle

L'optimisation unidimensionnelle (recherche linéaire) consiste à trouver λ_k de façon à diminuer la fonction f Suffisamment le long de cette direction.

Ce " suffisamment " sera quantifié dans la suite dans la description des conditions dites d'Armijo, Wolfe, Goldstein & Price (recherches linéaires inexactes).

Mais d'abord on expose le principe de méthode de descente :

4.5.1 Principe de méthode de descente

Le principe d'une méthode de descente consiste à faire les itérations suivantes :

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k, \quad k > 0 \tag{4.9}$$

tout en assurant la propriété

$$f(x_{k+1}) < f(x_k) .$$

Le vecteur d_k est la direction de descente en x_k . Le scalaire λ_k est appelé le pas de la méthode à l'itération k .

On peut caractériser les directions de descente en x_k à l'aide du gradient :

Proposition 4.5.1 Soit $d \in \mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\nabla f(x)^t \cdot d < 0$$

alors d est une direction de descente en x .

Preuve. on a pour $\lambda > 0$

$$f(x + \lambda d) = f(x) + \lambda \nabla f(x)^t d + \lambda \varepsilon(\lambda)$$

donc si on écrit

$$\frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^t d + \varepsilon(\lambda)$$

on voit bien que pour λ suffisamment petit on aura

$$f(x + \lambda d) - f(x) < 0.$$

■

Ou encore que d fait avec l'opposé du gradient $-\nabla f(x)$ un angle strictement plus petit que 90° :

$$\theta := \arccos \frac{-\nabla f(x)^t d}{\|\nabla f(x)\| \|d\|} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

L'ensemble des directions de descente de f en x

$$\{d \in \mathbb{R}^n : \nabla f(x) d < 0\}$$

forme un demi-espace ouvert de \mathbb{R}^n (illustration à la figure 4.1) .

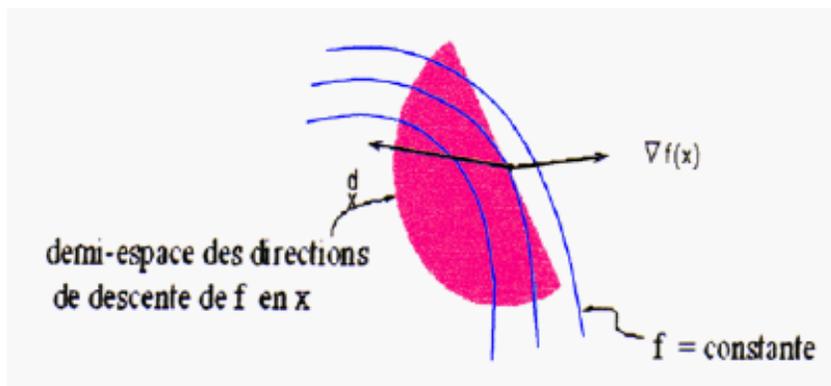


Figure 4.1 Demi-espace (translat) des direction de descente d de f en x

De telles directions sont intéressantes en optimisation car pour faire décroître f , il suffit de faire un déplacement le long de d .

Les méthodes à directions de descentes utilisent cette idée pour minimiser une fonction. Dans la méthode (4.9) le choix de λ_k est lié à la fonction :

$$\varphi(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k)$$

Comme dans la méthode de la direction de descente, la trajectoire de la solution suit un modèle de zigzag. Si est choisi tels que $f(x_k + d_k)$ soit le minimum dans chaque itération, alors les directions successives sont orthogonales.

En effet

si on note $g(x) = \nabla f(x)$

$$\begin{aligned} \frac{df(x_k + \lambda d_k)}{d\lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x_k + \lambda d_k)}{\partial x_{ki}} \frac{d(x_{ki} + \lambda d_{ki})}{d\lambda} \\ &= \sum_{i=1}^n g_i(x_k + \lambda d_k) d_{ki} \\ &= g(x_k + \lambda d_k)^t d_k \end{aligned}$$

où $g(x_k + d_k)$ est le gradient au point $x_k + d_k$.

En particulier, une façon de choisir λ_k peut être de résoudre le problème d'optimisation (à une seule variable)

$$\min_{\lambda > 0} \varphi(\lambda). \tag{4.10}$$

Si le pas $\tilde{\lambda}_k$ obtenu ainsi s'appelle le pas optimal alors nous pouvons écrire:

$$\varphi'(\tilde{\lambda}_k) = \nabla f(x_k + \tilde{\lambda}_k d_k)^t d_k = 0$$

c'est-à-dire

$$g(x_k + \tilde{\lambda}_k d_k)^t d_k = 0$$

ou bien

$$d_{k+1}^t d_k = 0$$

où

$$d_{k+1} = -g(x_k + \tilde{\lambda}_k d_k) = -g_{k+1}$$

est la direction de descente au point $x_k + \tilde{\lambda}_k d_k$. Donc les directions successives d_k et d_{k+1} sont orthogonales comme représenté dans la figure (4.2).

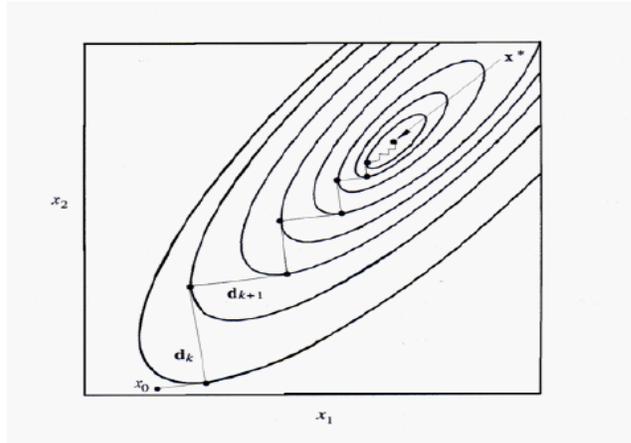


Figure 4.2 Trajectoire d'une solution typique d'une méthode direction de descente.

Pour définir une direction de descente il faut donc spécifier deux choses:

- * Dire comment la direction d_k est calculée. Ce choix influe directement dans la nomination de l'algorithme.
- * Dire comment on détermine le pas λ_k , c'est ce que l'on appelle : la recherche linéaire.

Algorithme 1.1 (méthode à directions de descente - une itération)

Étape 0 : (initialisation)

On suppose qu'au début de l'itération k , on dispose d'un itéré $x_k \in \mathbb{R}^n$.

Étape 1 :

Test d'arrêt : si $\|\nabla f(x_k)\| \simeq 0$, d'arrêt de l'algorithme.

Étape 2 :

Choix d'une direction de descente $d_k \in \mathbb{R}^n$.

Étape 3 :

Recherche linéaire : déterminer un pas $\lambda_k > 0$ le long de d_k de manière à "faire décroître f suffisamment".

Étape 4 :

Si la recherche linéaire est finie $x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$, remplacer k par $k + 1$ et aller à l'étape 1.

4.5.2 Recherche linéaire

Faire la recherche linéaire veut dire résoudre le problème unidimensionnel (4.10), où l'objectif est de :

- * Faire décroître f suffisamment, cela se traduit le plus souvent par la réalisation d'une inégalité de la forme

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k) + \text{"un terme négatif"} \quad (4.11)$$

Le terme négatif, disons ν_k , joue un rôle-clé dans la convergence de l'algorithme utilisant cette recherche linéaire. L'argument est le suivant .

Si $f(x_k)$ est minorée ($\exists c$ telle que $f(x_k) \geq c$ pour tout k), alors ν_k tend nécessairement vers zéro ($\nu_k \rightarrow 0$). c'est souvent à partir de la convergence vers zéro de cette suite que l'on parvient à montrer que le gradient lui-même doit tendre vers zéro. Le terme négatif devra prendre une forme bien particulière si on veut pouvoir en tirer de l'information .

En particulier, il ne suffit pas d'imposer $f(x_k + \lambda_k d_k) < f(x_k)$.

- * Empêcher le pas $\lambda_k > 0$ d'être trop petit, trop proche de zéro.

Le premier objectif n'est en effet pas suffisant car l'inégalité (4.11) est en général satisfaite par des pas $\lambda_k > 0$ arbitrairement petit .

Or ceci peut entraîner une "fausse convergence", c'est-à-dire la convergence des itérés vers un point non stationnaire. On donne dans cette partie un aperçu sur les recherches linéaires qu'on utilisera plus tard. On les a classées en deux catégories :

4.5.3 Les recherches linéaires exactes

Dans ce cas la solution optimale λ_k est calculée de façon exacte (d'un point de vue théorique car pratiquement on n'obtient en général qu'une approximation). On donnera l'algorithme de la recherche linéaire de dichotomie et du nombre d'or.

L'intervalle d'incertitude

Définition 4.5.1 *Considérons le problème unidimensionnel suivant :*

$$\underset{\lambda \in [a, b]}{\text{Minimiser}} \varphi(\lambda) .$$

Définition 4.5.2 *L'intervalle $[a, b]$ est dit intervalle d'incertitude si le minimum $\bar{\lambda}$ de $\varphi(\lambda)$ appartient à $[a, b]$, mais sa valeur exacte n'est pas connue .*

Théorème 4.5.1 *soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement quasi-convexe sur $[a, b]$.
soient $\lambda, \mu \in]a, b[$, $\lambda < \mu$*

- 1) *si $\varphi(\lambda) > \varphi(\mu)$, alors $\varphi(z) \geq \varphi(\mu); \forall z \in [a, \lambda]$.*
- 2) *si $\varphi(\lambda) \leq \varphi(\mu)$, alors $\varphi(z) \geq \varphi(\lambda); \forall z \in [\mu, b]$.*

Conséquences importante du théorème 4.5.1 :

1. Si $\varphi(\lambda) > \varphi(\mu)$, alors le nouveau intervalle d'incertitude est : $[\lambda, b]$
(On supprime $[a, \lambda[$).
2. Si $\varphi(\lambda) \leq \varphi(\mu)$, alors le nouveau intervalle d'incertitude est : $[a, \mu]$
(On supprime $[\mu, b[$).

Ceci est l'idée de base pour la construction d'algorithmes d'optimisation unidimensionnelle sans calcul de dérivées. A chaque itération on fait diminuer l'intervalle d'incertitude jusqu'à ce qu'on arrive à un intervalle final de longueur inférieure à une tolérance fixée à l'avance. Bien sur une valeur quelconque de ce dernier intervalle conviendrait comme approximation de notre solution optimale.

Maintenant on va présenter deux méthodes d'optimisation unidimensionnelle sans dérivées:

La méthode de dichotomie

Algorithme de la méthode de dichotomie :

initialisation : Choisir $\varepsilon > 0$ et l longueur final de l'intervalle d'incertitude, $[a_1, b_1]$ étant l'intervalle initial.

poser $k = 1$ et aller à l'étape 1.

Étape1 : Si $b_k - a_k < l$ stop. Le minimum appartient à $[a_k; b_k]$.

Sinon poser :

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon \\ \mu_k &= \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon\end{aligned}$$

et aller à l'étape 2.

Etape 2 : Si $\varphi(\lambda_k) > \varphi(\mu_k)$ alors $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \mu_k$.

Sinon $a_{k+1} = \lambda_k, b_{k+1} = b_k$.

Remplacer k par $k + 1$ et allez à l'étape 1.

La méthode du nombre d'or

La méthode du nombre d'or améliore la méthode de dichotomie, en diminuant le nombre d'observations, à chaque itération .

Algorithme de la méthode du nombre d'or :

Etape initiale : choisir $l > 0$ longueur final de l'intervalle d'incertitude et $[a_1, b_1], \alpha = 0,618$, calculer

λ_1 et μ_1 telle que :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1). \\ \mu_1 &= a_1 + \alpha(b_1 - a_1).\end{aligned}$$

Poser $k = 1$ et aller à Etape principale.

Etape principale :

(1) Si $b_k - a_k < l$ stop, prendre $\alpha^* \in [a_k, b_k]$. Si $\varphi(\lambda_k) > \varphi(\mu_k)$ aller à (2), sinon aller à (3).

(2) Poser $a_{k+1} = \lambda_k, b_{k+1} = b_k, \lambda_{k+1} = \mu_k, \mu_{k+1} = a_{k+1} + (b_{k+1} - a_{k+1})$, calculer $\varphi(\mu_{k+1})$, et aller à (4) .

(3) Poser $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = \mu_k, \mu_{k+1} = \lambda_k, \lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$, calculer $\varphi(\lambda_{k+1})$ et aller à (4) .

(4) Poser $k = k + 1$, et aller à (1).

4.5.4 Recherches linéaires inexactes

Les recherches linéaires exactes, malgré qu'elles n'aboutissent qu'à une solution optimale approchée, elle nécessitent beaucoup d'observations à chaque

itération de l'algorithme principal. Dans les années 60, 70, 80, des mathématiciens ont réussi à élaborer des recherches linéaires qui sont moins coûteuses, mais respectent en même temps la descente de la fonction.

Décrivons maintenant en détail les trois recherches linéaires inexactes les plus importantes. Il s'agit des recherches linéaires inexactes d'Armijo, de Goldstein et de Wolfe.

Recherche linéaire inexacte d'Armijo (1966)

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x_k \in \mathbb{R}^n$, $d_k \in \mathbb{R}^n$ une direction de descente ($\nabla f(x_k)^t d_k < 0$).

La règle d'Armijo exige à ce que f décroisse de façon suffisante au point $x_k + \lambda_k d_k$. Cette condition est décrite par l'inégalité suivante appelée condition d'Armijo :

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k) + \varepsilon \lambda_k \nabla f(x_k)^t d_k, \quad \varepsilon \in]0, 1[\quad (\text{Armijo})$$

C'est à dire que la réduction de f doit être proportionnelle en même temps à λ_k et à la dérivée directionnelle $\nabla f(x_k)^t d_k$.

Interprétation graphique de la condition d'Armijo

Définissons la fonction

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

par

$$\varphi(\lambda_k) = f(x_k + \lambda_k d_k), \quad \lambda_k \geq 0$$

Notons que :

$$\begin{aligned} \varphi'(\lambda) &= \nabla f(x_k + \lambda_k d_k)^t d_k, \\ \varphi'(0) &= \nabla f(x_k)^t d_k < 0, \\ \varphi(0) &= f(x_k). \end{aligned}$$

L'équation de la tangente au point $(0, \varphi(0))$ est la suivante :

$$\{\lambda, y\} : y = \varphi(0) + \varphi'(0)(\lambda - 0)$$

$$\tilde{\varphi}(\lambda_k) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^t d_k \lambda_k$$

Posons

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = \varphi(0) + \varphi'(0)\lambda.$$

L'équation de la tangente devient :

$$\tilde{\varphi}(\lambda) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^t d_k \lambda$$

Définissons maintenant la fonction $\hat{\varphi}(\lambda)$ comme suit :

$$\hat{\varphi}(\lambda) = \varphi(0) + \varepsilon \lambda \varphi'(0) = f(x_k) + \varepsilon \lambda \nabla f(x_k)^t d_k, \quad \varepsilon \in]0, 1[\quad (4.12)$$

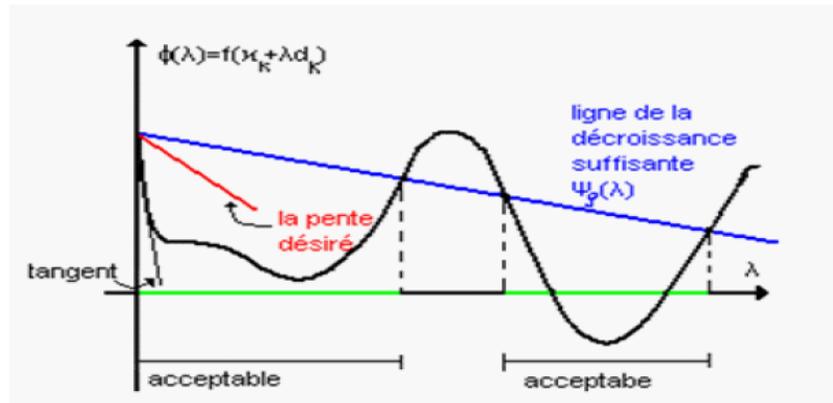


Figure 4.3– Règle d'Armijo

On cherche $\bar{\lambda}_k$ tel que

$$\varphi(\bar{\lambda}_k) \leq \hat{\varphi}(\bar{\lambda}_k).$$

Remarque 4.5.1 1- La condition $\varphi(\bar{\lambda}_k) \leq \hat{\varphi}(\bar{\lambda}_k)$ implique la décroissance de la fonction f .

En effet

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{\lambda}_k) &\leq \hat{\varphi}(\bar{\lambda}_k) \\ f(x_k + \bar{\lambda}_k d_k) &\leq f(x_k) + \varepsilon \bar{\lambda}_k \nabla f(x_k)^t d_k < f(x_k) \end{aligned}$$

car la direction d est une direction de descente.

2- Quand on prend $\bar{\lambda}_k$ très proche de zéro cela va nuire à la convergence et la vitesse de convergence.

En effet

$$\begin{aligned} f(x_k + \bar{\lambda}_k d_k) &= f(x_k) + \bar{\lambda}_k \nabla f(x_k)^t d_k + \bar{\lambda}_k \alpha(x_k, \bar{\lambda}_k d_k) \\ f(x_k + \bar{\lambda}_k d_k) - f(x_k) &= \bar{\lambda}_k [\nabla f(x_k)^t d_k + \alpha(x_k, \bar{\lambda}_k d_k)] \\ \text{si } \bar{\lambda}_k \rightarrow 0 \quad \alpha(x_k, \bar{\lambda}_k d_k) &\rightarrow 0 \text{ donc } f(x_k + \bar{\lambda}_k d_k) \simeq f(x_k). \end{aligned}$$

Algorithme (Règle d'Armijo)

Étape 0 : (initialisation)

$\alpha_{g,1} = \alpha_{d,1} = 0$, choisir $\alpha_1 > 0, \rho \in]0, 1[$ poser $k = 1$ et aller à l'étape 1.

Étape 1 :

si $\varphi_k(\alpha_k) \leq \varphi_k(0) + \rho\varphi'_k(0)\alpha_k$: STOP ($\alpha^* = \alpha_k$).

si $\varphi_k(\alpha_k) > \varphi_k(0) + \rho\varphi'_k(0)\alpha_k$, alors

$\alpha_{d,k+1} = \alpha_d, \alpha_{g,k+1} = \alpha_k$ et aller à l'étape 2.

Étape 2 :

si $\alpha_{d,k+1} = 0$ déterminer $\alpha_{k+1} \in]\alpha_{g,k+1}, +\infty[$

si $\alpha_{d,k+1} \neq 0$ déterminer $\alpha_{k+1} \in]\alpha_{g,k+1}, \alpha_{d,k+1}[$

remplacer k par $k + 1$ et aller à l'étape 1.

Remarque 4.5.2 *Il est clair d'après la figure 4.3—Règle d'Armijo que l'inégalité d'Armijo est toujours vérifiée si :*

$\alpha_k \succ 0$ est suffisamment petit . en effet, dans le cas contraire, on aurait une suite de pas strictement positifs $\{\alpha_{k,i}\}_{i \geq 1}$ convergeant vers 0 lorsque $i \rightarrow \infty$ et tels que

$$f(x_k + \alpha_k d_k) \leq f(x_k) + \rho \alpha_k \nabla^T f(x_k) d_k$$

n'ait pas lieu pour $\alpha_k = \alpha_{k,i}$.

En retranchant $f(x_k)$ dans les deux membres, en divisant par $\alpha_{k,i}$ et en passant à la limite quand $i \rightarrow \infty$, on trouverait

$$\nabla^T f(x_k) d_k \geq \rho \nabla^T f(x_k) d_k$$

ce qui contredirait le fait que d_k est une direction de descente ($\rho < 1$).

Théorème 4.5.2 *Si $\varphi_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$ est continue et bornée inférieurement, si d_k est une direction de descente en x_k ($\varphi'_k(0) < 0$) et si $\rho \in]0, 1[$, alors l'ensemble des pas vérifiant la règle d'Armijo est non vide .*

Preuve. On a

$$\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k)$$

$$\Psi_\rho(\alpha) = f(x_k) + \rho \alpha_k \nabla^T f(x_k) d_k$$

Le développement de Taylor-Yong en $\alpha = 0$ de φ_k est :

$$\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k) = f(x_k) + \rho \alpha_k \nabla^T f(x_k) d_k + \alpha \xi(\alpha)$$

où $\xi(\alpha) \rightarrow 0, \alpha \rightarrow 0$

et comme $\rho \in]0, 1[$ et $\varphi'_k(0) = \nabla^T f(x_k)d_k < 0$ on déduit :

$$f(x_k) + \alpha_k \nabla^T f(x_k)d_k < f(x_k) + \rho \alpha_k \nabla^T f(x_k)d_k, \text{ pour } \alpha > 0$$

On voit que pour $\alpha > 0$ assez petit on a :

$$\varphi_k(\alpha) < \Psi_\rho(\alpha) .$$

De ce qui précède et du fait que φ_k est bornée inférieurement, et $\Psi_\rho(\alpha) \rightarrow -\infty, \alpha \rightarrow +\infty$, on déduit que la fonction $\Psi_\rho(\alpha) - \varphi_k(\alpha)$ à la propriété :

$$\begin{cases} \Psi_\rho(\alpha) - \varphi_k(\alpha) \succ 0 \text{ pour } \alpha \text{ assez petit} \\ \Psi_\rho(\alpha) - \varphi_k(\alpha) \prec 0 \text{ pour } \alpha \text{ assez grand} \end{cases}$$

donc s'annule au moins une fois pour $\alpha > 0$:

En choisissant le plus petit de ces zéros on voit qu'il existe $\bar{\alpha} > 0$ tel que

$$\varphi_k(\bar{\alpha}) = \Psi_\rho(\bar{\alpha}) \text{ et } \varphi_k(\alpha) < \Psi_\rho(\alpha) \text{ pour } 0 < \alpha < \bar{\alpha}.$$

Ce qui achève la démonstration . ■

Recherche linéaire inexacte de Goldstein (1967)

Le pas λ_k est acceptable par la recherche linéaire inexacte de Goldstein, s'il satisfait les deux conditions Goldstein1 et Goldstein2 suivantes :

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k) + c \lambda_k \nabla f(x_k)^t . d_k \quad c \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[\quad (\text{Goldstein1})$$

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \geq f(x_k) + (1 - c) . \lambda_k . \nabla f(x_k)^t . d_k \quad (\text{Goldstein2})$$

Interprétation de la relation Goldstein1 :

La condition Goldstein1 est exactement la condition d'Armijo étudiée précédemment . Cette condition assure une décroissance suffisante de la fonction f .

Interprétation de la relation Goldstein2 :

La condition Goldstein2 évite au pas λ_k d'être trop petit (voir la figure ci dessous) .Ceci est d'un grand apport dans le processus de la convergence .

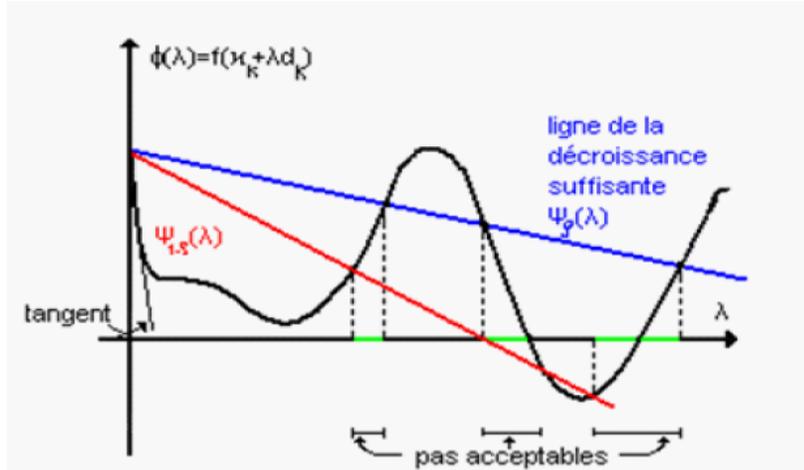


Figure 4.4– Rgle de Goldstein

La figure 4.4 montre, sur un exemple, l'ensembles des points satisfaisant les deux conditions Goldstein .

L' Algorithme de Goldstein :

L' Algorithme essaye de trouver $\lambda_k \in]\beta_1, \beta_2[$. On démarre avec un intervalle $[a_0, b_0]$ assez grand . On prend $\lambda_0 \in]\beta_1, \beta_2[$:

Si λ_0 vérifié Goldstein1 et Goldstein2 alors $\lambda_0 \in]\beta_1, \beta_2[$ et on s'arrête .

Si $\lambda_0 > \beta_2$ alors λ_0 ne vérifié pas Goldstein, alors on prend $b_1 = \lambda_0$ et $a_1 = b_0$ et $\lambda_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et on recommence avec λ_1 .

Si $\lambda_0 < \beta_1$ alors λ_0 ne vérifié pas Goldstein2, on prend $a_1 = \lambda_0, b_1 = b_0$ et $\lambda_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ et on teste de nouveau λ_1 .

A l'itération k

Supposons qu'on ait $[a_k, b_k]$ et $\lambda_k = \frac{a_k+b_k}{2}$

Si λ_k vérifié Goldstein1 et Goldstein2, $\lambda_k \in]\beta_1, \beta_2[$. Stop .

Si λ_k ne vérifié pas Goldstein1 alors $\lambda_k > \beta_2$

On prend $b_{k+1} = \lambda_k, a_{k+1} = a_k, \lambda_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$.

Si λ_k ne vérifié pas Goldstein2 alors $\lambda_k < \beta_1$. On prend $a_{k+1} = \lambda_k, b_{k+1} = b_k, \lambda_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$.

On obtient ainsi l'algorithme suivant :

Algorithme de Goldstein

ETAPE 1 (Initialization)

Choisir $\alpha_0 \in [0, 10^{100}]$ et $\rho \in]0, 1[$. Poser $a_0 = 0, b_0 = 10^{100}$

Poser $k = 0$ et aller à ETAPE2

ETAPE2 (Test Goldstein1)

Itération k on a $[a_k, b_k]$ et α_k , calculez $\varphi_k(\alpha_k)$

Si $\varphi_k(\alpha_k) \leq \varphi_k(0) + \rho\alpha_k\varphi'_k(0)$, allez à ETAPE 3

Sinon

Poser $b_{k+1} = \alpha_k, a_{k+1} = a_k$, et allez à ETAPE 4

ETAPE 3 (Test Gold 02)

Si $\varphi_k(\alpha_k) \geq \varphi_k(0) + (1 - \rho)\alpha_k\varphi'_k(0)$, stop. $\alpha^* = \alpha_k$

Sinon

Poser $a_{k+1} = \alpha_k, b_{k+1} = b_k$ et allez à ETAPE 4

ETAPE 4

Poser $\alpha_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$

Poser $k = k + 1$ et allez à ETAPE 2 .

Recherche linéaire inexacte de Wolfe (1969)

Recherche linéaire inexacte de Wolfe faible

Le pas λ_k est acceptable par la recherche linéaire inexacte de Wolfe faible ou de Wolfe tout simplement, s'il satisfait les deux conditions suivantes :

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 \lambda_k \nabla^t f(x_k) d_k, \quad c_1 \in]0, 1[\quad (\text{Wolfe1})$$

$$\nabla f(x_k + \lambda_k d_k)^t d_k \geq c_2 \nabla f(x_k)^t d_k, \quad c_2 \in]c_1, 1[\quad (\text{Wolfe2})$$

Interprétation de la relation Wolfe1

La condition Wolfe1 est exactement la condition d'Armijo, cette condition assure une décroissance suffisante de la fonction f .

Interprétation de la relation Wolfe2

Les λ_k sélectionnés par la condition Wolfe1 peuvent être très petits . Ceci peut avoir des conséquences facheuses sur la convergence de l'algorithme. La condition Wolfe2 évite cet inconvénient et supprime les très petites valeurs

de λ_k . (voir la figure ci dessous).

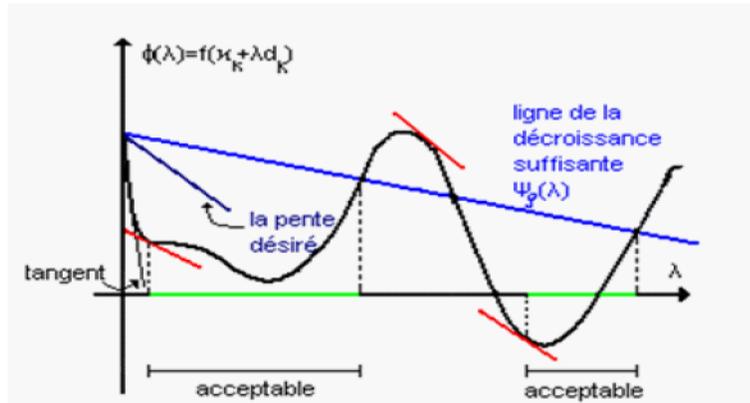


Figure.4.5– Rgle de Wolfe

Le figure 4.5 montre sur un exemple l'ensembles des points satisfaisant les conditions de Wolfe $c_1 = 0,1$; $c_2 = 0,7$ (Lemaréchal 1980).

Recherche linéaire inexacte de Wolfe forte

Le pas λ_k est acceptable par la recherche linéaire inexacte de Wolfe forte, s'il satisfait les deux conditions Wolfe forte1 et Wolfe forte2 suivantes :

$$f(x_k + \lambda_k d_k) \leq f(x_k) + c_1 \lambda_k \nabla f(x_k)^t d_k, \quad c_1 \in]0, 1[\quad (\text{Wolfe forte1})$$

$$|\nabla f(x_k + \lambda_k d_k)^t \cdot d_k| \leq c_2 \cdot |\nabla f(x_k)^t \cdot d_k|, \quad c_2 \in]c_1, 1[\quad (\text{Wolfe forte2})$$

Interprétation de la relation Wolfe forte1

La condition Wolfe forte1 est exactement la condition Wolfe1 ou Armijo. Cette condition assure une décroissance suffisante de la fonction f .

Interprétation de la relation Wolfe forte2

La condition Wolfe forte2 implique Wolfe2. Le pas λ_k sélectionné par les condition Wolfe1 et Wolfe2 peut être très loin d'un point optimal ou stationnaire de la fonction φ . La condition Wolfe forte2 assure que le pas λ_k se trouve dans le voisinage d'un point stationnaire ou un point optimal de φ .

L'algorithme de wolfe

ETAPE 1 (Initialisation)

Prendre $\alpha_0 \in [0, 10^{99}]$, calculez $\varphi(0)$, $\varphi'_0(0)$. Prendre $\rho = 0.1$ (ou $\rho = 0, 1$ ou $\rho = 0,001$ ou $\rho = 10^{-4}$) $\theta = 0.9$ (ou plus petit encore)

Poser $a_0 = 0, b_0 = 10^{99}, k = 0$ et allez à ETAPE 2

ETAPE 2 (test de (Wolfe1))

Calculez $\varphi(\alpha_k)$. Si $\varphi(\alpha_k) \leq \varphi(0) + \rho\alpha_k\varphi'(0)$, aller à ETAPE 3. Sinon

Poser $a_{k+1} = \alpha_k, b_{k+1} = \alpha_k$ et allez à ETAPE 4

ETAPE 3 (test (Wolfe2) ou (Wolfe2))

Calculez $\varphi'(\alpha_k)$. Si $\varphi'(\alpha_k) \geq \theta\varphi'(0)$ ($|\varphi'_k(\alpha_k)| \leq -\theta\varphi'(0)$). STOP

Prendre $\bar{\alpha} = \alpha_k$. Sinon Poser $a_{k+1} = \alpha_k, b_{k+1} = b_k$ et allez à ETAPE 4

ETAPE 4 (calcul de α_{k+1})

$$\alpha_{k+1} = \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2}$$

Poser $k = k + 1$ et allez à ETAPE 2 .

4.6 Convergence des méthodes.

4.6.1 La condition de Zoutendijk

Maintenant on va étudier la contribution de la recherche linéaire inexacte dans la convergence des algorithmes à directions de descente. Ce n'est qu'une contribution, parce que la recherche linéaire ne peut à elle seule assurer la convergence des itérés . On comprend bien que le choix de la direction de descente joue aussi un rôle. Cela se traduit par une condition, dite de Zoutendijk, dont on peut tirer quelques informations qualitatives intéressantes.

On dit qu'une règle de recherche linéaire inexacte satisfait la condition de Zoutendijk s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout indice $k \geq 1$ on ait

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - C \|\nabla f(x_k)\|^2 \cos^2 \theta_k \tag{4.13}$$

où θ_k est l'angle que fait d_k avec $-\nabla f(x_k)$, défini par

$$\cos \theta_k = \frac{-\nabla^T f(x_k) d_k}{\|d_k\| \|\nabla f(x_k)\|}. \tag{4.14}$$

Voici comment on se sert de la condition de condition de Zoutendijk.

Théorème 4.6.1 (de Zoutendijk)

4.6. CONVERGENCE DES MÉTHODES.

Si la suite $\{x_k\}$ générée par un algorithme d'optimisation vérifie la condition de Zoutendijk (4.13) et si la suite $\{f(x_k)\}$ est minorée, alors

$$\sum_{k \geq 1} \|\nabla f(x_k)\|^2 \cos^2 \theta_k < \infty \quad (4.15)$$

Preuve. En sommant les quantités inégalités $\|\nabla f(x_k)\|^2 \cos^2 \theta_k$ tout en prenant en considération (4.14), on a

$$\sum_{k \geq 1}^l \|\nabla f(x_k)\|^2 \cos^2 \theta_k \leq \frac{1}{C} (f(x_1) - f(x_{l+1}))$$

La série est donc convergente puisqu'il existe une constant C' telle que pour tout k , $f(x_k) \geq C'$. ■

Conséquence importante du théorème de Zoutendijk

La condition (4.15) implique

$$\|\nabla f(x_k)\|^2 \cos^2 \theta_k \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \quad (4.16)$$

Cette limite peut être utilisée pour en déduire la convergence de l'algorithme. En effet si notre algorithme génère une suite $\{x_k\}$ de la forme :

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k .$$

Si le choix de d_k est tel que

$$\cos \theta_k \geq \delta > 0, \quad \forall k$$

alors il découle de (4.16) que

$$\lim \|\nabla f(x_k)\| = 0 \quad (4.17)$$

Les deux propositions suivantes précisent les circonstances dans lesquelles la condition de Zoutendijk (4.13) est vérifiée avec les règles d'Armijo et de Wolfe.

Proposition 4.6.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable dans un voisinage de $T = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_1)\}$.

On considère un algorithme à directions de descente d_k , qui génère une suite $\{x_k\}$ en utilisant la recherche linéaire d'Armijo, avec $\alpha_1 > 0$.

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $k \geq 1$, l'une des conditions

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - C \nabla^T f(x_k) d_k$$

ou

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - C \|\nabla f(x_k)\|^2 \cos^2 \theta_k$$

est vérifiée.

Proposition 4.6.2 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continument différentiable dans un voisinage de $T = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_1)\}$.

On considère un algorithme à directions de descente d_k , qui génère une suite $\{x_k\}$ en utilisant la recherche linéaire de Wolfe (Wolfe1) et (Wolfe2).

Alors il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $k \geq 1$, la condition de Zoutendijk (4.13) est vérifiée.

4.6.2 Notion de convergence globale

Définition 4.6.1 Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Supposons que l'on a construit une suite $\{x_k\}$, à l'aide d'un algorithme d'optimisation sans contraintes décrit dans le modèle (modèle algorithme). Nous dirons que l'algorithme converge globalement si on a :

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$$

Remarque 4.6.1 Des auteurs exigent parfois pour la même définition la relation plus forte suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla f(x_k)\| = 0$$

4.6.3 Notion de vitesse de convergence

La convergence globale d'un algorithme ayant été établie, nous nous intéressons maintenant à l'évaluation de son *efficacité*. D'un point de vue pratique, l'efficacité d'un algorithme dépend du nombre d'itérations nécessaires pour obtenir une approximation à ε près (ε fixé à l'avance) de l'optimum x^* .

Si l'on compare entre eux, plusieurs algorithmes, et si l'on admet que le temps de calcul par itération est sensiblement le même pour tous, le meilleur est celui qui nécessitera le plus petit nombre d'itérations.

Malheureusement, il se révèle impossible de dégager des conclusions générales de ce genre de comparaison.

Suivant le point de départ choisi, la nature de la fonction à optimiser, la valeur de la tolérance choisie, la hiérarchie des algorithmes peut varier considérablement.

Si l'on veut dégager un critère ayant une certaine valeur d'absolu, il faut par conséquent recourir à un autre type d'analyse : c'est l'objet de l'étude de la *convergence asymptotique*, c'est-à-dire du comportement de la suite $\{\varkappa_k\}$ au voisinage du point limite \varkappa^* .

Ceci conduit à attribuer à chaque algorithme un indice d'efficacité appelé sa *vitesse de convergence*.

Remarque 4.6.2 *on est quelque fois amené à exprimer la vitesse de convergence de la suite $\{\varkappa_k\}$ en étudiant, non pas la façon dont $\|\varkappa_k - \varkappa^*\|$ tend vers 0, mais la façon dont la suite $\{f(\varkappa_k)\}$ tend vers $f(\varkappa^*)$ où f la fonction que l'on minimise.*

4.7 Convergence des algorithmes et fonctions multivoques

Les méthodes de résolution d'optimisation sont en général des méthodes itératives, c'est à dire à partir d'un point initial x_0 , elles engendrent une suite infinie $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ dont on espère que cette suite converge vers la solution optimale .

Définition 4.7.1 *Un algorithme de résolution est un procédé itératif qui permet d'un point initial x_0 d'engendrer la suite $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots$*

Un algorithme est parfaitement défini par la donnée de l'application a qui à x_k associe $x_{k+1} = a(x_k)$. L'étude de la convergence de l'algorithme se ramène à l'étude des propriétés de a .

Par exemple :

$$a : \rightarrow a(x) = x - \lambda \nabla f(x)$$

a représente la méthode du gradient.

Un modèle général des algorithmes : application multivoque

Soit le problème (P) :

$$(P) : \min_{x \in S} f(x)$$

On peut générer plusieurs classes d'algorithmes qui ont pour but de résoudre le problème (P) ou d'atteindre des points vérifiant les conditions nécessaires d'optimalité. Il serait alors logique au lieu d'étudier la convergence d'un algorithme, il serait préférable d'établir une théorie ou un modèle assez général qui étudie la convergence d'une classe d'algorithme au lieu d'un seul algorithme.

Soient $a_1, a_2, a_3, \dots, a_p$ des applications qui génèrent p algorithmes, c'est à dire qu'à un point x_k on associe les p points différents $a_1(x_k), a_2(x_k), a_3(x_k), \dots, a_p(x_k)$.

C'est à dire qu'on peut considérer l'application qui à x_k fait correspondre

$$A(x_k) = (a_1(x_k), a_2(x_k), a_3(x_k), \dots, a_p(x_k)).$$

Ceci conduit naturellement à un modèle dans lequel les algorithmes sont représentés par des applications multivoques, c'est à dire des applications de \mathbb{R}^n dans $P(\mathbb{R}^n)$ qui à $x \in \mathbb{R}^n$ fait correspondre une partie de \mathbb{R}^n .

D'une façon générale on notera :

$$A : X \xrightarrow{m} Y$$

une application multivoque de X dans Y .

Convergence globale :

Définition 4.7.2 *On dit qu'un algorithme décrit par une application multivoque A , est globalement convergent si quelque soit le point de départ x_0 choisi, la suite $\{x_k\}$ engendrée $x_{k+1} \in A(x_k)$ (ou une sous-suite) converge vers un point satisfaisant les conditions nécessaire d'optimalité (ou solution optimale).*

:

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{l} x : x \text{ satisfait une condition nécessaire d'optimalité} \\ \text{ou } x \text{ une solution optimale locale ou globale} \end{array} \right\}$$

Ω s'appelle ensemble des solutions .

Applications multivoques fermées :

C'est une généralisation de la notion de continuité pour les fonctions univoques .

4.7. CONVERGENCE DES ALGORITHMES ET FONCTIONS
MULTIVOQUES

Définition 4.7.3 Soit $A : X \xrightarrow{m} Y$ une application multivoque.

On dit que A est fermée en $x \in X$ si et seulement si :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour toute suite } \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}, x_k \rightarrow x \text{ dans } X \\ \text{et pour toute suite } \{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}, y_k \rightarrow y \text{ dans } Y \end{array} \right\} \implies y \in A(x)$$

A est dite fermé sur $S \subset X$ si et seulement si A est fermée en tout point $x \in S$.

Remarque 4.7.1 Si A est univoque continue, alors A est fermée.

En effet, soit $A : X \rightarrow Y$ continu en x et soit

$$\left\{ \begin{array}{l} x_k \rightarrow x \text{ dans } X \\ A(x_k) = y_k \rightarrow y \text{ dans } Y \end{array} \right\} \implies A(x) = y \text{ d'après la continuité de } A .$$

Composition d'applications multivoques :

Définition 4.7.4 Soient $A : X \xrightarrow{m} Y$ et $B : Y \xrightarrow{m} Z$ (X, Y, Z fermés non vides) .

La composée $B \circ A$ est l'application multivoque $C : X \xrightarrow{m} Z$ définie par :
 $C(x) = \bigcup_{y \in A(x)} B(y)$.

Théorème 4.7.1 (composition des applications multivoques fermées) :

Soit $A : X \xrightarrow{m} Y$ et $B : Y \xrightarrow{m} Z$. On suppose que :

- 1) A est fermée en $x \in X$ et que B est fermée sur $A(x)$.
- 2) Toute suite $\{y_k\}$ telle que $y_k \in A(x_k)$ avec $x_k \rightarrow x$, admet une sous-suite convergente .

Alors l'application multivoque $C = B \circ A$ est fermée en x .

Corollaire 4.7.1 Soit $A : X \rightarrow Y$ une application univoque et $B : Y \xrightarrow{m} Z$ une application multivoque.

Si A est continue en x et si B est fermée sur $A(x)$, alors $B \circ A$ est fermée en x .

Preuve. On a A est continue en x , B est fermée sur $A(x)$ et on a $\{y_k\}$ tel que $y_k = A(x_k)$ avec $x_k \rightarrow x$ alors $A(x_k) \rightarrow A(x)$ donc $\{y_k\}$ est convergente, c'est à dire que les deux conditions du théorème 4.7.1 sont vérifiées, d'où $B \circ A$ est fermée . ■

Théorème de Zangwill :

Définition 4.7.5 On dit que $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de descente (relativement à une application multivoque A) si elle est continue et possède les propriétés suivantes :

- 1) $x \notin \Omega \implies h(y) < h(x); (\forall y \in A(x)).$
- 2) $x \in \Omega \implies h(y) \leq h(x); (\forall y \in A(x)).$

Théorème 4.7.2 (Zangwill 1969) :

Soit

$$(P) : \min_{x \in X} f(x)$$

un problème d'optimisation et Ω l'ensemble des solutions.

Soit $A : X \xrightarrow{m} X$ une application multivoque et $\{x_k\}$ une suite engendrée par l'algorithme, c'est à dire vérifiant $x_{k+1} \in A(x_k)$.

Supposons que les trois conditions suivantes soient vérifiées :

- C1) Les points $\{x_k\}$ sont tous contenus dans un ensemble compact $K \subset X$.
- C2) Il existe une fonction de descente h .
- C3) L'application multivoque A est fermée dans $X \setminus \Omega$ et $\forall x \in X \setminus \Omega$, $A(x) \neq \emptyset$.

Alors :

pour tout x limite d'une sous-suite convergente de la suite $\{x_k\}$, on $x \in \Omega$ et $h(x_k) \xrightarrow[k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty]{} h(x)$.

Les modes de convergence :

Notre but est d'accélérer la convergence d'une suite, donc il est naturel de présenter la notion de rapidité ou mode de convergence de suites.

Définition 4.7.6 Soit $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ une suite dans \mathbb{R}^n qui converge vers \hat{x} .

1- On dit que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers \hat{x} linéairement avec le taux η si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup \frac{\|x_{k+1} - \hat{x}\|}{\|x_k - \hat{x}\|} = \eta < 1.$$

Lorsque $\|x_{k+1} - \hat{x}\| \simeq \eta \|x_k - \hat{x}\|$, la convergence est dite asymptotique.

4.7. CONVERGENCE DES ALGORITHMES ET FONCTIONS
MULTIVOQUES

2- Si

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - \hat{x}\|}{\|x_k - \hat{x}\|^\gamma} < +\infty, \quad \gamma > 1$$

la convergence est dite super linéaire d'ordre γ .

3- On dit que $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ tend vers \hat{x} de façon super linéaire si

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - \hat{x}\|}{\|x_k - \hat{x}\|} = 0.$$

Lorsque $\|x_{k+1} - \hat{x}\| \leq l \|x_k - \hat{x}\|^\gamma$, la convergence est dite super linéaire asymptotique.

Chapitre 5

Algorithmes d'optimisation sans contrainte

5.1 Méthode de la plus forte pente

La méthode du gradient fut découverte par Cauchy en 1847 est l'une des anciennes méthodes les plus utilisées pour résoudre le problème (P) , elle est également connue sous le nom de méthode de la plus forte pente ou de plus de la plus profonde descente (steepest descente, en anglais) car si $x_k \in \mathbb{R}^n$ et si $\nabla f(x_k) \neq 0$ alors la direction $d_k = -\nabla f(x_k)$ est la meilleure direction de descente (voir Théorème 2.1) .

Le théorème suivant va montrer que la décroissance de la fonction sera la plus forte en suivant la direction $-\nabla f(x_k)$

Théorème 5.1.1 *Supposons que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ soit différentiable au point x , et supposons que*

$$\nabla f(x) \neq 0$$

Considérons le problème optimal

$$\underset{\|d\| \leq 1}{\text{Minimiser}} f'(x, d)$$

où $f'(x, d)$ est la dérivée directionnelle de f au point x et dans la direction d . Alors la solution optimale de ce problème est donnée par

$$\tilde{d} = -\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|}.$$

Preuve. On a

$$f'(x, d) = \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} = \nabla f(x)^t d$$

donc on va minimiser $\nabla f(x)^t d$ dans $\{d : \|d\| \leq 1\}$.

En appliquant l'inégalité de Schwartz, on obtient

$$|\nabla f(x)^t d| \leq \|\nabla f(x)\| \|d\| \quad (5.1)$$

Si

$$\nabla f(x)^t d \geq 0$$

alors

$$\nabla f(x)^t d \geq -\|\nabla f(x)\| \|d\|$$

Si

$$\nabla f(x)^t d \leq 0$$

(5.1) implique

$$-\nabla f(x)^t d \leq \|\nabla f(x)\| \|d\|$$

par conséquent on a toujours

$$\nabla f(x)^t d \geq -\|\nabla f(x)\| \|d\|$$

pour $\|d\| \leq 1$ on a

$$\|\nabla f(x)\| \|d\| \leq \|\nabla f(x)\| \Rightarrow -\|\nabla f(x)\| \|d\| \geq -\|\nabla f(x)\|$$

alors $\forall d : \|d\| \leq 1$ on a

$$\nabla f(x)^t d \geq -\|\nabla f(x)\|$$

D'autre part on a $\|\bar{d}\| = 1$ et \bar{d} vérifie

$$\nabla f(x)^t \bar{d} = \nabla f(x)^t \left(\frac{\nabla f(x)}{\|\nabla f(x)\|} \right) = -\|\nabla f(x)\| .$$

■

Interprétation du théorème 5.1.1 : Nous allons à partir du théorème 3.2.1 donner une idée intuitive sur l'appellation : méthode de la plus forte pente. En effet d'après le théorème 3.2.1 on a:

$$f'(x, d) \geq f'(x, \bar{d}) \quad : \forall d, \|d\| \leq 1 .$$

En utilisant la définition de la dérivée directionnelle

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \frac{f(x + \lambda d) - f(x)}{\lambda} \geq \lim_{\lambda \rightarrow 0_+} \frac{f(x + \lambda \bar{d}) - f(x)}{\lambda} .$$

Cette dernière inégalité implique qu'il existe $\delta > 0$ tel que:

$$[f(x + \lambda d) - f(x)] - [f(x + \lambda \bar{d}) - f(x)] \geq 0, \forall \lambda \in]-\delta, +\delta[$$

alors

$$f(x + \lambda d) \geq f(x + \lambda \bar{d}), \forall \lambda \in]-\delta, +\delta[\text{ et } \forall d : \|d\| \leq 1 .$$

5.1.1 Algorithme de la méthode de la plus forte pente

Etape initiale : Choisir un $\varepsilon > 0$. Choisir un point initial x_1 . Poser $k = 1$ et aller à l'étape principale.

Etape principale : Si $\|-\nabla f(x)\| < \varepsilon$ stop.

Sinon poser $d_k = -\nabla f(x)$ et soit λ_k la solution optimale de la recherche linéaire

$$\min \{f(x_k + \lambda d_k); \lambda \geq 0\}$$

Poser

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k$$

Remplacer k par $k + 1$ et répéter l'étape principale.

5.1.2 Inconvénients de la méthode de la plus forte pente

Lenteur de la méthode au voisinage des points stationnaires:

Cette méthode travaille de façon performante dans les premières étapes de l'algorithme mais au voisinage des points stationnaires elle devient très lente.

On peut expliquer ce problème comme suit :

On a

$$f(x_k + \lambda d) = f(x_k) + \lambda \nabla f(x_k)^t \cdot d + \lambda \|d\| \alpha(x_k, \lambda d)$$

où $\alpha(x_k, \lambda d) \rightarrow 0$ quand $\lambda d \rightarrow 0$.

Si $d = -\nabla f(x_k)$ alors $x_{k+1} = x_k - \lambda \nabla f(x_k)$ et donc

$$f(x_k + \lambda d) - f(x_k) = \lambda \left[-\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(x_k)\| \alpha(x_k, -\lambda \nabla f(x_k)) \right]$$

D'après l'expression précédent, on voit que lorsque x_k s'approche d'un point stationnaire, et si f est continument différentiable, alors $\|\nabla f(x_k)\|$ est proche de zéro. Donc le terme à droite s'approche de zéro, indépendamment de λ , et par conséquent $f(x_k + \lambda d)$ ne s'éloigne pas beaucoup de $f(x_k)$ quand on passe du point x_k au point x_{k+1} .

Le phénomène de Zigzaguing :

Il n'est pas facile de vérifier que pour la méthode du gradient on a toujours

$$d_k^t \cdot d_{k+1} = 0$$

c'est à dire que la suite $\{x_k\}$ engendrée par l'algorithme de la méthode du gradient, zigzague. Ceci crée un phénomène de ralentissement dans l'acheminement des points x_k vers la solution optimale.

5.1.3 Quelques remèdes

Changement de direction :

Au lieu de prendre comme direction de descente, la direction :

$$d_k = -\nabla f(x_k)$$

on prend des directions de la forme :

$$d_k = -D \cdot \nabla f(x_k)$$

où D est une matrice choisie convenablement (D pourrait être par exemple l'inverse de la matrice hessienne au point x_k c'est à dire $(H(x_k))^{-1}$).

Un autre choix pourrait s'opérer de la façon suivante :

$$d_k = -\nabla f(x_k) + g_k$$

où g_k est un vecteur approprié.

Accélération de la convergence :

On peut aussi accélérer la convergence de la méthode du gradient. Pour cela on transforme grâce à un algorithme d'accélération de la convergence

la suite $\{x_k\}$ en une suite $\{y_k\}$ qui convergerait vers la même limite que la suite $\{x_k\}$, mais convergerait plus rapidement. Si on note par x^* cette limite commune on exprime cette rapidité par la limite suivante :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{y_k - x^*}{x_k - x^*} = 0.$$

5.1.4 Convergence de la méthode de la plus forte pente

Cas des recherches linéaires exactes

avant de donner le théorème principal concernant la convergence de la méthode de la plus forte pente avec des recherches linéaires exactes et inexactes, démontrons d'abord ce résultat qui nous sera utile dans la section qui va suivre.

Théorème 5.1.2 *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $L \subset \mathbb{R}$, un intervalle fermé et M l'application multivoque suivante :*

$$M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, d) \rightarrow M(x, d) = \{y : y = x + \bar{\lambda}d\}$$

$\bar{\lambda}$ vérifiant :

$$f(x + \bar{\lambda}d) = \min \{f(x + \lambda d); \lambda \in L\}.$$

Si f est continue en x et si $d \neq 0$, alors M est fermée au point (x, d) .

Preuve. *Soit $\{x_k, d_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ et $\{y_k\}$ telles que*

$$(x_k, d_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (x, d), y_k \in M(x_k, d_k), y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y. \quad (5.2)$$

Démontrons que

$$y \in M(x, d).$$

En effet $y_k \in M(x_k, d_k)$. Alors

$$y_k = x_k + \bar{\lambda}_k \cdot d_k \quad (5.3)$$

$\bar{\lambda}_k$ est solution optimale de la recherche linéaire

$$f(x_k + \bar{\lambda}_k \cdot d_k) = \min \{f(x_k + \lambda \cdot d_k), \lambda \in L\}. \quad (5.4)$$

5.1. MÉTHODE DE LA PLUS FORTE PENTE

Puisque

$$d_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} d \neq 0$$

alors

$$d_k \neq 0, \quad \forall k \geq k_0, \quad k_0 \in \mathbb{N} \quad (5.5)$$

(5.3) et (5.5) impliquent

$$\bar{\lambda}_k = \frac{\|y_k - x_k\|}{\|d_k\|} \quad (5.6)$$

soit en remarquant que L est fermé, on a

$$\bar{\lambda}_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \bar{\lambda} = \frac{\|y - x\|}{\|d\|} \in L \quad (5.7)$$

(5.2) (5.3) (5.6) et (5.7) donnent

$$y = x + \bar{\lambda}.d$$

(5.4) implique

$$f(x_k + \bar{\lambda}_k.d_k) \leq f(x_k + \lambda.d_k) .$$

Faisons tendre k vers l'infini et prenons en considération le fait que f est continue au point (x, d) , on obtient :

$$f(x_k + \bar{\lambda}_k.d_k) \leq f(x + \lambda.d), \quad \forall \lambda \in L.$$

Ceci veut dire exactement que le point $y = x + \bar{\lambda}.d \in M(x, d)$. ■

Théorème 5.1.3 (convergence de la méthode de la plus forte pente avec des recherches linéaires exactes) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et (P) le problème de minimisation sans contraintes suivant :

$$(P) \quad \min \{f(x) : x \in \mathbb{R}^n\} .$$

On suppose que l'ensemble $\delta(x_0)$ suivant :

$$\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R}^n\}$$

est borné . Soit $\{x_k\}$ une suite générée par l'algorithme de la plus forte pente, c'est à dire

Initialisation : $x_0 \in \mathbb{R}^n$, point initial, poser $k = 0$ et aller à Etape principale

Etape principale : Si $\nabla f(x_k) = 0$ Stop .

Sinon

Calculer λ_k vérifiant $f(x_k + \lambda_k d_k) = \min \{f(x_k + \lambda d_k), \lambda \geq 0\}$.

Calculer $x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)$.

Poser $k = k + 1$ et aller à Etape principale .

Fin .

Soit x^* une limite quelconque d'une sous suite convergente de $\{x_k\}$. Alors $\nabla f(x^*) = 0$.

Cas des recherches linéaires inexacts

Théorème 5.1.4 ([Bazara]) (convergence de la méthode de la plus forte pente avec la recherche linéaire d'Armijo) . Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, telle que $\nabla f(x)$ est continument Lipschitzien de constante G dans l'ensemble

$$\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq f(x_0)\}, \quad x_0 \in \mathbb{R}^n \text{ quelconque.}$$

Considérons l'algorithme de la méthode de la plus forte pente avec la recherche linéaire d'Armijo, c'est à dire l'algorithme défini comme suit :

Initialisation : Fixons $\bar{\lambda} > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ et $x_0 \in \mathbb{R}^n$ point initial, poser $k = 0$ et aller à Etape principale .

Etape principale: A l'itération k définissons la direction $dk = -\nabla f(x_k)$ et considérons la fonction d'Armijo

$$\hat{\theta}(\lambda) = \theta(0) + \lambda \varepsilon \theta'(0) \tag{5.8}$$

où $\theta(\lambda)$ est la fonction suivante :

$$\theta(\lambda) = f(x_k + \lambda d_k) = f[x_k - \lambda \nabla f(x_k)] : \lambda \geq 0. \tag{5.9}$$

Si $\nabla f(x_k) = 0$ stop .

Sinon

Trouver le plus petit entier $t \geq 0$ tel que

$$\theta\left(\frac{\bar{\lambda}}{2^t}\right) \leq \hat{\theta}\left(\frac{\bar{\lambda}}{2^t}\right) \tag{5.10}$$

et définir le successeur x_{k+1} de x_k comme suit

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \nabla f(x_k)$$

avec

$$\lambda_k = \frac{\bar{\lambda}}{2^t} .$$

Poser $k = k + 1$ et aller à Etape principale .

Fin

Soit $\{x_k\}$ une suite générée par cet algorithme . Alors ou bien il s'arrête après un nombre fini d'itérations en un point x_{k_0} tel que $\nabla f(x_{k_0}) = 0$, ou bien il génère une suite infinie $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$\nabla f(x_k) \underset{k \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0 .$$

5.2 Méthodes quasi-Newtoniennes

5.2.1 Méthode de Newton

Considérons le problème d'optimisation sans contraintes (P)

$$(P) : \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\text{Min}} f(x)$$

où $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

Le principe de la méthode de Newton consiste à minimiser successivement les approximations du second ordre de f , plus précisément si

$$f(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^t (x - x_k) + (x - x_k)^t H(x_k) (x - x_k) + o \|x - x_k\|^2 ,$$

posons

$$q(x) = f(x_k) + \nabla f(x_k)^t (x - x_k) + (x - x_k)^t H(x_k) (x - x_k) .$$

Soit x_{k+1} l'optimum de q , alors il vérifie $\nabla q(x_{k+1}) = 0$, soit en remplaçant :

$$\nabla f(x_k) + H(x_k) (x_{k+1} - x_k) = 0 ,$$

ou encore

$$H(x_k) (x_{k+1} - x_k) = -\nabla f(x_k)$$

donc

$$x_{k+1} = x_k - [H(x_k)]^{-1} \nabla f(x_k)$$

Donc pour obtenir une méthode qui converge superlinéairement, il est nécessaire d'approximer l'étape de Newton asymptotiquement. C'est le principe de Dennis et Moré. Comment peut-on y aboutir sans évaluer la matrice Hessienne dans chaque itération ?

La réponse à été découverte par Davidon en 1959 et a été développée et popularisée par Fletcher et Powell en 1963. Elle consiste à commencer par n'importe quelle approximation de la matrice Hessienne et à chaque itération, on améliore la matrice en introduisant la courbure du problème mesuré tous au long de l'étape. Si cette amélioration est faite correctement, on obtient quelques méthodes remarquablement robustes et efficaces, qu'on appelle les méthodes de la variable métrique ou quasi Newton. Ils ont libéré l'optimisation non linéaire en procurant une alternative à la méthode de Newton, qui est très coûteuse pour plusieurs applications.

Il y a plusieurs méthodes de variable métrique, on s'étalera particulièrement sur les trois plus importantes, la méthode de correction de rang un, la méthode DFP (Davidon, Fletcher,

Powell), et la méthode BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno).

Algorithme (méthode de Newton)

Étape initiale :

Soit $\varepsilon > 0$, critère d'arrêt. Choisir \varkappa_1 point initial, poser $k = 1$ et aller à l'étape principale.

Étape principale :

Si $\|\nabla f(\varkappa_k)\| \leq \varepsilon$ STOP, sinon poser $\varkappa_{k+1} = \varkappa_k - [H(\varkappa_k)]^{-1} \nabla f(\varkappa_k)$ remplacer k par $k + 1$ et aller à l'étape principale.

Avantages et inconvénients

♣ Avantages

- Si le point \varkappa_0 est assez proche de la solution optimale locale \varkappa^* telle que $H(\varkappa^*)$ soit définie positive, alors l'algorithme de Newton converge de façon quadratique vers la solution \varkappa^*

c'est-à-dire que l'on a

$$\|\varkappa_{k+1} - \varkappa^*\| \leq \gamma \|\varkappa_k - \varkappa^*\|^2 \quad \gamma \geq 0$$

- La méthode de Newton fonctionne bien si $1 < n < 10$ car il est facile de déterminer $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}_k)$.
- La méthode de Newton converge en une seule itération lorsqu'elle est appliquée à une fonction quadratique strictement convexe.

♣ Inconvénients

- Il faut calculer les dérivées secondes de f qui peut être très coûteux en temps de calcul.
- L'algorithme n'est pas globalement convergent si le premier itéré \boldsymbol{x}_0 est éloigné de \boldsymbol{x}^* .
- Le successeur \boldsymbol{x}_{k+1} de \boldsymbol{x}_k n'est pas toujours bien défini, si $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = H(\boldsymbol{x})$ est singulière.
- Si f n'est pas strictement convexe, l'algorithme ne génère pas nécessairement des directions de descente de f .
- Un système linéaire d'ordre n doit être résolu à chaque itération, et on dispose pas de place mémoire pour stocker les $\mathcal{O}(n^2)$ éléments d'une matrice.

Comment peut-on remédier les défauts de l'algorithme de Newton ?

Pour obtenir une méthode qui converge superlinéairement, il est nécessaire d'approximer l'étape de Newton asymptotiquement qui est le principe de Dennis et Moré.

Comment peut-on y aboutir sans évaluer la matrice jacobienne $F'(\boldsymbol{x}_k)$ dans la résolution d'équation non linéaires ou le hessien $H(\boldsymbol{x}_k)$ de f en optimisation ?

La réponse consiste à commencer par n'importe quelle approximation de la matrice hessienne et à chaque itération, on améliore la matrice en introduisant la courbure du problème mesuré tout au long de l'étape.

Si cette amélioration est faite correctement, on obtient quelques méthodes remarquablement robustes et efficaces, qu'on appelle les méthodes de *la variable métrique* ou *quasi-Newton*, ils ont libéré l'optimisation non linéaire en procurant une alternative à la méthode de Newton, qui est très coûteuse pour plusieurs applications.

5.2.2 Méthodes de Quasi-Newton

La classe des méthodes quasi-newtoniennes n'exigent pas des expressions explicites pour les deuxièmes dérivés. Celles-ci désignés parfois sous le nom des méthodes métriques variables. Car le nom implique que la base de ces méthodes est la méthode classique de Newton. Le principe de base dans des méthodes quasi-newtoniennes est que la direction de recherche est basée sur une matrice M_k , qui atteint le même but de l'inverse du Hessien H_k , dans la méthode de Newton.

Les algorithmes de quasi-Newton prennent donc en charge la génération de la suite des itérés $\{\varkappa_k\}_{k \geq 0}$, mais aussi celle de la suite des matrices B_k approchant $F'(\varkappa_k)$ ou H_k . La première suite générée par la récurrence

$$\varkappa_{k+1} = \varkappa_k + s_k$$

où $s_k = \lambda_k d_k$ dans les algorithmes avec recherche linéaire ($\lambda_k > 0$ est le pas et d_k vérifie $B_k d_k = -F'(\varkappa)$ ou $B_k d_k = -g_k$ selon le problème) et s_k est la solution d'un problème d'optimisation quadratique avec une borne sur la norme du déplacement dans les algorithmes avec régions de confiance.

Donc une méthode de quasi Newton est une méthode de type :

$$\begin{cases} \varkappa_{k+1} = \varkappa_k + \lambda_k d_k \\ d_k = -M_k g_k \end{cases} \quad (5.11)$$

ou bien

$$\begin{cases} \varkappa_{k+1} = \varkappa_k + \lambda_k d_k \\ d_k = -B_k^{-1} g_k \end{cases} \quad (5.12)$$

où M_k (respectivement B_k) est une matrice destinée à approcher l'inverse du hessien de f (respectivement le hessien) de f en \varkappa_k .

Si l'on veut que M_{k+1} approche le hessien $H_{k+1} = \nabla^2 f(\varkappa_{k+1})$, sans calculer ce dernier, la variation du gradient d'un itéré au suivant qu'il faut tirer de l'information. Puisque l'on a

$$y_k = g_{k+1} - g_k = \left(\int_0^1 \nabla^2 f(\varkappa_k + t s_k) dt \right) s_k,$$

il est naturel d'imposer à la matrice M_{k+1} de vérifier l'équation

$$s_k = M_{k+1} y_k$$

Cette équation porte le nom d'*équation de quasi-Newton*.

Il est également normal d'imposer à M_{k+1} d'être symétrique (puisque $[H(\varkappa_k)]^{-1}$ l'est).

Quelques propriétés des algorithmes de quasi-Newton

- Des méthodes quasi-newtoniennes, comme la plupart des autres méthodes, sont développées pour le problème quadratique convexe et puis sont prolongées au problème général. Elles sont considérées comme étant parmi les méthodes les plus efficaces et sont employées très intensivement dans de nombreuses applications. Plusieurs méthodes quasi-newtoniennes distinctes ont évolué ces dernières années. Dans ce chapitre, nous discuterons en détail les quatre méthodes les plus importantes de cette classe qui sont :

- 1- *Méthode de correction de rang un* (SR1 [1960])
- 2- *Méthode de Davidon-Fletcher-Powell* (DFP [D-1959 et F.P-1963])
- 3- *Méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno* (BFGS [1970])

- les algorithmes quasi-newtoniens convergent moins rapidement que l'algorithme de Newton. Dans les implémentations correctes, les itérés convergent toutefois q-superlinéairement.

- Chaque itération demande moins de calcul au simulateur que dans l'algorithme de Newton : il n'est pas nécessaire d'évaluer les dérivées secondes.

- Dans leur version standard, ces algorithmes peuvent être utilisés pour un nombre de variables qui n'est pas trop grand, disons $n \leq 500$ pour fixer les idées, cependant on a développé ces dernières années (à partir de 1990) des algorithmes qui sont des variantes de la méthode BFGS et qui prennent en charge les problèmes de grande taille (citons particulièrement la méthode BFGS à mémoire limitée, La IBFGS).

5.2.3 Formules de mise à jour de l'approximation du Hessien

Le principe de la mise à jour consiste à une itération donnée de l'algorithme

$$\begin{cases} \varkappa_{k+1} = \varkappa_k + \lambda_k d_k \\ d_k = -M_k g_k \end{cases} \quad (5.13)$$

Nous cherchons M_k sous la forme suivante :

$$M_{k+1} = M_k + \Delta_k \quad (5.14)$$

avec Δ_k symétrique, assurant la relation de quasi-Newton. On exige aussi que M_{k+1} soit définie positive, sous l'hypothèse que M_k est définie positive.

La formule (5.14) permet d'utiliser les nouvelles informations obtenues lors de l'étape k de l'algorithme, c'est-à-dire essentiellement le gradient

$g_{k+1} = \nabla f(\boldsymbol{x}_{k+1})$ au point \boldsymbol{x}_{k+1} , obtenu par une recherche linéaire (exacte ou approchée) dans la direction d_k . Il existe différentes formules de type (5.11). Suivant que Δ_k est de rang un ou deux, on parlera de correction de rang un (SR1) ou de rang deux.(DFP, BFGS).

5.2.4 Méthode de correction de rang un (SR1 [1960])

Cette méthode a été proposée par Broyden ([27]), Davidon ([25]), Fiacco et McCormick ([28]), Murtagh et Sargent ([29]), et Wolfe ([30]).

Etant donné que $[H(\boldsymbol{x}_k)]^{-1}$ est symétrique, la formule de mise à jour de l'approximation du Hessien est la suivante :

$$M_{k+1} = M_k + a_k u_k u_k^\top \quad (5.15)$$

où u_k est un vecteur de IR^n et a_k constante. La matrice de correction $\Delta_k = a_k u_k u_k^\top$ est symétrique et de rang un.

Des équations (5.13)-(5.15) on obtient :

$$s_k = M_k y_k + a_k u_k u_k^\top y_k \quad (5.16)$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} y_k^\top (s_k - M_k y_k) &= a_k y_k^\top u_k u_k^\top y_k \\ &= a_k (u_k^\top y_k)^2 \end{aligned} \quad (5.17)$$

Alternativement, de l'équation (5.16) on a :

$$\begin{aligned} (s_k - M_k y_k) &= a_k u_k u_k^\top y_k = a_k (u_k^\top y_k) u_k \\ (s_k - M_k y_k)^\top &= a_k y_k^\top u_k u_k^\top = a_k (u_k^\top y_k) u_k^\top \end{aligned}$$

Si on prend

$$u_k = (s_k - M_k y_k),$$

alors

$$a_k (u_k^\top y_k) = 1.$$

Soit en remplaçant :

$$a_k \cdot (s_k - M_k y_k)^\top \cdot y_k = 1$$

ou encore :

$$a_k = \frac{1}{(s_k - M_k y_k)^\top \cdot y_k},$$

et (5.15) devient :

$$M_{k+1} = M_k + \frac{(s_k - M_k y_k) \cdot (s_k - M_k y_k)^\top}{(s_k - M_k y_k)^\top \cdot y_k}$$

Cette formule porte le nom de formule SR1 (*système de rang 1*).

Algorithme (Méthode de SR1)

Étape initiale :

Soit $\varepsilon > 0$ (critère d'arrêt). Choisir un point initial \varkappa_1 et une matrice symétrique définie positive M_1 quelconque (par exemple $M_1 = I$) poser $k = 1$, et aller aux étapes principales

Étapes principales.

Étape 1 :

Si $\|\nabla f(\varkappa_k)\| < \varepsilon$ stop ; sinon, poser $d_k = -M_k g_k$ et déterminer le pas optimal λ_k solution optimale du problème $\min f(\varkappa_k + \lambda d_k)$, $\lambda \geq 0$. et poser $\varkappa_{k+1} = \varkappa_k + \lambda_k d_k$

Étape 2 :

Construire M_{k+1} comme suit :

$$M_{k+1} = M_k + \frac{(s_k - M_k y_k) \cdot (s_k - M_k y_k)^\top}{(s_k - M_k y_k)^\top \cdot y_k}$$

avec

$$\begin{aligned} s_k &= \varkappa_{k+1} - \varkappa_k \\ y_k &= \nabla f(\varkappa_{k+1}) - \nabla f(\varkappa_k) \end{aligned}$$

Remplacer k par $k + 1$ et aller à l'étape 1. □

Cet algorithme a un comportement remarquable dans le cas où f est une fonction quadratique.

Pour un problème quadratique convexe, cette méthode converge au plus dans $(n + 1)$ itérations et $(M_{k+1})^{-1} = H$ à condition que $s_i = M_{k+1}y_i$ pour $0 \leq i \leq k$. C'est en effet le cas, comme sera démontré par le théorème suivant.

Théorème 5.2.1 *Soit f une fonction quadratique, de matrice Hessienne H définie positive. Considérons la méthode itérative qui, partant d'un point \varkappa_0 arbitraire engendre les points*

$$\varkappa_{k+1} = \varkappa_k + s_k$$

où les s_k sont des vecteurs lin. indépendants. Pour toute matrice symétrique initiale M_0 , considérons la suite des matrices $\{M_k\}$ définis par :

$$M_{k+1} = M_k + \frac{(s_k - M_k y_k)(s_k - M_k y_k)^\top}{s_k^\top (s_k - M_k y_k)}. \quad (5.18)$$

avec

$$y_k = \nabla f(\varkappa_{k+1}) - \nabla f(\varkappa_k).$$

Alors on a :

$$s_i = M_{k+1}y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k$$

et dans au plus n étapes, la suite $\{\varkappa_k\}$ converge vers la solution optimale, et M_k converge vers l'inverse du Hessien H^{-1} ($M_{k+1} = H^{-1}$)

Preuve. Supposons que

$$s_i = M_k y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1 \quad (5.19)$$

est vraie et montrons qu'elle est vraie pour k , si $0 \leq i \leq k-1$ de l'équation (5.18)

$$M_{k+1}y_i = M_k y_i + u_k (s_k - M_k y_k)^\top y_i$$

où

$$u_k = \frac{s_k - M_k y_k}{y_k^\top (s_k - M_k y_k)}$$

Puisque M_k est symétrique, nous pouvons écrire

$$M_{k+1}y_i = M_k y_i + u_k (s_k^\top y_i - y_k^\top M_k y_i)$$

et de (5.19)

$$M_{k+1}y_i = s_i + u_k (s_k^\top y_i - y_k^\top s_i) \quad (5.20)$$

pour $0 \leq i \leq k$ on a

$$y_i = H s_i$$

et

$$y_k^\top = s_k^\top H$$

Par conséquent pour $0 \leq i \leq k-1$, nous prenons

$$s_k^\top y_i - y_k^\top s_i = s_k^\top H s_i - s_k^\top H s_i = 0$$

et de l'équation (5.20) on obtient

$$s_i = M_{k+1}y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1 \quad (5.21)$$

on a

$$s_k = M_{k+1}y_k$$

et avec (5.21), nous pouvons écrire

$$s_i = M_{k+1}y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k \quad (5.22)$$

Pour accomplir l'induction, nous notons

$$s_i = M_1 y_i = M_1 H s_i, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq 0$$

et d'après (5.22)-(5.19) nous pouvons écrire

$$s_i = M_2 y_i = M_2 H s_i, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq 1$$

$$s_i = M_3 y_i = M_3 H s_i, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq 2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$s_i = M_{k+1} y_i = M_{k+1} H s_i, \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k$$

et comme les vecteurs s_i sont indépendants, c'est-à-dire l'ensemble $\{s_0, s_1, \dots, s_k\}$ forme une base de \mathbb{R}^{k+1} alors,

$$M_{k+1}H = I$$

ou encore,

$$M_{k+1} = H^{-1}.$$

■

Remarque 5.2.1 si $M_{k+1} = H^{-1}$ alors on revient à la méthode de Newton qui converge en une seule itération puisqu'elle est appliquée à une fonction quadratique strictement convexe ; et aussi le théorème précédant permet d'obtenir l'inverse d'une matrice avec une méthode itérative.

Avantages et inconvénients de la méthode de SR1

♣ Avantages

- Cette méthode présente l'avantage, que le point x_{k+1} n'a pas besoin d'être choisi comme le minimum exact, c'est à dire qu'on n'a pas besoin d'effectuer des recherches linéaire exactes.

♣ Inconvénients

- Même si la fonction est quadratique, et même si son Hessien est défini positif, la matrice M_k n'est pas forcément définie positive.
- Le dénominateur $(s_k - M_k y_k)^\top y_k$ peut devenir nul ou très petit, ce qui rend le procédé instable c'est-à-dire, la méthode n'est pas bien définie.

Remarque 5.2.2 la méthode de SR1 est souvent utilisée lorsqu'il n'est pas possible ou qu'il n'est pas nécessaire que M_k soit définie positive.

5.2.5 Méthode de Davidon-Fletcher-Powell (DFP)

Cette méthode a été proposée par Davidon en 1959 et développé plus tard en 1963 par Fletcher et Powell. La formule de mise à jour de DFP est une formule de correction de rang deux. De façon plus précise construisons M_{k+1} en fonction de M_k de la forme :

$$M_{k+1} = M_k + A_k + \Delta_k \tag{5.23}$$

Bien sur le choix de A_k et Δ_k doit prendre en considération l'équation de quasi-Newton

$$M_{k+1}y_k = s_k \quad (5.23 \text{ bis})$$

Si on écrit A_k sous la forme $A_k = a_k u_k u_k^\top$ et $\Delta_k = b_k v_k v_k^\top$, alors (5.23 bis) prend la forme :

$$(a_k u_k u_k^\top) \cdot y_k + (b_k v_k v_k^\top) \cdot y_k = s_k - M_k \cdot y_k.$$

Comme dans le cas de la formule SR1, un bon choix de a_k , b_k , u_k et v_k conduit à la formule de correction de rang 2 suivante :

$$M_{k+1} = M_k + \frac{s_k s_k^\top}{s_k^\top y_k} - \frac{M_k y_k y_k^\top M_k}{y_k^\top M_k y_k} \quad (5.24)$$

Algorithme (Méthode de DFP)

Étape initiale :

Soit $\varepsilon > 0$, déterminer le critère d'arrêt. Choisir un point initial \varkappa_1 et une matrice symétrique définie positive M_1 quelconque (par exemple $M_1 = I$) poser $k = 1$, et aller aux étapes principales

Étapes principales.

Étape 1 :

Si $\|\nabla f(\varkappa_k)\| < \varepsilon$ STOP ; sinon, poser $d_k = -M_k g_k$ et déterminer le pas optimal λ_k solution optimale du problème $\min f(\varkappa_k + \lambda d_k)$, $\lambda \geq 0$. et poser $\varkappa_{k+1} = \varkappa_k + \lambda_k d_k$

Étape 2 :

Construire M_{k+1} comme suit :

$$M_{k+1} = M_k + \frac{s_k s_k^\top}{s_k^\top y_k} - \frac{M_k y_k y_k^\top M_k}{y_k^\top M_k y_k}$$

avec

$$\begin{aligned} s_k &= \varkappa_{k+1} - \varkappa_k \\ y_k &= \nabla f(\varkappa_{k+1}) - \nabla f(\varkappa_k) \end{aligned}$$

Remplacer k par $k + 1$ et aller à l'étape 1. \square

Cet algorithme a un comportement remarquable dans le cas où f est une fonction quadratique.

Théorème 5.2.2 *La formule (5.24) conserve la définie positivité des matrices M_k , c'est-à-dire, si M_k est définie positive alors M_{k+1} est également définie positive.*

Preuve. Soit \varkappa un vecteur de IR^n on a

$$\begin{aligned} \varkappa^\top M_{k+1} \varkappa &= \varkappa^\top M_k \varkappa + \frac{(s_k^\top \varkappa)^2}{s_k^\top y_k} - \frac{(y_k^\top M_k \varkappa)^2}{y_k^\top M_k y_k} \\ &= \frac{y_k^\top M_k y_k^\top \varkappa M_k \varkappa - (y_k^\top M_k \varkappa)^2}{y_k^\top M_k y_k} + \frac{(s_k^\top \varkappa)^2}{s_k^\top y_k} \end{aligned}$$

Si on définit le produit scalaire $\langle \varkappa, y \rangle = \varkappa^\top M_k y_k$, alors on a

$$\varkappa^\top M_{k+1} \varkappa = \frac{\langle y_k, y_k \rangle \langle \varkappa, \varkappa \rangle - \langle y_k, \varkappa \rangle^2}{\langle y_k, y_k \rangle} + \frac{(s_k^\top \varkappa)^2}{s_k^\top y_k} \quad (5.25)$$

Le premier terme du second membre est positive ou nul d'après l'inégalité de Cauchy Schwartz. et pour le deuxième terme on peut faire l'analyse suivante :

Puisque le pas est optimal on a la relation d'après l'orthogonalité des directions successives

$$g_{k+1}^\top d_k = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} s_k^\top y_k &= \lambda_k (g_{k+1} - g_k)^\top d_k \\ &= \lambda_k g_k^\top M_k g_k > 0 \end{aligned}$$

On a donc

$$\varkappa^\top M_{k+1} \varkappa \geq 0.$$

Les deux termes dans (5.25) étant positifs. Cette quantité ne peut s'annuler que si les deux termes sont simultanément nuls, le premier terme ne peut s'annuler que si $\varkappa = \lambda y_k$ pour un scalaire $\lambda \neq 0$, dans ce cas le deuxième terme est non nul car $s_k^\top \varkappa = \lambda s_k^\top y_k$. on a donc bien

$$\varkappa^\top M_{k+1} \varkappa > 0 \quad \text{pour } \varkappa \neq 0.$$

■

• Il est important de noter que le résultat ci-dessus est vérifié pour n'importe quel $\lambda_k > 0$ pour lequel

$$s_k^\top y_k = s_k^\top g_{k+1} - s_k^\top g_k > 0 \quad (5.26)$$

c'est-à-dire si $s_k^\top y_k > 0$, alors la définie positivité de M_{k+1} est préservée même dans le cas où la minimisation de $f(x_k + \lambda d_k)$ est inexacte et donc l'équation de quasi-newton a toujours une solution M_{k+1} .

• Si f est strictement convexe alors l'inégalité (5.26) est vérifiée pour tous x_k et x_{k+1}

$$\left(\begin{array}{l} \text{car : } f \text{ est strictement convexe} \Leftrightarrow \forall x_k, x_{k+1} \in \mathbb{R}^n; x_k^\top H(x_{k+1}) x_k > 0 \\ \Rightarrow s_k^\top M_{k+1} s_k = s_k^\top y_k > 0 \end{array} \right)$$

Si f est non convexe alors l'inégalité (5.26) n'est pas forcément vérifiée.

Dans ce cas on utilise la recherche linéaire de Wolfe ou de Wolfe forte pour vérifier la condition (5.26). En effet

de (wolfe2) on a

$$g_{k+1}^\top s_k \geq \sigma g_k^\top s_k \Rightarrow y_k^\top s_k \geq (\sigma - 1) \lambda_k g_k^\top d_k$$

Puisque $\sigma < 1$ et $g_k^\top d_k < 0$, on peut écrire

$$y_k^\top s_k \geq (\sigma - 1) \lambda_k g_k^\top d_k > 0.$$

Théorème 5.2.3 (Directions conjuguées engendrées par méthode de DFP)

a) Si la recherche linéaire utilisée dans la méthode de DFP est exacte et si la fonction objective $f(x)$ est une fonction convexe et quadratique, alors l'algorithme DFP décrit par la relation

$$M_{k+1} = M_k + \frac{s_k s_k^\top}{s_k^\top y_k} - \frac{M_k y_k y_k^\top M_k}{y_k^\top M_k y_k}$$

engendre un ensemble des directions conjuguées s_0, s_1, \dots, s_k c'est-à-dire,

$$s_i^\top H s_j = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq k \quad (5.27)$$

b) Si

$$y_i = H s_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k \quad (5.28)$$

alors

$$s_i = M_{k+1}y_i \quad (5.29)$$

Preuve. Supposons que

$$s_i^\top H s_j = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq k-1 \quad (5.30)$$

$$s_i = M_k y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1 \quad (5.31)$$

puis nous montrons l'équations (5.27) et (5.29)

a) on a

$$y_k = H s_k$$

où

$$s_k = \varkappa_{k+1} - \varkappa_k$$

$$y_k = g_{k+1} - g_k$$

donc nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} g_k &= g_{k-1} + H s_{k-1} \\ &= g_{k-2} + H s_{k-2} + H s_{k-1} \\ &= g_{k-3} + H s_{k-3} + H s_{k-2} + H s_{k-1} \\ &\vdots \\ &= g_{i+1} + H(s_{i+1} + s_{i+2} + \dots + s_{k-1}) \end{aligned}$$

Ainsi pour $0 \leq i \leq k-1$, nous prenons

$$s_i^\top g_k = s_i^\top g_{i+1} + s_i^\top H(s_{i+1} + s_{i+2} + \dots + s_{k-1}) \quad (5.32)$$

et quand la recherche linéaire utilisée dans la méthode de DFP est exacte, alors $f(\varkappa)$ est minimisée exactement au point \varkappa_{i+1} et ainsi

$$g_{i+1}^\top d_i = 0 \quad (5.33)$$

implique

$$\lambda_i g_{i+1}^\top d_i = g_{i+1}^\top \lambda_i d_i = s_i^\top g_{i+1} = 0$$

Maintenant pour $0 \leq i \leq k-1$, l'équation (5.30) donne

$$s_i^\top H(s_{i+1} + s_{i+2} + \dots + s_{k-1}) = 0 \quad (5.34)$$

5.2. MÉTHODES QUASI-NEWTONIENNES

et de (5.32)-(5.34), nous obtenons

$$s_i^\top g_k = 0$$

Alternativement, d'équations. (5.31)-(5.28) nous pouvons écrire

$$s_i^\top g_k = (M_k y_i)^\top g_k = (M_k H s_i)^\top g_k = s_i^\top H M_k g_k = 0$$

De plus, pour éliminer $M_k g_k$ on utilise l'équation

$$s_k = \lambda_k d_k = -\lambda_k M_k g_k$$

ainsi

$$s_i^\top g_k = -\frac{1}{\lambda_k} s_i^\top H s_k = 0$$

et depuis $\lambda_k > 0$, nous avons

$$s_i^\top H s_k = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1 \quad (5.35)$$

Maintenant, par la combinaison de. (5.30) et (5.35)

$$s_i^\top H s_j = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq k \quad (5.36)$$

Pour accomplir l'induction, nous pouvons écrire

$$s_0^\top g_1 = (M_1 y_0)^\top g_1 = (M_1 H s_0)^\top g_1 = s_0^\top H M_1 g_1 = -\frac{1}{\lambda_1} s_0^\top H s_1$$

et depuis $f(x)$ est minimisée exactement au point x_1 , nous avons

$$s_0^\top g_1 = 0 \text{ et}$$

$$s_i^\top H s_j = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq 1$$

Depuis (5.36) est vérifiée si (5.30) est vérifiée, nous pouvons écrire

$$s_i^\top H s_j = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq 2$$

$$s_i^\top H s_j = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq 3$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$s_i^\top H s_j = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i < j \leq k$$

c'est-à-dire, les directions s_0, s_1, \dots, s_k , forment un ensemble des directions conjuguées.

b) de (5.31)

$$y_k^\top s_i = y_k^\top M_k y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1 \quad (5.37)$$

et d'autre part de (5.28) on a

$$y_k^\top s_i = s_k^\top H s_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1 \quad (5.38)$$

Depuis s_0, s_1, \dots, s_k , forme un ensemble des directions conjuguées (de la partie (a)), et de (5.37)-(5.38)

$$y_k^\top s_i = y_k^\top M_k y_i = s_k^\top H s_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1 \quad (5.39)$$

En notant

$$s_k^\top = y_k^\top M_{k+1} \quad \text{et} \quad H s_i = y_i$$

(5.39) peut être exprimé

$$y_k^\top s_i = y_k^\top M_k y_i = y_k^\top M_{k+1} y_i = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1$$

et, en conséquence,

$$s_i = M_k y_i = M_{k+1} y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k-1 \quad (5.40)$$

Maintenant, de l'équation

$$s_k = M_{k+1} y_k$$

et par la combinaison de (5.40), nous obtenons

$$s_i = M_{k+1} y_i \quad \text{pour } 0 \leq i \leq k.$$

■

Remarque 5.2.3 Pour $k = n-1$, des equations (5.28) et (5.29) on peut écrire

$$[M_n H - \alpha I] s_i = 0 \quad \text{pour } 0 \leq i \leq n-1$$

avec $\alpha = 1$. En effet, les vecteurs s_i sont des vecteurs propres qui correspondent à la valeur propre d'unité pour la matrice $M_n H$, et puisqu'ils sont linéairement indépendants, nous avons

$$M_n = H^{-1}$$

c'est-à-dire, dans un problème quadratique M_{k+1} devient le Hessien à l'itération $n-1$.

Remarque 5.2.4 Une méthode de directions conjuguées est une méthode itérative qui appliquée à une fonction quadratique de n variables conduit à l'optimum en n étapes au plus; autrement dit, une méthode de directions conjuguées converge donc de façon finie en au plus n étapes.

Avantages et inconvénients de la méthode de DFP

♣ Avantages

- 1- Pour des fonctions quadratiques (avec une recherche linéaire exacte) :
 - L'algorithme converge dans au plus n étapes avec $M_{n+1} = H^{-1}$.
 - Elles engendrent des directions conjuguées.
- 2- Pour les fonctions quelconques :
 - la matrice M_k reste définie positive, ce qui est nécessaire pour que la direction soit une direction de descente.

5.2.6 Méthode de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS [1970])

La méthode de BFGS est une méthode quasi-newtonienne bien connue pour résoudre des problèmes d'optimisation sans contraintes, elle a été proposée par : Broyden, Fletcher, Goldfarb, et Shanno. Elle est devenue une méthode de choix pour les ingénieurs et les mathématiciens qui sont intéressés à résoudre des problèmes d'optimisation.

Une autre manière d'imposer à M_{k+1} d'être proche de M_k est de minimiser l'"écart" entre M_{k+1} et M_k , toujours en requérant que M_{k+1} soit symétrique et vérifie l'équation de quasi-Newton. On est donc conduit à considérer le problème en la variable matricielle $M \in IR^{n \times n}$ suivant :

$$\begin{cases} \min \text{"écart"}(M, M_k) \\ y_k = M s_k \\ M = M^\top \end{cases} ; M \in IR^{n \times n} \quad (5.41)$$

On dit alors que la matrice est obtenue par une *approche variationnelle*.

Notations : Pour indiquer qu'une matrice carrée M est symétrique semi-définie positive (resp. définie positive), on notera $M \geq 0$ (resp. $M > 0$). L'ensemble des matrices symétriques d'ordre n est noté S^n ,

$$S_+^n := \{M \in S^n : M \geq 0\}$$

et

$$S_{++}^n := \{M \in S^n : M > 0\}.$$

Il est souvent intéressant d'imposer également la définie positivité des matrices M_k , car pour que $d_k = -M_k^{-1}g_k$ soit une direction de descente, on a besoin que M_k soit une matrice symétrique, définie positive (en effet : on sait que, toute matrice symétrique réelle et définie positive est inversible, et son inverse est elle aussi définie positive, c'est-à-dire on peut écrire :

$$g_k^\top d_k = -g_k^\top M_k^{-1}g_k < 0 \text{ donc, } d_k \text{ est une direction de descente}).$$

Cette condition définissant un ensemble ouvert ne peut être utilisée directement comme contrainte dans le problème définissant M_{k+1} ; et dans ce but, on commence par introduire une fonction : $\psi : S^n \rightarrow IR$ dont le domaine est S_{++}^n et qui forme une "barrière" au bord du cône S_{++}^n (elle tend vers l'infini lorsque son argument se rapproche du bord de S_{++}^n) ainsi qu'à l'infini :

$$\psi(\Upsilon) = tr\Upsilon + ld\Upsilon \tag{5.42}$$

où la fonction log-déterminant $ld : S^n \rightarrow IR \cup \{+\infty\}$ est définie en $\Upsilon \in S^n$ par

$$ld(\Upsilon) = \begin{cases} -\log \det \Upsilon & \text{si } \Upsilon \in S_{++}^n \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Les propriétés annoncées de ψ peuvent se voir sur son expression suivante. Si on note $\{\alpha_i\}$ les valeurs propres de Υ , on a $tr\Upsilon = \sum_{i=1}^n \alpha_i$, $\det \Upsilon = \prod_{i=1}^n \alpha_i$ et donc

$$\psi(\Upsilon) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \log \alpha_i), \quad \text{si } \Upsilon \in S_{++}^n \tag{5.43}$$

Etant donné l'allure de la fonction $t \in IR_{++} \mapsto t - \log t$, $\psi(\Upsilon)$ tend vers l'infini si l'une des valeurs propres de Υ tend vers zéro ou vers l'infini.

$$(\exists j \in \{1, \dots, n\}; \lim_{\alpha_j \rightarrow 0 \text{ ou } \infty} \psi(\Upsilon) = \infty).$$

La formule (5.43) montre aussi que l'unique minimiseur de ψ est $\Upsilon = I$ la matrice identité ($\alpha_i = 1$ pour tout i).

Si M_k est une matrice réelle symétrique alors :

la matrice M_k est définie positive si et seulement s'il existe une matrice définie positive A_k telle que $A_k^2 = M_k$; dans ce cas, la matrice définie positive A_k et on peut la noter $A_k = M_k^{\frac{1}{2}}$ est unique.

en effet :

Si M_k est une matrice réelle symétrique alors on peut écrire

$$U^\top M_k U = \Lambda$$

où U est vérifiée

$$U^\top U = U U^\top = I$$

et Λ est une matrice diagonale où les éléments du diagonale sont les valeurs propres de M_k qui sont strictement positives car M_k est définie positive. Donc on peut écrire

$$M_k = U \Lambda U^\top = U \Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} U^\top = \left(U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^\top \right) \left(U \Lambda^{\frac{1}{2}} U^\top \right) = M_k^{\frac{1}{2}} M_k^{\frac{1}{2}}. \quad \square$$

On veut dire, qu'il faut trouver une matrice M symétrique et définie positive être proche de M_k c'est-à-dire

$$M \cong M_k^{\frac{1}{2}} M_k^{\frac{1}{2}}$$

implique

$$M_k^{-\frac{1}{2}} M M_k^{-\frac{1}{2}} \cong I$$

Donc afin de minimiser l'écart entre M et M_k , on va chercher à ce que $M_k^{-\frac{1}{2}} M M_k^{-\frac{1}{2}}$ soit proche de I ; et ceci peut être obtenu en minimisant $\psi \left(M_k^{-\frac{1}{2}} M M_k^{-\frac{1}{2}} \right)$, si bien que l'on aura M_{k+1} proche de M_k en résolvant :

$$\begin{cases} \min \psi \left(M_k^{-\frac{1}{2}} M M_k^{-\frac{1}{2}} \right) \\ y_k = M s_k \\ M \in S_{++}^n \quad (\text{contrainte implicite}). \end{cases} \quad (5.44)$$

Si $s_k = 0$ alors $\begin{cases} \text{si } y_k \neq 0 \text{ alors (5.44) n'a pas de solutions} \\ \text{ou bien} \\ \text{si } y_k = 0 \text{ alors la solution du (5.44) est } M = M_k \end{cases} ;$

Sinon ; le cas non trivial où $s_k \neq 0$ est examiné dans le proposition suivante.

Proposition 5.2.1 *Supposons que M_k soit symétrique définie positive et que $s_k \neq 0$. Alors, le problème (5.44) a une solution si et seulement si*

$$y_k^\top s_k > 0.$$

Sous cette condition la solution M_{k+1} de (5.44) est unique et est donnée par l'une des formules suivantes :

$$M_{k+1} = M_k + \frac{y_k y_k^\top}{y_k^\top s_k} - \frac{M_k s_k s_k^\top M_k}{s_k^\top M_k s_k} \quad (5.45)$$

$$B_{k+1} = \left(I - \frac{s_k y_k^\top}{y_k^\top s_k} \right) B_k \left(I - \frac{y_k s_k^\top}{y_k^\top s_k} \right) + \left(I - \frac{s_k s_k^\top}{y_k^\top s_k} \right) \quad (5.46)$$

où on a noté $B_k := M_k^{-1}$ et $B_{k+1} := M_{k+1}^{-1}$.

Algorithme (Méthode de BFGS)

Etape initiale :

Soit $\varepsilon > 0$, déterminer le critère d'arrêt. Choisir \varkappa_1 point initial et M_1 définie positive quelconque (par exemple $M_1 = I$).

Poser $k = 1$ et aller aux étapes principales

Etapes principales.

Etape 1 :

Si $\|\nabla f(\varkappa_k)\| < \varepsilon$ STOP ; sinon, poser $d_k = -M_k g_k$ et déterminer le pas

optimal λ_k solution optimale du problème $\min f(\varkappa_k + \lambda d_k)$, $\lambda \geq 0$ et poser

$$\varkappa_{k+1} = \varkappa_k + \lambda_k d_k$$

Etape 2 :

Construire M_{k+1} comme suit :

$$M_{k+1} = M_k + \frac{y_k y_k^\top}{y_k^\top s_k} - \frac{M_k s_k s_k^\top M_k}{s_k^\top M_k s_k}$$

avec

$$\begin{aligned} s_k &= \varkappa_{k+1} - \varkappa_k \\ y_k &= \nabla f(\varkappa_{k+1}) - \nabla f(\varkappa_k) \end{aligned}$$

Remplacer k par $k + 1$ et aller a l'étape 1. □

Proposition 5.2.2 (*Propriété algébrique*) Soit H une matrice symétrique et s_1, s_2, \dots, s_p des directions non nulles, conjuguées par rapport à cette matrice (c'est-à-dire : $s_i^\top H s_j = 0$, pour $i \neq j$ et $s_i^\top H s_i > 0$). On se donne une matrice M_1 symétrique définie positive et on définit

$$M_{i+1} = M_i + \frac{y_i y_i^\top}{y_i^\top s_i} - \frac{M_i s_i s_i^\top M_i}{s_i^\top M_i s_i}, \quad \text{pour } i = 1, \dots, p$$

Alors,

- (i) $M_{k+1} s_i = H s_i$, pour $k = 1, \dots, p$ et $i = 1, \dots, k$,
- (ii) si $p = n$, on a $M_{n+1} = H$.

Preuve. (i) La première propriété se démontre par récurrence.

Elle est vérifiée pour $k = 1$: $M_2 s_1 = H s_1$ (c'est l'équation de quasi-Newton vérifiée par M_2 où $y_1 = H s_1$). Supposons qu'elle le soit pour un $k = 1, \dots, l-1$, avec $2 \leq l \leq p$, et démontrons la pour $k = l$.

Par conjugaison et récurrence, $s_l^\top H s_i = 0$ et $s_l^\top M_l s_i = s_l^\top H s_i = 0$.

Dès lors, la formule de BFGS (5.45) donne $M_{l+1} s_i = M_l s_i = H s_i$. Si $i = l$, on a $M_{l+1} s_l = H s_l$ (c'est l'équation de quasi-Newton vérifiée par M_{l+1} où $y_l = H s_l$).

Donc on a $M_{k+1} s_i = H s_i$, pour $k = 1, \dots, p$ et $i = 1, \dots, k$.

(ii) Si $p = n$, alors M_{n+1} prend la même valeur que H sur les n vecteurs linéairement indépendants s_1, s_2, \dots, s_n , c'est-à-dire de (i) on peut écrire

$$M_{n+1} s_1 = H s_1$$

$$M_{n+1} s_2 = H s_2$$

⋮

$$M_{n+1} s_n = H s_n$$

et puisque s_1, s_2, \dots, s_n sont linéairement indépendant, nous avons

$$M_{n+1} = H.$$

■

Propriétés

- La condition $y_k^\top s_k > 0$ assure la défini-positivité de M_k .
- La condition $y_k^\top s_k > 0$ est satisfaite lorsqu' on utilise la recherche linéaire de Wolfe.
- Les directions s_1, s_2, \dots, s_n engendrées par la formule de BFGS sont conjuguées.
- Dans le cas quadratique la méthode de BFGS possède les mêmes propriétés que DFP.
- Dans le cas non quadratique, il faut procéder à des réinitialisations périodiques pour assurer la convergence globale.

5.2.7 Les méthodes de la classe Broyden

Une méthode de classe Broyden est une méthode de quasi-Newton où l'approximation de l'inverse du Hessien prend la formule suivant :

$$M_{k+1} = M_k - \frac{M_k s_k s_k^\top M_k}{s_k^\top M_k s_k} + \frac{y_k y_k^\top}{y_k^\top s_k} + \phi (s_k^\top M_k s_k) v_k v_k^\top \quad (5.47)$$

$$\text{avec } \phi \in [0, 1], \quad v_k^\top = \left[\frac{y_k}{y_k^\top s_k} - \frac{M_k s_k}{s_k^\top M_k s_k} \right]$$

- ◆ Si $\phi = 0$ on obtient la méthode BFGS.
- ◆ Si $\phi = 1$ on obtient la méthode DFP.
- ◆ Si $\phi = \frac{s_k^\top y_k}{s_k^\top y_k - y_k^\top M_k y_k}$ on obtient la méthode de SR1.

Propriétés des méthodes de la classe de broyden

- Nous pouvons donc récrire (5.47) comme "*combinaison linéaire*" de deux méthodes, c'est-à-dire,

$$M_{k+1} = (1 - \phi) M_{k+1}^{BFGS} + \phi M_{k+1}^{DFP},$$

Cette relation indique que tous les membres de la classe de Broyden satisfont l'équation de quasi-newton, puisque les matrices de BFGS et de DFP elles-mêmes satisfont cette équation et aussi elle conserve la définie positivité des matrices M_k .

Théorème 5.2.4 *Si une méthode de Broyden est appliquée à une fonction quadratique convexe avec une recherche linéaire exacte, elle converge après $m \leq n$ itérations. Les propriétés suivantes s'appliquent pour tout*

$k = 0, 1, \dots, m$:

- (a) $s_i = M_{k+1}y_i$ pour $0 \leq i \leq k$.
- (b) $s_i^\top H s_j = 0$ pour $0 \leq i < j \leq k$.
- (c) Si $m = n - 1$, alors $M_m = H^{-1}$

Chapitre 6

Travaux dirigés et travaux pratiques

6.1 Travaux dirigés

Exercice 01

Soit C_1 et C_2 deux ensembles convexes de \mathbb{R}^n et $C_1 + C_2 = \{x + y; x \in C_1, y \in C_2\}$, $C_1 - C_2 = \{x - y; x \in C_1, y \in C_2\}$

- Démontrer que $C_1 + C_2$ et $C_1 - C_2$ sont convexes.

Exercice 02

Soit C_1, C_2 deux parties convexes d'un espace vect réel E et soit $s \in [0, 1]$, on pose $C = sC_1 + (1-s)C_2 = \{sx + (1-s)y, x \in C_1, y \in C_2\}$.

- Démontrer que C est convexe

Exercice 03 (Réciproque d'une application convexe)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et strictement croissante.

Étudier la convexité de $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$.

Exercice 04

1. Soit f une fonction convexe croissante et soit g une fonction convexe $f \circ g$ Démontrer que est convexe.

2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ Montrer que $\ln f$ est convexe si et seulement si $\alpha > 0$, pour tout f^α , est convexe.

Exercice 05

Soient f et g convexes sur I , que dire de $\sup(f, g)$ et de $\inf(f, g)$.

Exercice 06

Soit U une partie convexe d'un espace vectoriel V .

Montrer que $f : U \subset V \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si l'ensemble suivant :

$$\text{epi}(f) = \{(v, \alpha) \in V \times \mathbb{R} \mid v \in U, \alpha \geq f(v)\}$$

est une partie convexe de $V \times \mathbb{R}$.

Exercice 07

soit f une fonction de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} . Pour u et v fixés dans \mathbb{R}^n on définit la fonction de \mathbb{R}^+ vers \mathbb{R} suivante :

$$\forall \lambda > 0 \quad \phi(\lambda) = \frac{F(u + \lambda v) - F(u)}{\lambda}$$

- Montrer que si F est convexe alors ϕ est croissante.

Exercice 08

Soit f et g deux fonctions convexe sur I . Montrer que ; $\max(f, g)$ convexe.

Exercice 09

Montrer que la fonction indicatrice d'un ensemble k définie par :

$$I_k = \begin{cases} 0 & ; \text{si } x \in k \\ +\infty & ; \text{sinon} \end{cases}$$

est convexe $\iff k$ est convexe .

Exercice 10

soit :

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3) \longmapsto x_1^4 + x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 6x_1 + 3x_2 - 2x_3(x_1 + x_2 + 1).$$

Est-ce que cette fonction convexe ?

Exercice 11

Soit A une matrice symétrique d'ordre N et $b \in \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{R}^n$ on pose ;

$$J(x) = \frac{1}{2}A.x.x - b.x$$

1-Montre que J est convexe ssi A est semi-définie positif?

2-Montre que J est symétrie convexe ssi A est définie positif?

Exercice 12

On considère $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

1) En utilisant la définition montrez que $(\hat{x}, \hat{y}) = (0, 0)$ est une solution minimale locale et globale de f dans \mathbb{R}^2 .

Exercice 13

Etudiez les solutions optimales locales de f , définie par :

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy; \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 14

Considérons la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

On note par $D(f, (x_0, y_0))$ l'ensemble des vecteurs $d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que d est une direction de descente de f au point (x_0, y_0) En d'autres termes

$$D(f, (x_0, y_0)) = \{d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : \nabla f(x_0, y_0)^\top . d < 0\}$$

On prend $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Trouver et représentez géométriquement l'ensemble $D(f, (1, 1))$.

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par ;

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$$

1- Montrer qu'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, (et les déterminer) tels que ;

$$f(x, y) \geq \alpha \| (x, y) \|^2 + \beta$$

Pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, où la notation $\| . \|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 .

En déduire que le problème ;

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) \quad (P)$$

possède au moins une solution.

2- La fonction f est-elle convexe sur \mathbb{R}^2 ?

3- Déterminer les points critiques de f , et préciser leur nature (minimum local, maximum local, point-selle, ...). Résoudre alors le problème (P).

Exercice 16

Trouver les points critiques et discuter leur nature pour $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

- a) $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$
- b) $f(x, y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$
- c) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
- d) $f(x, y) = x^3y + x^3 - x^2y$
- e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$
- f) $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$

Exercice 17

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue et $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Montrer :

(\bar{x} est minimum global de f) \Leftrightarrow (Tout x tel que $f(x) = f(\bar{x})$ est un minimum local de f).

Exercice 18

On considère la fonction f suivante :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3y$$

- a) Calculez les dérivées partielles de f et les dérivées secondes de f
- b) évaluez les dérivées partielles et les dérivées secondes de f aux points $A(-1, 1)$ et $B(1, -1)$.

A et B sont ils des points critiques de f ?

c) Déterminer la nature de ces points critiques.

Exercice 19

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, définie par ;

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Montrer que $H(\hat{x}, \hat{y})$ est semi-définie positive en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

Exercice 20

On désigne par $\mathring{P}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices définies positives de taille n (c'est un ouvert de $S_n(\mathbb{R})$). Étant donnés A et B dans $\mathring{P}_n(\mathbb{R})$, on considère le problème de minimisation

$$\text{suivant :} \quad (p) \quad \begin{cases} \text{Minimiser } f(X) = \text{tr}(AX) + \text{tr}(BX^{-1}) \\ X \in \mathring{P}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$$

1) Quelles sont les propriétés de f , utiles pour sa minimisation (différentiabilité, convexité, coercivité) peut-on dégager ? En déduire que le problème (P) a une et une seule solution.

2) (i) Vérifier que la solution de (P) est la (seule) matrice X vérifiant $\bar{X}A\bar{X} = B$.

(ii) Donner, à partir de BA (ou de AB), une procédure permettant de construire X .

(iii) En déduire la valeur optimale dans (P) .

3) On pose $n = 2$. Montrer que la valeur optimale dans (P) est

$$2\sqrt{\text{tr}(AB) + 2\sqrt{\det(AB)}}.$$

Exercice 21

Montrer que le point $x^* = (1, 1/2, -1)$ soit optimal pour le problème suivant :

$$\min_{-1 \leq x \leq 1} (1/2)x^\top px + q^\top x + r$$

avec

$$p = \begin{pmatrix} 13 & 12 & -2 \\ 12 & 17 & 6 \\ -2 & 6 & 12 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -22.0 \\ -14.5 \\ 13.0 \end{pmatrix}$$

Exercice 22

Soit $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction polynomiale de degré cinq définie par

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow f(x) = (1 + x_n)^3 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + x_n^2$$

Montrer que $0 \in \mathbb{R}^n$ est le seul point critique de f , qu'il est minimum local strict de f , mais qu'il n'est pas minimum global de f .

Exercice 23

Soient $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et différentiable sur \mathbb{R}^n ,
 $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe sur \mathbb{R}^n , finie en au moins un point.

On pose $f = g + h$ et on considère le problème de la minimisation de f sur \mathbb{R}^n .

1) Montrer que \bar{x} minimise f sur \mathbb{R}^n si et seulement si

$$\langle \nabla g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.1)$$

2) Vérifier que (*) est équivalente à

$$\langle \nabla g(x), x - \bar{x} \rangle + h(x) - h(\bar{x}) \geq 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \quad (6.2)$$

Exercice 24

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement sur \mathbb{R}^n .

Soit $\varepsilon > 0$ et u une solution à ε près du problème de minimisation de f sur \mathbb{R}^n , c'est-à-dire vérifiant

$$f(u) \leq \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \varepsilon.$$

Étant donné $\lambda > 0$ on considère

$$g : x \in \mathbb{R}^n \rightarrow g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - u\|.$$

1) Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^n$ minimisant g sur \mathbb{R}^n .

Montrer que ce point v vérifie les conditions ci-après :

- (i) $f(v) \leq f(u)$;
- (ii) $\|v - u\| \leq \lambda$;
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, f(v) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - v\|$

2) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable et bornée inférieurement sur \mathbb{R}^n .

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe x_ε tel que $\|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$.

Exercice 25

Soit

$$J(x) = (f(x) - d)^\perp C(f(x) - d)$$

1-(Propriétés d'existence et d'unicité)

- (a) Montrer que J est bornée inférieurement.
 (b) Donner trois exemples de fonctions f pour lesquels les fonctionnelles J associées sont telles que l'on ait :
- i. existence et unicité de $\bar{x} \in IR^n$ qui réalise le minimum de J , pour le premier exemple.
 - ii. existence et non unicité de $\bar{x} \in IR^n$ qui réalise le minimum de J , pour le second exemple.
 - iii. non existence de $\bar{x} \in IR^n$ qui réalise le minimum de J , pour le troisième exemple.

(On pourra prendre $n = p = 1$.)

2- (a) On note Df et D_2f les différentielles d'ordre 1 et 2 de f . A quels espaces appartiennent $Df(x)$, $D_2f(x)$ (pour $x \in IR^n$), ainsi que Df et D_2f ? Montrer que pour tout $x \in IR^n$, il existe $M(x) \in M_{p,n}(IR)$, où $M_{p,n}(IR)$ désigne l'ensemble des matrices réelles à p lignes et n colonnes, telle que $Df(x)(y) = M(x)y$ pour tout $y \in IR^n$.

(b) Pour $x \in IR^n$, calculer $\nabla J(x)$.

Exercice 26 (Algorithme de Quasi Newton)

Soit $A \in M_n(R)$ une matrice symétrique définie positive $b \in R^n$. On pose

$$f(x) = (1/2)Ax.x - b.x \text{ pour } x \in R^n.$$

On rappelle que $\nabla f(x) = Ax - b$. pour calculer $\bar{x} \in R^n$ tel que $f(\bar{x}) \leq f(x)$ pour tout $x \in IR^n$, on va utiliser un algorithme de quasi Newton, c'est-à-dire :

initialisation. $x^{(0)} \in IR^n$.

itération. $x^{(k)}$ connu ($n \geq 0$). On pose $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \beta_k K^{(k)} g^{(k)}$ avec $g^{(k)} = \nabla f(x^{(k)})$, $K^{(k)}$ une matrice symétrique définie positive à déterminer et β^k "optimal" dans la direction $w^{(k)} = -K^{(k)} g^{(k)}$. (Noter que β^k existe bien.)

Partie 1 : Calcul de β_k .

On suppose que $g^{(k)} \neq 0$.

1. Montrer que $w^{(k)}$ est une direction de descente stricte en $x^{(k)}$ et calculer la valeur de β_k (en fonction de $k^{(k)}$ et $g^{(k)}$).

2. On suppose que, pour un certain $n \in IN$, on a $K^{(k)} = (H(x^{(k)}))^{-1}$ (où $H(x)$ est la matrice hessienne de f en x , on a donc ici $H(x) = A$ pour tout $x \in IR^n$). Montrer que $\beta_k = 1$.

3. Montrer que la méthode de Newton pour calculer x converge en une itération (mais nécessite la résolution du système linéaire

$$A(x^{(1)} - x^{(0)}) = b - Ax^{(0)} \dots$$

Partie 2 : Méthode de Fletcher-Powell.

On prend maintenant $K^{(0)} = Id$ et

$$K^{(n+1)} = K^{(k)} + \frac{s^{(k)} + (s^{(k)})^t}{s^{(k)}.y^{(k)}} - \frac{(K^{(k)}y^{(k)})(K^{(k)}(y^{(k)})^t)}{K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)}}, n \geq 0,$$

avec

$$s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}$$

et

$$y^{(k)} = g^{(k+1)} - g^{(k)} = As^{(k)}.$$

On va montrer que cet algorithme converge en au plus n itérations (c'est-à-dire qu'il existe $n \leq n + 1$ t.q. $x_{N+1} = \bar{x}$)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose, dans cette question, que $s^{(0)}, \dots, s^{(k-1)}$ sont des vecteurs non nuls, A-conjugués (c.à.d : avec A une matrice symétrique définie positive on a $s^{(i)\perp} As^{(j)} = 0$, pour tout $i \neq j$) et que $K^{(0)}, \dots, K^{(k)}$ sont des matrices symétriques définies positives t.q. $K^{(j)} As^{(i)} = s^{(i)}$ si $0 \leq i < j \leq n$ (pour $n = 0$ on demande seulement $K^{(0)}$ symétrique définie positive).

(a) On suppose que $g^{(k)} \neq 0$. Montrer que $s^{(k)} \neq 0$ et que, pour $i < n$,

$$s^{(k)\perp}.As^{(i)} = 0 \Leftrightarrow g^{(k)}.s^{(i)} = 0.$$

Montrer que $g^{(k)}.s^{(i)} = 0$ pour $i < n$. [On pourra remarquer que $g^{(i+1)}.s^{(i)} = g^{(i+1)}.w^{(i)} = 0$ et $(g^{(k)} - g^{(i+1)}).s^{(i)} = 0$ par l'hypothèse de conjugaison de $s^{(0)}, \dots, s^{(k-1)}$.] En déduire que $s^{(0)}, \dots, s^{(k)}$ sont des vecteurs A-conjugués et non-nuls.

(b) Montrer que $K^{(k+1)}$ est symétrique.

(c) Montrer que $K^{(k+1)} As^{(i)} = s^{(i)}$ si $0 \leq i \leq n$.

(d) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$K^{(k+1)}x.x = \frac{(K^{(k)}x.x)(K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)}) - (K^{(k)}y^{(k)}.x)^2}{K^{(k)}.y^{(k)}.y^{(k)}} + \frac{(s^{(k)}.x)^2}{As^{(k)}.s^{(k)}}$$

En déduire que $K^{(k+1)}$ est symétrique définie positive.

[On rappelle (inégalité de Cauchy-Schwarz) que, si K est symétrique définie positive, on a

$$(Kx.y)^2 \leq (Kx.x)(Ky.y)$$

et l'égalité a lieu si et seulement si x et y sont colinéaires.]

2. On suppose que $g^{(k)} \neq 0$ si $0 \leq k \leq n-1$.

Montrer (par récurrence sur n , avec la question précédente) que $s^{(0)}, \dots, s^{(n-1)}$ sont des vecteurs A-conjugués et non-nuls et que $K^{(n)}As^{(i)} = s^{(i)}$ si $i < n$.
En déduire que

$$K^{(n)} = A^{-1}, \beta_n = 1 \text{ et } x^{(n+1)} = A^{-1}b = x.$$

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$, avec $n, p \in \mathbb{N}^*$. Soit $C \in M_p(\mathbb{R})$ une matrice réelle carrée d'ordre p , symétrique définie positive, et $d \in \mathbb{R}^p$. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose :

$$J(x) = (f(x) - d) \cdot C(f(x) - d).$$

Exercice 27

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\alpha| < 1$ et $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on définit l'application :

$$F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x - x_0 - \alpha y \\ y - y_0 - \alpha \sin(x) \end{bmatrix}$$

1. Montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que l'on déterminera, telle que

$$F(x, y) = (0; 0) \text{ ssi } x = x_0 + \alpha y \text{ et } f(y) = 0.$$

2. Montrer pour tout triplet (x, x_0, y_0) il existe un couple unique $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $F(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, 0)$.

3. Écrire l'algorithme de Newton pour f et montrer que l'algorithme de Newton converge au voisinage de \tilde{y} .

4. Écrire l'algorithme de Newton pour F . Montrer que l'algorithme de Newton converge au voisinage de (\tilde{x}, \tilde{y}) .

6.1.1 Solutions

Exercice 01

Soit $z_1, z_2 \in C_1 + C_2$ et $t \in [0, 1]$, alors $z_1 = x_1 + y_1$ et $z_2 = x_2 + y_2$ avec $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$. On a $(1-t)z_1 + tz_2 = (1-t)x + ty$ avec $x = (1-t)x_1 + tx_2 \in C_1$ et $y = (1-t)y_1 + ty_2 \in C_2$ par la convexité respective de C_1 et C_2 . Ainsi, $C_1 + C_2$ est convexe.

Exercice 02

soit $z_1, z_2 \in C$ et $t \in [0, 1]$ alors il existe $x_1, x_2 \in C_1$ et $y_1, y_2 \in C_2$: tels que :

$$z_1 = sx_1 + (1-s)y_1, \quad z_2 = sx_2 + (1-s)y_2$$

$$tz_1 + (1-t)z_2 = s(tx_1 + (1-t)x_2) + (1-s)(ty_1 + (1-t)y_2).$$

Par la convexité respective de C_1 et C_2 , $tx_1 + (1-t)x_2 \in C_1$ tandis que $ty_1 + (1-t)y_2 \in C_2$. On en déduit que C est bien une partie convexe de E .

Exercice 03

Soit y_1 et $y_2 \in f(I)$ tels que x_1 et x_2 . Soit aussi $t \in [0, 1]$ alors

$$f^{-1}(ty_1 + (1-t)y_2) = f^{-1}(tf(x_1) + (1-t)f(x_2))$$

f convexe ,

$$tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \geq f(tx_1 + (1-t)x_2)$$

puisque f^{-1} est croissante (réciproque d'une fonction croissante est croissante), on en déduit que

$$\begin{aligned} f^{-1}(ty_1 + (1-t)y_2) &\geq f^{-1}(f(tx_1 + (1-t)x_2)) \\ &= tx_1 + (1-t)x_2 \\ &= tf^{-1}(y_1) + (1-t)f^{-1}(y_2) \end{aligned}$$

Ainsi, f^{-1} est convexe.

Exercice 04

1. Soit $f, g : R \longrightarrow R$ convexes. Soient $x, y \in R$ et $\lambda \in [0.1]$. Alors on a :

$$\begin{aligned} f \circ g(tx + (1-t)y) &\leq f(tg(x) + (1-t)g(y)) && (g \text{ est convexe et } f \text{ croissante}). \\ &\leq tf(tg(x)) + (1-t)f(g(y)) && (f \text{ est convexe}). \end{aligned}$$

Ceci prouve exactement que $f \circ g$ est convexe.

2. On suppose d'abord que $\ln f$ est convexe. Alors, pour $\alpha > 0$, on a :

$$f^\alpha = \exp(\alpha \ln f)$$

qui est convexe d'après la première question puisque $\ln f$ est convexe et $x \longmapsto \exp(\alpha x)$ est croissante convexe.

Réciproquement, supposons que f^α est convexe pour tout $\alpha > 0$. En particulier, pour tous $x, y \in R$ et tout $\lambda \in [0.1]$, on a :

$$u(\alpha) \leq v(\alpha)$$

avec

$$u(\alpha) = \exp(\alpha \ln f(tx + (1-t)y))$$

et

$$v(\alpha) = t \exp(\alpha \ln f(x)) + (1-t) \exp(\alpha(1-t) \ln f(y))$$

Or,

$$u(0) = v(0)$$

Il est donc nécessaire, pour que $u(\alpha) \leq v(\alpha)$; $\alpha > 0$.

Mais,

$$u'(0) = \ln f(tx + (1-t)y)$$

et

$$v'(0) = t \ln f(x) + (1-t) \ln f(y)$$

L'inégalité $u'(0) \leq v'(0)$ se traduit, donc $\ln f$ est convexe.

Exercice 05

Soient $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, on a

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

et

$$g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$$

Or si on pose $h = \sup(f, g)$. $f(x) \leq h(x)$ et $f(y) \leq h(y)$ donc

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$$

car $\lambda \geq 0$ et $(1 - \lambda) \geq 0$

de même

$$\lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y)$$

donc :

$$\begin{aligned} \sup(f(\lambda x + (1 - \lambda)y), g(\lambda x + (1 - \lambda)y)) &= h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ &\leq \lambda h(x) + (1 - \lambda)h(y) \end{aligned}$$

et h est bien convexe.

Il suffit de prendre $f(x) = x$ et $g(x) = 0$ qui sont convexes.

Exercice 06

Supposons f convexe; soient (u, α) et (v, β) dans $\text{épi}(f)$ et $t \in [0, 1]$.
Comme U est convexe, $tu + (1 - t)v \in U$ et

$$\begin{aligned} f(tu + (1 - t)v) &\leq tf(u) + (1 - t)f(v) \\ &\leq t\alpha + (1 - t)\beta; \end{aligned}$$

donc

$$t(u, \alpha) + (1 - t)(v, \beta) \in \text{épi}(f)$$

Reciproquement :

Comme $(u, f(u))$ et $(v, f(v))$ sont dans $\text{épi}(f)$,

$$t(u, f(u)) + (1 - t)(v, f(v)) \in \text{épi}(f)$$

donc f convexe.

Exercice 07

Soient $\lambda_1 \succeq \lambda_2 \succ 0$. Posons $t = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in]0; 1]$

$$\begin{aligned} F(u + \lambda_2 v) &= F(u + t\lambda_1 v) \\ &= F((1-t)u + t(u + \lambda_1 v)) \\ &\leq (1-t)F(u) + tF(u + \lambda_1 v). \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} F(u + \lambda_2 v) - F(u) &\leq t(F(u + \lambda_1 v) - F(u)) \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(F(u + \lambda_1 v) - F(u)). \end{aligned}$$

Exercice 08

on a

$$\max(f, g) \text{ convexe} \Leftrightarrow \text{épi } \max(f, g) \text{ convexe}$$

$$\begin{aligned} \text{épi } \max(f, g) &= \{(f(x), g(x)), y) \in I^2 \times \mathbb{R}; y \geq \max(f(x), g(x))\} \\ &= \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y \geq f(x) \text{ et } y \geq g(x)\} \\ &= \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y \geq f(x)\} \cap \{(x, y) \in I \times \mathbb{R}; y \geq g(x)\} \\ &= \text{épi}(f) \cap \text{épi}(g) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} f \text{ convexe} &\Leftrightarrow \text{épi}(f) \text{ convexe} \\ \text{et } g \text{ convexe} &\Rightarrow \text{épi}(g) \text{ convexe} \end{aligned}$$

donc $(f \cap g)$ convexe c.à.d $\text{épi } \max(f, g)$ convexe.

Exercice 09

Supposons k convexe et soient $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in [0, 1]$

– Si x et y sont dans k alors :

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in k$$

et

$$I_k(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 0 = \lambda \underbrace{I_k(x)}_{= 0 \text{ car } x \in k} + (1 - \lambda) \underbrace{I_k(x)}_{= 0 \text{ car } x \in k}$$

– Si x (ou y) n'est pas dans k alors :

$$I_k(x) \text{ ou } (I_k(y)) = +\infty$$

et l'inégalité de convexité est vérifiée.

Réciproquement, soient $x, y \in k$ et $\lambda \in [0, 1]$ par la convexité de I_k .

$$I_k(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda \underbrace{I_k(x)}_{= 0 \text{ car } x \in k} + (1 - \lambda) \underbrace{I_k(x)}_{= 0 \text{ car } x \in k} = 0$$

Comme I_k ne prend que les valeurs 0 ou $+\infty$.

$$I_k(\lambda x + (1 - \lambda)y) = 0 \text{ et } \lambda x + (1 - \lambda)y \in k.$$

Exercice 10

On calcule le Hessien :

$$\begin{pmatrix} 12x_1^2 + 2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

La fonction n'est pas convexe, si on multiplie ce Hessien (en $x_1 = 0$) à gauche et à droite par $(2, 1, 2)$ on obtient -4 .

Exercice 11

$$J \text{ convexe} \iff \forall x, y \in \mathbb{R}; \forall \lambda \in [0, 1] \quad J(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y)$$

$$\Rightarrow J(\lambda x + (1 - \lambda)y) - \lambda J(x) - (1 - \lambda)J(y) \leq 0$$

$$\text{Posons : } \lambda = \frac{1}{2}$$

$$J\left(\frac{x + y}{2}\right) = \frac{1}{2}A \cdot \left(\frac{x + y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x + y}{2}\right) - b \cdot \left(\frac{x + y}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
 J\left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}J(x) - \frac{1}{2}J(y) &\leq 0 \\
 \frac{1}{2}A \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) - b \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A \cdot x \cdot x - b \cdot x\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}A \cdot y \cdot y - b \cdot y\right) &\leq 0 \\
 \frac{1}{2}A \cdot \left(\frac{x \cdot x + y \cdot y + 2 \cdot x \cdot y}{2}\right) - \frac{1}{2}b \cdot x - \frac{1}{2}b \cdot y - \frac{1}{4}A \cdot x \cdot x + \frac{1}{2}b \cdot x - \frac{1}{4}A \cdot y \cdot y + \frac{1}{2}b \cdot y &\leq 0 \\
 -\frac{1}{8}A \cdot x \cdot x - \frac{1}{8}A \cdot y \cdot y + \frac{2}{8}A \cdot x \cdot y &\leq 0 \\
 -\frac{1}{8}(A \cdot x \cdot x + A \cdot y \cdot y - 2A \cdot x \cdot y) &\leq 0 \\
 A \cdot x \cdot x + A \cdot y \cdot y - 2A \cdot x \cdot y &\geq 0 \\
 A(x-y)(x-y) &\geq 0
 \end{aligned}$$

$\implies A$ semi-définie positif.

Exercice 12

On a :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

or $f(0, 0) = 0$

Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq f(0, 0)$$

Ceci implique que (\hat{x}, \hat{y}) est une solution minimale globale.

cette relation reste vraie pour n'importe quel disque $D_r(0, 0)$ Par conséquent si on prend $D_1(0, 0)$ on a :

$$f(x, y) \geq f(0, 0) \quad \forall (x, y) \in D_1(0, 0)$$

et $(0, 0)$ est une solution minimale locale stricte car si $(x, y) \neq (0, 0)$ on a :

$$f(x, y) = x^2 + y^2 > 0 = f(0, 0)$$

Exercice 13

Calculons les points critiques :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 3x^2 - 3y \\
 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 3y^2 - 3x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Les solutions de ce système sont $(x_1, y_1) = (0, 0)$ et $(x_2, y_2) = (1, 1)$
D'autre part

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -3$$

Par conséquent

a) Pour $(x_1, y_1) = (0, 0)$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = -3$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \right)^2 = 0 - 9 = -9 < 0$$

Donc $(0, 0)$ n'est pas une solution maximale locale et n'est pas une solution minimale locale.

b) Pour $(x_2, y_2) = (1, 1)$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 1) \right)^2 = 6 \times 6 - 9 = 27 > 0$$

Puisque

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 1) = 6 > 0$$

Donc $(x_2, y_2) = (1, 1)$ est une solution minimale locale stricte.

Exercice 14

On a

$$\nabla f(x, y)^\top = (2x, 2y) \Rightarrow \nabla f(1, 1)^\top = (2, 2)$$

et

$$\nabla f(1, 1)^\top \cdot d < 0 \Leftrightarrow 2(d_1 + d_2) < 0 \Leftrightarrow d_1 + d_2 < 0$$

Par conséquent

$$D(f, (1, 1)) = \{d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1 + d_2 < 0\}$$

Géométriquement $D(f, (1, 1))$ est le demi plan situé au dessous de la droite

$$y = -x$$

Exercice 15

1- f est polynômiale donc de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. En utilisant le fait que

$$xy \geq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

on écrit ;

$$\begin{aligned} f(x, y) &\geq x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 4xy \\ &\geq x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant le fait que :

$$\text{pour tout } (X, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2, X^4 + \varepsilon^4 - 2\varepsilon X^2 \geq 0$$

il vient ;

$$f(x, y) \geq (2\varepsilon - 4)x^2 + (2\varepsilon - 4)y^2 - 2\varepsilon^4$$

Choisissons par exemple $\varepsilon = 3$, on en déduit ;

$$f(x, y) \geq 2(x^2 + y^2) - 162 \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} +\infty$$

ce qui prouve que f est coercive sur \mathbb{R}^2 qui est fermé et de dimension finie. D'après le théorème du cours, le problème (P) admet au moins une solution.

2- Pour étudier la convexité de f (qui est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2), calculons sa matrice hessienne en tout point (x, y) de \mathbb{R}^2 . On a

$$\text{Hess}f(x, y) = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 - 1 & 1 \\ 1 & 3y^2 - 1 \end{pmatrix}$$

Rappelons que f est convexe sur \mathbb{R}^2 si, et seulement si sa matrice hessienne est semi-définie positive en tout point. Or, on vérifie aisément que les valeurs propres de $\text{Hess} f(0, 0)$ sont 0 et $-2 < 0$. Par conséquent, f n'est pas convexe.

3- Les points critiques de f sont donnés par les solutions de

$$\nabla f(x, y) = (0, 0)$$

autrement dit, les points critiques sont solutions du système :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^3 - (x - y) = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + (x - y) = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} y = -x \\ x^3 - 2x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que f admet trois points critiques : $O(0, 0)$, $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, et $B(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

f étant de classe C^2 , on va utiliser la caractérisation des points critiques à l'aide de la hessienne calculée à la question précédente.

- Point A :

$$\text{Hess}f(A) = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

donc la trace de $\text{Hess} f(A)$ vaut 40 et son déterminant 384. On en déduit que $\text{Hess} f(A)$ possède deux valeurs propres strictement positives donc A est un *minimum local* pour f .

- Point B :

$$\text{Hess}f(B) = \text{Hess}f(A)$$

donc la même conclusion que pour le point A s'impose.

- Point O :

$$\text{Hess}f(O) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$$

donc la trace de Hess $f(O)$ vaut -8 et son déterminant est nul. Il vient que ses valeurs propres sont 0 et -8 . On ne peut donc rien conclure dans ce cas à l'aide de la matrice hessienne. En revanche, on peut donner un argument à la main :

soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 2$. On a

$$f(x, -x) = 2x^4 - 8x^2 = -2x^2(4 - x^2)$$

Or, $|x| < 2$ donc $4 - x^2 > 0$ et on en déduit que

$$f(x, -x) < 0$$

De même, soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x, x) = 2x^4 \geq 0.$$

Puisque les inégalités précédentes sont obtenues pour des x arbitrairement petits, on en déduit que le point $(0, 0)$ est un point-selle pour f .

En conclusion, puisque le problème (P) possède une solution, la caractérisation des points critiques de f nous assure que ;

$$\min_{(x,y) \in \mathbb{R}^2} f(x, y) = f(A) = f(B) = -8$$

Exercice 16

Toutes les fonctions a), \dots , f) sont de classe C^2 dans \mathbb{R}^2

a) $f(x, y) = (x-1)^2 + 2y^2$ On calcule le gradient :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x - 2 \\ 4y \end{pmatrix}$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_x f(x, y) = 0 \\ \partial_y f(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 = 0 \\ 4y = 0 \end{cases}$$

La seule solution du système est donnée par le point $P = (1, 0)$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne est constante :

$$H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace de l'hessienne :

$$\begin{aligned} \det H_f(1,0) &= 8 > 0, \\ \text{tr}(H_f(1,0)) &= 6 > 0 \end{aligned}$$

Dès que le déterminant (*resp. la trace*) est le produit (*resp. la somme*) des deux valeurs propres de $H_f(1,0)$, on peut conclure que les valeurs propres de $H_f(1,0)$ sont strictement positives. Cela c'est équivalent à dire que $H_f(1,0)$ est semi-définie positive. Par conséquent P est un point de minimum pour f .

b) $f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2$. On calcule le gradient :

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x^2 - 6y \\ -6x + 6y \end{pmatrix}$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

Les deux points critiques sont $P_1 = (1,1)$ et $P_0 = (0,0)$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(0,0) = -36 < 0$$

Dès que le déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas définie positive et donc P_0 est un point -selle.

Pour P_1 on trouve :

$$H_f(1, 1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace :

$$\begin{aligned} \det H_f(1, 1) &= 36 > 0, \\ \text{tr}(H_f(1, 1)) &= 18 > 0 \end{aligned}$$

Dès que le déterminant et la trace sont > 0 , les deux valeurs propres de l'hessienne sont strictement positives. Donc P_1 est un point de minimum pour f .

c) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ On calcule le gradient :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 2x) \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 4y) \end{pmatrix}$$

Puisque l'exponentielle est strictement > 0 on cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Les deux points critiques sont $P_1 = (-4, -2)$ et $P_0 = (0, 0)$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2) & e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) \\ e^{x-y}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y) & e^{x-y}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4) \end{pmatrix}$$

Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(0, 0) = -8 < 0$$

Dès que le déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas définie positive et donc P_0 est un point -selle.

Pour P_1 on trouve :

$$H_f(-4, -2) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant et la trace :

$$\begin{aligned} \det H_f(-4, -2) &= 8e^{-4} > 0, \\ \operatorname{tr}(H_f(-4, -2)) &= -18e^{-2} < 0 \end{aligned}$$

Dès que le déterminant est > 0 et la trace est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont strictement négatives. Donc P_1 est un point de maximum pour f .

d) $f(x, y) = x^3y + x^3 - x^2y$ On calcule le gradient :

$$\nabla f(x, y) = (3x^2y + 3x^2 - 2xy, x^3 - x^2)$$

Les points critiques sont solutions du système :

$$\begin{cases} 3x^2y + 3x^2 - 2xy = 0 \\ x^3 - x^2 = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont $P_0 = (0, 0)$; $P_k = (0, k)$, $k \neq 0$; $P_1 = (1, -3)$.
On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6xy + 6x - 2y & 3x^2 - 2x \\ 3x^2 - 2x & 0 \end{pmatrix}$$

Pour P_1 l'on trouve :

$$H_f(1, -3) = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On calcule le déterminant :

$$\begin{aligned} \det H_f(1, -3) &= -1 > 0, \\ \operatorname{tr}(H_f(-4, -2)) &= -18e^{-2} < 0 \end{aligned}$$

Dès que le déterminant est < 0 les deux valeurs propres de l'hessienne sont non nulles, l'une négative et l'autre positive. Cela suffit à dire que l'hessienne n'est pas

définie positive et donc P_1 est un point -selle.

Pour P_0 on trouve :

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et donc on peut rien déduire sur la nature du point critique. On regarde le long des direction $y = x$ et $y = -x$:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x, x) = x^4 \\ h(x) &= f(x, -x) = -x^4 + 2x^3 \end{aligned}$$

On peut facilement vérifier que $g(x)$ admet un minimum pour $x = 0$ et $h(x)$ admet un flex (point critique qui est ni minimum ni maximum) pour $x = 0$. Comme la fonction admet des comportements différentes le long des deux directions, P_0 ne peut pas être ni un maximum ni un minimum pour f . Il est un point-selle.

Le cas $k \neq 0$ conduit à un calcul plus fastidieux et on le traite pas ici.

e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ On calcule le gradient :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2} 2x(1-x^2-y^2) \\ e^{-x^2-y^2} 2y(1-x^2-y^2) \end{pmatrix}$$

Puisque l'exponentielle est strictement > 0 on cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} 2x(1-x^2-y^2) = 0 \\ 2y(1-x^2-y^2) = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont $P_0 = (0, 0)$ et toutes points de la forme $P_{h,k} = (h, k)$ telles que $h^2 + k^2 = 1$.

On calcule la matrice hessienne :

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-x^2-y^2}((2-4x^2)(1-x^2-y^2)-4x^2) & e^{-x^2-y^2}(-4xy(1-x^2-y^2)-4xy) \\ e^{-x^2-y^2}(-4xy(1-x^2-y^2)-4xy) & e^{-x^2-y^2}((2-4y^2)(1-x^2-y^2)-4y^2) \end{pmatrix}$$

On peut vérifier que :

$$\det H_f (P_0) = \det H_f (P_{h,k}) = 0$$

et donc on ne peut rien conclure sur la nature des points critiques à l'aide du signe de l'hessienne.

Les point P_0 est un point de minimum car :

$$\begin{aligned} f(x, y) &\geq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{et } f(x, y) &= 0 \text{ si et seulement si } (x, y) = (0, 0) \end{aligned}$$

Donc dans le voisinage du point critique P_0 on a :

$$f(x, y) \geq 0 = f(0, 0)$$

et cela est la définition de minimum local. On peut voir facilement que les points critiques $P_{h,k}$ sont des points de maximum local. La fonction $f(x, y)$ est une fonction à symétrie radiale. Cela veut dire que si nous écrivons f en coordonnées polaires (r, θ) nous trouverons qu'elle ne dépend que par le rayon r . Il existe une fonction d'une variable $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = g(r) = r^2 e^{-r^2}$$

On calcule la dérivée de la fonction g :

$$g'(r) = 2r e^{-r^2} (1 - r^2)$$

La fonction g admet deux points critiques : $r = 0$ (correspondant à P_0) et $r = 1$ (correspondant aux points $P_{h,k}$).

Si on étudie le signe de $g'(r)$ pour $r \geq 0$ on trouve que $r = 0$ est un minimum local pour g et $r = 1$ est un maximum local pour g . Donc les points $P_{h,k}$ sont des maximums locaux pour f

f) $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$ On calcule le gradient :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \sin y \end{pmatrix}$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}$$

Les points critiques sont tous points de la forme $P_k = (0, k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
On calcule la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \cos k\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On calcule le déterminant :

$$\det H_f(0, k\pi) = 2\cos(k\pi)$$

Le terme $\cos(k\pi)$ vaut -1 si k est impair et 1 si k est pair. Donc si k est impair ; $\det H_f(0, k\pi) < 0$ et le point P_k est un point-selle. Si k est pair ; $\det H_f(0, k\pi) > 0$ et $\text{tr} H_f(0, k\pi) > 0$ et le point critique est un point minimum local.

Exercice 17

L'implication « \Rightarrow » étant évidente, considérons l'implication inverse, Supposons donc que tout x au même niveau que \bar{x} soit un minimum local de f . Si \bar{x} n'est pas un minimum global de f , c'est qu'il existe $u \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(u) < f(\bar{x}).$$

Définissons

$$\varphi : t \in [0, 1] \rightarrow \varphi(t) = f(t\bar{x} + (1-t)u)$$

et posons

$$S_\varphi = \{t \in [0, 1] / \varphi(t) = f(\bar{x})\}.$$

Ainsi S_φ est une partie non vide ($1 \in S_\varphi$) fermée (par la continuité de f) φ et minorée. Désignons par t_0 la borne inférieure de S_φ :

$$t_0 \in S_\varphi \text{ et } 0 < t_0 \leq 1$$

Le point $t_0\bar{x} + (1-t_0)u$ étant au même niveau que \bar{x} , il est minimum local de f ; par conséquent t_0 est un minimum local de φ . il existe $\eta > 0$ tel que :

$$(|t - t_0| \leq \eta, \quad t \in [0, 1]) \Rightarrow (\varphi(t) \geq \varphi(t_0))$$

Comme t_0 est la borne inférieure de S_φ , on en déduit :

$$(t_0 - \eta < t < t_0, \quad t > 0) \Rightarrow (\varphi(t) > \varphi(t_0))$$

Prenons un tel t , avec t_1 :

$$t_0 - \eta < t_1 < t_0, \quad t_1 > 0, \quad \text{et} \quad \varphi(t_1) > \varphi(t_0)$$

Alors

$$\varphi(1) = \varphi(t_0) \in [\varphi(0), \varphi(t_1)]$$

et, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $t_2 \in [0, t_1]$ tel que

$$\varphi(t_2) = \varphi(1) \quad (= f(\bar{x}))$$

Par conséquent, $t_2 \in]0, t_1] \cap S_\varphi$, et puisque $t_1 < t_0$, ceci contredit la définition de t_0 comme borne inférieure de S_φ .

Exercice 18

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 3y$$

a) On a

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 + 6xy \\ f'_y = 3x^2 + 6xy + 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} f''_{xx} = 6x + 6y \\ f''_{yy} = 6x \\ f''_{xy} = 6x + 6y \end{cases}$$

b) Soit (x, y) un point critique :

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 + 6xy = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 6xy + 3 = 0 \end{cases}$$

On demandait simplement de vérifier que A et B sont des points critiques :

Calculons les dérivées partielles au point A :

$$\begin{cases} f'_x = 3(-1)^2 + 3(1)^2 + 6(-1)(1) = 0 \\ f'_y = 3(-1)^2 + 6(-1)(1) + 3 = 0 \end{cases}$$

Au point A les deux dérivées partielles sont nulles, A est un point critique.

Calculons les dérivées partielles au point B :

$$\begin{cases} f'_x = 3(1)^2 + 3(-1)^2 + 6(1)(-1) = 0 \\ f'_y = 3(1)^2 + 6(1)(-1) + 3 = 0 \end{cases}$$

Au point B les deux dérivées partielles sont nulles, B est un point critique.

Remarquons qu'il n'était pas très difficile de montrer que A et B sont les deux seuls points critiques :

il faut trouver (x, y) tels que

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 + 3y^2 + 6xy = 0 \\ f'_y = 3x^2 + 6xy + 3 = 0 \end{cases}$$

De la seconde équation, on tire

$$3x^2 + 6xy = -3$$

Reportons dans la première équation qui s'écrit :

$$3y^2 + (3x^2 + 6xy) = 0$$

soit $3y^2 - 3 = 0$ ou encore $y^2 = 1$

Cette dernière équation admet deux solutions :

1) $y = +1$ dans ce cas, x est solution de

$$3x^2 + 6x + 3 = 0$$

soit $3(x + 1)^2 = 0$ et $x = -1$. On obtient ainsi un premier point critique :

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

2) $y = -1$ dans ce cas, x est solution de

$$3x^2 - 6x + 3 = 0$$

soit $3(x - 1)^2 = 0$ et $x = +1$. On obtient ainsi un second point critique :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

En conclusion, la fonction f admet deux points critiques : $A(-1, 1)$ et $B(1, -1)$.

Pour étudier la nature des points critiques, il faut calculer les dérivées secondes :

$f''_{xx} = 6x + 6y$ au point $A(-1, 1)$ au point $B(1, -1)$
 $f''_{yy} = 6x$ $f''_{xx} = 0$ $f''_{xx} = 0$
 $f''_{xy} = 6x + 6y$ $f''_{yy} = -6$ $f''_{yy} = 6$
 $f''_{xy} = 6x + 6y$ $f''_{xy} = 0$ $f''_{xy} = 0$

Au point A , $D = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$: On ne peut rien dire.
 Au point B , $D = f''_{xx}f''_{yy} - (f''_{xy})^2 = 0$: on ne peut rien dire.

Exercice 19

On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \hat{y}) = 2\hat{x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\hat{x}, \hat{y}) = 2, \frac{\partial f}{\partial y}(\hat{x}, \hat{y}) = 2\hat{y},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\hat{x}, \hat{y}) = 0, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\hat{x}, \hat{y}) = 0$$

Donc $H(\hat{x}, \hat{y}) \cdot (\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2$ quelconque est ;

$$H(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Exemple

Soit $f(x_1, x_2) = mx_1^2 + x_2^2$ définie de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} , avec $m = 0$.

$$\nabla f(x_1, x_2) = (2mx_1, 2x_2)$$

On cherche les $x = (x_1, x_2)$ tels que $\nabla f(x) = 0$ qui équivaut à

$$\begin{cases} 2mx_1 = 0 \\ 2x_2 = 0 \end{cases}$$

La seule possibilité est $x_0 = (0, 0)$. Dans ce cas,

$$Hf(x_0) = \begin{pmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

* si $m > 0$, alors $Hf(x_0)$ est définie positive (les valeurs propres sont positives) donc par la condition suffisante $x_0 = (0, 0)$ est un minimum local strict.

* si $m < 0$, alors les valeurs propres n'ont pas le même signe donc par la condition nécessaire, $x_0 = (0, 0)$ ne peut pas être un minimum local.

Exercice 20

$S_n(\mathbb{R})$ est structuré en espace euclidien grâce au produit scalaire $\langle U, V \rangle = \text{tr}(UV)$. Le problème (P) est celui de la minimisation sur (le cône convexe ouvert) $\mathring{P}_n(\mathbb{R}) = \Omega$ de la fonction-objectif

$$X \longmapsto f(X) = \langle A, X \rangle + \langle B, X^{-1} \rangle$$

1) L'application $X \in \Omega \longmapsto X^{-1} \in \Omega$ est bijective et de classe C^∞ ; il s'ensuit que f est C^∞ sur Ω . De l'inégalité de convexité

$$(U, V \text{ dans } \Omega, \quad \alpha \in]0, 1]) \Rightarrow ([\alpha U + (1 - \alpha)V]^{-1} \leq (\alpha U^{-1} + (1 - \alpha)V^{-1}))$$

et de la (semi-) définie positivité de B , on déduit que $X \longmapsto \langle B, X^{-1} \rangle$ est convexe sur Ω . De manière à concentrer sur une seule partie toute la contribution de A et B aux deux parties de $f(X)$, posons

$$C = A^{1/2} B A^{1/2}$$

Comme

$$\begin{aligned} f(X) &= \text{tr} [A^{1/2}(A^{1/2} X A^{1/2}) A^{-1/2} + C(A^{1/2} X A^{1/2})^{-1}] \\ &= \text{tr} [A^{1/2} X A^{1/2} + C(A^{1/2} X A^{1/2})^{-1}] \end{aligned}$$

et que l'application

$$X \in \Omega \longmapsto Y = (A^{1/2} X A^{1/2})^{-1} \in \Omega$$

est visiblement une bijection de Ω sur Ω , le problème (P) est équivalent à celui de la minimisation de

$$Y \longmapsto g(Y) = \text{tr}(Y^{-1} + CY) = \langle I_n, Y^{-1} \rangle + \langle C, Y \rangle \quad \text{sur } \Omega$$

La frontière de Ω est exactement l'ensemble des matrices semi-définies positives singulières (i.e., dont la plus petite valeur propre est nulle). En conséquence :

$$\left(\begin{array}{l} Y \in \Omega \rightarrow Y_0 \in \text{fr}\Omega \\ \text{(ou } X \in \Omega \rightarrow X_0 \in \text{fr}\Omega) \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} g(Y) \rightarrow +\infty \\ \text{ou } f(x) \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

De même, un calcul (pas trop difficile) sur les matrices définies positives conduit à élucider le comportement à l'infini :

$$\left(\begin{array}{l} Y \in \Omega, \|Y\| \rightarrow \infty \\ \text{ou } X \in \Omega, \|X\| \rightarrow \infty \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} g(Y) \rightarrow +\infty \\ \text{ou } f(x) \rightarrow +\infty \end{array} \right)$$

Ainsi g (ou f) agit comme ce qu'il est convenu d'appeler une « fonction barrière » sur Ω . Il en résulte ainsi qu'il existe bien $\bar{X} \in \Omega$ minimisant f sur Ω .

L'unicité de \bar{X} est une conséquence de la stricte convexité de la fonction

$$X \in \Omega \longmapsto \langle B, X^{-1} \rangle$$

qui se voit mieux via la stricte convexité de

$$Y \in \Omega \longmapsto \langle I_n, Y^{-1} \rangle = \text{tr}(Y^{-1})$$

2) (i) La différentielle $Df(X)$ de f en $X \in \Omega$ est facile à obtenir :

$$Df(X) : H \in S_n(\mathbb{R}) \longmapsto \langle A - X^{-1}BX^{-1}, H \rangle$$

Le problème (essentiellement sans contraintes) (P) étant celui de la minimisation d'une fonction convexe différentiable, $\bar{X} \in \Omega$ est solution de (P) si et seulement si

$$A - \bar{X}^{-1}B\bar{X}^{-1} = 0$$

soit

$$\bar{X}A\bar{X} = B$$

(ii) Étant le produit de deux matrices définies positives, BA est diagonalisable et son spectre est constitué exclusivement de réels > 0 . Si on diagonalise BA avec P ,

$$P^{-1}(BA)P = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (\lambda_i \text{ valeurs propres de } BA),$$

la matrice

$$M = P \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}) P^{-1}$$

vérifie $M^2 = BA$, et il vient immédiatement que $\bar{X} = M^{-1}B$ est la solution cherchée.

(iii) La valeur optimale dans (P) est

$$\begin{aligned} f(\bar{X}) &= \text{tr}(AM^{-1}B + B(M^{-1}B)^{-1}) \\ &= 2\text{tr}M \end{aligned}$$

c'est donc la somme des racines carrées des valeurs propres de BA (ou de AB). La symétrie en A et B de la valeur optimale pouvait être notée dès le départ, en raison de la forme particulière de (P) .

3) De l'égalité

$$\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2 + 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}}$$

écrite pour λ_1, λ_2 valeurs propres de BA , il vient

$$\sqrt{\lambda_1} + \sqrt{\lambda_2} = \text{tr}M = \sqrt{\text{tr}(BA) + 2\sqrt{\det(BA)}},$$

d'où l'expression annoncée.

Exercice 21

On vérifie que x^* satisfait la condition d'optimalité. On a

$$\nabla f_0(x^*) = (-1, 0, 2)$$

alors la condition d'optimalité

$$\nabla f_0(x^*)^\top (y - x) = -1(y - 1) + 2(y + 1) \geq 0$$

est clairement vrai pour tous y satisfaisant $-1 \leq y \leq 1$,

Exercice 22

On a :

$$\begin{aligned} \partial_i f(x) &= 2x_i(1 + x_n)^3 \quad \text{pour tout} \quad i = 1, \dots, n-1 \\ \partial_n f(x) &= 3(1 + x_n)^2 \sum_{i=1}^{n-1} x_i^2 + 2x_n. \end{aligned}$$

Ainsi le seul point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\nabla f(\bar{x}) = 0$ est $\bar{x} = 0$.

Ce point $\bar{x} = 0$ est un minimum local strict de f car $\nabla^2 f(\bar{x}) = \text{diag}(2, \dots, 2)$ est définie positive.

Mais

$$f(1, \dots, 1, x_n) = (n-1)(1+x_n)^3 + x_n^2$$

est une fonction polynomiale du 3^e degré, prenant donc toutes les valeurs réelles. c-à-d Il n'y a pas de minimum global de f sur \mathbb{R}^n .

Exercice 23

1) Soit \bar{x} minimisant f sur \mathbb{R}^n . Étant donné $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0, 1[$, on a

$$f(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) \geq f(\bar{x}),$$

ce qui se traduit par

$$g(\bar{x}) + h(\bar{x}) \leq g(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) + h(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}).$$

En utilisant l'inégalité de convexité

$$h(\alpha x + (1-\alpha)\bar{x}) \leq \alpha h(x) + (1-\alpha)h(\bar{x})$$

et en divisant par $\alpha > 0$, on obtient

$$0 \leq \frac{g(\bar{x} + \alpha(x - \bar{x})) - g(\bar{x})}{\alpha} + h(x) - h(\bar{x})$$

En faisant tendre α vers 0, on obtient précisément (*).

Réciproquement, soit \bar{x} vérifiant (*). La convexité de g induit

$$g(x) \geq g(\bar{x}) + \langle \nabla g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle,$$

ce qui, combiné avec (*), entraîne

$$g(x) + h(x) \geq g(\bar{x}) + h(\bar{x}).$$

2) Soit \bar{x} vérifiant (*). La fonction g étant convexe, l'application ∇g vérifie :

$$\langle \nabla g(x) - \nabla g(\bar{x}), x - \bar{x} \rangle \geq 0.$$

D'où (**) s'ensuit.

Soit à présent \bar{x} vérifiant (**). Considérons $x \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in]0, 1[$. Il vient alors de (**):

$$\alpha < \nabla g((1 - \alpha)\bar{x} + \alpha x), x - \bar{x} > + h((1 - \alpha)\bar{x} + \alpha x) - h(\bar{x}) \geq 0$$

ce qui, avec l'inégalité de convexité de h déjà vue plus haut, donne

$$\alpha < \nabla g((1 - \alpha)\bar{x} + \alpha x), x - \bar{x} > + \alpha[h(x) - h(\bar{x})] \geq 0.$$

Divisons par α et faisons tendre α vers 0; sachant que ∇g est continue, on obtient précisément (*).

Exercice 24

1) g est continue; de plus, f étant bornée inférieurement,

$$g(x) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad x \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent, il existe un point v minimisant g sur \mathbb{R}^n :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|v - u\| \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - u\|. \quad (6.3)$$

Faisons $x = u$ dans (1):

$$f(v) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|v - u\| \leq f(u). \quad (6.4)$$

d'où

$$f(v) \leq f(u).$$

En notant

$$f = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

il vient de (2):

$$\bar{f} + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|v - u\| \leq \bar{f} + \varepsilon$$

d'où

$$\|v - u\| \leq \lambda.$$

Enfin l'inégalité

$$\|x - u\| \leq \|x - v\| + \|v - u\|$$

introduite dans (1), conduit à

$$f(v) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} \|x - v\|$$

2) Partant d'un minimum à ε^2 près de f et choisissant $\lambda = \varepsilon$, il existe d'après la question précédente un x_ε tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, f(x_\varepsilon) \leq f(x) + \varepsilon \|x - x_\varepsilon\|.$$

pour $d \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha > 0$ faisons successivement $x = x_\varepsilon + \alpha d$ et $x = x_\varepsilon - \alpha d$ dans l'inégalité précédente ; on obtient :

$$f(x_\varepsilon + \alpha d) - f(x_\varepsilon) \geq -\varepsilon \alpha \|d\|,$$

⇒

$$\frac{f(x_\varepsilon + \alpha d) - f(x_\varepsilon)}{\alpha} \geq -\varepsilon \|d\|$$

Un passage à la limite $\alpha \rightarrow 0^+$ induit :

$$\begin{aligned} &< \nabla f(x_\varepsilon), d > \geq -\varepsilon \|d\| \\ \text{et} \quad &< \nabla f(x_\varepsilon), -d > \geq -\varepsilon \|d\| \end{aligned}$$

soit encore

$$| \langle \nabla f(x_\varepsilon), d \rangle | \leq \varepsilon \|d\|.$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout $d \in \mathbb{R}^n$, il s'ensuit

$$\|\nabla f(x_\varepsilon)\| \leq \varepsilon$$

Exercice 25

On a

$$J(x) = (f(x) - d)^\perp C (f(x) - d)$$

1- (Propriétés d'existence et d'unicité)

(a) Comme C est symétrique définie positive, on a $y^\perp C y \geq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, ce qui prouve que $J(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Donc J est bornée inférieurement.

(b) Trois exemples :

i. Si $n = p$ et $f(x) = x$, $J(x) = (x - d)^\perp C(x - d)$ qui est une fonction quadratique pour laquelle on a existence et unicité de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ qui réalise le minimum de J .

ii. Si $f(x) = 0$, $J(x) = d^\perp C d$ et J est donc constante. Il y a donc existence et non unicité de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ qui réalise le minimum de J .

iii. Pour $n = p = 1$, si $f(x) = e^x$, avec $C = 1$ et $d = 0$, $J(x) = (e^x)^2$ tend vers 0 en l'infini mais 0 n'est jamais atteint. Il ya donc non existence de $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ qui réalise le minimum de J .

2- Un peu de calcul différentiel

(a) La fonction $Df(x)$ est la différentielle de f en x et c'est donc une application linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^p . Donc il existe $M(x) \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, où $M_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices réelles à p lignes et n colonnes, telle que $Df(x)(y) = M(x)y$ pour tout $y \in \mathbb{R}^n$.

On a ensuite $D_2f(x) \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$.

Enfin, on a $Df \in C^1(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$ et $D_2f \in L(\mathbb{R}^n, L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p))$.

(b) Comme C ne dépend pas de x , on a

$$\nabla J(x) = M(x)C(f(x) - d) + (f(x) - d)CM(x).$$

Exercice 26 (Algorithme de Quasi Newton)

Partie 1 :

1. Par définition de $w^{(k)}$, on a :

$$w^{(k)} \cdot \nabla f(x^{(k)}) = -K^{(k)} \nabla f(x^{(k)}) \cdot \nabla f(x^{(k)}) < 0$$

car K est symétrique définie positive.

Comme β_k est le paramètre optimal dans la direction $w^{(k)}$, on a

$$\nabla f(x^{(k)} + \beta_k w^{(k)}) \cdot w^{(k)} = 0$$

et donc

$$Ax^{(k)} \cdot w^{(k)} + \beta_k Aw^{(k)} \cdot w^{(k)} = b \cdot w^{(k)}$$

on en déduit que

$$\beta_k = -\frac{g^{(k)} \cdot w^{(k)}}{Aw^{(k)} \cdot w^{(k)}}$$

Comme $w^{(k)} = -K^{(k)}g^{(k)}$, ceci s'écrit encore :

$$\beta_k = \frac{g^{(k)} \cdot K^{(k)}g^{(k)}}{AK^{(k)}g^{(k)} \cdot K^{(k)}g^{(k)}}$$

2. Si $K^{(k)} = A^{-1}$, la formule précédente donne immédiatement $\beta_k = 1$.
 3. La méthode de Newton consiste à chercher le zéro de ∇f par l'algorithme suivant (à l'itération 1) :

$$H_f(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) = -\nabla f(x^{(0)}),$$

(où $H_f(x)$ désigne la hessienne de f au point x) c'est-à-dire

$$A(x^{(1)} - x^{(0)}) = -Ax^{(0)} + b$$

On a donc $Ax^{(k)} = b$, et comme la fonction f admet un unique minimum qui vérifie $Ax = b$, on a donc $x^{(1)} = x$, et la méthode converge en une itération.

Partie 2 : Méthode de Fletcher–Powell.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $g^{(k)} \neq 0$.

Par définition, on a :

$$s^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)} = -\beta_k K^{(k)} g^{(k)}$$

avec $\beta_k > 0$.

Comme $K^{(k)}$ est symétrique définie positive elle est donc inversible ; donc comme $g^{(k)} \neq 0$, on a $K^{(k)} g^{(k)} \neq 0$ et donc $s^{(k)} \neq 0$.

Soit $i < n$, par définition de $s^{(k)}$, on a :

$$s^{(k)} \cdot As^{(i)} = -\beta_k K^{(k)} g^{(k)} \cdot As^{(i)}$$

Comme $K^{(k)}$ est symétrique,

$$s^{(k)} \cdot As^{(i)} = -\beta_k g^{(k)} \cdot K^{(k)} As^{(i)}$$

Par hypothèse, on a $K^{(k)} As^{(i)} = s^{(i)}$ pour $i < n$, donc on a bien que si $i < n$

$$s^{(k)} \cdot As^{(i)} = 0 \Leftrightarrow g^{(k)} \cdot s^{(i)} = 0$$

Montrons maintenant que $g^{(k)} \cdot s^{(i)} = 0$ pour $i < n$.

- On a :

$$\begin{aligned} g^{(i+1)} \cdot s^{(i)} &= -\lambda_i g^{(i+1)} \cdot K^{(i)} g^{(i)} \\ &= -\lambda_i g^{(i+1)} \cdot w^{(i)} \end{aligned}$$

Or $g^{(i+1)} = \nabla f(x^{(i+1)})$ et λ_i est optimal dans la direction $w^{(i)}$.

Donc :

$$g^{(i+1)}.s^{(i)} = 0$$

• On a :

$$\begin{aligned} (g^{(k)} - g^{(i+1)}).s^{(i)} &= (Ax^{(k)} - Ax^{(i+1)}).s^{(i)} \\ &= \sum_{k=i+1}^{n-1} (Ax^{(k+1)} - Ax^{(k)}).s^{(i)} \\ &= \sum_{k=i+1}^{n-1} As^{(k)}.s^{(i)} = 0 \end{aligned}$$

Par hypothèse de A-conjugaison de la famille $(s^{(i)})_{i=1, k-1}$ on déduit alors facilement des deux égalités précédentes que $g^{(k)}.s^{(i)} = 0$. Comme on a montré que $g^{(k)}.s^{(i)} = 0$ si et seulement si $s^{(k)}.As^{(i)} = 0$, on en conclut que la famille $(s^{(i)})_{i=1, \dots, n}$ est A-conjuguée, et que les vecteurs $s^{(i)}$ sont non nuls.

2. Montrons que $K^{(k+1)}$ est symétrique. On a :

$$\begin{aligned} (K^{(k+1)})^t &= (K^{(k)})^t + \frac{(s^{(k)}(s^{(k)})^t)^t}{s^{(k)}.y^{(k)}} - \frac{[(K^{(k)}y^{(k)})(K^{(k)}y^{(k)})^t]^t}{K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)}} \\ &= K^{(k+1)} \end{aligned}$$

car $K^{(k)}$ est symétrique.

3. Montrons que $K^{(k+1)}As^{(i)} = s^{(i)}$ si $0 \leq i \leq n$. On a :

$$K^{(k+1)}As^{(i)} = K^{(k)}As^{(i)} + \frac{s^{(k)}(s^{(k)})^t}{s^{(k)}.y^{(k)}}As^{(i)} - \frac{(K^{(k)}y^{(k)})(K^{(k)}y^{(k)})^t}{K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)}}As^{(i)} \quad (1)$$

Considérons d'abord le cas $i < n$. On a

$$\begin{aligned} s^{(k)}(s^{(k)})^t As^{(i)} &= s^{(k)}[(s^{(k)})^t As^{(i)}] \\ &= s^{(k)}[s^{(k)}.As^{(i)}] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $s^{(k)}.As^{(i)} = 0$ si $i < n$. De plus, comme k^k est symétrique, on a :

$$(K^{(k)}y^{(k)})(K^{(k)}y^{(k)})^t As^{(i)} = K^{(k)}y^{(k)}(y^{(k)})^t K^{(k)} As^{(i)}.$$

Or par la question (c), on a $K^{(k)}As^{(i)} = s^{(i)}$ si $0 \leq i \leq n$. De plus, par définition,

$$y^{(k)} = As^{(k)}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} (K^{(k)}y^{(k)})(K^{(k)}y^{(k)})^t As^{(i)} &= K^{(k)}y^{(k)}(As^{(k)})^t s^{(i)} \\ &= K^{(k)}y^{(k)}(s^{(k)})^t As^{(i)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque on a montré en (a) que les vecteurs $s^{(0)}, \dots, s^{(k)}$ sont A-conjugués. On déduit alors de (1) que :

$$\begin{aligned} K^{(k+1)}As^{(i)} &= K^{(k)}As^{(i)} \\ &= s^{(i)}. \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas $i = n$. On a :

$$K^{(k+1)}As^{(k)} = K^{(k)}As^{(k)} + \frac{s^{(k)}(s^{(k)})^t}{s^{(k)}.y^{(k)}}As^{(k)} - \frac{(K^{(k)}y^{(k)})(K^{(k)}(y^{(k)})^t)}{K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)}}As^{(k)}$$

et comme $y^{(k)} = As^{(k)}$, ceci entraîne que

$$\begin{aligned} K^{(k+1)}As^{(k)} &= K^{(k)}As^{(k)} + s^{(k)} - K^{(k)}y^{(k)} \\ &= s^{(k)}. \end{aligned}$$

4. Pour $x \in IR^n$, calculons $K^{(k+1)}x.x$:

$$K^{(k+1)}x.x = K^{(k)}x.x + \frac{s^{(k)}(s^{(k)})^t}{s^{(k)}.y^{(k)}}x.x - \frac{(K^{(k)}y^{(k)})(K^{(k)}y^{(k)})^t}{K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)}}x.x.$$

Or,

$$s^{(k)}(s^{(k)})^t x.x = s^{(k)}(s^{(k)}.x).x = (s^{(k)}.x)^2$$

et de même :

$$(K^{(k)}y^{(k)})(K^{(k)}y^{(k)})^t x.x = (K^{(k)}y^{(k)}.x)^2$$

On en déduit que

$$K^{(k+1)}x.x = K^{(k)}x.x + \frac{(s^{(k)}.x)^2}{s^{(k)}.y^{(k)}} - \frac{(K^{(k)}y^{(k)}.x)^2}{K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)}}$$

En remarquant que $y^{(k)} = As^{(k)}$, et en réduisant au même dénominateur, on obtient alors que :

$$K^{(k+1)}x.x = \frac{(K^{(k)}x.x)(K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)}) - (K^{(k)}y^{(k)}.x)^2}{(K^{(k)}y^{(k)}.y^{(k)})} + \frac{(s^{(k)}.x)^2}{As^{(k)}.s^{(k)}}$$

Montrons maintenant que $K^{(k+1)}$ est symétrique définie positive. Comme $K^{(k)}$ est symétrique définie positive, on a grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$(K^{(k)}y^{(k)}.x)^2 \leq (K^{(k)}x.x)(K^{(k)}y^{(k)})$$

avec l'égalité si et seulement si x et $y^{(k)}$ sont colinéaires. Si x n'est pas colinéaire à $y^{(k)}$, on a donc clairement :

$$K^{(k+1)}x.x > 0$$

Si maintenant x est colinéaire à $y^{(k)}$, i.e. $x = \beta y^{(k)}$ avec $\beta \in IR_+^*$, on a, grâce au fait que $y^{(k)} = As^{(k)}$,

$$\frac{(s^{(k)}.x)^2}{As^{(k)}.s^{(k)}} = \beta^2 \frac{(s^{(k)}.As^{(k)})^2}{As^{(k)}.s^{(k)}} > 0$$

et donc $K^{(k+1)}x.x > 0$, On en déduit que $K^{(k+1)}$ est symétrique définie positive.

5. On suppose que $g^{(k)} \neq 0$ si $0 \leq n \leq n-1$. On prend comme hypothèse de récurrence que les vecteurs $s^{(0)}, \dots, s^{(k-1)}$ sont A-conjugués et non-nuls, que $K^{(j)}As^{(i)} = s^{(i)}$ si $0 \leq i < j \leq n$ et que les matrices $K^{(j)}$ sont symétriques définies positives pour $j = 0, \dots, n$. Cette hypothèse est vérifiée au rang $n = 1$ grâce à la question 1 en prenant $n = 0$ et $K^{(0)}$ symétrique définie positive.

On suppose qu'elle est vraie au rang n . La question 1 prouve qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

Il reste maintenant à montrer que $x^{(n+1)} = A^{-1}b = x$. On a en effet

$$K^{(n)}As^{(i)} = s^{(i)} \quad \text{pour } i = 0 \quad \text{à} \quad n - 1.$$

Or les vecteurs $s^{(0)}, \dots, s^{(k-1)}$ sont A -conjugués et non-nuls : ils forment donc une base. On en déduit que

$$K^{(n)}A = Id,$$

ce qui prouve que

$$K^{(n)} = A^{-1},$$

et donc, par définition de $x^{(n+1)}$, que

$$x^{(n+1)} = A^{-1}b = \bar{x}.$$

Exercice 27

(méthode de newton pour un système 2×2).

1. On cherche (x, y) tel que

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha y \\ \text{et } y &= y_0 + \alpha \sin(x) \\ &= y_0 + \alpha \sin(x_0 + \alpha y) \end{aligned}$$

Soit encore $f(y) = 0$ avec

$$f(y) = y - y_0 - \alpha \sin(x_0 + \alpha y)$$

la réciproque est immédiate .

2. la fonction f est continue et telle que $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$ par conséquent ,comme f est continue le théorème des valeurs intermédiaires nous assure que f est surjective .De plus on vérifie que si $|\alpha| < 1$ alors $f'(y) > 0$ est donc f est strictement croissante . Elle est donc injective .

Ceci assure l'existence et l'unicité d'un unique \tilde{y} telque $f(\tilde{y}) = 0$.par suite il existe un unique couple $(\tilde{x} - x_0 + \alpha\tilde{y}, \tilde{y})$ qui vérifie $f(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0,0)$.

3. On a :

$$y^{(k+1)} = y^{(k)} - \frac{f(y^{(k)})}{f'(y^{(k)})} = h(y^{(k)}) = \frac{y - y_0 - \alpha \sin(x_0 + \alpha y)}{1 - \alpha^2 \cos(x_0 + \alpha y)}$$

pour la convergence , on applique le théorème qui assure si $f'(y) \neq 0$ l'existence d'un voisinage \tilde{y} sur lequel l'algorithme de newton converge

4. On a :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ -\alpha \cos(x^{(k)}) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x^{(k)} - x_0 - \alpha y^{(k)} \\ y^{(k)} - y_0 - (\alpha \sin(x^{(k)})) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} - \frac{1}{1 - \alpha^2 \cos(x^{(k)})} \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha \cos(x^{(k)}) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^{(k)} - x_0 - \alpha y^{(k)} \\ y^{(k)} - y_0 - \alpha \sin(x^{(k)}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{bmatrix} \frac{1}{1 - \alpha^2 \cos(x^{(k)})} \begin{bmatrix} x^{(k)} - x_0 - \alpha y_0 - \alpha^2 \sin(x^{(k)}) \\ \alpha \cos(x^{(k)})(x^{(k)} - x_0 - \alpha y^{(k)}) + y^{(k)} - y_0 - \alpha \sin(x^{(k)}) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

pour la convergence on applique le théorème qui assure $DF(\tilde{x}, \tilde{y})$ est inversible l'existence d'un voisinage (\tilde{x}, \tilde{y}) sur lequel l'algorithme de newton converge .

6.2 Travaux pratiques

TP01

1-Programmer les algorithmes en Fortran pour les recherches linéaires d'Armijo, de Goldstein et de Wolfe.

Problème 1 :

On considère la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^4.$$

On suppose qu'à l'itération k , on a le point $(x_k, y_k) = (1, 1)$ et la direction $d_k = -\nabla f(x_k, y_k)$

1) Calculez

$$\varphi_k(\alpha) = f(x_k + \alpha d_k), \varphi_k'(\alpha), \varphi_k(0), \varphi_k'(0)$$

2) Calculez α^* , solution optimale globale du problème

$$\min\{\varphi_k(\alpha) : \alpha \in]0, +\infty[\} = \varphi_k(\alpha^*)$$

3) Calculez le pas d'Armijo qu'on note α_{Armijo} , avec les données initiales suivantes :

$$\hat{\alpha} = 1, \beta_1 = 0.9$$

4) Calculez le pas de Goldstein qu'on note $\alpha_{Goldstein}$, avec les données initiales suivantes :

$$a_0 = 0, \beta_0 = 10^{100}, \rho = 0.1, \alpha_0 = 1$$

5) Calculez l'intervalle de Goldstein $[\lambda_1, \lambda_2]$: tel que $\forall \alpha \in [\lambda_1, \lambda_2] : \alpha$ vérifie goldstein 1 et goldstein 2

6) Calculez le pas de Wolfe qu'on note α_{Wolfe} , avec les données initiales suivantes :

$$\rho = 0.1, \sigma = 0.3, a_0 = 0, b_0 = 10^{99}, \alpha_0 = 1$$

7) Calculez l'intervalle de Wolfe qu'on note $[\mu_1, \mu_2]$: tel que

$\forall \alpha \in [\mu_1, \mu_2] : \alpha$ vérifie Wolfe1 et Wolfe2

8) Calculez le pas de Wolfe forte qu'on note $\alpha_{Wolfe-forte}$, avec les données initiales suivantes :

$$\rho = 0.01, \sigma = 0.02, a_0 = 0, b_0 = 0.4, \alpha_0 = 0.3$$

TP02

Problème 2 :

On considère la fonction $f(x, y) = x^2 + y^4$:

1) Calculez le pas de Wolfe α_{Wolfe} avec les données initiales suivantes : Paramètres de Wolfe : $(x_0, y_0) = (1, 1)$, $\rho = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $a_0 = 0$, $b_0 = 10^{99}$, $\alpha_0 = 10$

2) En partant du point initial $(x_0, y_0) = (1, 1)$, calculez

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) - \alpha_{Wolfe} \nabla f(x_0, y_0)$$

3) Comparez les résultats obtenus avec les résultats obtenus au problème 1

TP03

Programmer en fortran 90 de la méthode de la plus forte pente avec la recherche linéaire d'Armijo . On utilise le choix des paramètres suivants :

$$\varepsilon = 10^{-5}, mu = 0.2, be = 0.5$$

6.2.1 Solutions

TP01

1-Programmes en Fortran pour les recherches linéaires d'Armijo, de Goldstein et de Wolfe

Programme en Fortran pour la recherche linéaire d'Armijo

```

c*****
Programme en fortran 77 d'Armijo
c*****

realx(2),xp(2),g(2),gp(2),f0,alph,f,p,s,a,b,pf,t,y,phopt
integer i,k,test,n
sig=0.3;ro=0.1;b=10000000;alph=10;test=0;k=0
print*,'le dimention n=';read*,n
do i=1,n print*,'x0(',i,')=';read*, xp(i) end do
10 if (test==0.and.k.le.10) then call fonc(f0,gp,xp)
do i=1,n x(i)=xp(i)-alph*gp(i) end do
call fonc(f,g,x) ;p=0
do i=1,n p=p+gp(i)*gp(i) end do
s=f0-ro*alph*p
if (f.gt.s) then b=alph else phopt=alph ;test=1 endif
print*,'alpha(',k,')=', alph ;alph=b/2 ;k=k+1
go to 10
end if
print*,'alpha optimal=', phopt
end

c*****

subroutine fonc(f,g,x)
real f,g(2),x(2)
f=(x(1))**2+(x(2))**4 ;g(1)=2*x(1) ;g(2)=4*(x(2))**3
end

c*****
c*****

```

Programme en Fortran pour la règle Goldstein

```

c*****
Programme en fortran 77 de Goldschtien
c*****

real x(2),xp(2),g(2),gp(2),f0,alph,f,p,s,a,b,pf,t,y,phopt
integer i,k,test,n
ro=0.1 ;delt=0.3 ;b=10000000 ;alph=10 ;test=0 ;k=0
print*, 'le dimontion n=' ;read*,n
do i=1,n print*, 'x0(',i,')=' ;read*, xp(i) end do
10 if (test==0.and.k.le.1000) then call fonc(f0,gp,xp)
do i=1,n x(i)=xp(i)-alph*gp(i) end do
call fonc(f,g,x) ;p=0
do i=1,n p=p+gp(i)*gp(i) end do
s=f0-ro*alph*p ;y=f0-delt*alph*p
if (f.gt.s) then b=alph else if (f.lt.y) then a=alph else
phopt=alph ;test=1 endif
endif
print*, 'alpha(',k,')=', alph ;alph=(a+b)/2 ;k=k+1
go to 10
end if
print*, 'alpha optimal=', phopt
end

c*****

subroutine fonc(f,g,x)
real f,g(2),x(2)
f=(x(1))**2+(x(2))**4 ;g(1)=2*x(1) ;g(2)=4*(x(2))**3
end

c*****
c*****

Programme en fortran 77 pour la recherche linéaire de Wolfe
c*****
Programme en fortran 77 de Wolfe
c*****

real x(2),xp(2),g(2),gp(2),f0,alph,f,p,s,a,b,pf,t,y,phopt
integer i,k,test,n

```

```

sig=0.3 ;ro=0.1 ;b=10000000 ;alph=10 ;test=0 ;k=0 ;print*, 'le dimention n='
read*,n
do i=1,n print*, 'x0(',i,')='; read*, xp(i) end do
10 if (test==0.and.k.le.10) then call fonc(f0,gp,xp)
do i=1,n x(i)=xp(i)-alph*gp(i) end do
call fonc(f,g,x) ;p=0
do i=1,n p=p+gp(i)*gp(i) end do
s=f0-ro*alph*p
if (f.gt.s) then b=alph else pf=0
do i=1,n pf=pf+g(i)*gp(i) end do
t=-pf ;y=sig*(-p)
if (t.lt.y) then a=alph else phopt=alph ;test=1 endif
endif
print*, 'alpha(',k,')=', alph ;alph=(a+b)/2 ;k=k+1
go to 10
end if
print*, 'alpha optimal=', phopt ;x=xp
end

```

c*****

```

subroutine fonc(f,g,x)
real f,g(2),x(2)
f=(x(1))**2+(x(2))**4 ;g(1)=2*x(1) ;g(2)=4*(x(2))**3
end

```

c*****

c*****

Problème 1

1) Calcul de $\varphi_k(\alpha), \varphi'_k(\alpha), \varphi_k(0), \varphi'_k(0)$. On a :

$$\varphi_k(\alpha) = f [(x_k, y_k) + \alpha d_k]$$

$$f(x, y) = x^2 + y^4$$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 4y^3)$$

$$d_k = -\nabla f(x_k, y_k)$$

$$= (-2x_k, -4y_k^3)$$

$$(x_k, y_k) = (1, 1)$$

$$\begin{aligned} d_k &= (x_k, y_k) \\ &= (-2, -4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x_k, y_k) + \alpha d_k &= (1, 1) + \alpha(-2, -4) \\ &= (1 - 2\alpha, 1 - 4\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_k(\alpha) &= f [(x_0, y_0) + \alpha d_0] \\ &= f(1 - 2\alpha, 1 - 4\alpha) \\ &= (1 - 2\alpha)^2 + (1 - 4\alpha)^4 \end{aligned}$$

$$\varphi_k(\alpha) = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2$$

$$\varphi_k(0) = 2$$

$$\varphi'_k(\alpha) = 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20$$

$$\varphi'_k(\alpha) = \nabla f [(x_k, y_k) + \alpha d_k]^T \cdot d_k$$

$$\begin{aligned} \varphi'_k(\alpha) &= \nabla f [(x_k, y_k)]^T \cdot d_k \\ &= -20 \\ &< 0 \end{aligned}$$

2) Calcule de α^* , solution optimale globale du problème

$$\min\{\varphi_k(\alpha) : \alpha \in]0, +\infty[\} = \varphi_k(\alpha^*)$$

puisque $\alpha^* \in]0, +\infty[$, donc α^* est une solution optimale locale. Elle vérifie nécessairement $\varphi'_k(\alpha^*) = 0$. Calculons donc les points stationnaires de $\varphi_k(\alpha)$.

$$\varphi'_k(\alpha) = 0 \Leftrightarrow 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20 = 0$$

l'équation précédent admet une seul solution réelle : $\alpha \simeq 0.35439$

$$\varphi_k''(\alpha) = 3072\alpha^2 - 1536\alpha + 200$$

$\varphi_k''(0.35439) = 41.476\ 419\ 8912 > 0$. Donc $\alpha \simeq 0.35439$ est une solution minimale locale stricte. D'autre part, une étude du signe de la dérivée montre que :

$$\begin{aligned} \alpha \in]-\infty, 0.35439[: \varphi_k(\alpha) \text{ est strictement décroissante} \\ \alpha \in]0.35439, +\infty[: \varphi_k(\alpha) \text{ est strictement croissante.} \end{aligned}$$

et

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \varphi_k(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (256\alpha^4) = +\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \varphi_k(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} (256\alpha^4) = +\infty$$

$\varphi_k(0.35439) \simeq 0.115$. On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0.35439	$+\infty$
$\varphi_k'(\alpha)$	$-$	0	$+$
$\varphi_k(\alpha)$	\searrow	0.115	\nearrow

D'après ce tableau de variation ,on peut conclure :

$$\alpha \in]-\infty, 0.35439[\implies \alpha < 0.35439 \implies \varphi_k(\alpha) > \varphi_k(0.35439)$$

$$\alpha \in]0.35439, +\infty[\implies \alpha > 0.35439 \implies \varphi_k(\alpha) > \varphi_k(0.35439)$$

Par conséquent $\forall \alpha \in]0, +\infty[, \alpha \neq 0.35439 : \varphi_k(\alpha) > \varphi_k(0.35439)$

Donc $\alpha = 0.35439$ est la solution optimale globale. $\alpha^* \simeq 0.35439$

$$\varphi_k(\alpha^*) \simeq \varphi_k(0.35439) \simeq 0.11521$$

3) Calcul du pas d'Armijo α_{Armijo} , avec les données initiales :

$$\hat{\alpha} = 1, \beta_1 = 0.9$$

D'après la question 1, on a :

$$\varphi_k(\alpha) = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2$$

$$f(x, y) = x^2 + y^4$$

$$(x_k, y_k) = (1, 1)$$

$$\begin{aligned} f(x_k, y_k) &= f(1, 1) \\ &= 2.0 \end{aligned}$$

$$\nabla f(x, y) = (2x, 4y^3)$$

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_k, y_k)\|^2 &= \|(2x_k, 4y_k^3)\|^2 \\ &= 4x_k^2 + 16y_k^6 \\ &= 20 \end{aligned}$$

Notons :

$$\begin{aligned} \theta_k(\alpha) &= f(x_k, y_k) + \alpha\beta_1 \nabla f(x_k, y_k)^T d_k \\ &= f(x_k, y_k) - \alpha\beta_1 \|\nabla f(x_k, y_k)\|^2 \end{aligned}$$

$$\theta_k(\alpha) = 2 - 18\alpha$$

On démarre du point $\hat{\alpha} = 1$

Avec ces données, on a :

$$\varphi_k(\hat{\alpha}) = \varphi_k(1) = 82.0$$

$$\theta_k(\hat{\alpha}) = \theta_k(1) = -16.0$$

On a

$\varphi_k(\hat{\alpha}) > \theta_k(\hat{\alpha})$. Alors on divise $\hat{\alpha}$ par 2, on prend $\hat{\alpha}_1 = 0.5$
on obtient alors :

$$\varphi_k(\hat{\alpha}_1) = \varphi_k(0.5) = 1.0$$

$$\theta_k(\hat{\alpha}_1) = \theta_k(0.5) = -7.0$$

$\varphi_k(\hat{\alpha}_1) > \theta_k(\hat{\alpha}_1)$ alors on divise $\hat{\alpha}_1$ par 2,
on prend $\hat{\alpha}_2 = 0.25$

$$\varphi_k(\hat{\alpha}_2) = \varphi_k(0.25) = 0.25$$

$$\theta_k(\hat{\alpha}_2) = \theta_k(0.5) = -2.5$$

$\varphi_k(\hat{\alpha}_2) > \theta_k(\alpha_2)$ alors on divise $\hat{\alpha}_2$ pas 2 ,
on prend $\hat{\alpha}_3 = 0.25/2 = 0.125$

$$\varphi_k(\hat{\alpha}_3) = \varphi_k(0.125) = 0.625$$

$$\theta_k(\hat{\alpha}_3) = \theta_k(0.125) = -0.25$$

$\varphi_k(\hat{\alpha}_1) > \theta_k(\alpha_1)$ alors on divise $\hat{\alpha}_3$ pas 2 ,
on prend $\hat{\alpha}_4 = 0.125/2 = 0.0625$

$$\varphi_k(\hat{\alpha}_4) = \varphi_k(0.0625) = 1.08203125$$

$$\theta_k(\hat{\alpha}_4) = \theta_k(0.0625) = 0.875$$

$\varphi_k(\hat{\alpha}_4) > \theta_k(\hat{\alpha}_4)$ alors on divise $\hat{\alpha}_4$ pas 2 ,
on prend $\hat{\alpha}_5 = 0.0625/2 = 0.03125$

$$\varphi_k(\hat{\alpha}_5) = \varphi_k(0.03125) = 1.465087890625$$

$$\theta_k(\hat{\alpha}_5) = \theta_k(0.03125) = 1.4375$$

$\varphi_k(\hat{\alpha}_5) > \theta_k(\alpha_5)$ alors on divise $\hat{\alpha}_5$ pas 2 ,
on prend $\hat{\alpha}_6 = 0.03125/2 = 0.015625$

$$\varphi_k(\hat{\alpha}_6) = \varphi_k(0.015625) = 1.7109527587890625$$

$$\theta_k(\hat{\alpha}_6) = \theta_k(0.015625) = 1.71875$$

$\varphi_k(\hat{\alpha}_6) < \theta_k(\hat{\alpha}_6)$ alors on arrête
et on prend $\hat{\alpha}_6 = 0.015625/2$ comme pas d'Armijo.

Conclusion $\hat{\alpha}_{Armijo} = 0.015625$

4) Calcule du pas $\alpha_{Goldstein}$, avec les données initiales suivantes :

$$a_0 = 0, b_0 = 10^{100}, \rho = 0.1, \alpha_0 = 1$$

On a déjà calculé dans la question 3, la fonction $\varphi_k(\alpha)$

$$\begin{aligned}\varphi_k(\alpha) &= f [(x_0, y_0) + \alpha d_0] \\ &= f [(x_0, y_0) + \alpha \nabla f (x_0, y_0)]\end{aligned}$$

$$\varphi_k(\alpha) = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2$$

$$\varphi_k'(\alpha) = 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20$$

$$\varphi_k(0) = +2, \varphi_k'(0) = -20$$

Notons par $g(\alpha)$ et $h(\alpha)$ les 2 fonctions affines intervenant dans l'Algorithme de Goldstein

$$g(\alpha) = \varphi_k(0) + \alpha \rho \varphi_k'(0) = 2 - 2\alpha$$

$$h(\alpha) = \varphi_k(0) + \alpha(1 - \rho)\varphi_k'(0) = 2 - 18\alpha$$

ETAPE 1 :

On démarre avec $\alpha_0 = 1$,

$$\varphi_k(\alpha_0) = \varphi_k(1) = 82$$

$$g(\alpha_0) = g(1) = 0.0$$

$$\varphi_k(\alpha_0) > \varphi_k(0) + \alpha_0 \rho \varphi_k'(0) = g(\alpha_0) \implies \alpha \text{ ne vérifié pas Goldstein1}$$

Poser $a_1 = a_0 = 0, b_1 = \alpha_0 = 1$ et allez à ETAPE 4

ETAPE 4 :

Calculer

$$\alpha_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = 0.5, \text{ Poser } k=1 \text{ et allez à ETAPE 2}$$

ETAPE 2 :

$$\varphi_k(\alpha_1) = \varphi_k(0.5) = 1.0$$

$$\varphi_k(0) + \alpha \rho \varphi_k'(0) = g(\alpha_1) = g(0.5) = 1.0$$

$$\varphi_k(\alpha_1) = \varphi_k(0) + \alpha_1 \rho \varphi_k'(0) \implies \alpha_1 = 0.5 \text{ vérifié Goldstein1. Allez à}$$

ETAPE 3

ETAPE 3 :

$$\varphi_k(\alpha_1) = \varphi_k(0.5) = 1.0$$

$$\varphi_k(0) + \alpha_1 (1 - \rho) \varphi_k'(0) = h(\alpha_1) = (0.5) = -7.0$$

$$\varphi_k(\alpha_1) > \varphi_k(0) + \alpha_1 (1 - \rho) \varphi_k'(0)$$

Donc $\alpha_1 = 0.5$ vérifié Goldstein2

stop $\alpha^* = \alpha_1 = 0.5$

Conclusion $\alpha_{Goldstein} = 0.5$

5) Calcul de l'intervalle de Goldstein $[\lambda_1, \lambda_2]$ tel que :

$\forall \alpha \in [\lambda_1, \lambda_2] : \alpha$ vérifie goldstein 1 et goldstein 2

λ_2 est l'abscisse du point d'intersection de la droite $h(\alpha) = 2 - 18\alpha$ avec le graphe de

$$\varphi_k(\alpha) = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2.$$

Donc λ_2 est solution de l'équation $h(\alpha) = \varphi_k(\alpha)$, ce qui donne l'équation :

$$2 - 18\alpha = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2$$

ou encore

$$256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2 = 0$$

La seule solution dans \mathbb{R}_+^* est $\lambda_2 \simeq 2.111$

λ_1 est l'abscisse du point d'intersection de la droite $g(\alpha) = 2 - 2\alpha$ avec le graphe de

$$\varphi_k(\alpha) = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2.$$

Donc λ_1 est solution de l'équation $g(\alpha) = \varphi_k(\alpha)$, ce qui donne l'équation :

$$2 - 2\alpha = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2$$

ou encore

$$256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2 = 0.$$

La seule solution dans \mathbb{R}_+^* est $\lambda_1 = 0.5$

Donc $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.5, 2.111]$

6) Calcul du pas α_{Wolfe} avec les données initiales suivantes :

$$\rho = 0.1, \sigma = 0.3, a_0 = 0, b_0 = 10^{99}, \alpha_0 = 1$$

ETAPE1 : Initialisation

On a déjà calculé dans la question 3, la fonction $\varphi_k(\alpha)$

$$\varphi_k(\alpha) = f[(x_0, y_0) + \alpha d_0] = f[(x_0, y_0) + \alpha \nabla f(x_0, y_0)]$$

$$\varphi_k(\alpha) = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2$$

$$\varphi_k(\alpha) = 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20$$

$$\varphi_k(0) = 2$$

$$\varphi'_k(0) = -20$$

Notons par $k(\alpha)$ et $q(\alpha)$ les fonction intervenant dans l'Algorithme de Wolfe

$k(\alpha) = \varphi_k(\alpha) + \rho\alpha\varphi'_k(\alpha) = 2 - 2\alpha$ (fonction affine intervenant dans la condition Wolfe1)

$q(\alpha) = \sigma\varphi'_k(\alpha) = 0.3*(-20) = -6.0$ (fonction constante intervenant dans la condition Wolfe2)

ETAPE2 : Test Wolfe1 pour $\alpha_0 = 1$:

$$\varphi_k(\alpha_0) = \varphi_k(1) = 82.0$$

$$\varphi_k(0) + \rho\alpha\varphi'_k(0) = k(\alpha_0) = k(1) = 0.0$$

$$\varphi_k(\alpha_0) > \varphi_k(0) + \rho\alpha\varphi'_k(0) \implies (\text{Wolfe1}) \text{ n'est pas vérifiée } \alpha_0$$

On pose : $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = \alpha_0 = 1$

$$[a_1, b_1] = [0, 1].$$

Aller à Etape 4

ETAPE4 : Calcul de α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{0+1}{2} = 0.5$$

$$k = 0 + 1 = 1 \text{ Aller à Etape2(bis)}$$

ETAPE 2 (bis) tester Wolfe1 pour $\alpha_1 = 0.5$

$$\varphi_k(\alpha_1) = \varphi_k(0.5) = 1.0$$

$$\varphi_k(0.5) + \rho\alpha\varphi'_k(0.5) = k(\alpha_1) = k(0.5) = 1.0$$

$$\varphi_k(\alpha_1) > \varphi_k(0.5) + \rho\alpha\varphi'_k(0.5) \implies (\text{Wolfe1}) \text{ est vérifiée pour : } \alpha_1 = 0.5$$

Aller à Etape 3

ETAPE3 : Tester Wolfe2 pour $\alpha_1 = 0.5$

Pour tester Wolfe2, on a besoin des expressions de $\varphi'_k(\alpha)$ et de $q(\alpha) = \sigma\varphi'_k(0)$.

On a :

$$\varphi'_k(\alpha) = 1024\alpha - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20$$

$$\varphi'_k(\alpha_1) = \varphi'_k(0.5) = 16$$

$$\sigma\varphi'_k(0) = -6.0$$

$$\varphi'_k(\alpha_1) > \sigma\varphi'_k(0) \implies (\text{Wolfe2}) \text{ n'est pas vérifiée pour : } \alpha_1 = 0.5$$

L'Algorithme s'arrête

Conclusion $\alpha_{Wolfe} = 0.5$

7) Calcul de l'intervalle de Wolfe $[\mu_1, \mu_2]$ tel que :

$$\forall \alpha \in [\mu_1, \mu_2] : \alpha \text{ vérifiée Wolfe1 et Wolfe2}$$

Considérons la tangente au graphe de coefficient directeur $\sigma\varphi'_k(0)$

$$\sigma\varphi'_k(0) = 0.3 * (-20) = -6.0$$

On va chercher quel $\mu_1 > 0$ qui vérifie $\varphi'_k(\mu_1) = -6$
 Résolvons donc l'équation : $\varphi'_k(\alpha) = -6$, c'est à dire :

$$1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20 = -6$$

Cette équation admet une seule solution réelle $\alpha \simeq 0.10898$.

Donc $\mu_1 = 0.10898$

On a :

$$\varphi'_k(\mu_1) = -6$$

$$\varphi_k(\mu_1) = \varphi_k(0.10898) = 0.71282904899812151296$$

$$y - 0.7127090652 = -6(x - 0.10898)$$

l'équation de la tangente au graphe de $\varphi_k(\alpha)$ de coefficient directeur $\sigma\varphi'_k(0)$ et qui passe par le point $(\mu_1, \varphi_k(\mu_1))$ est

$$\begin{aligned} \{(\alpha, y) \quad : \quad y - \varphi_k(\mu_1) &= \varphi'_k(\mu_1)(\alpha - \mu_1)\} \\ &= \{(\alpha, y) : y - 0.71282 = -6(\alpha - 0.10898)\} \end{aligned}$$

$$(\alpha, y) : y = -6\alpha + 1.3667$$

Conclusion $\mu_1 = 0.10898$, l'équation de la tangente au point μ_1 est :

$$y = -6\alpha + 1.3667$$

Calcul de μ_2

Considérons la droite d'équation :

$$y = \varphi_k(0) + \rho\alpha\varphi'_k(0) = 2 + \alpha(0.1 * (-20)) = 2 - 2\alpha$$

μ_2 est l'abscisse du point d'intersection de $\varphi_k(\alpha)$ et de la droite $y = 2 - 2\alpha$, c'est à dire solution de l'équation

$$\varphi_k(\alpha) = 2 - 2\alpha \iff 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2 = 2 - 2\alpha$$

Cette équation admet une seule solution réelle $\alpha = 0.5$ dans l'intervalle $]0, +\infty[$

Conclusion $\mu_2 = 0.5$

Conclusion générale : L'intervalle dans lequel se trouve vérifiant (Wolfe1) et (Wolfe2) est : $[\mu_1, \mu_2] = [0.1, 0.5]$

Remarque : La solution optimale $\alpha^* = 0.354$ se trouve dans l'intervalle $[\mu_1, \mu_2] = [0.1, 0.5]$

8) Calcul du pas $\alpha_{Wolfe-forte}$, avec les données initiales suivantes :

$$\rho = 0.01, \sigma = 0.02, a_0 = 0, b_0 = 0.4, \alpha_0 = 0.3$$

Remarquons que $0 < \rho < \sigma < 1$: Donc les conditions de Wolfe sont bien vérifiées.

Calcul du pas $\alpha_{Wolfe-forte}$, avec les données initiales suivantes :

$$\rho = 0.01, \sigma = 0.02, a_0 = 0, b_0 = 0.4, \alpha_0 = 0.3$$

ETAPE1 : Initialisation

On a déjà calculé dans le problème1, la fonction $\varphi_k(\alpha)$

$$\varphi_k(\alpha) = f[(x_0, y_0) + \alpha d_0] = f[(x_0, y_0) + \alpha \nabla f(x_0, y_0)]$$

$$\varphi_k(\alpha) = 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2$$

$$\varphi'_k(\alpha) = 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20$$

$$\varphi_k(0) = +2,$$

$$\varphi'_k(0) = -20$$

$$\rho\varphi'_k(0) = (0.01) * (-20) = -0.2$$

$$\sigma\varphi'_k(0) = (0.02) * (-20) = -0.4$$

Notons par $g(\alpha)$ et $h(\alpha)$ et $k(\alpha)$ les 3 fonctions intervenant dans l'Algorithme de Wolfe-forte

$g(\alpha) = \varphi_k(0) + \alpha\rho\varphi'_k(0) = 2 - 0.2\alpha$ (fonction α ne intervenant dans la condition Wolfe-forte1)

$$g(\alpha) = 2 - 0.2\alpha$$

$h(\alpha) = \sigma\varphi'_k(0) = -0.4$ (fonction constante intervenant dans la condition Wolfe2)

$$k(\alpha) = -\sigma\varphi'_k(0) = 0.4$$

ETAPE2 : Tester Wolfe-forte1 pour $\alpha_0 = 0.3$

$$\varphi_k(\alpha_0) = \varphi_k(0.3) = 0.1616$$

$$g(\alpha_0) = g(0.3) = 1.94$$

$\varphi_k(\alpha_0) < \varphi_k(0) + \rho\alpha_0\varphi'_k(0)$ (Wolfe-forte1) est vérifiée pour $\alpha_0 = 0.3$

Aller à ETAPE3

ETAPE3 : Tester Wolfe-forte(2) pour $\alpha_0 = 0.3$

Pour tester Wolfe-forte2, on a besoin des expressions de $\varphi'_k(\alpha)$ et de $h(\alpha) = \sigma\varphi'_k(0)$ et de $k(\alpha) = -\varphi'_k(0)$. On a :

$$\varphi'_k(\alpha) = 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200 - 20$$

$$d(\alpha) = 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200 - 20$$

$$d(0.3) = -1.472$$

$$\varphi'_k(\alpha_0) = \varphi'_k(0.3) = -1.472$$

$$\sigma\varphi'_k(0) = -0.4$$

$$-\varphi'_k(0) = 0.4$$

Wolfe-forte(2) n'est pas vérifiée pour $\alpha_0 = 0.3$ car on a :

$$\varphi'_k(0.3) = -1.472 < \sigma\varphi'_k(0) = -0.4$$

L'Algorithme continue. Posez $a_1 = \alpha_0 = 0.3$, $b_1 = b_0 = 0.4$ et aller à ETAPE4

ETAPE4(calcul de α_1)

$$\text{Calculer } \alpha_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{0.4+0.3}{2} = 0.35$$

Allez à ETAPE2(bis)

ETAPE2(bis) : Tester Wolfe-forte1 pour $\alpha_1 = 0.35$

$$\varphi_k(\alpha_1) = \varphi_k(0.35) = 0.1156$$

$$g(\alpha_1) = g(0.35) = 1.93$$

$$\varphi_k(\alpha_1) < \varphi_k(0) + \rho\alpha_1\varphi'_k(0) \implies (\text{Wolfe} - \text{forte1}) \text{ est vérifiée pour } \alpha_1$$

Aller à ETAPE3 (bis)

ETAPE3(bis) : Tester Wolfe-forte(2) pour $\alpha_1 = 0.3$

On a :

$$\varphi'_k(\alpha_1) = \varphi'_k(0.35) = -0.176$$

$$\sigma\varphi'_k(0) = -0.4$$

$$-\sigma\varphi'_k(0) = 0.4$$

Wolfe-forte(2) est vérifiée pour $\alpha_1 = 0.3$; car on a

$$\varphi'_k(0) = -0.4 \leq \varphi'_k(0.35) = -0.176 \leq -\sigma\varphi'_k(0) = 0.4$$

L'Algorithme s'arrête et $\alpha_{\text{Wolfe-forte}} = \alpha_1 = 0.3$

TP02

Problème2

Il est important de remarquer que dans le problème2, $\alpha_0 = 10$

1) Calcul du pas Wolfe avec $\alpha_0 = 10$

ETAPE1 Initialisation

On prend $\alpha_0 = 10$, $a_0 = 0$, $b_0 = 10^{99}$, $\sigma = 0.3$, $\rho = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $k = 0$.

Calcul de $\varphi(\alpha)$, $\varphi'(\alpha)$, $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$

$$\varphi(\alpha) = f[(x_0, y_0) + \alpha d_0]$$

$$f(x; y) = x^2 + y^4$$

$$\nabla f(x; y) = (2x; 4y^3)$$

$$d_0 = -\nabla f(x_0, y_0) = (-2x_0, -4y_0^3)$$

$$(x_0, y_0) = (1, 1)$$

$$d_0 = -\nabla f(x_0, y_0) = (-2, -4)$$

$$\begin{aligned}
(x_0, y_0) + \alpha d_0 &= (1, 1) + \alpha(-2, -4) = (-2\alpha + 1, -4\alpha + 1) \\
\varphi(\alpha) &= f[(x_0, y_0) + \alpha d_0] = f(-2\alpha + 1, -4\alpha + 1) = (1 - 2\alpha)^2 + (1 - 4\alpha)^4 \\
\varphi(\alpha) &= 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2 \\
\varphi(0) &= 2 \\
\varphi(\alpha_0) &= \varphi(10) = 2313802 \\
\varphi'(\alpha) &= \psi(\alpha) = 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20 \\
\varphi'(\alpha) &= \nabla f[(x_0, y_0) + \alpha d_0]^T \cdot d_0 \\
\varphi'(0) &= -20 \\
\varphi'(\alpha) = 0 &\iff 1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20 = 0 \iff [\alpha = 0.35439] \\
\varphi(\alpha^*) &= \min \varphi(\alpha) : \alpha \in [0, +\infty[= \varphi(0.35439) = 0.11521
\end{aligned}$$

Calcul de $[\lambda_1, \lambda_2]$: intervalle dans lequel se trouve $\bar{\alpha}$ vérifiant (Wolfe1) et (Wolfe2)

Considérons la tangente au graphe de coefficient directeur $\sigma\varphi'(0)$

$$\sigma\varphi'(0) = 0.3 * (-20) = -6.0$$

On va chercher quel $\lambda_1 > 0$ qui vérifie : $\varphi'(\lambda_1) = -6$

Résolvons donc l'équation : $\varphi'(\alpha) = -6$; c'est à dire :

$$1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20 = -6$$

$$1024\alpha^3 - 768\alpha^2 + 200\alpha - 20 = -6, \text{ Solution is : } [\alpha = 0.10898]$$

$$\varphi(0.10898) = 0.7128290490$$

$$y - 0.7127090652 = -6(x - 0.10898)$$

l'équation de la tangente est $y = -6x + 1.366589$

$$\lambda_1 = 0.10898$$

Calcul de λ_2

Considérons la droite d'équation

$$y = \varphi(0) + \rho\alpha\varphi'(0) = 2 + \alpha(0.1 * (-20)) = 2 - 2\alpha$$

λ_2 est l'abscisse du point d'intersection de $\varphi(\alpha)$ et de la droite

$y = 2 - 2\alpha$, c'est à dire solution de l'équation

$$\varphi(\alpha) = 2 - 2\alpha \iff 256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2 = 2 - 2\alpha$$

$$256\alpha^4 - 256\alpha^3 + 100\alpha^2 - 20\alpha + 2 = 2 - 2\alpha, \text{ Solution est : } [\alpha = 0.5]$$

$$\lambda_2 = 0.5$$

Conclusion générale : L'intervalle dans lequel se trouve $\bar{\alpha}$ vérifiant (Wolfe1) et (Wolfe2) est : $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.1, 0.5]$

Remarque : La solution optimale $\alpha^* = 0.354$ se trouve dans l'intervalle $[\lambda_1, \lambda_2] = [0.1, 0.5]$

ETAPE2 : Tester Wolfe1 pour $\alpha_0 = 10$

$$\varphi(\alpha_0) = \varphi(10) = 2313802$$

$$\varphi(0) + \rho\alpha_0\varphi'(0) = \varphi(0) + (0.1) * (10) * (-20) = -18.0$$

$$\varphi(\alpha_0) > \varphi(0) + \rho\alpha_0\varphi'(0) \implies (\text{Wolfe1}) \text{ n'est pas vérifiée} \implies \alpha_0 > \lambda_2$$

On pose $a_1 = a_0 = 0$, $b_1 = \alpha_0 = 10$

$$[a_1, b_1] = [0, 10].$$

Aller à ETAPE 4

ETAPE 4 : Calcul de α_1

$$\alpha_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} = \frac{0 + 10}{2} = 5$$

$k = 0 + 1 = 1$: Aller à ETAPE 2(bis)

ETAPE2 (bis) tester Wolfe(1) pour $\alpha_1 = 5$

$$\varphi(\alpha_1) = \varphi(5) = 130402$$

$$\varphi(0) + \rho\alpha_1\varphi'(0) = \varphi(0) + (0.1) * (5) * (-20) = -8.0$$

$$\varphi(\alpha_1) > \varphi(0) + \rho\alpha_1\varphi'(0) \Rightarrow (\text{Wolfe1}) \text{ n'est pas vérifiée} \Rightarrow \alpha_1 > \lambda_2$$

On pose $a_2 = a_1 = 0$, $b_2 = \alpha_1 = 5$

$$[a_2, b_2] = [0, 5].$$

Aller à ETAPE 4(bis)

ETAPE 4(bis) : Calcul de α_2

$$\alpha_2 = \frac{a_2 + b_2}{2} = \frac{0 + 5}{2} = 2.5$$

$k = 1 + 1 = 2$. Aller a ETAPE 2(tris)

ETAPE2 (tris) tester Wolfe(1) pour $\alpha_2 = 2.5$

$$\varphi(\alpha_2) = \varphi(2.5) = 6577.0$$

$$\varphi(0) + \rho\alpha_2\varphi'(0) = \varphi(0) + (0.1) * (2.5) * (-20) = -3.0$$

$$\varphi(\alpha_2) > \varphi(0) + \rho\alpha_2\varphi'(0) \Rightarrow (\text{Wolfe1}) \text{ n'est pas vérifiée} \Rightarrow \alpha_2 > \lambda_2$$

On pose $a_3 = a_2 = 0$, $b_3 = \alpha_2 = 2.5$

$$[a_3, b_3] = [0, 2.5].$$

Aller à ETAPE 4(tris)

ETAPE 4(tris) : Calcul de α_3

$$\alpha_3 = \frac{a_3 + b_3}{2} = \frac{0 + 2.5}{2} = 1.25$$

$k = 2 + 1 = 3$. Aller a Etape 2(quatro)

ETAPE2 (quatro) tester Wolfe(1) pour $\alpha_3 = 1.25$

$$\varphi(\alpha_3) = \varphi(1.25) = 258.25$$

$$\varphi(0) + \rho\alpha_3\varphi'(0) = \varphi(0) + (0.1) * (1.25) * (-20) = -0.5$$

$$\varphi(\alpha_3) > \varphi(0) + \rho\alpha_3\varphi'(0) \Rightarrow (\text{Wolfe1}) \text{ n'est pas vérifiée} \Rightarrow \alpha_3 > \lambda_2$$

On pose $a_4 = a_3 = 0$, $b_4 = \alpha_3 = 1.25$

$$[a_4, b_4] = [0, 1.25].$$

Aller à ETAPE 4(quatro)

ETAPE 4(quatro) : Calcul de α_4

$$\alpha_4 = \frac{a_4 + b_4}{2} = \frac{0 + 1.25}{2} = 0.625$$

$k = 3 + 1 = 4$. Aller à ETAPE 2(cinquo)

ETAPE2 (cinquo) tester Wolfe(1) pour $\alpha_4 = 0.625$

$$\varphi(\alpha_4) = \varphi(0.625) = 5.125$$

$$\varphi(0) + \rho\alpha_4\varphi'(0) = \varphi(0) + (0.1) * (0.625) * (-20) = 0.75$$

$$\varphi(\alpha_4) > \varphi(0) + \rho\alpha_4\varphi'(0) \Rightarrow (\text{Wolfe1}) \text{ n'est pas vérifiée} \Rightarrow \alpha_4 > \lambda_2$$

On pose $a_5 = a_4 = 0$, $b_5 = \alpha_4 = 0.625$

$$[a_5, b_5] = [0, 0.625].$$

Aller à ETAPE 4(cinquo)

ETAPE 4(cinquo) : Calcul de α_5

$$\alpha_5 = \frac{a_5 + b_5}{2} = \frac{0 + 0.625}{2} = 0.3125$$

$k = 4 + 1 = 5$. Aller à ETAPE 2(six)

ETAPE2 (six) tester Wolfe(1) pour $\alpha_5 = 0.3125$

$$\varphi(\alpha_5) = \varphi(0.3125) = 0.14453$$

$$\varphi(0) + \rho\alpha_5\varphi'(0) = \varphi(0) + (0.1) * (0.3125) * (-20) = 1.375$$

$$\varphi'(\alpha_5) < \varphi(0) + \rho\alpha_5\varphi'(0) \Rightarrow (\text{Wolfe1}) \text{ n'est pas vérifiée pour}$$

$$\alpha_5 = 0.3125 \Rightarrow \alpha_5 < \lambda_2$$

Aller à ETAPE3

ETAPE3 : Tester Wolfe(2) pour $\alpha_5 = 0.3125$

$$\varphi'(\alpha_5) = \varphi'(0.3125) = -1.25$$

$$\sigma\varphi'(0) = 0.3 * (-20) = -6.0$$

$$\varphi'(\alpha_5) > \sigma\varphi'(0) \Rightarrow (\text{Wolfe1}) \text{ n'est pas vérifiée pour } \alpha_5 = 0.3125$$

Conclusion $\bar{\alpha} = \alpha_5 = 0.3125$ et

$$(x_1, y_1) = (x_0, y_0) + \bar{\alpha}d_0 = (1, 1) + (0.3125) * (-2, -4) = (0.375, -0.25)$$

$$f(x_0, y_0) = f(1, 1) = 2$$

$$f(x_1, y_1) = f(0.375, -0.25) = 0.14453$$

$$f(x_1, y_1) < f(x_0, y_0)$$

Il y'a décroissance de la fonction en passant du point (x_0, y_0) au point (x_1, y_1) :

Trouvons l'équation de la droite de coefficient directeur $\sigma\varphi'(0) = -6.0$ et tangente au graphe au point $\lambda_1 = 0.10898$. L'équation de cette droite sera de la forme :

$$y = -6\alpha + b$$

La droite passe par le point $(\lambda_1, \varphi(\lambda_1)) = (0.10898, 0.71283)$.

$$\text{Donc } 0.71283 = -6 * (0.10898) + b$$

$$\text{Donc } b = 0.71283 + 6 * 0.10898 = 1.3667$$

$$\text{Finalement } y = -6\alpha + 1.3667$$

TP03

Programme en fortran 90 de la méthode de la plus forte pente avec la recherche linéaire d'Armijo :

On utilise le choix des paramètres suivants :

```

 $\varepsilon = 10^{-5}, mu = 0.2, be = 0.5$ 
Programme en fortran 90
program steepest
implicit none
integer, parameter :: n = 1000
double precision yc(n), pk(n)
double precision eps, s, be, f1, f0, mu, f2
integer k,l,m,i
k = 0; m = 0
print*, 'enter the initial point'
do i=1,n
yc(i) = 1.
enddo
print*, 'enter eps'
read*, eps
be = 0.5; mu = 0.2
do
if (sqrt (dot_product(df(yc), df(yc))) <= eps.or.k >= 500) exit
pk = -df(yc)
f0 = f(yc)
!recherche d'Armijo
l = 1; s = 1
f1 = f(yc + s*pk)
if (f1 <= f0 + mu*s*dot_product(df(yc), pk)) then
s = s/be
do
f2 = f(yc + s*pk)
if (f2 > f0 + mu*s*dot_product(df(yc), pk)) exit
s = s/be
f1 = f2; l = l + 1
enddo
s = s*be
yc = yc + s*pk
k = k + 1
print*, s
else
s = s*be
do

```

```

f1 = f(yc + s*pk)
if (f1 <= f0 + mu*s*dot_product(df(yc),pk)) then
yc = yc + s*pk
k = k + 1
print*, s
exit
endif
s = s*be
l = l + 1
enddo
endif
m = m + l + 1
f0 = f1
enddo
print*, 'LA SOLUTION EST'
print'(2e10.2)', yc
print*, 'LA VALEUR DE LA FONCTION EST'
print'(e10.2)', f(yc)
print*, 'LA NORME DU GRADIENT EST'
print '(e10.2)', sqrt(dot_product(df(yc), df(yc)))
print*, 'LE NOMBRE D IERATIONS EST'
print'(i10)', k
contains
function f(u)
double precision f, u(n)
integer i1
f = 0
do i1 = 1, n
f = f + i1*u(i1)**2
enddo
f = f**2
endfunction
function df(u)
double precision df(n), u(n), sm
integer i1
sm = 0
do i1 = 1, n
sm = sm + i1*u(i1)**2

```

```
enddo
do  $i1 = 1, n$ 
 $df(i1) = 4*i1*u(i1)*sm$ 
enddo
endfunction
end
```

Bibliographie

- [1] Andreas Antoniou et Wu-Sheng Lu "PRACTICAL OPTIMIZATION Algorithms and Engineering Applications" (2007 Springer Science+Business Media, LLC).
- [2] Cordellier, F. " Transformations de suites scalaires et vectorielles" Thèse de doctorat d'état soutenue à l'université de Lille I, 1981.
- [3] E.Le Pennec ." Optimisation et fonction convexe ", Novembre 2012.
- [4] Fletcher, R, "Practical methods of Optimization," Second Edition , John Wiley & Sons , Chichester, 1987.
- [5] Fletcher, R. "An overview of unconstrained optimization", *in Algorithms for Continuous Optimization : the State of Art*, E .Spedicato, ed., Kluwer Academic Publishers, 1994 .
- [6] G.Allaire "L'ouvrage complet est disponible auprès des Editions de l'Ecole Polytechnique" paris, le 4 Janvier 2005.
- [7] Jorge Nocedal et Stephen J.Wright "Numerical Optimization with 85 illustrations" (1999 springer-verlag New York, Inc).
- [8] J. C. Gilbert (2007), "Eléments d'Optimisation Différentiable : Théorie et Algorithmes", (Notes de cours, école Nationale Supérieure de Techniques Avancées, Paris).
- [9] Michel Minoux (1983), "Programmation Mathématique, Théorie et Algorithmes, (tome 1 , Dunod).
- [10] Nocedal, J. and Wright, S.J. "Numerical Optimization" *Springer. Second edition.* 2006.