الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
وزارة التعليم العالي و البحث العلمي
جامعة العربي التبسي - تبسة -
قسم الرياضيات و الإعلام الآلي

مذكرة تخرج

للحصول على

شهادة ماستر في ميدان: الرياضيات و الإعلام الآلي
شعبة : الرياضيات

تخصص : معادلات تفاضلية جزئية و تطبيقات

تعدد الحلول لنظام بيضوي يتضمن مؤثر $p(x)$-لابلاس تحت شروط حدية غير خطية

تقديم : هيبي صفاء ، دوايدي أميرة

أمام اللجنة :

الرئيس:	زارعي عبد الرحمان	أستاذ التعليم العالي	جامعة العربي التبسي
الممتحن:	عبد المالك سالم	أستاذ التعليم العالي	جامعة العربي التبسي
المشرف(ة):	زديري صنية	أستاذ محاضر "ب"	جامعة العربي التبسي
مساعد مشرف:	عكوت كمال	أستاذ التعليم العالي	جامعة العربي التبسي

نوقشت يوم : 12 / 06 / 2022

السنة الجامعية : 2021 / 2022

شكر وعرفان

سبحانك اللهم لا علم لنا إلا ما علمتنا، نشكر الله ونحمده فضل نعمه علينا، نعمة العقل التي أنار بها دربنا وفكرنا ونعمة الذاكرة التي حفظنا بها سرنا وجهرنا. والصلاة والسلام على قدوة المربين نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين.

إن من تمام شكر الله، شكر أهل الفضل والبر، وعملا بقول نبيه محمد صلى الله عليه وسلم: ≺≺ من لم يشكر القليل لم يشكر الكثير ومن لم يشكر الناس لم يشكر الله ≻≻ رواه " أحمد والترمذي "

ونخص بالشكر الجزيل أساتذة الخير الذين علموا بلا شك أن العلم من أجمل العبادات وأفضلها، وإن من آمالنا وتطلعاتنا في هذا الصرح أن نتقدم بجزيل الشكر إلى كل من ساعدنا وساهم في تكويننا طيلة مشوارنا الدراسي من أساتذة التعليم الابتدائي، وصولا إلى أساتذة التعليم العالي والبحث العلمي في قسم الرياضيات و الإعلام الآلي بجامعة العربي التبسي و نخص بالذكر الأستاذة المشرفة المحترمة " زديري صنيـة " على كل ما قدمته لنا من معلومات و توجيهات قيمة ساهمت في إثراء بحثنا العلمي، فهي برهان للذين بذلوا شاق الجهد و يسروا العسير بقدرة الصمد القدير.

ثم الشكر موصول للأستاذ مساعد المشرف " عكروت كمال " الذي أمدنا بما أجادت قريحته العلمية والمعرفية والتربوية مد السماء بغيثها بإذن الحي القيوم.

كما نشكر أعضاء لجنة المناقشة التي شرفتنا بقبولها مناقشة مذكرتنا، كل من الأستاذ " زارعي عبد الرحمان " رئيسا و الأستاذ " عبد المالك سالم " ممتحنا اللذين لاشك أنهما سيفيضون علينا بتوجيهاتهما القيمة وملاحظاتهما السديدة.

دون أن نغض الطرف بالشكر والثناء على إخواننا الطلبة المقربين بصلة العلم في فيحاء الأخوة والسند. وخاصة طلبة ماستر 2 دفعة 2022 راجين من المولى العليّ القدير كل التوفيق والفلاح.

وفي الأخير نشكر كل من قدم لنا يد العون والمساعدة من قريب أو بعيد ولو بكلمة طيبة أو بتوجيه أو حتى بدعوة في ظهر الغيب لهم جزيل الشكر والعرفان.

ولكم منا فائق التقدير والاحترام.

إهـــــداء

الحمد لله على منه وامتنانه والشكر له على نعمه و إنعامه حمدا كثيرا طيبا. الذي أنعم علي بنعمة العلم وسهل لي طريقا أبغي فيه علما ووفقني في إنهاء عملي المتواضع هذا.

إلى من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة، إلى نبي الرحمة ونور العالمين، سيدنا محمد عليه الصلاة وأزكى التسليم.

إلى التي بالأماني حملتني، وبالتهاني استقبلتني، وبالحنان رعتني، إلى من لم يعرف دعاؤها حدودا ولا عطاؤها قيودا، إلى بسمة الحياة وسر الوجود، إلى ينبوع الصبر والتفاؤل والأمل: أمي الغالية.

إلى من جرع الكأس فارغا ليسقيني قطرة حب، إلى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة، إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم، إلى القلب الكبير الذي أحمل اسمه بكل فخر وأعتز به في كل مكان: أبي العزيز.

إلى سندي وقوتي وملاذي بعد الله، إلى من آثروني على أنفسهم، إلى من علموني علم الحياة، إلى القلوب الطاهرة: إخوتي وأخواتي.

إلى التي يأنس بها قلبي و تقر بها عيني برعم العائلة: " براءة ".

إلى من جمعني بهم دم واحد وقلب واحد وبيت واحد: كل الأهل والأقارب.

إلى رفيقة هذا العمل البسيط و رفيقة دربي " دوايدي أميرة "

إلى كل الأصدقاء الأوفياء والزملاء الأعزاء التي جمعتني بهم الحياة خصوصا حبيبات قلبي "موسى ريم"، " دهلوز منال "، " قدوري صفية " ، " براهمي بلقيس "، "بلقاسمي لبنى "، " قواسمية هديل "، " بكار انتصار " .

إلى كل من تصفح هذه المذكرة وانتفع بها وتذكرنا بدعائه.

إلى كل هؤلاء أهدي ثمرة جهدي.

** هيبي صفاء **

إهـــداء

يا رب لك الحمد كما ينبغي لجلال وجهك و عظيم سلطانك تباركت يا رب و تعاليت " سبحانك لا علم لنا إلا ما علمتنا إنك أنت العليم الحكيم " و نصلي ونسلم على خير نبي أرسل للعالمين سيدنا محمد عليه أزكى الصلاة و أفضل التسليم وعلى آله و صحبه الطاهرين.

إلى أعز ما أملك في الوجود إلى من منحتني الحنان، الحب و القوة بدعواتها

"أمي العزيزة و الغالية " .

إلى الذي علمني حروف الحياة ومهد كل شيء جميل ومواجهة الصعوبات إلى رمز التفاؤل و القناعة

"أبي الحبيب " .

إلى من حبهم يجري في عروقي و يلهج بذكرهم فؤادي: إخوتي و أخواتي. إلى مصدر البسمة و الفرح في عائلتنا، إلى من اكتملت به شجرة العائلة " محمد أمين " حفظه الله و رعاه. إلى كل من يحمل لقب " دوايدي " و " وارث".

إلى رفيقة هذا العمل البسيط و صديقة عمري " هيبي صفاء " .

إلى أحسن من عرفني بهم القدر: الأصدقاء الأوفياء والزملاء الأعزاء الذين جمعتني بهم الحياة و أخص بالذكر : " دهلوز منال "، " براهمي بلقيس "، " بلقاسمي لبنى "، " قدوري صفية "، " بكار انتصار "، قواسمية هديل " .

إلى من دعمني و قدم لي يد العون و المساعدة " باهي الزعيم ".

إلى كل من تسعهم ذاكرتي ولم تسعهم مذكرتي.

إلى كل من تصفح هذه المذكرة وانتفع بها وتذكرنا بدعائه.

إلى كل هؤلاء أهدي ثمرة جهدي.

** دوايدي أميرة **

الملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة وجود وتعدد الحلول الموجبة لفئة من الأنظمة البيضاوية ذات النقاط الحرجة التي تتضمن مؤثر $p(x)$-لابلاس في وجود شروط حدية غير خطية باستخدام طريقة الألياف للبحث عن الحلول في شكل نقاط حرجة لدالة الطاقة المرفقة للجملة المدروسة في منوعات نيهاري.

الكلمات المفتاحية :

تقنية الألياف، منوعات نيهاري، النقاط الحرجة، مؤثر $p(x)-$ لابلاس.

Abstract

The purpose of this work is to study the existence and multiplicity of positive solutions for a class of singular elliptic systems involving the $p(x)$-Laplace operator and nonlinear boundary conditions, Using the fibering method to find solutions in the form of critical points to the associated energy functional of the studied system in the Nehari manfiold.

Keywords :

The Fibering Method, Nehari's Manfiold, Critical Points, The $p(x)$-Laplace operator.

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier l'existence et la mulitiplicité du solutions positives pour une classe de systèmes elliptiques intervenant l'operateur $p(x)$-Laplace en présence du conditions aux limites nonlinéaire de Newman , En utilisant la méthode de fibrage pour trouver des solutions sous forme des points critiques pour la fonctionnelle énergétique associe au système étudié dans la variété de Nehari.

Mots Clés :

Méthode de Fibrage, Variété de Nehari, Points Critique, The $p(x)$-Laplace operator.

الفهـــــــرس

ترميـزات IX

المقدمـــــة 1

1 الفضـاءات الداليـة 4

1 فضـاءات لوبيغ و صوبوليـف 5

1- 1 فضـاءات لوبيغ $L^p(\Omega)$ 5

1- 2 فضـاءات صوبوليـف $W^{m,p}(\Omega)$ 6

1- 3 تطبيقـات الاحتواء للفضـاءات $L^p(\Omega)$ و $W^{m,p}(\Omega)$ 7

2 فضـاءات لوبيغ و صوبوليـف بقـوى متغيـرة 9

2- 1 فضـاءات لوبيغ $L^{p(x)}(\Omega)$ 9

2- 2 فضـاءات صوبوليـف $W^{m,p(x)}(\Omega)$ 11

2- 3 تطبيقـات الاحتواء للفضـاءات $L^{p(x)}(\Omega)$ و $W^{m,p(x)}(\Omega)$ 12

2 منوعـات نيهـاري و طريقة الأليـاف 14

1 نظريـة النقـاط الحرجة 15

1- 1 المتتـالية المُصَغِّرَة 15

1- 2 مشتقـات بمعنى غاتو 16

1- 3 نظرية مركبة لاغرانج 17

2 منوعات نيهـاري 18

3 تقنية الاليـاف 18

3 دراسة نظـام بيضوي حرج يتضمـن مؤثر $p(x)$-لابلاس تحت شروط حدية غير خطية 22

1 مبـادئ أوليـة 24

2 تحليل خرائط الأليـاف 27

3 وجود الحلول في $\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$ 35

4 وجود الحلول في $\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$ 38

الخاتمـــة 42

قائمة المصطلحـات العلميـة 43

المراجع العلميــة 44

ترميزات

الرمـــز	مدلـــولــــــه
Ω	مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$.
$C(\Omega)$	مجموعة الدوال المستمرة على Ω.
J_λ	دالة الطاقة.
$\rightharpoonup$	التقارب الضعيف .
$\rightarrow$	التقارب القوي .
$L^p(\Omega)$	$L^p(\Omega) = \left\{f : \Omega \to \mathbb{R} \;/\; f \; measurable \; and \; \|f\|^p \in L^1(\Omega)\right\}.$
$\Vert f\Vert_{L^p(\Omega)}$	$\Vert f\Vert_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega \|f(x)\|^p dx\right]^{1/p}$
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R} \;/\; f \; measurable \; and \; \exists c > 0 \;/\; \|f(x)\| \leq c \;\; a.e \; in \; \Omega\}$
$L^{p(x)}(\Omega)$	$L^{p(x)}(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}^N \;/\; f \; measurable \; and \; \int_\Omega \|u(x)\|^{p(x)} dx < \infty\right\}$
$\Vert u\Vert_{p(x)}$	$u^{p(x)}(\Omega)$ $\Vert u\Vert_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\}$ نظيم لوكسمبورغ.
$W^{1,p(x)}(\Omega)$	$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(x)}(\Omega), \|\nabla u\| \in L^{p(x)}(\Omega)\right\}$
p'	$p' = \begin{cases} \frac{p}{p-1}, & p > 1 \\ \infty, & p = 1 \end{cases}$
$p'(x)$	$p'(x) = \begin{cases} \frac{p(x)}{p(x)-1}, & p(x) > 1 \\ \infty, & p(x) = 1 \end{cases}$
$p^*(x)$	$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$

ترميزات

الرمـــــز	مدلـــولــــــه
p^-	$p^- = \inf ess p$
p^+	$p^+ = \sup ess p$
$\rho(u)$	$\rho(u) = \int_\Omega \lvert u\rvert^{p(x)} dx$
$\mathcal{N}^+$، $\mathcal{N}^-$ و $\mathcal{N}^0$	منوعات نيهاري
$\Delta_{p(x)}u$	$\Delta_{p(x)}u := \operatorname{div}\left(\lvert\nabla u\rvert^{p(x)-2}\nabla u\right)$ مؤثر $p(x)$-لابلاس .

المقدمـــــة

شهدت دراسة المعادلات التفاضلية العادية و التفاضلية الجزئية تطورا ملحوظا خصوصا تلك التي تتضمن مؤثرات بقوى متغيرة و هي موضوع جديد، تم الاهتمام بدراسة مثل هذه الإشكاليات من خلال تطبيقاتها في الميكانيكا المرنة، ديناميكيات السوائل، السوائل الكهربائية، معالجة الصور، التدفق في الوسائط المسامية، حساب التفاضل، نظرية المرونة اللاخطية و نماذج الوسائط المسامية الغير متجانسة، إلخ... ، هذه المشاكل تم تبسيطها من خلال تطوير فضاءات لوبيغ وصوبوليف مع قوى متغيرة. و التي ظهرت لأول مرة من طرف اورليدز (W.orlicz.) في عام 1931م.

و لأهمية هذا الموضوع في الرياضيات و ارتباطها بالعلوم الأخرى، نقوم في هذا العمل بدراسة موجزة تحت عنوان:
" تعدد الحلول لنظام بيضوي يتضمن مؤثر $p(x)$-لابلاس تحت شروط حدية غير خطية. "

نقدم شرحا مقتبضا للطريقة المستخدمة لدراسة تعدد الحلول التي تم طرحها من طرف بوهوزايف و دراباك [6]، وهي تقنية الألياف باستخدام منوعات نيهاري إذ ترتكز الطريقة على دراسة النقاط الحرجة لدالة الطاقة المرفقة للنظام المدروس، بوضع مجموعة نقاطها الحرجة $\mathcal{N}$ كشرط مقيد، ثم ننشيء دالة أخرى لمتغير حقيقي t لها علاقة بدالة الطاقة والتي لديها نقاط حرجة على نفس مجموعة القيد $\mathcal{N}$ و ندرس وجود نقاطها الحرجة و التي تصنيفها كحد أدنى، حد أعلى أو نقطة إنعطاف يعتمد على إشارة مشتقها الثاني لما $t = 1$ ، نقسم مجموعة القيد $\mathcal{N}$ إلى ثلاث مجموعات (منوعات نيهاري) $\mathcal{N}^+$، $\mathcal{N}^-$ و $\mathcal{N}^0$ وفقا للتصنيف السابق، و نثبت أن لدالة الطاقة نقطتين حرجتين الأولى في $\mathcal{N}^+$ و الثانية في $\mathcal{N}^-$ تمثلان حلا للنظام المدروس.

تطرقنا في البداية إلى مفاهيم عامة حول فضاءات لوبيغ و صوبوليف بقوى متغيرة والتي هي إحدى الوسائل الهامة في دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية، فتناولنا تعاريفها و ألممنا بإيجاز بخواصها.

و في الفصل الثاني قدمنا بعض النظريات و التوطئات المهمة كنظرية النقاط الحرجة، مشتقات بمعنى غاتو، مركبات لاغرانج و المتتـالية المُصَـغّـرَة...، و قدمنا أيضا مثال بسيط عن تطبيق تقنية الألياف باستخدام منوعات نيهاري.

وأخيرا خصصنا الفصل الثالث لدراسة تعدد الحلول الموجبة لنظام بيضوي يتضمن مؤثر $p(x)$- لابلاس

المقدمـــــة

تحت شروط حدية غير خطية من الشكل:

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u+|u|^{p(x)-2}u(x)=\lambda a(x)|u|^{-\alpha(x)} \quad , \quad \Omega, \\ -\Delta_{p(x)}v+|v|^{p(x)-2}v(x)=\mu b(x)|v|^{-\alpha(x)} \quad , \quad \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=c(x)\dfrac{q(x)}{q(x)+r(x)}u^{q(x)-2}u|v|^{r(x)} \quad , \quad \partial\Omega, \\ |\nabla v|^{p(x)-2}\dfrac{\partial v}{\partial \nu}=c(x)\dfrac{r(x)}{q(x)+r(x)}u^{q(x)}|v|^{r(x)-2}v \quad , \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.0.0}$$

هنا $\Omega\subset\mathbb{R}^N\,(N\geq 2)$ هو نطاق محدود بحواف من C^2، μ و λ عاملين حقيقيين؛ و $c\in C\left(\overline{\Omega}\right)$، b، a هي دوال وزن موجبة بحامل متراص في Ω.

من أجل كل دالة مستمرة و محدودة a نعرف:

$$a^+:=ess\sup a(x) \text{ و } a^-:=ess\inf a(x)$$

نفرض ما يلي على: r، q، p و α حيث:

(أ) $\alpha\left(x\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ تحقق $0<\alpha^-\leq\alpha\left(x\right)\leq\alpha^+<1$

(ب) $p\left(x\right),q\left(x\right),r\left(x\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ حيث $0<1-\alpha\left(x\right)<p\left(x\right)<q\left(x\right)+r\left(x\right)<p^*\left(x\right)$ و

$$\begin{cases} p^*\left(x\right)=\dfrac{Np\left(x\right)}{N-p\left(x\right)}, & p\left(x\right)<N \\ p^*\left(x\right)=\infty, & p\left(x\right)\geq N \end{cases}$$

و $p^-\leq p^+<q^-+r^-\leq q^++r^+$

(ج) $a\left(x\right),b\left(x\right),c\left(x\right)\geq 0, a\left(x\right)\in L^{r_1(x)}, b\left(\mathrm{x}\right)\in L^{r_2(x)}, c\left(x\right)\in L^{r_3(x)}, r_i\in C\left(\overline{\Omega}\right)\left(i=1,2,3\right)$

المقدمـــــة

حيث:

$$\frac{1}{r_1(x)}+\frac{1}{\frac{p^*(x)}{(1-\alpha(x))}}=1,$$

$$\frac{1}{r_2(x)}+\frac{1}{\frac{p^*(x)}{(1-\alpha(x))}}=1,$$

$$\frac{1}{r_3(x)}+\frac{1}{\frac{p^*(x)}{q(x)}}+\frac{1}{\frac{p^*(x)}{r(x)}}=1.$$

يمكننا أن نلفت الانتباه بإيجاز إلى أعمال أخرى خاصة بالمعادلات غير الخطية التي تتضمن مؤثر $p(x)-$لابلاس.
استخدمت العديد من التقنيات لدراسة وجود و تعدد حلول المعادلات البيضاوية مع القوى المتغيرة ذكرا لا حصرا انظر [2, 10, 11, 21, 23, 31, 30, 29, 33].
في حالة القوى المتغيرة هذه التقنية تكون أكثر صعوبة منها في حالة المسائل بقوى ثابتة و هذا عائد إلى عدم تجانس المؤثر ذو القوى غير الثابتة، و رغم ذلك في السنوات الأخيرة استخدم العديد من المؤلفين منوعات نيهاري و تقنية الألياف لحل المسائل الشبه خطية مع القوى المتغيرة، انظر [22, 26, 34]. تمت دراسة المسألة أيضا مع مؤثرات بيضاوية مختلفة و نوجه انتباه القارئ الى الدراسة بواسطة [15] و بواسطة [4] ، كما أن العديد من المؤلفين اعتنوا بدراسة المشكل السابق من أجل مؤثرات: $p-$لابلاس و $p-$لابلاس الكسرية باستخدام نفس التقنية في [4].
أو باستخدام مزيج من هذه الطرق (انظر [3, 13, 14, 16, 28, 32])، مع العلم أنه لا توجد نتائج كثيرة خاصة بأنظمة $p(x)-$لابلاس مع اللاخطية المقعرة أو المحدبة [25, 27].

1 الفضاءات الدالية

محتويات الفصل

1 فضاءات لوبيغ و صوبوليف 5

1- 1 فضاءات لوبيغ $L^{p}\left(\Omega\right)$ 5

1- 2 فضاءات صوبوليف $W^{m,p}\left(\Omega\right)$ 6

1- 3 تطبيقات الاحتواء للفضاءات $L^{p}\left(\Omega\right)$ و $W^{m,p}\left(\Omega\right)$ 7

2 فضاءات لوبيغ و صوبوليف بقوى متغيرة 9

2- 1 فضاءات لوبيغ $L^{p(x)}\left(\Omega\right)$ 9

2- 2 فضاءات صوبوليف $W^{m,p(x)}\left(\Omega\right)$ 11

2- 3 تطبيقات الاحتواء للفضاءات $L^{p(x)}\left(\Omega\right)$ و $W^{m,p(x)}\left(\Omega\right)$ 12

تمهيد

فضاءات صوبوليف و لوبيغ هي الفضاءات الدالية التي ندرس فيها وجود حلول المعادلات التفاضلية الجزئية، لذلك من الضروري تقديم عرض موجز لها، لذا في هذا الفصل قمنا بالتطرق لبعض المفاهيم الأساسية والتي انتقيناها بشكل مختصر لتساعدنا في معالجة الفصول الموالية.

1 فضاءات لوبيغ و صوبوليف

في كل ما سيأتي يرمز ب Ω إلى مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$، بحدود منتظمة.

1-1 فضاءات لوبيغ $L^p(\Omega)$

تعريف 1.1.1 [17]
ليكن $p \in \mathbb{R}$ مع $1 \leq p < \infty$ نضع:

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ f \ measurable \ and \ |f|^p \in L^1(\Omega) \right\}.$$

هو فضاء بناخ على $\mathbb{R}^N$، مزود بالنظيم:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

- من أجل $p = 2$ ، $L^2(\Omega)$ هو فضاء هلبرتي مزود بجداء سلمي:

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x) g(x) dx.$$

- من أجل $p = \infty$ نعرف:

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R} \ / \ f \ measurable \ and \ \exists c > 0 \ / \ |f(x)| \leq c \ \ a.e \ in \ \Omega \}.$$

مزود بالنظيم

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ c > 0 \ / \ |f(x)| \leq c \ \ a.e \ in \ \Omega \}.$$

قضية 1.1.1

- ليكن $1 < p < \infty$، الفضاء L^p إنعكاسي، قابل للفصل و فضاءه الثنوي L^q حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
- إذا كان $p = 1$، فإن الفضاء L^1 غير إنعكاسي، قابل للفصل و فضاءه الثنوي L^∞.
- إذا كان $p = \infty$، فإن الفضاء L^∞ غير إنعكاسي، غير قابل للفصل و فضاءه الثنوي يحوي L^1 فعليا.

1 -2 فضاءات صوبوليف $W^{m,p}(\Omega)$

ليكن m عددا طبيعيا و p عددا حقيقيا مع $1 \leq p \leq \infty$

تعريف 1.1.2 [17]
نعرف فضاء صوبوليف $W^{m,p}$ بـ

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega),\ \forall |\alpha| \leq m\},$$

مع

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^N,$$

و

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\ ,\ D^{\alpha} = \frac{d^{|\alpha|}}{d_{x_1}^{\alpha_1} ... d_{x_N}^{\alpha_N}}$$

هي مشتقات بمفهوم التوزيعات أي

$$\langle D^{\alpha}u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^{\alpha}\varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

الفضاء $W^{m,p}(\Omega)$، $p \in [1, +\infty[$ مزود بالنظيم مع

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

- من أجل $p = \infty$ لدينا

$$\|u\|_{\infty} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{\infty}.$$

- من أجل $p = 2$ نضع $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ بحيث $H^m(\Omega)$ مزود بالجداء السلمي

$$\langle u, v \rangle_{H^m(\Omega)} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq m}^{N} \langle D^{\alpha}u, D^{\alpha}v \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

حيث

$$\langle u, u \rangle_{H^m(\Omega)} = \|u\|_{H^m(\Omega)}^2\ ,\ u \in H^m(\Omega).$$

قضية 1.1.2
- $W^{m,p}(\Omega)$ هو فضاء بناخ لكل $1 \leq p \leq +\infty$.
- $W^{m,p}(\Omega)$ هو فضاء إنعكاسي لكل $1 < p < +\infty$.
- $W^{m,p}(\Omega)$ هو فضاء محدب بانتظام لكل $1 < p < +\infty$.
- $W^{m,p}(\Omega)$ هو فضاء هلبرت من أجل $p = 2$.

تعريف 3.1.1 [17]
من أجل $m=1$ الفضاء $W^{1,p}(\Omega)$ فضاء صوبوليف معرف ب

$$W^{1,p}(\Omega)=\left\{u\in L^{p}(\Omega);\ \ \nabla u\in\left(L^{p}(\Omega)\right)^{N}\right\}.$$

من أجل كل $1\leq p<+\infty$ مزود بالنظيم

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}=\left(\|u\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}+\|\nabla u\|_{L^{p}(\Omega)}^{p}\right)^{1/p}.$$

إذن $W^{m,p}(\Omega)$ هو فضاء بناخ لكل $1\leq p\leq+\infty$،
إذا كان $p=\infty$ نزود الفضاء $W^{1,\infty}(\Omega)$ بالنظيم

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)}=\max\left(\|u\|_{\infty},\|\nabla u\|_{\infty}\right).$$

1 -3 تطبيقـات الاحتـواء للفضـاءات $L^{p}(\Omega)$ و $W^{m,p}(\Omega)$

الاحتواء المستمر

نظريـة 1.1.1
لتكن Ω مجموعة مفتوحة من $\mathbb{R}^N$ نفترض أن Ω بحدود ليبتشيتزية أو $\Omega=\mathbb{R}^N$

1. إذا كان $1\leq p<N$ فإن:

$$W^{1,p}(\Omega)\subset L^{P^{*}}(\Omega)$$

مع

$$p^{*}=\frac{pN}{N-p}$$

و الاحتواء هنا مستمر أي أنه يوجد $C\in\mathbb{R}_{+}$ بحيث:

$$\|u\|_{L^{P^{*}}(\Omega)}\leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)},\ \forall u\in W^{1,p}(\Omega).$$

و نكتب:

$$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{\infty}(\Omega)$$

2. إذا كان $p=N$ فإن:

$$W^{1,p}(\Omega)\hookrightarrow L^{q}(\Omega),\ \forall q\in[p,+\infty[.$$

3. إذا كان $p>N$ فإن:

$$W^{1,p}(\Omega)\subset L^{\infty}(\Omega).$$

الاحتواء المتراص

نظرية 2.1.1

1. إذا كان $1 \leq p < N$ فإن:

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, p^*[$$

مع

$$p^* = \frac{pN}{N-p}.$$

2. إذا كان $p = N$ فإن:

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \ \forall q \in [1, +\infty[.$$

3. إذا كان $p > N$ فإن:

$$W^{1,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right).$$

2 فضـاءات لوبيغ و صوبوليـف بقوى متغيرة

2 -1 فضـاءات لوبيغ $L^{p(x)}(\Omega)$

تعريف 1.2.1
نعرف فضاء لوبيغ $L^{p(x)}(\Omega)$ ب:

$$L^{p(x)}(\Omega)=\left\{u:\Omega\to\mathbb{R}^N \ / \ u \ measurable \ and \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}dx<\infty\right\}.$$

و $p^-\geq 1$ نلاحظ أن $L_+^\infty(\Omega)$ هي مجموعة فرعية من $L^\infty(\Omega)$ حيث:

$$L_+^\infty(\Omega)=\{p\in L^\infty(\Omega): \inf essp\geq 1\}.$$

ليكن:

$$p^-=\inf essp \quad \text{و} \quad p^+=\sup essp$$

قضية 1.2.1 [12]
نضع

$$\rho(u)=\int_\Omega |u|^{p(x)}dx.$$

من أجل كل $u,v\in L^{p(x)}(\Omega)$ لدينا:

(a) $\rho(u)=0\Leftrightarrow u=0$

(b) $\rho(-u)=\rho(u)$

(c) $\rho(tu+(1-t)v)\leq t\rho(u)+(1-t)\rho(v)$ من أجل كل $t\in[0,1]$ بعبارة أخرى نقول عن ρ أنها دالة محدبة.

(d) $\rho(u+v)\leq 2^{p^+}(\rho(u)+\rho(v))$

(e) إذا كان $\lambda>1$ فإن:

$$\rho(u)\leq\lambda\rho(u)\leq\lambda^{p^-}\rho(u)\leq\rho(\lambda u)\leq\lambda^{p^+}\rho(u).$$

و إذا كان $0<\lambda<1$ فإن:

$$\lambda^{p^+}\rho(u)\leq\rho(\lambda u)\leq\lambda^{p^-}\rho(u)\leq\lambda\rho(u)\leq\rho(u).$$

(f) من أجل كل $u\in L^{p(x)}(\Omega)\setminus\{0\}$ و $\lambda\in[0,+\infty)$ فإن $\rho(\lambda u)$ هي دالة متزايدة، مستمرة و محدبة.

قضية 2.2.1
الفضاء $L^{p(x)}(\Omega)$ فضاء شعاعي.

قضية 3.2.1

$$\|u\|_{p(x)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \rho\left(\frac{u}{\lambda}\right) \leq 1\right\} \quad u^{p(x)}(\Omega).$$

العبارة $\|.\|_{p(x)}$ هي نظيم في الفضاء $L^{p(x)}(\Omega)$ تسمى نظيم لوكسمبورغ .

قضية 4.2.1
من الخصائص $(a)-(f)$ والقضية $(1.2.3)$، الفضاء $L^{p(x)}(\Omega)$ فضاء بناخ.

قضية 5.2.1
إذا كانت الدالة $p(x) = p \in [0, +\infty]$ فإن $\|.\|_p$ هو النظيم الإعتيادي للفضاء $L^p(\Omega)$ كما هو واضح من أجل $u = 0$.

قضية 6.2.1 [12]
إذا كان $u \in L^{p(x)}(\Omega) \setminus \{0\}$ فإن: $\|u\|_{p(x)} = 0 \Leftrightarrow \rho\left(\frac{u}{a}\right) = 1$.

قضية 7.2.1
إذا كانت $p^+ < +\infty$ و $u_n, u \in L^{p(x)}(\Omega)$ فإن العلاقات التالية محققة:

1. $\rho(u) < 1 \Leftrightarrow \|u\|_{L^{p(x)}} < 1 (= 1; > 1)$
2. إذا كان $\|u\|_{L^{p(x)}} > 1$ فإن $\|u\|_{L^{p(x)}}^{p^-} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{L^{p(x)}}^{p^+}$
3. إذا كان $\|u\|_{L^{p(x)}} < 1$ فإن $\|u\|_{L^{p(x)}}^{p^+} \leq \rho(u) \leq \|u\|_{L^{p(x)}}^{p^-}$
4. $\|u_n\|_{L^{p(x)}} \to 0 (\to +\infty) \Leftrightarrow \rho(u_n) \to 0 (\to +\infty)$
5. $\rho(u/\|u_n\|_{L^{p(x)}}) = 1$

قضية 8.2.1 [12]
لتكن المتتالية $(u_n) \subset L^{p(x)}(\Omega)$ و لتكن $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ فإن العبارات التالية مكافئة:

1. $\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{L^{p(x)}} = 0$
2. $\lim_{n\to\infty} \rho(u_n - u) = 0$

قضية 9.2.1
الفضاء الثنوي ل $L^{p(x)}(\mathbb{R}^N)$ هو $L^{p'(x)}(\mathbb{R}^N)$ مع

$$\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p'(x)}=1.$$

أيضا لكل $(u,v)\in L^{p(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)\times L^{p'(x)}\left(\mathbb{R}^N\right)$
لدينا:

$$\left|\int_{\Omega}uvdx\right|\leq\left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{(p')^-}\right)\|u\|_{L^{p(x)}}\|v\|_{L^{p'(x)}}\leq 2\|u\|_{L^{p(x)}}\|v\|_{L^{p'(x)}}.$$

2 -2 فضاءات صوبوليف $W^{m,p(x)}(\Omega)$

تعريف 2.2.1 [12]
من أجل كل $p\in L_+^{\infty}(\Omega)$ و $m\in\mathbb{N}^*$ نعرف الفضاء $W^{m,p(x)}(\Omega)$ ب:

$$W^{m,p(x)}(\Omega)=\left\{u\in L^{p(x)}(\Omega):D^{\alpha}u\in L^{p(x)}(\Omega),|\alpha|\leq m\right\}.$$

حيث أن $W^{m,p(x)}(\Omega)$ هي فئة خاصة من فضاءات صوبوليف المعممة.

- إذا كانت $p(x)=2$ لدينا:

$$H^m(\Omega)=W^{m,2}(\Omega).$$

- إذا كانت $m=0$ لدينا:

$$W^{0,p(x)}(\Omega)=L^{p(x)}(\Omega).$$

- إذا كانت $m=1$ لدينا:

$$W^{1,p(x)}(\Omega)=\left\{u\in L^{p(x)}(\Omega),|\nabla u|\in L^{p(x)}(\Omega)\right\}.$$

مزود بالنظيم:

$$\|u\|=\|u\|_{L^{p(x)}}+\|\nabla u\|_{L^{p(x)}}.$$

خصائص $W^{1,p(x)}(\Omega)$

نظرية 1.2.1
الفضاء $W^{1,p(x)}(\Omega)$ هو فضاء بناخ.
الفضاء $W^{1,p(x)}(\Omega)$ هو فضاء إنعكاسي، قابل للفصل لكل $p^- > 1$.

تعريف 3.2.1
الفضاء $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ هو غلاقة $C_0^\infty(\Omega)$ في $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

نظرية 2.2.1
الفضاء $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ فضاء بناخ، إنعكاسي و قابل للفصل.

2 -3 تطبيقات الاحتواء للفضاءات $L^{p(x)}(\Omega)$ و $W^{m,p(x)}(\Omega)$

نظرية 3.2.1
لتكن $p,q,r \in L_+^\infty(\Omega)$ ، $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ و $v \in L^{q(x)}(\Omega)$ بحيث:

$$\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{q(x)} = \frac{1}{r(x)} \quad a.e \ in \ \Omega.$$

إذن

$$\|uv\|_{L^{r(x)}(\Omega)} \leq \left(\frac{1}{\left(\frac{p}{r}\right)^-} + \frac{1}{\left(\frac{q}{r}\right)^-}\right) \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{q(x)}(\Omega)}.$$

ملاحظة 1.2.1

يكن $p \in L_+^\infty(\Omega)$ و $p : \Omega \to [1,+\infty[$ مرافق p بحيث:

$$p'(x) = \begin{cases} \dfrac{p(x)}{p(x)-1}, & p(x) > 1 \\ \\ \infty, & p(x) = 1 \end{cases}$$

من أجل كل $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ و $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$، فإنه يوجد ثابت C_p بحيث:

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|\, dx \leq C_p \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \|v\|_{L^{p'(x)}(\Omega)}.$$

من أجل نتائج الاحتواء نوجه القارئ إلى [19] و [10].

قضية 10.2.1

لتكن Ω مفتوحا محدودا من $\mathbb{R}^N$ و $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$ ، إذا كان $p(x) \leq q(x)$ حيثما كان تقريبا في Ω فإن:

$$L^{q(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(x)}(\Omega).$$

(أي $L^{q(x)}(\Omega)$ محتوى باستمرار في $L^{p(x)}(\Omega)$).

قضية 11.2.1

لتكن $m \in \mathbb{N}^*$ و $p, q \in L+^\infty(\Omega)$ إذا كان $p(x) \leq q(x)$ حيثما كان تقريبا في Ω فإن:

$$W^{m,q(x)}(\Omega) \hookrightarrow W^{m,p(x)}(\Omega).$$

مستمرة.

تم الحصول على استمرارية احتواء الفضاءات $W^{m,q(x)}$ إلى $L^{p^*(x)}(\Omega)$ بواسطة [12 ,19] حيث:

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N - p(x)}, & p(x) < N \\ \infty, & p(x) \geq N \end{cases}$$

نظريـة 4.2.1

لتكن $p, q \in C(\overline{\Omega})$ و $p, q \in L_+^\infty(\Omega)$ ، نفترض أن:

$$mp(x) < N \quad \text{و} \quad 1 < q(x) < p^*(x), x \in \overline{\Omega}$$

إذا يوجد احتواء متراص:

$$W^{m,p(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{q(x)}(\Omega).$$

2

منوعات نيهاري و طريقة الأليـاف

محتويـات الفصل

1 نظرية النقاط الحرجة 15

1 -1 المتتـالية المُصَغّرة 15

1 -2 مشتقـات بمعنى غاتو 16

1 -3 نظرية مركبة لاغرانج 17

2 منوعات نيهـاري 18

3 تقنية الاليـاف 18

تمهيد

دراسة تقنية الألياف و منوعات نيهاري تحتاج منا إلى الإلمام بالعديد من المفاهيم المتعلقة بهما، و فيما يلي نتطرق إليها.

1 نظرية النقاط الحرجة

ليكن X فضاء بناخ إنعاكسي، $J_\lambda \in C^1(X,\mathbb{R})$.

تعريف 1.1.2
النقطة $u \in X$ حرجة إذا كانت $J'_\lambda u = 0$، غير ذلك u منتظمة، إذا كانت $J_\lambda u = c$ من أجل بعض النقاط الحرجة ل: J_λ، فإن القيمة c حرجة، غير ذلك فإن c منتظمة.

1 -1 المتتالية المُصَغِّرَة

تعريف 2.1.2 [20]
لتكن J معرفة على X، ذات قيمة في $\mathbb{R}$، نقول أنها شبه مستمرة من الأسفل في X إذا كان، من أجل كل متتالية $\{x_n\}$ حيث x_n تتقارب نحو x، لدينا:

$$J(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} J(x_n).$$

نقول أن J شبه مستمرة من الأسفل على X إذا كانت شبه مستمرة من الأسفل عند كل نقطة من X.

قضية 1.1.2 [20]
ليكن X فضاء بناخ إنعكاسي، $K \subset X$ محدب و مغلق و $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة متتابعة بشكل ضعيف، بالإضافة إلى ذلك إذا كانت K غير محدودة، نفرض أنه من أجل كل متتالية $(x_n)_n$ من K حيث $\|x_n\| \to \infty$، لدينا $J(x_n) \to +\infty$. إذن J محدودة من الأسفل و تملك حد أدنى أي:

$$\exists u \in K, \quad J(u) = \inf_{v\in K} J(v) = \min_{v\in K} J(v).$$

تعريف 3.1.2 [20]
المتتالية المُصَغِّرَة ل: J من X هي متتالية العناصر $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ من X من حيث:

$$\varliminf_{n\to\infty} J(u_n) = \inf_{x\in X} J(u).$$

1 -2 مشتقات بمعنى غاتو

ليكن X فضاء بناخ و ω فضاء غير خال من X.

نعرف X' الثنوي الطوبولوجي ل X أي فضاء الأشكال الخطية المستمرة على X، نرمز ب $\langle .,. \rangle$ لجداء الثنوية X' و X.

تعريف 4.1.2 ليكن ω جزء من فضاء بناخ X و $J : \omega \to \mathbb{R}$. نقول أن F قابلة للاشتقاق بمعنى غاتو في $u \in \omega$، إذا وجد $l \in X'$ حيث في كل إتجاه $z \in X$ و $J\left(u+tz\right)$ موجودة من أجل $t > 0$،(صغيرة بما يكفي)، و لدينا:

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J\left(u+tz\right)-J\left(u\right)}{t} = \langle l, z \rangle .$$

نضع $J'\left(u\right) = l$، حيث: $J'\left(u\right)$ المشتق الموجه.

مثال

لتكن $n \geq 3$ $\Omega \subset \mathbb{R}^N,$ مفتوح، من أجل $p \in (1, +\infty)$ نعرف الدالة

$$\begin{aligned} &J : W_0^{1,p}\left(\Omega\right) \to \mathbb{R} \\ &J\left(u\right) = \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^p dx; \end{aligned}$$

إذن J قابلة للإشتقاق في $W_0^{1,p}\left(\Omega\right)$ و

$$J'\left(u\right)\left(v\right) = p \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx, \ \forall v \in W_0^{1,p}\left(\Omega\right).$$

نعتبر الدالة $\varphi : \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$، معرفة ب: $\varphi\left(x\right) = \left|x\right|^p$، من الصنف C^1 و $\nabla_{\varphi} = p\left|x\right|^{p-2} x.$. في الواقع

$$\lim_{t \to 0} \frac{\varphi\left(x+ty\right)-\varphi\left(x\right)}{t} = p\left|x\right|^{p-2} x.y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

و نتيجة لذلك

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left|\nabla u\left(x\right)+t\nabla v\left(x\right)\right|^p - \left|\nabla u\left(x\right)\right|^p}{t} = p\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2} \nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right),$$

حسب نظرية التزايدات المنتهية، تقريبا من أجل كل $x \in \Omega$ و من أجل $t > 0$، توجد دالة θ ذات قيمة في $]0, 1[$ حيث يمكننا أن نكتب:

$$\begin{aligned} &\left|\nabla u\left(x\right)+t\nabla v\left(x\right)\right|^p - \left|\nabla u\left(x\right)\right|^p - tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2} \nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right) \\ &= tp\left|\nabla u\left(x\right)+\theta\left(t,x\right)t\nabla v\left(x\right)\right|^{p-2}\left(\nabla u\left(x\right)+\theta\left(t,x\right)t\nabla v\left(x\right)\right).\nabla v\left(x\right) \\ &-tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2} \nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right). \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

بالقسمة على t، نجد تقريبا من أجل كل x:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\left|\nabla\left(u+tv\right)\left(x\right)\right|^p - \left|\nabla u\left(x\right)\right|^p - tp\left|\nabla u\left(x\right)\right|^{p-2} \nabla u\left(x\right).\nabla v\left(x\right)}{t} = 0.$$

من جهة أخرى نستطيع أن نحد العنصر الثاني للمعادلة (1.1.2) المقسومة على t من الأعلى ب:

$$h\left(x\right)=2\left|\nabla v\left(x\right)\right|\left(\left|\nabla u\left(x\right)\right|+\left|\nabla v\left(x\right)\right|\right)^{p-1}.$$

باستخدام متراجحة هولدر فيما يأتي لدينا:

$$\left|h\right|\leq c\left\|\nabla v\right\|_{p}\left(\left\|\nabla u\right\|_{p}^{p-1}+\left\|\nabla v\right\|_{p}^{p-1}\right),$$

ومنه بتطبيق نظرية التقارب المهيمن نستنتج:

$$J'\left(u\right)\left(v\right)=p\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u.\nabla v dx,\ \forall v\in W_{0}^{1,p}\left(\Omega\right).$$

ومنه J قابلة للاشتقاق بمعنى غاتو.

1 -3 نظرية مركبة لاغرانج

ليكن X فضاء بناخ، $\Phi\in C^{1}\left(X,\mathbb{R}\right)$، و مجموعة قيد S حيث

$$S:=\left\{\mathrm{v}\in X;\ \Phi\left(v\right)=0\right\}.$$

تعريف 5.1.2 [20]
نفرض أنه من أجل كل $u\in S$، لدينا $\Phi'\left(u\right)\neq0$.

إذا كانت $J\in C^{1}\left(X,\mathbb{R}\right)$ نقول أن $c\in\mathbb{R}$ **قيمة حرجة** ل J على S إذا وجدت $u\in S$، و $\lambda\in\mathbb{R}$ حيث :

$$J\left(u\right)=c \text{ و } J'\left(u\right)=\lambda\Phi'\left(u\right)$$

النقطة u هي **نقطة حرجة** ل J على S و العدد الحقيقي λ يسمى **مركبة لاغرانج** من أجل القيمة الحرجة c (أو النقطة الحرجة u).

توطئة 1.1.2
ليكن $(X,\|.\|)$ فضاء بناخ، Ω مفتوح في X ، $J:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ دالة قابلة للتفاضل على Ω و $\Phi\in C^{1}\left(\Omega,\mathbb{R}^{n}\right)$ ذات المعاملات $\Phi_{1},...,\Phi_{n}$.

بالنظر إلى نقطة في $\mathbb{R}^{n}$، نحدد $K=\Phi^{-1}\left(a\right)$ والتي نفرضها غير خالية، إذا كانت في نقطة ما $u_{0}\in K$

$$J\left(u_{0}\right)=\inf_{x\in K}J\left(u\right),$$

و إذا كانت أيضا المشتقة $\Phi'\left(u_{0}\right)\in L\left(X,\mathbb{R}^{n}\right)$ غامرة إذن يوجد أعداد حقيقية $\lambda_{1},...,\lambda_{n}$ حيث :

$$J'\left(u_{0}\right)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}\Phi_{i}'\left(u_{0}\right).$$

2 منوعات نيهاري

قدم نيهاري طريقة متحولية مفيدة جدا للبحث عن النقاط الحرجة و التي أصبحت في النهاية تحمل إسمه. إذ قام بدراسة مشكلة القيمة الحدية لمعادلة تفاضلية عادية غير خطية من الدرجة الثانية على مجال $[a, b]$ و أثبت أن لها حلا غير تافه يمكن الحصول عليه عن طريق التصغير المقيد.

لشرح طريقة نيهاري في إطار مجرد، نضع X فضاء بناخ و $J \in C^1(X.\mathbb{R})$ دالة، نفرض $u \neq 0$ نقطة حرجة ل J أي، $J'(u) = 0$. ومنه u مقيدة في المجموعة:

$$\mathcal{N} = \left\{u \in E \backslash \{0\} : \left\langle J'(u), u\right\rangle = 0\right\}.$$

إذن $\mathcal{N}$ قيد طبيعي لمشكلة إيجاد نقطة حرجة غير تافهة ل J من خلال تصغير دالة الطاقة J على القيد $\mathcal{N}$ والتي تسمى مجموعة منوعات نيهاري

$$c := \inf_{u \in \mathcal{N}} J(u).$$

تحت شروط ملائمة على J نأمل أن تأخذ القيمة c على $u_0 \in \mathcal{N}$ و أن تكون u_0 نقطة حرجة.

3 تقنية الاليـاف

ليكن X و Y فضائي بناخ، وليكن A مؤثر غير خطي من X نحو Y، نعتبر المعادلة:

$$Au = h. \tag{2.3.2}$$

تعتمد طريقة الألياف على تقديم حلول للمعادلة (2.3.2) من الشكل:

$$u = tv \;/\; t \neq 0$$

و فيما يلي وصفا كاملا لطريقة تقنية الألياف، نبدأ بتعريف الدالة:

$$\phi(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

حيث:

$$\phi(t) = J(tu).$$

ثم نحسب ϕ' و ϕ'' المشتق الأول والثاني ل ϕ. بالنسبة ل t.

كما هو واضح عناصر $\mathcal{N}$ تتطابق مع النقاط الحرجة للتطبيق $\phi(t)$ تحديدا $u \in \mathcal{N}$ إذا و فقط إذا كان $\phi'(t) = 0$، حيث إذا كانت u حد أدنى محلي ل J فإن ϕ_u تملك حد أدنى محلي لما $t = 1$.

نقسم $\mathcal{N}$ إلى ثلاث أجزاء (منوعات نيهاري) $\mathcal{N}^+$، $\mathcal{N}^-$ و $\mathcal{N}^0$ المرفقة على التوالي، للحد الأدنى المحلي، الحد الأعلى المحلي، ونقاط الانعطاف ل ϕ المعرفة كما يأتي

$$\mathcal{N}^+ = \left\{u \in \mathcal{N} : \phi''(1) > 0\right\},$$

$$\mathcal{N}^- = \left\{u \in \mathcal{N} : \phi''(1) < 0\right\},$$

$$\mathcal{N}^0 = \left\{u \in \mathcal{N} : \phi''(1) = 0\right\},$$

طريقة التقسيم هذه تمكننا باستخدام طريقة الألياف من إيجاد حلول من أجل مسائل غير قسرية، حتى في غياب استمرارية المؤثر A أيضا.

مثال تطبيقي لطريقة الأليـاف

نقدم مثالا بسيطا لتطبيق تقنية الألياف .
نعتبر المسألة التالية:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda f(x, u(x)) & , \ \Omega, \\ \\ u(x) = 0 & , \ x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.3.2}$$

ليكن $E = W_0^{1,2}(\Omega)$ فضاء بناخ، $J : E \to \mathbb{R}$ دالة الطاقة التي تتطابق مع المسألة (3.3.2) معرفة كما يلي :

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega F(x, u(x))\, dx.$$

حيث $F(x, u(x)) = \int_\Omega f(x, s)\, dx$.
من الواضح أن الدالة J لا يمكن أن تكون محدودة على كل المجال ولكن يمكن أن تكون محدودة على أجزاء من E (تسمى منوعات نيهاري $\mathcal{N}$) المعرفة كما يلي

$$\mathcal{N} = \left\{u \in E\backslash\{0\} : \left\langle J'(u), u\right\rangle = 0\right\}.$$

توطئة 1.3.2
لتكن $u \in E\backslash\{0\}$ و $t > 0$ ، إذن $tu \in \mathcal{N}$ إذا وفقط إذا كانت $\phi_u'(t) = 0$ حيث

$$\phi_u(t) = J(tu)$$

برهان. كما عرفنا سابقا دالة الطاقة

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \int_\Omega F(x, u(x))\, dx.$$

و لدينا

$$\phi_u(t) = J(tu)$$

و منه:

$$\phi_u'(t) = \left\langle J'(tu), u\right\rangle = \frac{1}{t}\left\langle J'(tu), tu\right\rangle.$$

إذا كانت $\phi_u'(t) = 0$، إذن $\left\langle J'(tu), tu\right\rangle = 0$، أي: $tu \in \mathcal{N}$. □

بمعنى آخر، تتطابق نقاط المنوعة $\mathcal{N}$ مع النقاط الحرجة للتطبيق ϕ_u. كنتيجة منطقية، نقسم $\mathcal{N}$ إلى ثلاث مجموعات جزئية $\mathcal{N}^+$، $\mathcal{N}^-$ و $\mathcal{N}^0$ تتطابق مع الحدود الدنيا المحلية و الحدود العليا المحلية و نقاط الإنعطاف للتطبيق ϕ_u.
لهذا ننتقل إلى المشتق الثاني :

$$\phi_u'(t) = \left\langle J'(tu), u\right\rangle$$

$$= t\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda\int_\Omega f(x, tu)\, u dx.$$

حيث:

$$\phi''_u(t) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega \left(f'_u(x,tu)\, u\right) u dx$$

$$= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \lambda \int_\Omega f'_u(x,tu)\, u^2 dx.$$

و منه يمكننا تعريف المجموعات الجزئية المذكورة أعلاه كما يلي:

$$\mathcal{N}^+ = \left\{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u)\, u^2\right) dx > 0\right\},$$

$$\mathcal{N}^- = \left\{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u)\, u^2\right) dx < 0\right\},$$

$$\mathcal{N}^0 = \left\{u \in \mathcal{N} : \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u)\, u^2\right) dx = 0\right\}.$$

وهي $\phi''_u(1)$ التي تستخدم لهذه التعريفات، لأنه من الواضح أنه إذا كان uحد أدنى محلي ل J، و منه ϕ_u لديه حد أدنى محلي عند $t=1$.

توطئة 2.3.2 لتكن $u \in \mathcal{N}$ إذن

(1) $\phi'_u(1) = 0$

(2)

$$\begin{cases} u \in \mathcal{N}^+ \; if \; \phi''_u(1) > 0, \\ u \in \mathcal{N}^- \; if \; \phi''_u(1) < 0, \\ u \in \mathcal{N}^0 \; if \; \phi''_u(1) = 0. \end{cases}$$

برهان. لتكن $u \in \mathcal{N}$،هذا يكافئ:

$$\left\langle J'(u), u\right\rangle = 0,$$

اي: $\phi'_u(1) = 0$ و منه (1) محققة.

من أجل (2) لدينا ثلاث حالات:

حالة 1 : $u \in \mathcal{N}^+$، إذن:

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u)\, u^2\right) dx > 0$$

هذا ما يكافئ : $\phi''_u(1) > 0$.

حالة 2 : $u \in \mathcal{N}^-$، إذن:

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f'_u(x,u)\, u^2\right) dx < 0$$

هذا ما يكافئ : $\phi''_u(1) < 0$.

حالة 3 : $u \in \mathcal{N}^0$، إذن:

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f_u'(x,u)\, u^2 \right) dx = 0$$

هذا ما يكافئ : $\phi_u''(1) = 0$.

□

تؤكد التوطئة التالية أن الحدود الدنيا للدالة J هي بالفعل و نقاط حرجة ل J.

توطئة 3.3.2 نفرض u_0 حد أدنى محلي لJ على $\mathcal{N}$ و $u_0 \notin \mathcal{N}^0$، إذن

$$J'(u_0) = 0.$$

برهان. ليكن u_0 حد أدنى محلي ل J على $\mathcal{N}$ و $u_0 \notin \mathcal{N}^0$، أي $\phi_{u_0}'' \neq 0$. هذا يستلزم أن :

$$J(u_0) = \min_{\gamma(u)=0} J(u).$$

حيث: $\gamma(u) = \left\langle J'(u), u \right\rangle = \int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \lambda f(x,u)\, u \right) dx.$

و يترتب على ذلك، حسب نظرية مركبة لاغرانج أن:

$$\exists \mu \in \mathbb{R}, \quad J'(u_0) = \mu \gamma'(u_0). \tag{4.3.2}$$

و منه:

$$\left\langle J'(u_0), u_0 \right\rangle = \mu \left\langle \gamma'(u_0), u_0 \right\rangle.$$

و بما أن $u_0 \in \mathcal{N}$، لدينا:

$$\left\langle J'(u_0), u_0 \right\rangle = \mu \left\langle \gamma'(u_0), u_0 \right\rangle = 0.$$

و منه:

$$\begin{aligned}
\left\langle \gamma'(u_0), u_0 \right\rangle &= \int_\Omega \left(\left(2|\nabla u_0|^2 - \lambda f_u'(x,u_0) \left(u_0^2 \right) \right) dx - \lambda \int_\Omega f(x,u_0)\, u_0 dx \right) \\
&= \int_\Omega \left(|\nabla u_0|^2 - \lambda f_u'(x,u_0) \left(u_0^2 \right) \right) dx \\
&= \phi_{u_0}''(1) \\
&\neq 0.
\end{aligned}$$

لأن $u_0 \notin \mathcal{N}^0$، و منه $\mu = 0$، إذن :

$$J'(u_0) = 0.$$

□

3

دراسة نظام بيضوي حرج يتضمن مؤثر $p(x)$-لابلاس تحت شروط حدية غير خطية

محتويات الفصل

1	مبادئ أولية	24
2	تحليل خرائط الألياف	27
3	وجود الحلول في $\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$	35
4	وجود الحلول في $\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$	38

تمهيد

نهتم في هذا الفصل بتعدد الحلول الموجبة للنظام البيضوي ذو النقاط الحرجة التالي، المتضمن مؤثر$p(x)$-لابلاس في شروط حدية شبه خطية :

$$\begin{cases} -\Delta_{p(x)}u+|u|^{p(x)-2}u(x)=\lambda a(x)|u|^{-\alpha(x)} \ , \ \Omega, \\ -\Delta_{p(x)}v+|v|^{p(x)-2}v(x)=\mu b(x)|v|^{-\alpha(x)} \ , \ \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=c(x)\dfrac{q(x)}{q(x)+r(x)}u^{q(x)-2}u|v|^{r(x)} \ , \ \partial\Omega, \\ |\nabla v|^{p(x)-2}\dfrac{\partial v}{\partial \nu}=c(x)\dfrac{r(x)}{q(x)+r(x)}u^{q(x)}|v|^{r(x)-2}v \ , \ \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.0.3}$$

هنا $\Omega\subset\mathbb{R}^N\ (N\geq 2)$ هو نطاق محدود بحواف من C^2، μ و λ عاملين حقيقيين، و $c\in C\left(\overline{\Omega}\right)$، b، a هي دوال وزن موجبة بحامل متراص في Ω.

من أجل كل دالة مستمرة و محدودة a نعرف:

$$a^+:=ess\sup a(x) \text{ و } a^-:=ess\inf a(x)$$

نفرض ما يلي على: r، q، p و α حيث:

(أ) $\alpha\left(x\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ تحقق $0<\alpha^-\leq\alpha\left(x\right)\leq\alpha^+<1$.

(ب) $p\left(x\right),q\left(x\right),r\left(x\right)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$ حيث $0<1-\alpha\left(x\right)<p\left(x\right)<q\left(x\right)+r\left(x\right)<p^*\left(x\right)$ و

$$\begin{cases} p^*\left(x\right)=\dfrac{Np\left(x\right)}{N-p\left(x\right)}, & p\left(x\right)<N \\ p^*\left(x\right)=\infty, & p\left(x\right)\geq N \end{cases}$$

و $p^-\leq p^+<q^-+r^-\leq q^++r^+$.

(ج) $a\left(\mathbf{x}\right),b\left(x\right),c\left(x\right)\geq 0, a\left(x\right)\in L^{r_1(x)}, b\left(\mathbf{x}\right)\in L^{r_2(x)}, c\left(x\right)\in L^{r_3(x)}, r_i\in C\left(\overline{\Omega}\right)\left(i=1,2,3\right)$
حيث :

$$\frac{1}{r_1\left(x\right)}+\frac{1}{\frac{p^*(x)}{(1-\alpha(x))}}=1,$$

$$\frac{1}{r_2\left(x\right)}+\frac{1}{\frac{p^*(x)}{(1-\alpha(x))}}=1,$$

$$\frac{1}{r_3\left(x\right)}+\frac{1}{\frac{p^*(x)}{q(x)}}+\frac{1}{\frac{p^*(x)}{r(x)}}=1.$$

المؤثر $\Delta_{p(x)}u:=\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\right)$، حيث p هو دالة مستمرة غير ثابتة يسمى مؤثر $p(x)-$لابلاس، هذا المؤثر التفاضلي هو تعميم لمؤثر لابلاس $\Delta_p u:=\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$، حيث $p\geq 2$ ثابت حقيقي، و مع ذلك فإن مؤثر

$p(x)$−لابلاس يمتلك تعقيدات غير خطية أكثر من مؤثر p−لابلاس، وذلك بسبب أن $\Delta_{p(x)}$ غير متجانس، هذه الحقيقة تتسبب ببعض الصعوبات الإضافية على سبيل المثال، لايمكننا استخدام نظرية مركبة لاغرانج في العديد من المشاكل التي تتضمن هذا المؤثر.

النتيجة الرئيسية

نظريـة 1.0.3 [18]
نفرض أن (أ)-(ج) محققة، إذا يوجد عدد $\Lambda_0 > 0$ معرف ب:

$$\Lambda_0 := \frac{c_8}{c_9}\left(\frac{p^+ + \alpha^+ - 1}{q^- + r^+ + \alpha^+ - 1}\right)^{\frac{p^+ + \alpha^+ - 1}{q^- + r^+ - p^+}}\left(\frac{p^+ - q^- - r^+}{q^- + r^+ + \alpha^+ - 1}\right),$$

حيث c_8 و c_9 ثوابت موجبة، حيث يكون للمسألة 1.0.3 حلين موجبين على الأقل من أجل كل $0 < \lambda + \mu < \Lambda_0$.

لإثبات هذه النظرية نحتاج لتعاريف و توطئات التالي ذكرها لأهميتها في مراحل البرهان.

1 مبـادئ أوليـة

لمعالجة مسألة تتضمن مؤثر $p(x)$−لابلاس نحتاج إلى تقديم بعض الفضاءات الدالية $L^{p(\cdot)}(\Omega)$، $W^{1,p(\cdot)}(\Omega)$، $W_0^{1,p(\cdot)}(\Omega)$ و بعض خصائص مؤثر $p(x)$−لابلاس التي ستستخدم لاحقا، نعين بواسطة $S(\Omega)$ مجموعة الدوال ذات القيمة الحقيقية القابلة للقياس.
نلاحظ أن دالتين من الدوال القابلة للقياس متطابقتان في $S(\Omega)$ عندما تكونان متساويتان في كل مكان تقريبا من $S(\Omega)$.
ليكن:

$$L^{p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in S(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} dx < \infty\right\},$$

مع النظيم:

$$|u|_{p(.)} = |u|_{L^{p(\cdot)}(\Omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}$$

و

$$L^{p(\cdot)}_{c(x)}(\Omega) = \left\{u \in S(\Omega) : \int_\Omega c(x)|u(x)|^{p(x)} dx < \infty\right\}.$$

حيث c هي دالة قابلة للقياس ذات قيمة حقيقية و $c(x) > 0$ من أجل $x \in \Omega$ يصبح الفضاء $\left(L^{p(\cdot)}(\Omega), |.|_{p(.)}\right)$ فضاء بناخ نسميه فضاء القوى المتغيرة للوبيغ، علاوة على ذلك هذا الفضاء محدب، قابل للفصل، إنعكاسي و منتظم وهو فضاء بناخ انظر [12, النظريات 1.6، 1.10 و 1.14].

فضاء القوى المتغيرة صوبوليف:

$$W^{1,p(\cdot)}(\Omega) = \left\{u \in L^{p(\cdot)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(\cdot)}(\Omega)\right\}.$$

وهي متكافئة مع النظيم:

$$\|u\| = |u|_{p(.)} + |\nabla u|_{p(.)},\ \forall\, u \in W^{1,p(\cdot)}(\Omega).$$

الفضاء $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ هو غلاقة $C_0^{\infty}(\Omega)$ في $W^{1,p(.)}(\Omega)$ في وجود النظيم: $\|u\|=|\nabla u|_{p(.)}$ ، الفضاءات $W^{1,p(.)}(\Omega)$ و $W_0^{1,p(.)}(\Omega)$ قابلة للفصل، إنعكاسية، منتظمة، و فضاءات بناخ محدبة أنظر [12, النظرية 1.2].
الإحتواء بين فضاءات لوبيغ المعممة يتم بصفة طبيعية، إذا كان $0<|\Omega|<\infty$ و p_1, p_2 هي قوى متغيرة بحيث تكون $p_1(x)\le p_2(x)$ حيث ما كان تقريبا في Ω و هو مستمر

$$L^{p_2(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{p_1(x)}(\Omega).$$

نشير بواسطة $L^{q(x)}(\Omega)$ إلى الفضاء المرافق ل: $L^{p(x)}(\Omega)$، حيث $\frac{1}{p(x)}+\frac{1}{q(x)}=1$ من أجل : $u\in L^{p(x)}(\Omega)$ و $v\in L^{q(x)}(\Omega)$.

$$\left|\int_{\Omega} u(x)v(x)dx\right|\le\left(\frac{1}{p^-}+\frac{1}{q^-}\right)|u|_{p(x)}|v|_{q(x)}. \tag{2.1.3}$$

هي متباينة هولدر في الفضاءات المعممة.
هناك دور مهم تلعبه التطبيقات المعيارية بواسطة الفضاء $L^{p(x)}(\Omega)$ وهي تطبيقات $\rho_{p(x)}: L^{p(x)}(\Omega)\to\mathbb{R}$ معرفة كما يلي :

$$\rho_{p(x)}(u)=\int_{\Omega}|u|^{p(x)}dx.$$

توطئة 1.1.3 [18]
إذا كانت $(u_n), u\in L^{p(x)}(\Omega)$ و $p^+<\infty$ فإن العلاقات التالية محققة:

$$\|u\|_{L^{p(x)}}>1\Rightarrow\|u\|_{L^{p(x)}}^{p^-}\le\rho_{p(x)}(u)\le\|u\|_{L^{p(x)}}^{p^+}, \tag{3.1.3}$$

$$\|u\|_{L^{p(x)}}<1\Rightarrow\|u\|_{L^{p(x)}}^{p^+}\le\rho_{p(x)}(u)\le\|u\|_{L^{p(x)}}^{p^-}, \tag{4.1.3}$$

$$\|u_n-u\|_{L^{p(x)}}\to 0\Leftrightarrow\rho_{p(x)}(u_n-u)\to 0. \tag{5.1.3}$$

النتيجة التالية تعمم نظرية صوبوليف المعروفة.

نظرية 1.1.3 [9, 19]
لتكن $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ مجال محدود مفتوح بحدود ليبتشيزية، لنفرض أن $p\in C(\overline{\Omega})$ مع $p(x)>1$ من أجل كل $x\in\overline{\Omega}$.
إذا كان $r\in C(\overline{\Omega})$ و $p(x)\le r(x)\le p^*(x)$ مهما يكن $x\in\overline{\Omega}$، فإنه يوجد احتواء مستمر $W^{1,p(x)}(\Omega)\hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega)$، و يكون أيضا متراصا عندما يكون $r(x)<p^*(x)$ حيثما كان تقريبا في $\overline{\Omega}$، حيث:

$$p^*(x)=\begin{cases}\dfrac{Np(x)}{N-p(x)}, & p(x)<N\\[2ex] +\infty, & p(x)\ge N\end{cases}$$

نظريـة 2.1.3 [8]
إذا كان $|u|^{q(x)} \in L^{\frac{r(x)}{q(x)}}(\Omega)$، حيث: $q(x) \in L^{\infty}_{+}(\Omega)$،$r(x)$ مع $q(x) \leq r(x)$ و $u \in L^{r(x)}(\Omega)$
و لدينا أيضا عدد $q_0 \in \left[q^-, q^+\right]$ حيث:

$$\left||u|^{q(x)}\right|_{\frac{r(x)}{q(x)}} = \left(|u|_{r(x)}\right)^{q_0}.$$

نظريـة 3.1.3 [8]
إذا كان $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} + \frac{1}{p(x)} = 1$، و من أجل كل $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$، $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ و $w \in L^{p(x)}(\Omega)$ فإنه لدينا:

$$\left|\int_{\Omega} u(x)v(x)w(x)\right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{p'^-} + \frac{1}{p^-}\right)|u|_{p(x)}|v|_{p'(x)}|w|_{p(x)}$$

$$\leq 3|u|_{p(x)}|v|_{p'(x)}|w|_{p(x)}.$$

نظريـة 4.1.3 [24]
نفرض أن حدود المجال Ω تمتلك الخاصية المخروطية مع $p \in C\left(\overline{\Omega}\right)$، و نفرض أن $c(x) > 0$ ، $b \in L^{\gamma(x)}$ من أجل $\gamma \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ ، $x \in \Omega(x)$ و $\left(\frac{1}{\gamma(x)} + \frac{1}{\gamma_0(x)} = 1\right)$ $\gamma_0^- \leq \gamma_0(x) \leq \gamma_0^+$ و $\gamma^- > 1(x)$ إذا كانت $q \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ و

$$1 < q(x) < \frac{\gamma(x) - 1}{\gamma(x)} p_{\partial}^{*}(x), \ \forall\, x \in \overline{\Omega},$$

أو

$$1 < \gamma(x) < \frac{N\gamma(x)}{N\gamma(x) - r(x)(N - p(x))},$$

ومنه يكون الاحتواء المستمر من $W^{1,p(x)}(\Omega)$ نحو $L^{q(x)}_{c(x)}(\partial\Omega)$ متراص.

2 تحليل خرائط الألياف

فيما يلي نرمز ب: W للجداء الديكارتي لفضائي صوبوليف $W^{1,p(x)}(\Omega)$ أي:

$$W = W^{1,p(x)}(\Omega) \times W^{1,p(x)}(\Omega).$$

لنقم باختيار النظيم $\|.\|$ على W ب:

$$\|(u,v)\| = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx + \int_\Omega \left(|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right) dx\right)^{\frac{1}{p(x)}},$$

الذي يتكافئ مع المعيار القياسي.
يمكننا أن نعرف دالة الطاقة $E_{\lambda,\mu} : W \to \mathbb{R}$ المرفقة للمسألة (1.0.3) كما يلي:

$$\begin{aligned} E_{\lambda,\mu}(u,v) :=& \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}\right) dx + \int_\Omega \left(\frac{|\nabla v|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|v|^{p(x)}}{p(x)}\right) dx \\ & - \int_\Omega \left(\frac{\lambda a(x)}{1-\alpha(x)}\left(u^+\right)^{1-\alpha(x)} + \frac{\lambda b(x)}{1-\alpha(x)}\left(v^+\right)^{1-\alpha(x)}\right) dx \\ & - \int_{\partial\Omega} \frac{c(x)}{q(x)+r(x)} |u|^{q(x)} |v|^{r(x)} dx. \end{aligned}$$

لتكن:

$$L(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}\right) dx + \int_\Omega \left(\frac{|\nabla v|^{p(x)}}{p(x)} + \frac{|v|^{p(x)}}{p(x)}\right) dx,$$

$$P(u,v) = \int_\Omega \left(\frac{\lambda a(x)}{1-\alpha(x)}\left(u^+\right)^{1-\alpha(x)} + \frac{\lambda b(x)}{1-\alpha(x)}\left(v^+\right)^{1-\alpha(x)}\right) dx,$$

و

$$Q(u,v) = \int_{\partial\Omega} \frac{c(x)}{q(x)+r(x)} |u|^{q(x)} |v|^{r(x)} dx.$$

تعريف 1.2.3 [18]
نقول أن $(u,v)\in W$ حل ضعيف للمسألة (1.0.3) إذا كان لدينا:

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\nabla\phi+|u|^{p(x)-2}u\phi\right)dx$$
$$=\lambda\int_{\Omega}a(x)(u^{+})^{-\alpha(x)}\phi dx+\int_{\partial\Omega}c(x)\frac{q(x)}{q(x)+r(x)}|u|^{q(x)-2}u|v|^{r(x)}\phi dx,$$

و

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)-2}\nabla v\nabla\psi+|u|^{p(x)-2}v\psi\right)dx$$
$$=\mu\int_{\Omega}b(x)(v^{+})^{-\alpha(x)}\psi dx+\int_{\partial\Omega}c(x)\frac{r(x)}{q(x)+r(x)}|u|^{q(x)-2}v|v|^{r(x)}\psi dx.$$

من أجل كل $(\phi,\psi)\in C_c^{\infty}(\Omega)\times C_c^{\infty}(\Omega)$، حيث C_c^{∞} يعرف فضاء كل الدوال من الصنف C^{∞} مع حامل متراص في Ω.

في الكثير من المسائل مثل المسألة (1.0.3)، $E_{\lambda,\mu}$ غير محدودة من الأسفل على الفضاء الكبير W، لكنها محدودة من الأسفل على منوعات نيهاري الموافقة لها، والمعرفة كما يلي:

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu}=\left\{(u,v)\in W\backslash\{(u,v)\}:\left\langle E_{\lambda}'(u,v),(u,v)\right\rangle=0\right\}.$$

من الواضح أن كل النقاط الحرجة ل: $E_{\lambda,\mu}$ يجب أن تتموقع في $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$.
سوف نرى لاحقا أن الحدود المحلية الدنيا ل: $E_{\lambda,\mu}$ على $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ هي فعلا نقاط حرجة ل $E_{\lambda,\mu}$، ومنه من السهل أن نلاحظ أنه $u\in\mathcal{N}_{\lambda}$ إذا وفقط إذا كان

$$I_{\lambda,\mu}(u,v):=\langle E_{\lambda}'(u,v),(u,v)\rangle=\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{q(x)}+|v|^{q(x)}\right)dx$$
$$-\lambda\int_{\Omega}a(x)|u|^{1-\alpha(x)}dx-\mu\int_{\Omega}b(x)|v|^{1-\alpha(x)}dx-\int_{\partial\Omega}c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx=0.$$

ننوه بأن $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ تحوي كل حلول المسألة (1.0.3)، و منه من أجل $(u,v)\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ لدينا:

$$\langle I_{\lambda}'(u,v),(u,v)\rangle=$$
$$\int_{\Omega}p(x)\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}q(x)\left(|\nabla v|^{q(x)}+|v|^{q(x)}\right)dx$$
$$-\int_{\Omega}(1-\alpha(x))\left(\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)}dx-\mu b(x)|v|^{1-\alpha(x)}\right)dx$$
$$-\int_{\partial\Omega}c(x)\left(q(x)+r(x)\right)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx.$$

الآن، نعرف أن منوعات نيهاري مرتبطة إرتباطا وثيقا بسلوك الدالة $\Phi_{u,v} : t \mapsto E_{\lambda,\mu}(tu, tv)$ من أجل $t > 0$ المعرفة ب:

$$\Phi_{u,v}(t) = \int_\Omega \frac{t^{p(x)}}{p(x)} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx + \int_\Omega \frac{t^{p(x)}}{p(x)} \left(|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right) dx$$

$$- \int_\Omega \frac{t^{1-\alpha(x)}}{1-\alpha(x)} \left(\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)} + \mu b(x)|v|^{1-\alpha(x)}\right) dx$$

$$- \int_{\partial\Omega} \frac{t^{q(x)+r(x)}}{q(x)+r(x)} c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)} dx,$$

التي تعطينا:

$$\Phi'_{u,v}(t) = \int_\Omega t^{p(x)-1} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx + \int_\Omega t^{p(x)-1} \left(|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right) dx$$

$$- \int_\Omega t^{-\alpha(x)} \left(\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)} + \mu b(x)|v|^{1-\alpha(x)}\right) dx$$

$$- \int_{\partial\Omega} t^{q(x)+r(x)-1} c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)} dx,$$

و

$$\Phi''_{u,v}(t) = \int_\Omega (p(x)-1)\, t^{p(x)-2} \left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right) dx$$

$$+ \int_\Omega (p(x)-1)\, t^{p(x)-2} \left(|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right) dx$$

$$+ \int_\Omega (\alpha(x))\, t^{-\alpha(x)-1} \left(\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)} + \mu b(x)|v|^{1-\alpha(x)}\right) dx$$

$$- \int_{\partial\Omega} (q(x)+r(x)-1)\, t^{q(x)+r(x)-2} c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)} dx.$$

مثل هذه التطبيقات تسمى تطبيقات الألياف والتي تم تقديمها أول مرة من طرف درابيك و بوهوزاييف في [6].

بإستخدام(3.1.3)، (4.1.3)، (5.1.3)، والنظريات (1.1.3)، (2.1.3)، (3.1.3) و (4.1.3)، نتحصل على التالي:

$$\begin{aligned}
P(u,v) &= \int_\Omega \left(\lambda a(x)\left|u^+\right|^{1-\alpha(x)} + \mu b(x)\left|v^+\right|^{1-\alpha(x)}\right) dx \\
&\leq 2\lambda |a(x)|_{1-\alpha(x)} \left|(u^+)^{1-\alpha(x)}\right|_{\frac{p^*(x)}{1-\alpha(x)}} + 2\mu |b(x)|_{1-\alpha(x)} \left|(v^+)^{1-\alpha(x)}\right|_{\frac{p^*(x)}{1-\alpha(x)}} \\
&\leq 2\lambda \left|a\left(x\right)\right|_{r_1(x)} \left(\left|\left(u^+\right)\right|_{p^*(x)}\right)^{1-\alpha_0} + 2\mu \left|b\left(x\right)\right|_{r_2(x)} \left(\left|\left(v^+\right)\right|_{p^*(x)}\right)^{1-\alpha_0} \\
&\leq 2\lambda c_1 \left\|u^+\right\|_{p(x)}^{1-\alpha_0} + 2\mu c_2 \left\|v^+\right\|_{p(x)}^{1-\alpha_0} \\
&\leq \lambda c_3 \left\|(u,v)^+\right\|^{1-\alpha^-} + \mu c_4 \left\|(u,v)^+\right\|^{1-\alpha^-} \\
&\leq c_5(\lambda+\mu) \left\|(u,v)^+\right\|^{1-\alpha^-}. \qquad (6.2.3)
\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}
Q(u,v) &= \int_{\partial\Omega} c(x)\, |u|^{q(x)} |v|^{r(x)} dx \leq 3|c(x)|_{r_3(x)} \left||u|^{q(x)}\right|_{\frac{p^*(x)}{q(x)}} \left||v|^{r(x)}\right|_{\frac{p^*(x)}{r(x)}} \\
&\leq 3|c(x)|_{r_3(x)} \left(|u|_{p^*(x)}\right)^{q_0} \left(|v|_{p^*(x)}\right)^{r_0} \qquad (7.2.3) \\
&\leq c_6 \|u\|_{p(x)}^{q_0} \|u\|_{p(x)}^{r_0} \\
&\leq c_7 \|(u,v)\|^{q^+ + r^+}.
\end{aligned}$$

توطئة 1.2.3 [18]
لتكن $(u,v) \in W\backslash\{(0,0)\}$، إذن $(tu,tv) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ إذا و فقط إذا $\Phi'_{u,v}(t) = 0$ من أجل كل $t > 0$.

برهان. النتيجة هي نتيجة صحيحة

$$\Phi'_{u,v}(t) = \langle I'_{\lambda,\mu}(tu,tv),(u,v)\rangle .$$

من خلال التوطئة (1.2.3)، كما هو واضح عناصر $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ تتطابق مع النقاط الحرجة على التطبيق $\Phi_{u,v}(t)$ و بالتحديد $(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$، إذا وفقط إذا كانت $\Phi'_{u,v}(1) = 0$، ومنه من الطبيعي أن نقسم $(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ إلى ثلاثة أجزاء تتطابق مع الحد الأدنى المحلي، الحد الأعلى المحلي و نقاط الإنعطاف ل: $\Phi_{u,v}(t)$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}^+_{\lambda,\mu} &= \left\{(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu} : \Phi''_{u,v}(1) > 0\right\} \\
&= \left\{(tu,tv) \in W\backslash\{0,0\} : \Phi'_{u,v}(t) = 0, \Phi''_{u,v}(t) > 0\right\}, \\
\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu} &= \left\{(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu} : \Phi''_{u,v}(1) < 0\right\} \\
&= \left\{(tu,tv) \in W\backslash\{0,0\} : \Phi'_{u,v}(t) = 0, \Phi''_{u,v}(t) < 0\right\}, \\
\mathcal{N}^0_{\lambda,\mu} &= \left\{(u,v) \in \mathcal{N}_{\lambda,\mu} : \Phi''_{u,v}(1) = 0\right\} \\
&= \left\{(tu,tv) \in W\backslash\{0,0\} : \Phi'_{u,v}(t) = 0, \Phi''_{u,v}(t) = 0\right\}.
\end{aligned}$$

□

نتيجتنا الأولى هي مايلي:

توطئة 2.2.3 [18]
$E_{\lambda,\mu}$ قسري ومحدود من الأسفل على $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$.

برهان. نفرض أن $(u,v)\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ و $\|(u,v)\|>1$. دون أن نخرج على الحالة العامة، نستطيع أن نفرض $\|u\|_{p(x)},\|u\|_{q(x)}>1$. وبالتالي بإستخدام (3.1.3)-(5.1.3) و (6.2.3) نقدر $E_{\lambda,\mu}(u,v)$ كما يلي:

$$E_{\lambda,\mu}(u,v)=\int_\Omega\left(\frac{|\nabla u|^{p(x)}}{p(x)}+\frac{|u|^{p(x)}}{p(x)}\right)dx+\int_\Omega\left(\frac{|\nabla v|^{p(x)}}{p(x)}+\frac{|v|^{p(x)}}{p(x)}\right)dx$$

$$-\int_\Omega\left(\frac{\lambda a(x)}{1-\alpha(x)}|u|^{1-\alpha(x)}+\frac{\mu b(x)}{1-\alpha(x)}|v|^{1-\alpha(x)}\right)dx$$

$$-\int_{\partial\Omega}\frac{c(x)}{q(x)+r(x)}|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}$$

$$E_{\lambda,\mu}(u,v)\geq\frac{1}{p^+}\left(\int_\Omega|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\frac{1}{p^+}\left(\int_\Omega|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx$$

$$-\frac{1}{1-\alpha^+}\int_\Omega\left(\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)}+\mu b(x)|v|^{1-\alpha(x)}\right)dx$$

$$-\frac{1}{q^-+r^-}\int_{\partial\Omega}c(x)\,|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx$$

$$E_{\lambda,\mu}(u,v)\geq\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{q^-+r^-}\right)\left(\int_\Omega\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_\Omega\left(|\nabla v|^{p(x)}|v|^{p(x)}\right)dx\right)$$

$$-\left(\frac{1}{1-\alpha^+}-\frac{1}{q^-+r^-}\right)\int_\Omega\left(\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)}+\mu b(x)|v|^{1-\alpha(x)}\right)dx$$

$$\geq\left(\frac{1}{p^+}-\frac{1}{q^-+r^-}\right)\|(u,v)\|^{p^-}-c_7\left(\frac{1}{1-\alpha^+}-\frac{1}{q^-+r^-}\right)\|(u,v)\|^{1-\alpha^-}.$$

و بالتالي إذا كانت $p^->1-\alpha^-$ ، لدينا $E_{\lambda,\mu}(u,v)\to\infty$ لما $\|(u,v)\|\to\infty$، هذا يستلزم أن $E_{\lambda,\mu}$ قسري و محدود من الأسفل. □

توطئة 3.2.3 [18]
لتكن (u,v) حد أدنى محلي ل: $E_{\lambda,\mu}$ على المجموعة الجزئية $\mathcal{N}^+_{\lambda,\mu}$ أو $\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu}$ ل $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ حيث: $(u,v)\notin\mathcal{N}^0_{\lambda,\mu}$، و منه (u,v) نقطة حرجة ل $E_{\lambda,\mu}$.

برهان. إذا كانت (u,v) حد أدنى محلي ل: $E_{\lambda,\mu}$ تحت القيود:

$$I_{\lambda,\mu}(u) := \langle E'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\rangle = 0. \tag{8.2.3}$$

بتطبيق نظرية مركبات لاغرونج نحصل على وجود $\sigma \in \mathbb{R}$ حيث:

$$E'_{\lambda,\mu}(u,v) = \sigma I'_{\lambda,\mu}(u,v),$$

و منه لدينا:

$$\langle E'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\rangle = \sigma\,\langle I'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\rangle = \sigma\Phi''_{u,v}(1) = 0.$$

إذا كانت $(u,v)\notin \mathcal{N}^0_{\lambda,\mu}$ فإن $\Phi''_{u,v}(1)\neq 0$ ومنه $\sigma = 0$ وهذا ينهي البرهان. □

الان، نثبت التوطئة الآتية:

توطئة 4.2.3 [18]
يوجد

$$\Lambda_0 = \frac{c_8}{c_9}\left(\frac{p^+ + \alpha^+ - 1}{q^- + r^+ + \alpha^+ - 1}\right)^{\frac{p^+ + \alpha^+ - 1}{q^- + r^+ - p^+}}\left(\frac{p^+ - q^- + r^+}{q^- + r^+ + \alpha^+ - 1}\right).$$

حيث أنه من أجل $0<\lambda+\mu<\Lambda_0$ لدينا: $\mathcal{N}^{\pm}_{\lambda,\mu}\neq\varnothing$ و $\mathcal{N}^0_{\lambda,\mu}=\{0,0\}$.

برهان. أولا باستخدام التوطئة (3.2.3) نستنتج أن: $\mathcal{N}^{\pm}_{\lambda,\mu}\neq\varnothing$ غير خالية من أجل كل (λ,μ) مع $0<\lambda+\mu<\Lambda_0$. الآن نبدأ بالتناقض لنثبت أن: $\mathcal{N}^0_{\lambda,\mu}=\{0,0\}$ من أجل كل (λ,μ) مع $0<\lambda+\mu<\Lambda_0$.
لنفرض أنه توجد $\mathcal{N}^0_{\lambda,\mu}=\{0,0\}$ حيث $\|(u,v)\|>1$، ومنه من خلال تعريف $\mathcal{N}^0_{\lambda,\mu}=\{0,0\}$ يكون لدينا:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}dx + \int_\Omega |\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}dx - \lambda\int_\Omega a(x)|u|^{1-\alpha(x)}dx\\ &-\mu\int_\Omega b(x)|v|^{1-\alpha(x)}dx - \int_{\partial\Omega} c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx = 0.\end{aligned} \tag{9.2.3}$$

ومنه، بإستخدام (9.2.3) مع (8.2.3)، نجد:

$$\begin{aligned}0 &= \left\langle I'_{\lambda,\mu}(u,v),(u,v)\right\rangle\\ &= \int_\Omega p(x)\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx + \int_\Omega p(x)\left(|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right)dx\\ &- \lambda\int_\Omega a(x)(1-\alpha(x))|u|^{1-\alpha(x)}dx - \mu\int_\Omega b(x)(1-\alpha(x))|v|^{1-\alpha(x)}dx\\ &- \int_{\partial\Omega} c(x)(q(x)+r(x))|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx\end{aligned}$$

$$\geq p^{-}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+p^{-}\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx$$

$$-\left(1-\alpha^{-}\right)\int_{\Omega}\left(\lambda a\left(x\right)|u|^{1-\alpha(x)}+\mu b\left(x\right)|v|^{1-\alpha(x)}\right)dx$$

$$-\left(q^{+}+r^{+}\right)\int_{\partial\Omega}c\left(x\right)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx$$

$$\geq\left(p^{-}-\left(1-\alpha^{-}\right)\right)\left(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx\right)$$

$$+\left(1-\alpha^{-}-q^{+}-r^{+}\right)\int_{\partial\Omega}c\left(x\right)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx.$$

بإستخدام (7.2.3) نجد أن:

$$p^{-}+\alpha^{-}-1\left\|(u,v)\right\|^{p^{-}}+c_{8}\left(1-\alpha^{-}-q^{+}-r^{+}\right)\left\|(u,v)\right\|^{q^{+}+r^{+}}\leq 0,$$

وهذا يستلزم:

$$\left\|(u,v)\right\|\geq\frac{1}{c_{8}}\left(\frac{p^{-}+\alpha^{-}-1}{q^{+}+r^{+}+\alpha^{-}-1}\right)^{\frac{1}{q^{+}+r^{+}-p^{-}}}. \qquad (10.2.3)$$

بطريقة مماثلة، إذا كانت $(u,v)\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$، لدينا:

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx-\lambda\int_{\Omega}a\left(x\right)|u|^{1-\alpha(x)}dx$$

$$-\mu\int_{\Omega}b\left(x\right)|v|^{1-\alpha(x)}dx-\int_{\partial\Omega}c\left(x\right)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx=0,$$

و إذا كانت $(u,v)\in\mathcal{N}^{0}_{\lambda,\mu}$، نجد:

$$p^{+}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+p^{+}\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx$$

$$-\left(1-\alpha^{+}\right)\int_{\Omega}\left(\lambda a\left(x\right)|u|^{1-\alpha(x)}+\mu b\left(x\right)|v|^{1-\alpha(x)}\right)dx$$

$$-\left(q^{-}+r^{-}\right)\int_{\partial\Omega}c\left(x\right)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx\geq 0,$$

و بالتالي

$$\left(p^{+}-q^{-}-r^{-}\right)\left(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+p^{+}\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx\right)$$

$$+\left(q^{-}+r^{-}+\alpha^{-}-1\right)\left(\int_{\Omega}\lambda a\left(x\right)|u|^{1-\alpha(x)}+\int_{\Omega}\mu b\left(x\right)|v|^{1-\alpha(x)}\right)dx\geq 0.$$

و الآن باستخدام (6.2.3) نجد:

$$\left(p^{+}-q^{-}-r^{-}\right)\|(u,v)\|^{p^{-}}+c_{9}\left(\lambda+\mu\right)\left(q^{-}+r^{-}+\alpha^{-}-1\right)\|(u,v)\|^{1-\alpha^{+}}\geq 0,$$

ومن ثم:

$$\|(u,v)\|\leq c_{9}\left(\left(\lambda+\mu\right)\frac{q^{-}+r^{-}+\alpha^{-}-1}{p^{+}-q^{-}-r^{-}}\right)^{\frac{1}{p^{-}+\alpha^{-}-1}}, \tag{11.2.3}$$

من (10.2.3) و (11.2.3)،

$$c_{9}\left(\left(\lambda+\mu\right)\frac{q^{-}+r^{-}+\alpha^{-}-1}{p^{+}-q^{-}-r^{-}}\right)\geq c_{8}\left(\frac{p^{+}+\alpha^{+}-1}{q^{-}+r^{+}+\alpha^{+}-1}\right)^{\frac{p^{+}+\alpha^{+}-1}{q^{-}+r^{+}-p^{+}}},$$

و منه:

$$\lambda+\mu\geq\frac{c_{8}}{c_{9}}\left(\frac{p^{+}+\alpha^{+}-1}{q^{-}+r^{+}+\alpha^{+}-1}\right)^{\frac{p^{+}+\alpha^{+}-1}{q^{-}+r^{+}-p^{+}}}\left(\frac{p^{+}-q^{-}-r^{-}}{q^{-}+r^{-}+\alpha^{-}-1}\right)=\Lambda_{0}.$$

وبالتالي $\lambda+\mu\geq\Lambda_{0}$ ، وهذا غير ممكن، و منه $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{0}=\{0,0\}$ من أجل كل λ,μ مع $0<\lambda+\mu<\Lambda_{0}$ ، وهذا ينهي البرهان. $\square$

باستخدام التوطئة (2.2.3) و(3.2.3)، من أجل $0<\lambda+\mu<\Lambda_{0}$ نستطيع كتابة $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}=\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{+}\cup\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{-}$ و نعرف:

$$c_{\lambda,\mu}^{+}:=\inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{+}}E_{\lambda,\mu}\left(u,v\right).$$

و

$$c_{\lambda,\mu}^{-}:=\inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{-}}E_{\lambda,\mu}\left(u,v\right).$$

3 وجود الحلول في $\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$

في هذا القسم، سنبين أن الحد الأدنى ل $E_{\lambda,\mu}$ محقق في $\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$ و سنبين أيضا أن هذا الأخير هو أول حل للمسألة (1.0.3).

توطئة 1.3.3 [18]
إذا كان $0<\lambda+\mu<\Lambda_0$ ، فإن $c^{+}_{\lambda,\mu}<0$ من أجل كل $(u,v)\in\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$.

برهان. لتكن $\left(u_0^{+},v_0^{+}\right)\in\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$ و منه لدينا $\phi''_{u_0^{+},v_0^{+}}(1)>0$ ، و الذي يعطي:

$$p^{+}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+p^{+}\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx$$

$$-\left(1-\alpha^{+}\right)\int_{\Omega}\left(\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)}+\mu b(x)|v|^{1-\alpha(x)}\right)dx \qquad . \tag{12.3.3}$$

$$-\left(q^{+}+r^{+}\right)\int_{\partial\Omega}c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx>0$$

و من جهة أخرى، من خلال تعريف $E_{\lambda,\mu}$ نستطيع كتابة:

$$E_{\lambda,\mu}(u,v)\leq\frac{1}{p^{-}}\left(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx\right)$$

$$-\frac{1}{1-\alpha^{+}}\left(\lambda\int_{\Omega}a(x)|u|^{1-\alpha(x)}+\mu\int_{\Omega}b(x)|v|^{1-\alpha(x)}dx\right) \tag{13.3.3}$$

$$-\frac{1}{q^{+}+r^{+}}\int_{\partial\Omega}c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx.$$

الآن، بضرب (8.2.3) في $-\left(1-\alpha^{+}\right)$ نحصل على:

$$-\left(1-\alpha^{+}\right)(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx$$

$$+\lambda\left(1-\alpha^{+}\right)\int_{\Omega}\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)}+\left(1-\alpha^{+}\right)\mu\int_{\Omega}b(x)|v|^{1-\alpha(x)}dx$$

$$+\left(1-\alpha^{+}\right)\int_{\partial\Omega}c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx=0.$$

بجمع المساواة المذكورة أعلاه مع (12.3.3)، نحصل على:

$$\int_{\partial\Omega}c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx<\frac{p^{+}+\alpha^{+}-1}{q^{+}+r^{+}+\alpha^{+}-1}\left(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx\right) \tag{14.3.3}$$

علاوة على ذلك، باستخدام (13.3.3) مع (8.2.3) لدينا:

$$E_{\lambda,\mu}(u,v) \leq \left(\frac{1}{p^{-}} - \frac{1}{1-\alpha^{+}}\right)\left(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)} + |u|^{p(x)}\right)dx\right.$$

(15.3.3)

$$\left.+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}\right)dx - \left(\frac{1}{q^{+}+r^{+}} - \frac{1}{1-\alpha^{+}}\right)\int_{\partial\Omega} c(x)\,|u|^{q(x)}\,|v|^{r(x)}\,dx.\right.$$

ومن ثم، باستخدام (14.3.3) و (15.3.3)، نتحصل على:

$$E_{\lambda,\mu}(u,v) < \frac{(p^{-}+\alpha^{+}-1)(q^{+}+r^{+}-p^{-})}{p^{-}(1-\alpha^{+})(q^{+}+r^{+})}\|(u,v)\|^{p^{-}} < 0.$$

لذلك، $c^{+}_{\lambda,\mu} < 0$ يتبع تعريف $c^{+}_{\lambda,\mu}$ ، وهذا ينهي البرهان.

□

نظرية 1.3.3 [18]
ليكن λ,μ، حيث $0<\lambda+\mu<\Lambda_0$، فإن الدالة $E_{\lambda,\mu}$ تملك حد أدنى $(u_0^{+},v_0^{+}) \in \mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$ تحقق:

$$E_{\lambda,\mu}\left(u_0^{+},v_0^{+}\right) = \inf_{u\in\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}} E_{\lambda,\mu}(u,v).$$

برهان. بما أن $E_{\lambda,\mu}$ محدود من الأسفل على $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ و هكذا على $\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$ ، فإنه توجد متتالية $\left\{\left(u_n^{+},v_n^{+}\right)\right\} \subset \mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}$ على هذا النحو $E_{\lambda,\mu}\left(u_n^{+},v_n^{+}\right) \to \inf_{u\in\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}} E_{\lambda,\mu}(u,v)$ لما $n\to\infty$، بما أن $E_{\lambda,\mu}$ قسري فإن (u_n,v_n) محدودة في W، و هكذا نفرض دون فقدان العمومية أن $\left(u_n^{+},v_n^{+}\right) \rightharpoonup \left(u_0^{+},v_0^{+}\right)$ ضعيفة في W ، و حسب الاحتواء المتراص لدينا:

$$u_n^{+} \rightharpoonup u_0^{+} \text{ في } L^{1-\alpha(x)}_{a(x)}(\Omega) \text{ و في } L^{q(x)+r(x)}_{b(x)}(\partial\Omega)$$
$$v_n^{+} \rightharpoonup v_0^{+} \text{ في } L^{1-\alpha(x)}_{a(x)}(\Omega) \text{ و في } L^{q(x)+r(x)}_{b(x)}(\partial\Omega)$$

هذا يستلزم:

$$P\left(u_n^{+},v_n^{+}\right) \underset{n\to\infty}{\to} P\left(u_0^{+},v_0^{+}\right),$$

$$Q\left(u_n^{+},v_n^{+}\right) \underset{n\to\infty}{\to} Q\left(u_0^{+},v_0^{+}\right).$$

الآن سنثبت أن $u_n^{+} \to u_0^{+}$ قوي في $W^{1,p(x)}(\Omega)$ و $v_n^{+} \to v_0^{+}$ قوي في $W^{1,p(x)}(\Omega)$، باستعمال البرهان بالخلف، لدينا:

$$\left\|u_0^{+}\right\|_p \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|u_n^{+}\right\|_p \quad ، \quad \left\|v_0^{+}\right\|_p \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|v_n^{+}\right\|_p$$

باستخدام الاحتواء المتراص و (8.2.3)، نستطيع كتابة:

$$\begin{aligned}E_{\lambda,\mu}\left(u_n^+,v_n^+\right) &\geq \left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{q^++r^+}\right)\\ &\times\left(\int_\Omega\left(\left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}+\left|u_n^+\right|^{p(x)}\right)dx+\int_\Omega\left(\left|\nabla v_n^+\right|^{p(x)}+\left|v_n^+\right|^{p(x)}\right)dx\right)\\ &+\left(\frac{1}{q^++r^+}-\frac{1}{1-\alpha^+}\right)\\ &\times\left(\int_\Omega\left(\lambda a\left(x\right)\left|u_n^+\right|^{1-\alpha(x)}+\mu b\left(x\right)\left|v_n^+\right|^{1-\alpha(x)}\right)dx\right).\end{aligned}$$

لتكن n تؤول إلى ∞ نجد:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}E_{\lambda,\mu}\left(u_n^+,v_n^+\right) &\geq \left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{q^++r^+}\right)\\ &\times\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega\left(\left|\nabla u_n^+\right|^{p(x)}+\left|u_n^+\right|^{p(x)}\right)dx+\int_\Omega\left(\left|\nabla v_n^+\right|^{p(x)}+\left|v_n^+\right|^{p(x)}\right)dx\right)\\ &+\left(\frac{1}{q^++r^+}-\frac{1}{1-\alpha^+}\right)\\ &\times\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega\left(\lambda a\left(x\right)\left|u_n^+\right|^{1-\alpha(x)}+\mu b\left(x\right)\left|v_n^+\right|^{1-\alpha(x)}\right)dx\right).\end{aligned}$$

و بالتالي، باستخدام (6.2.3) نتحصل على:

$$\begin{aligned}c_{\lambda,\mu}^+ &= \inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+}E_{\lambda,\mu}\left(u,v\right)\\ &> \left(\frac{1}{p^-}-\frac{1}{q^++r^+}\right)\left\|u_0^+,v_0^+\right\|^{p^-}-c_5\left(\frac{1}{q^++r^+}-\frac{1}{1-\alpha^+}\right)\left\|u_0^+,v_0^+\right\|^{1-\alpha^+}\\ &> 0.\end{aligned}$$

حيث $p^->1-\alpha^+$ و $\left\|\left(u_0^+,v_0^+\right)\right\|>1$ ، مما يعطينا تناقضا، و هكذا فإن $u_n^+\to u_0^+$ قوي في $W^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$ ، $v_n^+\to v_0^+$ قوي في $W^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$ ، $u_n\to u_0$ قوي في $W^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$ و $E_{\lambda,\mu}\left(u_0^+,v_0^+\right)=\inf_{u\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^+}E_{\lambda,\mu}\left(u,v\right)$.

و هذا ما ينهي البرهان . □

4 وجود الحلول في $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{-}$

سنبين في هذا القسم وجود حل ثان للمسألة (1.0.3) من خلال $E_{\lambda,\mu}$ على $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{-}$.

توطئة 1.4.3 [18]
إذا كان $0<\lambda+\mu<\Lambda_0$ ، فإن $c_{\lambda,\mu}^{-}>0$ من أجل كل $(u,v)\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{-}$.

برهان. لتكن $\left(u_0^{-},v_0^{-}\right)\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{-}$ إذن لدينا من (8.2.3):

$$\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx$$

$$-\lambda\int_{\Omega}a(x)|u|^{1-\alpha(x)}dx+\mu\int_{\Omega}b(x)|v|^{1-\alpha(x)}dx \tag{16.4.3}$$

$$-\int_{\partial\Omega}c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx=0.$$

من ناحية أخرى، من تعريف $E_{\lambda,\mu}$ نستطيع كتابة:

$$E_{\lambda,\mu}(u,v)\geq\frac{1}{p^{-}}\left(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx\right)$$

$$-\frac{1}{1-\alpha^{+}}\lambda\int_{\Omega}a(x)|u|^{1-\alpha(x)}-\frac{\mu}{1-\alpha^{+}}\int_{\Omega}b(x)|v|^{1-\alpha(x)}dx \tag{17.4.3}$$

$$-\frac{1}{q^{+}+r^{+}}\int_{\partial\Omega}c(x)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx.$$

باستخدام (16.4.3) و (17.4.3)، و (6.2.3) نجد:
(18.4.3)

$$E_{\lambda,\mu}(u,v)\geq\left(\frac{1}{p^{-}}-\frac{1}{q^{+}+r^{+}}\right)\left(\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_{\Omega}\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx\right)$$

$$+\left(\frac{1}{q^{+}+r^{+}}-\frac{1}{1-\alpha^{+}}\right)\left(\int_{\Omega}\lambda a(x)|u|^{1-\alpha(x)}dx+\int_{\Omega}\mu b(x)|v|^{1-\alpha(x)}dx\right)$$

$$\geq\left(\frac{1}{p^{-}}-\frac{1}{q^{+}+r^{+}}\right)\|u,v\|^{p^{-}}-c_5\left(\frac{1}{q^{+}+r^{+}}-\frac{1}{1-\alpha^{+}}\right)(\lambda+\mu)\|u,v\|^{1-\alpha^{+}}$$

$$\geq\left[\left(\frac{1}{p^{-}}-\frac{1}{q^{+}}\right)+c_7\left(\frac{1}{q^{+}}-\frac{1}{2-\alpha^{+}-\beta^{+}}\right)\right]\|u,v\|^{p^{-}}>0,$$

حيث $p^{-} > 1-\alpha^{+}$، و بالتالي $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}} E_{\lambda,\mu}(u,v) > 0$.

في الواقع إذا كانت قيمة هذا الحد هي صفر فمن خلال (18.4.3)، المتتالية المُصَغِّرَة $\{(u_k,v_k)\}$ متقاربة بقوة في W نحو $(0,0)$ و $(0,0)\notin\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$ و هذا تناقض، و بالتالي $c^{-}_{\lambda,\mu} > 0$ يتبع تعريف $c_{\lambda,\mu}$ و هذا ما ينهي البرهان. □

نظرية 1.4.3 [18]
ليكن λ,μ، حيث $0<\lambda+\mu<\Lambda_0$ ، فإن الدالة $E_{\lambda,\mu}$ تملك حد أدنى $\left(u_0^{-},v_0^{-}\right)\in\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$ يحقق:

$$E_{\lambda,\mu}\left(u_0^{-},v_0^{-}\right)=\inf_{u\in\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}} E_{\lambda,\mu}(u,v).$$

برهان. $E_{\lambda,\mu}$ محدود من الأسفل على $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}$ و هكذا على $\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$ ، فإنه توجد متتالية $\left\{\left(u_n^{-},v_n^{-}\right)\right\}\subset\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$ حيث $E_{\lambda,\mu}\left(u_n^{-},v_n^{-}\right)\to\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}} E_{\lambda,\mu}(u,v)$ لما $n\to\infty$، بما أن $E_{\lambda,\mu}$ قسري فإن $\{(u_n,v_n)\}$ محدودة في W، و هكذا نفرض دون فقدان العمومية أن $\left(u_n^{-},v_n^{-}\right)\rightharpoonup\left(u_0^{-},v_0^{-}\right)$ ضعيف في W ، و حسب الإحتواء المتراص لدينا:

$u_n^{-}\rightharpoonup u_0^{-}$ في $L^{1-\alpha(x)}_{a(x)}(\Omega)$ و في $L^{q(x)+r(x)}_{b(x)}(\partial\Omega)$

$v_n^{-}\rightharpoonup v_0^{-}$ في $L^{1-\alpha(x)}_{a(x)}(\Omega)$ و في $L^{q(x)+r(x)}_{b(x)}(\partial\Omega)$

هذا يستلزم:

$$P\left(u_n^{-},v_n^{-}\right)\underset{n\to\infty}{\to}P\left(u_0^{-},v_0^{-}\right),$$

$$Q\left(u_n^{-},v_n^{-}\right)\underset{n\to\infty}{\to}Q\left(u_0^{-},v_0^{-}\right).$$

علاة على ذلك، وبما أن $\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}\cap\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}=\emptyset$ و $\inf\limits_{u\in\mathcal{N}^{+}_{\lambda,\mu}} E_{\lambda,\mu}(u,v)<0$ نحصل على $(u,v)\in\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$، من ناحية أخرى إذا كان $\left(u_0^{-},v_0^{-}\right)\in\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$ ، فإنه يوجد t_0 حيث $\left(t_0u_0^{-},t_0v_0^{-}\right)\in\mathcal{N}^{-}_{\lambda,\mu}$ و هكذا:

$$E_{\lambda,\mu}\left(t_0u_0^{-},t_0v_0^{-}\right)\le E_{\lambda,\mu}\left(u_0^{-},v_0^{-}\right).$$

$$\begin{aligned}I'_{\lambda,\mu}(u,v)=&\int_\Omega p(x)\left(|\nabla u|^{p(x)}+|u|^{p(x)}\right)dx+\int_\Omega p(x)\left(|\nabla v|^{p(x)}+|v|^{p(x)}\right)dx\\&-\lambda\int_\Omega a(x)\left(1-\alpha(x)\right)|u|^{1-\alpha(x)}dx-\mu\int_\Omega b(x)\left(1-\alpha(x)\right)|v|^{1-\alpha(x)}dx\\&-\int_{\partial\Omega}c(x)\left(q(x)+r(x)\right)|u|^{q(x)}|v|^{r(x)}dx,\end{aligned}$$

باستخدام (7.2.3) نجد:

$$I'_{\lambda,\mu}\left(t_0u_0^-,t_0v_0^-\right)=$$

$$\int_\Omega p\left(x\right)\left(\left|\nabla t_0u_0^-\right|^{p(x)}+\left|t_0u_0^-\right|^{p(x)}\right)dx+\int_\Omega p\left(x\right)\left(\left|\nabla t_0v_0^-\right|^{p(x)}+\left|t_0v_0^-\right|^{p(x)}\right)dx$$

$$-\lambda\int_\Omega a\left(x\right)\left(1-\alpha\left(x\right)\right)\left|t_0u_0^-\right|^{1-\alpha(x)}dx-\mu\int_\Omega b\left(x\right)\left(1-\alpha\left(x\right)\right)\left|t_0v_0^-\right|^{1-\alpha(x)}dx$$

$$-\int_{\partial\Omega}c\left(x\right)\left(q\left(x\right)+r\left(x\right)\right)\left|t_0u_0^-\right|^{q(x)}\left|t_0v_0^-\right|^{r(x)}dx$$

$$\leq t_0^{p^+}p^+\left(\int_\Omega\left(\left|\nabla u\right|^{p(x)}+\left|u\right|^{p(x)}\right)dx+\int_\Omega\left(\left|\nabla v\right|^{p(x)}+\left|v\right|^{p(x)}\right)dx\right)$$

$$-t_0^{1-\alpha^+}\left(1-\alpha^+\right)\left(\int_\Omega\lambda a\left(x\right)\left|u\right|^{1-\alpha(x)}+\mu b\left(x\right)\left|v\right|^{1-\alpha(x)}dx\right)$$

$$-t_0^{q^-+r^-}\left(q^-+r^-\right)\int_{\partial\Omega}c\left(x\right)\left|u\right|^{q(x)}\left|v\right|^{r(x)}dx$$

$$\leq\left(t_0^{p^+}p^+-t_0^{q^++r^+}\left(q^-+r^-\right)\right)$$

$$\times\left(\int_\Omega\left(\left|\nabla u_0^-\right|^{p(x)}+\left|u_0^-\right|^{p(x)}\right)dx+\int_\Omega\left(\left|\nabla v_0^-\right|^{p(x)}+\left|v_0^-\right|^{p(x)}\right)dx\right)$$

$$+\left(t_0^{q^-+r^-}\left(q^-+r^-\right)-t_0^{1-\alpha^+}\left(1-\alpha^+\right)\right)$$

$$\times\left(\lambda\int_\Omega a\left(x\right)\left|u_0^-\right|dx-\mu\int_\Omega b\left(x\right)\left|v_0^-\right|dx\right)$$

$$\leq 2\left(t_0^{p^+}p^+-t_0^{q^++r^+}\left(q^-+r^-\right)\right)\left\|u_0^-,v_0^-\right\|^{p^-}$$

$$+c_5\left(t_0^{q^-+r^-}\left(q^-+r^-\right)-t_0^{1-\alpha^+}\left(1-\alpha^+\right)\right)\left(\lambda+\mu\right)\left\|u,v\right\|^{1-\alpha^+}.$$

لما $1-\alpha^+<p^+<q^-+r^-$ فإن $I'_{\lambda,\mu}\left(t_0u_0^-,t_0v_0^-\right)<0$، و بواسطة تعريف $\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{-}$ لدينا $\left(t_0u_0^-,t_0v_0^-\right)\in\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{-}$.

الآن سوف نثبت أن $u_n^-\to u_0^-$ قوي في $W^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$ و $v_n^-\to v_0^-$ قوي في $W^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$، نفرض خلاف ذلك، لدينا:

$$\left\|u_0^-\right\|_p\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|u_n^-\right\|_p \quad \text{،} \quad \left\|v_0^-\right\|_p\leq\underline{\lim}_{n\to\infty}\left\|v_n^-\right\|_p$$

إذن لدينا

$$E_{\lambda,\mu}\left(t_0u_0^-,t_0v_0^-\right)\leq t_0^{p^+}L\left(u_0^-,v_0^-\right)-t_0^{1-\alpha^+}P\left(u_0^-,v_0^-\right)-t_0^{q^-+r^-}Q\left(u_0^-,v_0^-\right)$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}\left[t_0^{p^+}L\left(u_n^-,v_n^-\right)-t_0^{1-\alpha^+}P\left(u_n^-,v_n^-\right)-t_0^{q^-+r^-}Q\left(u_n^-,v_n^-\right)\right]$$

$$\leq \lim_{n\to\infty}E_{\lambda,\mu}\left(t_0u_n^-,t_0v_n^-\right)\leq E_{\lambda,\mu}\left(u_n^-,v_n^-\right)=\inf_{u\in\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu}}E_{\lambda,\mu}\left(u,v\right)=c^-_{\lambda,\mu}.$$

هذا ما يتناقض مع حقيقة أن $\left(t_0u_0^-,t_0v_0^-\right)\in\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu}$، وهكذا

$u_n^-\to u_0^-$ حل قوي في $W^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$

و

$v_n^-\to v_0^-$ حل قوي في $W^{1,p(x)}\left(\Omega\right)$

هذا يستلزم أن $E_{\lambda,\mu}\left(u_n^-,v_n^-\right)\to\inf_{u\in\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu}}E_{\lambda,\mu}\left(u,v\right)$ و هنا ينتهي البرهان. □

برهان. لإثبات النظرية (1.0.3) ، سنبدأ بإثبات وجود الحلول الموجبة.

أولا باستخدام النظريات (1.3.3) و (1.4.3)، نستنتج أنه يوجد $\left(u_0^+,v_0^-\right)\in\mathcal{N}^+_{\lambda,\mu}$ و $\left(u_0^-,v_0^-\right)\in\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu}.$ يحقق:

$$E_{\lambda,\mu}\left(u_0^+,v_0^+\right)=\inf_{u\in\mathcal{N}^+_{\lambda,\mu}}E_{\lambda,\mu}\left(u,v\right).$$

و

$$E_{\lambda,\mu}\left(u_0^-,v_0^-\right)=\inf_{u\in\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu}}E_{\lambda,\mu}\left(u,v\right).$$

علاوة على ذلك و بما أن $E_{\lambda,\mu}\left(\left|u_0^+\right|,\left|v_0^+\right|\right)=E_{\lambda,\mu}\left(u_0^+,v_0^+\right)$ و $\left(\left|u_0^+\right|,\left|v_0^+\right|\right)\in\mathcal{N}^+_{\lambda,\mu}$ و بصورة مماثلة $E_{\lambda,\mu}\left(\left|u_0^-\right|,\left|v_0^-\right|\right)=E_{\lambda,\mu}\left(u_0^-,v_0^-\right)$ و $\left(\left|u_0^-\right|,\left|v_0^-\right|\right)\in\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu}$ ، نستطيع أن نفرض أن $0\geq\left(u_0^\pm,v_0^\pm\right)$.

من التوطئة (1.2.3)، $\left(u_0^\pm,v_0^\pm\right)$ هي نقطة حرجة ل $E_{\lambda,\mu}$ على W ، و بما أنها حلول ضعيفة للمسألة(1.0.3).

أخيرا، حسب متراجحة هارناك [35]، نحصل على $\left(u_0^\pm,v_0^\pm\right)$ و هي حلول موجبة للمسألة(1.0.3).

يبقى أن نظهر أن الحلول الموجودة في النظريات (1.3.3) و (1.4.3) مختلفة حيث: $\mathcal{N}^+_{\lambda,\mu}\cap\mathcal{N}^-_{\lambda,\mu}=\emptyset$، $\left(u_0^\pm,v_0^\pm\right)$ مختلفة أيضا و هنا ينتهي البرهان. □

الخاتمـــة

في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة تعدد و وجود الحلول الموجبة لنظام بيضوي ذو نقاط حرجة يتضمن مؤثر $p(x)$-لابلاس، باستخدام تقنية الألياف المطبقة على منوعات نيهاري.

يمكن تعميم هذه النتائج لمسائل أكثر تعقيدا بشروط حدية مختلفة، و قد تتم معالجتها بطرق أخرى سواء متحولية، طريقة الحلول الفوقية و التحتية أو الدرجة الطبولوجية.

نأمل أن نطبق هذه الطريقة على جملة حرجة تتضمن مؤثر p- لابلاس الكسري $(-\triangle)_{\mathrm{p}}^{s}$ مع شروط حدية قد تكون متجانسة أو غير متجانسة.

قائمة المصطلحات العلمية

اللغة العربية	اللغة الإنجليزية
نظام بيضوي	Elliptic system
خريطة الألياف	Fibering map
منوعات نيهاري	Nehari manfiolds
مركبات لاغرانج	Lagrange multipliers
مؤثر $p(x)$- لابلاس	$p(x)-$Laplace operator
قوى متغيرة	variable exponents
الإحتواء المستمر	The continuous embedding
الإحتواء المتراص	The compact embedding
الفضاء المرافق	Conjugate space
النقاط الحرجة	The critical points
حيثما كان تقريبا	Almost evrywhere (a.e)
قابلة للقياس	Measurable
المتتالية المُصَغِّرَة	Minimising sequence
شبه مستمرة من الأسفل	Semi continious below
مشتقات بمعنى غاتو	Gateaux derivatives

المراجع العلميـــة

[1] Acerbi, E, and Giuseppe,M . "Regularity results for a class of functionals with non-standard growth." Archive for Rational Mechanics and Analysis 2.156 (2001) : .140-121

[2] Chabrowski,J, and Yongqiang,F. "Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian problems on a bounded domain." Journal of Mathematical Analysis and applications 2.306 (2005) : .618-604

[3] Coclite, M, and Palmieri,G. "On a singular nonlinear Dirichlet problem." Communications in Partial Dffierential Equations 10.14 (1989) : .1327-1315

[4] Crandall, M . Paul,G. Rabinowitz,H and Tartar.L. "On a Dirichlet problem with a singular nonlinearity." Communications in Partial Dffierential Equations 2.2 (1977) : .222-193

[5] Diening, L. Theoretical and numerical results for electrorheological fluids. Diss. Ph. D. thesis, University of Freiburg, Germany, .2002

[6] Drábek, P, and Pohozaev,S.I. "Positive solutions for the p-Laplacian : application of the fibrering method." Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics 4.127 (1997) : .726-703

[7] Chermisi, M, and Enrico ,V. "Fibered nonlinearities for $p(x)$-Laplace equations." (2009) : .205-185

[8] Fan, X, and Xiaoyou ,H. "Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equations in R^N". Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications 2-1.59 (2004) : .188-173

[9] Fan, X, Jishen ,S, and Dun ,Z. "Sobolev embedding theorems for spaces $W^{k,p(x)}()$". Journal of Mathematical Analysis and Applications 2.262 (2001) : .760-749

[10] Fan, X, and Qi-Hu Zhang. "Existence of solutions for $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem." Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications 8.52 (2003) : .1852-1843

[11] Fan, X, Qihu ,Z, and Dun ,Z. "Eigenvalues of $p(x)$-Laplacian Dirichlet problem." Journal of Mathematical Analysis and Applications 2.302 (2005) : .317-306

[12] Fan, X, and Dun ,Z. "On the spaces $L^{p(x)}()$ and $W^{m,p(x)}()$". Journal of mathematical analysis and applications 2.263 (2001) : .446-424

[13] Ghanmi, A, and Saoudi,K. "The Nehari manfiold for a singular elliptic equation involving the fractional Laplace operator." RN 1 (2016) : .2

[14] Ghanmi, A., and Saoudi,K. "A multiplicity results for a singular problem involving the fractional p-Laplacian operator." Complex variables and elliptic equations 9.61 (2016) : .1216-1199

[15] Ghergu, M and Radulescu, V, Singular Elliptic Problems. Bfiurcation and Asymptotic Analysis. OUP USA, .2008

[16] Giacomoni, J., and Saoudi,K. "Multiplicity of positive solutions for a singular and critical problem." Nonlinear Analysis : Theory, Methods and Applications 9.71 (2009) : .4077-4060

[17] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*. Théorie et applications .(1983)

[18] Kratou, M., Saoudi, K. .(2021) The fibering map approach for a singular elliptic system involving the p (x)-Laplacian and nonlinear boundary conditions. Revista de la Unión Matemática Argentina, ,(1)62 .189-171

[19] Kováčik, O, and Rákosník,J. "On Spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$". Czechoslovak Mathematical Journal 4.41 (1991) : .618–592 Web.

[20] Kavian, O. .(1993) Introduction à la théorie des points critiques : et applications aux problèmes elliptiques (Vol. .(13 Paris : Springer-Verlag.

[21] Liu, J. "Positive solutions of the $p(x)$-Laplace equation with singular nonlinearity." Nonlinear Analysis : Theory, Methods Applications 12.72 (2010) : .4437-4428

[22] Mashiyev, R. A., et al. "The Nehari manfiold approach for Dirichlet problem involving the $p(x)$-Laplacian equation." Journal of the Korean Mathematical Society 4.47 (2010) : .860-845

[23] Mihăilescu, M, and Rădulescu,v. "A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of electrorheological fluids." Proceedings of the Royal Society A : Mathematical, Physical and Engineering Sciences 2073.462 (2006) : .2641-2625

[24] Rasouli, S. H. "On a PDE involving the variable exponent operator with nonlinear boundary conditions." Mediterranean Journal of Mathematics 3.12 (2015) : .837-821

[25] Rasouli, S. H., and K. Fallah. "On a class of elliptic systems involving the $p(x)$-Laplacian and nonlinear boundary conditions." Journal of Contemporary Mathematical Analysis 4.49 (2014) : .183-175

[26] Saiedinezhad, S., and Ghaemi,M. B. "The fibering map approach to a quasilinear degenerate $p(x)$-Laplacian equation." Bulletin of the Iranian Mathematical Society 6.41 (2015) : .1492-1477

[27] Saoudi, K. "The fibering map approach to a $p(x)$-Laplacian equation with singular nonlinearities and nonlinear Neumann boundary conditions." Rocky Mountain Journal of Mathematics 3.48 (2018) : .946-927

[28] Saoudi, K. "Existence and non-existence of solutions for a singular problem with variable potentials." Electron. J. Dffierential Equations 9.291 .(2017)

[29] Saoudi, K. "Existence and multiplicity of solutions for a quasilinear equation involving the $p(x)$-Laplace operator." Complex Variables and Elliptic Equations 3.62 (2017) : .332-318

[30] Saoudi, K. "Existence and non-existence of solution for a singular nonlinear Dirichlet problem involving the $p(x)$-Laplace operator." J. Adv. Math. Stud 2.9 (2016) : .303-292

[31] Saoudi, K., and Ghanmi,A. "A multiplicity results for a singular equation involving the $p(x)$-Laplace operator." Complex Variables and Elliptic Equations 5.62 (2017) : .725-695

[32] Saoudi,K and Kratou,M, Existence of multiple solutions for a singular and quasilinear equation, Complex Var. Elliptic Equ. 60 ,(2015) no. 7,.925–893 MR .3350472

[33] Saoudi, K., Kratou,M, and S. Alsadhan. "Multiplicity results for the-Laplacian equation with singular nonlinearities and nonlinear Neumann boundary condition." International Journal of Dffierential Equations 2016 .(2016)

[34] Taghavi, A., Afrouzi,G. A and Ghorbani,H. "The Nehari manfiold approach for $p(x)$-Laplacian problem with Neumann boundary condition." Electronic Journal of Qualitative Theory of Dffierential Equations 39.2013 (2013) : .14-1

[35] Zhang, X, and Xianping L. "The local boundedness and Harnack inequality of $p(x)$-Laplace equation." Journal of mathematical analysis and applications 1.332 (2007) : .218-209