



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de *MASTER*
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

La structure périodique de certaines classes de systèmes différentiels

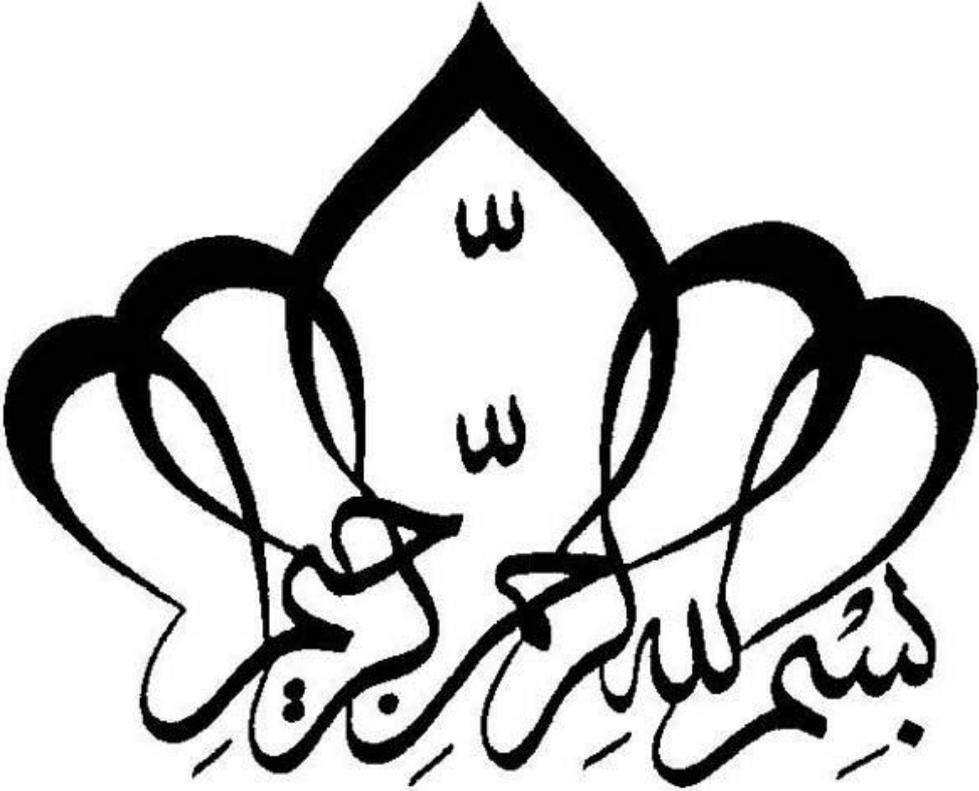
Présenté Par:
Achab Abdelkrim,
Douaifia Oumaima

Devant le jury :

Mr, Hannachi Fareh
Mr, Saidan Ridha
Mr, Diab Zouhair

M.C.A Université Larbi Tébessi Président
M.A.A Université Larbi Tébessi Examineur
M.C.A Université Larbi Tébessi Encadreur

Date de soutenance : 11/06/2022



شكر و عرفان



نحمد الله و نشكره شكرا جزيلًا إذ هو خالقنا، و معيننا
فهو الأولى بالشكر في كل الأوقات و الظروف.
نحمد الله عز و جل و نشي عليه الخير كله الذي وفقنا
لإتمام هذا العمل، و نسأله ان يجعل هذا كله
خالصا لوجهه الكريم و أن ينفعنا به و ينفع به من بعدنا.
نتقدم بكل إحترام و تقدير بشكرنا و عرفاننا للأستاذ
الفاضل الذي كان موجهاً في البحث العلمي
"ذياب زوهير"،

الذي كان له الفضل الكبير في شق الطريق نحو النجاح
و على كل النصائح و التوجيهات.

كما نتقدم بالشكر لكل الأساتذة في تكويننا عبر مسيرتنا الدراسية
من الإبتدائية إلى الجامعة،

و إلى كل من قدم لنا يد المساعدة من قريب أو من بعيد
فله منا خالص الإحترام و التقدير،

نسأل الله أن يجازي الجميع كل الخير.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A ma chère mère,

A mon cher père,

Qui n'a jamais cessé de prier pour moi, pour me soutenir

Et aidez-moi à atteindre mes objectifs.

A mes frères,

A mes chères sœurs,

A tous pour leur soutien moral et leurs précieux conseils tout au long de mes études.

Qui m'a aidé et soutenu dans les moments difficiles.

A mes chers amis "Aimen seghier" "Boukheris Zineddine" "Nouioua Ayoub"
"Ayman Rabhi"

Pour les aider et les soutenir dans les moments difficiles,

A toute ma famille,

A tous mes autres amis,

A tous ceux que j'aime et à ceux qui m'aiment,

Achab Abdelkrim.

Dédicace

Je dédie ce mémoire :

A ma chère mère,

A mon cher père,

Qui n'a jamais cessé de prier pour moi, pour me soutenir

Et aidez-moi à atteindre mes objectifs.

A mes frères,

A mes chères sœurs,

A tous pour leur soutien moral et leurs précieux conseils tout au long de mes études.

Qui m'a aidé et soutenu dans les moments difficiles.

Pour les aider et les soutenir dans les moments difficiles,

A toute ma famille,

A tous mes amis,

A tous ceux que j'aime et à ceux qui m'aiment,

Douaifia Oumaima.

Résumé

Dans ce travail, d'abord, nous fournissons les conditions suffisantes pour l'existence de solutions périodiques émergeant de la précession cylindrique d'un satellite symétrique sur une orbite circulaire ayant des équations de mouvement

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} - (4 - 3\alpha)x = \varepsilon F_1\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right),$$
$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} - y = \varepsilon F_2\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

où α et ε sont des paramètres réels tels que ε est petit et $1 < \alpha < 4/3$. Le paramètre $\alpha = A/C$ avec A et C sont les moments d'inertie du satellite symétrique et les fonctions lisses F_1 et F_2 sont périodiques en τ et en résonance $p : q$ avec certaines des solutions périodiques du satellite symétrique en précession cylindrique, avec p et q sont des entiers positifs et relativement premiers.

Dans la seconde partie de ce travail, nous étudions les solutions périodiques de deux versions distinctes du système différentiel de Michelson :

Un système différentiel linéaire par morceaux continus de Michelson et un système différentiel linéaire par morceaux discontinus de Michelson. Les outils utilisés ici sont la Méthode de moyennisation pour les systèmes différentiels continus et discontinus.

Mots clés : Solution périodique, Satellite symétrique, Système de Michelson, Méthode de la moyennisation.

Abstract

In this work, first we provide sufficient conditions for the existence of periodic solutions emerging from the cylindrical precession of a symmetrical satellite in a circular orbit having equations of motion

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} - (4 - 3\alpha)x = \varepsilon F_1\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right),$$
$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} - y = \varepsilon F_2\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

where α and ε are real parameters such that ε is small and $1 < \alpha < 4/3$. The parameter $\alpha = A/C$ with A and C are the moments of inertia of the symmetrical satellite and the smooth functions F_1 and F_2 are periodic in τ and in resonance $p : q$ with some of the periodic solutions of the symmetrical satellite in cylindrical precession, with p and q relatively prime positive integers.

In the second part of this work, we study the periodic solutions of two distinct versions of the Michelson differential system: a Michelson continuous piecewise linear differential system and a Michelson discontinuous piecewise linear differential system. The tools used here are the averaging method for continuous and discontinuous differential systems.

Keywords: Periodic solution, Symmetrical satellite, Michelson system, Averaging theory.

ملخص:

في هذا العمل، أولاً، نقدم الشروط الكافية لوجود الحلول الدورية الناشئة عن الحركة الأسطوانية لقمر صناعي متمائل في مدار دائري و الذي له معادلات الحركة الآتية

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} - (4 - 3\alpha)x = \varepsilon F_1\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} - y = \varepsilon F_2\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right),$$

هنا α و ε هما وسيطان حقيقيان حيث ε صغير جدا و $1 < \alpha < 4/3$.

الوسيط $\alpha = A/C$ حيث A و C هي لحظات القصور الذاتي للقمر الصناعي المتمائل و الدوال الناعمة F_1 و F_2 هي دوال دورية بالنسبة ل τ و بتجاوب $p : q$ مع بعض الحلول الدورية للقمر الصناعي المتمائل حيث p و q اوليان فيما بينهما.

في الجزء الثاني من هذا العمل، نقوم بدراسة الحلول الدورية لنوعين متميزتين من نظام ميشلسون: نظام تفاضلي خطي بالأجزاء مستمر و نظام تفاضلي خطي بالأجزاء متقطع.

. الأدوات المستخدمة هنا هي طريقة المتوسط للأنظمة التفاضلية المستمرة و المتقطعة.

الكلمات المفتاحية: حل دوري، قمر صناعي متمائل، نظام ميشلسون، طريقة المتوسط.

Table des matières

Introduction générale	2
1 Notions préliminaires	3
1.1 Système différentiel	3
1.2 Système différentiel polynomial du plan	3
1.3 Système autonome	4
1.4 Système dynamique	4
1.5 Champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^k	4
1.6 Point critique	4
1.7 Linéarisation de système	5
1.8 Point critique hyperbolique	5
1.9 Point critique dégénéré	5
1.10 Point critique puits	5
1.11 Point critique source	5
1.12 Point critique selle	6
1.13 Flot du système différentiel linéaire	6
1.14 Sous-espace invariant par rapport au flot	6
1.15 Flot du système différentiel non linéaire	6
1.16 Ensemble invariant par rapport au flot	7
1.17 Dérivé orbital	7
1.18 Plan et portrait de phase	7
1.19 Courbes invariantes	7
1.20 Cycle limite	8
1.21 Cycle limite hyperbolique	8
1.22 Cycle limite algébrique	8
1.23 Centre	8
1.24 L'intégrabilité des systèmes différentiels	9
1.25 Solution périodique	9
2 Méthode de moyennisation	10
2.1 Autre méthode de moyennisation du premier ordre	10
2.2 Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels continus	11

TABLE DES MATIÈRES

2.3	Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus	12
3	Les solutions périodiques émergeant de la précession cylindrique d'un satellite axisymétrique en orbite circulaire	14
3.1	Introduction et résultats principaux	14
3.2	Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2	19
3.3	Preuve des deux corollaires	23
4	Les solutions périodiques du système différentiel linéaire par morceaux continus et discontinus de Michelson	25
4.1	Introduction	25
4.2	Preuve des Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2	28
4.2.1	Preuve du Théorème 4.1.1	28
4.2.2	Preuve du Théorème 4.1.2	31
	Conclusion générale	35
	Bibliographie	36

Introduction générale

Un des problèmes importants de la théorie qualitative des équations différentielles est l'étude de leurs cycles limites. La deuxième partie du 16^{ème} problème bien connu de Hilbert [28] pose des questions sur le nombre maximal et les positions relatives possibles des cycles limites dans les systèmes différentiels polynomiaux planaires de degré $n \geq 2$. Ce problème est toujours ouvert, même pour les cas $n = 2$. Un problème plus facile que le 16^{ème} problème de Hilbert est d'étudier le nombre de cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques d'un centre de système différentiel polynomial. De nombreux auteurs ces dernières années ont étudié ce dernier problème restreint aux centres des systèmes différentiels polynomiaux quadratiques, voir par exemple le livre [9] et les centaines de références qui y sont citées. Les outils pour étudier les cycles limites qui peuvent bifurquer des orbites périodiques d'un centre sont l'application de retour de Poincaré (voir par exemple [2, 18]), les intégrales de Poincaré - Melnikov (voir pour exemple [16, 17]), les intégrales abéliennes (voir [9, 31]), la méthode de moyennisation (voir par exemple [1, 10]), et le facteur intégrant inverse (voir [15]).

Notre travail est réparti de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques notions générales et préliminaires des systèmes dynamiques.

Dans le deuxième chapitre, nous présentons quelques méthodes de moyennisation du premier ordre en trois cas :

- 1) Pour les systèmes différentiels dont le champ de vecteurs associés sont de classe \mathcal{C}^2 .
- 2) Pour les systèmes différentiels continus.
- 3) Pour les systèmes différentiels discontinus.

Dans le troisième chapitre, on étudie l'existence des solutions périodiques pour les systèmes d'équations différentielles suivants

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{d\tau^2} - 2\frac{dy}{d\tau} - (4 - 3\alpha)x = \varepsilon F_1 \left(\tau, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right), \\ \frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\frac{dx}{d\tau} - y = \varepsilon F_2 \left(\tau, x, \frac{dx}{dt}, y, \frac{dy}{dt} \right), \end{cases}$$

où ε et α sont des paramètres réels tels que ε est petit et $\alpha \in \left] 1, \frac{4}{3} \right[$ et F_1 et F_2 sont

des fonctions lisses périodiques en τ . En utilisant la méthode de moyennisation du premier ordre.

Dans le dernier chapitre. on applique les nouveaux résultats de la méthode de moyennisation pour les systèmes différentiels continus et discontinus, et on étudie les solutions périodiques de deux types distincts du système différentiel de Michelson : un système différentiel linéaire par morceaux continus de Michelson

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y + \varepsilon(2d^2 - |x|), \end{cases}$$

et un système différentiel linéaire par morceaux discontinus de Michelson

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y + \varepsilon(2d^2 - |x| - \text{sign } x), \end{cases}$$

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons quelques notions générales et préliminaires des systèmes dynamiques qui seront utilisés dans cette mémoire.

1.1 Système différentiel

Définition 1.1.1 *Un système différentiel d'ordre 1 est l'équation*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

où f est une fonction continue sur $I \times U$ à valeurs dans \mathbb{R}^n , $I \subset \mathbb{R}$ étant un intervalle ouvert et U étant un ouvert de \mathbb{R}^n . Un couple (J, x) , où $J \subset I$ est un intervalle ouvert $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 , est une solution de (1.1) si

- (1) Pour tout $t \in J$, $x(t) \in U$,
- (2) Pour tout $t \in J$, $\dot{x}(t) = f(t, x(t))$.

1.2 Système différentiel polynomial du plan

Définition 1.2.1 *On appelle système différentiel polynomial du plan un système de la forme*

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y) \\ \dot{y} = Q(x, y) \end{cases} \tag{1.2}$$

où P et Q sont des polynômes à coefficients réels.

Le système (1.2) est de degré d , où $d = \max(\deg P, \deg Q)$.

1.3 Système autonome

Définition 1.3.1 Un système différentiel dans lequel la variable indépendante n'apparaît pas explicitement, c'est-à-dire un système de la forme

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.3}$$

est un système autonome.

1.4 Système dynamique

Définition 1.4.1 Un système dynamique sur \mathbb{R}^n est une application $\Psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tel que

- (1) $\Psi(., x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- (2) $\Psi(t, .) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue
- (3) $\Psi(0, x) = x$
- (4) $\Psi(t + s, x) = \Psi(t, \Psi(s, x)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^n$

1.5 Champ de vecteurs de classe C^k

Définition 1.5.1 Soit U un ouvert de \mathbb{R}^n , un champ de vecteurs X de classe C^k sur U est la donnée d'une application $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k

$$X : x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)).$$

On lui associe le système différentiel

$$\dot{x}_i = f_i(x), \quad i = 1, \dots, n \tag{1.4}$$

où les fonctions $f_i(x)$ (appelées les composantes du champ de vecteurs X) sont des fonctions de classe C^k sur l'ouvert U .

1.6 Point critique

Définition 1.6.1 Soit le système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x). \tag{1.5}$$

On appelle point critique ou point d'équilibre du système différentiel (1.5), tout point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(x_0) = 0.$$

1.7 Linéarisation de système

Définition 1.7.1 *Considérons le système différentiel (1.5). Le système*

$$\dot{x} = Ax, \tag{1.6}$$

où

$$A = Df(x_0) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right)_{1 \leq i, j \leq n},$$

et

$$f(x_0) = 0,$$

est appelé le linéarisé de (1.5) en x_0 .

1.8 Point critique hyperbolique

Définition 1.8.1 *Un point critique x_0 de système différentiel (1.5) est dit hyperbolique lorsque toutes les valeurs propres de la matrice Jacobienne $A = Df(x_0)$ sont à partie réelle non nulle. Dans le cas contraire, il est dit non-hyperbolique.*

1.9 Point critique dégénéré

Définition 1.9.1 *Un point critique x_0 de système différentiel (1.5) est dit dégénéré si au moins une des n valeurs propres de la matrice Jacobienne $A = Df(x_0)$ est nulle.*

1.10 Point critique puits

Définition 1.10.1 *Un point critique x_0 de système différentiel (1.5) est appelé puits si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement négatives.*

1.11 Point critique source

Définition 1.11.1 *Un point critique x_0 de système différentiel (1.5) est appelé source si toutes les valeurs propres de la matrice $A = Df(x_0)$ ont des parties réelles strictement positives.*

1.12 Point critique selle

Définition 1.12.1 Un point critique x_0 de système différentiel (1.5) est appelé s'il est hyperbolique et si $A = Df(x_0)$ a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive et au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

1.13 Flot du système différentiel linéaire

Définition 1.13.1 Soit le système différentiel linéaire

$$\dot{x} = Ax \tag{1.7}$$

et le problème à valeurs initiales

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0 \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.8}$$

où A est une matrice constant ($n \times n$), la solution au problème (1.8) est $x(t) = e^{At}x_0$, l'ensemble des applications $e^{At} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelé le flot du système linéaire (1.7).

Définition 1.13.2 Si toutes les valeurs propres de la matrice A des parties réelles non nulles alors le flot du système (1.7) est dit hyperbolique et le système (1.7) est dit hyperbolique.

1.14 Sous-espace invariant par rapport au flot

Définition 1.14.1 Un sous-espace $E \subset \mathbb{R}^n$ est invariant par rapport au flot e^{At} si $e^{At}E \subset E$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.15 Flot du système différentiel non linéaire

Définition 1.15.1 Soit le système différentiel non linéaire

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.9}$$

et le problème à valeurs initiales

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0 \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.10}$$

Soit $I(x_0) = (\alpha, \beta)$, l'intervalle maximale d'existence de la solution de (1.10), soit E un sous ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in C^1(E)$. Pour $x_0 \in E$ et $\phi(t, x_0)$ la solution du problème à valeurs initiales (1.10), l'ensemble des applications ϕ_t définis par

$$\phi_t(x_0) = \phi(t, x_0),$$

est appelé le flot du système différentiel (1.9).

ϕ_t est également appelé le flot du champ de vecteurs $f(x)$.

1.16 Ensemble invariant par rapport au flot

Définition 1.16.1 Soit E un ouvert de \mathbb{R}^n et $f \in \mathcal{C}^1(E)$, soit $\phi_t : E \rightarrow E$ le flot du système (1.9) défini pour tout $t \in \mathbb{R}$. Alors un ensemble $S \subset E$ est appelé invariant par rapport au flot ϕ_t si $\phi_t(S) \subset S$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ et S est appelé positivement (ou négativement) invariant par rapport au flot ϕ_t si $\phi_t(S) \subset S$ pour tout $t \geq 0$ (ou $t \leq 0$).

1.17 Dérivé orbital

Définition 1.17.1 Considérons la fonction différentiable $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction vectorielle $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$. La dérivée L_t de la fonction F le long de la fonction vectorielle x , paramétrée par t , est

$$L_t F = \frac{\partial F}{\partial x} \dot{x} = \frac{\partial F}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \dot{x}_n$$

où $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sont les composants de x . L_t est appelé le dérivé orbital.

1.18 Plan et portrait de phase

Définition 1.18.1 Soit le système planaire

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x, y), \\ \dot{y} = Q(x, y), \end{cases} \quad (1.11)$$

un portrait de phase est l'ensemble des trajectoires dans l'espace de phase. En particulier, pour les systèmes autonomes d'équations différentielles ordinaires de deux variables. Les solutions $(x(t), y(t))$ du système (1.11) représentent dans le plan (x, y) des courbes appelées orbites. Les points critiques de ce système sont des solutions constantes et la figure complète des orbites de ce système ainsi que ces points critiques représentent le portrait de phase et le plan (x, y) est le plan de phase.

1.19 Courbes invariantes

Définition 1.19.1 On appelle courbe invariante du système

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y), \\ \dot{y} = G(x, y), \end{cases}$$

toute courbe d'équation $U(x, y) = 0$ du plan de phases qui vérifie

$$F \frac{\partial U}{\partial x} + G \frac{\partial U}{\partial y} = KU,$$

la fonction $K(x, y)$ est appelée cofacteur associé à la courbe invariante U .

Définition 1.19.2 Une courbe invariante $U(x, y) = 0$ est dite algébrique de degré n si $U(x, y)$ est un polynôme de degré n ; si non on dit qu'elle est non algébrique ou transcendante.

1.20 Cycle limite

Définition 1.20.1 On appelle cycle limite toute trajectoire périodique qui est isolée dans l'ensemble des trajectoires périodiques.

Poincaré introduit cette notion dans son second mémoire de 1882, à partir de ses travaux sur le problème des trois corps notamment.

Remarque 1.1 Les cycles limites apparaissent seulement dans les systèmes différentiels non linéaires.

1.21 Cycle limite hyperbolique

Définition 1.21.1 Supposons que le système (1.11) a une orbite périodique $\gamma(t)$ de période T . Soit

$$\delta = \int_0^T \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) (\gamma(t)) dt.$$

Si $\delta > 0$ (resp. $\delta < 0$) alors l'orbite périodique $\gamma(t)$ est un cycle limite instable (respectivement stable). Une orbite périodique $\gamma(t)$ ayant $\delta \neq 0$ est un cycle limite hyperbolique.

1.22 Cycle limite algébrique

Définition 1.22.1 Un cycle limite $\Gamma(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, U(x, y) = 0\}$, est dit algébrique si $U(x, y)$ est un polynôme, autrement le cycle limite est dit non-algébrique ou transcendant.

1.23 Centre

Définition 1.23.1 On dit que $p \in \mathbb{R}^2$ est un centre pour le système différentiel (1.2) s'il existe un voisinage U de p dans lequel toutes les orbites de $U \setminus \{p\}$ sont périodiques.

1.24 L'intégrabilité des systèmes différentiels

Définition 1.24.1 On considère le système différentiel autonome

$$\dot{x} = f(x),$$

où $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe \mathcal{C}^2 , $x \in U$ est un sous-ensemble ouvert de \mathbb{R}^n . Soit $\phi(t, x_0)$ sa solution telle que $\phi(0, x_0) = x_0 \in U$. On dit que la solution $\phi(t, x_0)$ est T -périodique avec $T > 0$ si et seulement si $\phi(T, x_0) = x_0$ et $\phi(t, x_0) \neq x_0$ pour $t \in (0, T)$. Soit $F : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction non constante de classe \mathcal{C}^1 telle que

$$\nabla F(x) \cdot f(x) = 0,$$

où

$$\nabla F(x) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

Alors F est appelée l'intégrale première du système différentiel $\dot{x} = f(x)$, car F est constante sur les solutions de ce système.

1.25 Solution périodique

Définition 1.25.1 On appelle solution périodique du système (1.3) toute solution $\xi(t) = x(t)$ qui n'est pas un point fixe et pour laquelle il existe un réel $T > 0$ tel que $\forall t \in [0, T], \xi(t + T) = \xi(t)$.

Le plus petit nombre T qui convient s'appelle alors période de cette solution.

On peut définir les notions de stabilité, stabilité asymptotique et instabilité de la solution périodique en généralisant la définition relative à un point d'équilibre.

Méthode de moyennisation

2.1 Autre méthode de moyennisation du premier ordre

On considère le problème de bifurcation des solutions T -périodiques du système différentiel de la forme

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G_0(t, \mathbf{x}) + \varepsilon G_1(t, \mathbf{x}) + \varepsilon^2 G_2(t, \mathbf{x}, \varepsilon), \quad (2.1)$$

avec $\varepsilon = 0$ à $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit. Ici les fonctions $G_0, G_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $G_2 : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont des fonctions de classe \mathcal{C}^2 , T -périodiques en la première variable t , et Ω est un ouvert de \mathbb{R}^n . L'hypothèse principale est que le système non perturbé

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = G_0(t, \mathbf{x}), \quad (2.2)$$

possède une sous-variété de solutions périodiques. Une solution de ce problème est donnée en utilisant la méthode de moyennisation.

Soit $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, \varepsilon)$ la solution du système (2.2) tel que $\mathbf{x}(0, \mathbf{z}, \varepsilon) = \mathbf{z}$. La linéarisation du système non-perturbé le long de la solution T -périodique $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0)$ est écrite comme

$$\dot{\mathbf{y}} = D_{\mathbf{x}}G_0(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}, 0))\mathbf{y}. \quad (2.3)$$

On note par $M_{\mathbf{z}}(t)$ la matrice fondamentale du système différentiel linéaire (2.3), et par $\xi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}^k$ la projection de \mathbb{R}^n sur ses k premières coordonnées; c'est-à-dire $\xi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$.

On suppose qu'il existe une sous-variété $\mathcal{Z} \subset \Omega$ de dimension k , avec des solutions T -périodiques de (2.2). Ensuite, une réponse au problème de la bifurcation des solutions T -périodiques à partir des solutions périodiques contenues dans \mathcal{Z} pour le système (2.1) est donnée dans le résultat suivant.

Théorème 2.1.1 Soit V un sous-ensemble ouvert et borné de \mathbb{R}^k , et soit $\beta : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^{n-k}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . Supposons que :

(i) $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in \text{Cl}(V)\} \subset \Omega$ et pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ la solution $\mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)$ de (2.2) est T -périodique ;

(ii) pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ il existe une matrice fondamentale $M_{\mathbf{z}_\alpha}(t)$ de (2.3) telle que la matrice $M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(0) - M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(T)$ a dans le bloc supérieur droit matrice $k \times (n-k)$ nulle et dans le bloc inférieur droit la matrice $\Delta_\alpha(n-k) \times (n-k)$ avec $\det(\Delta_\alpha) \neq 0$. On considère la fonction $\mathcal{G} : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^k$

$$\mathcal{G}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{T} \int_0^T M_{\mathbf{z}_\alpha}^{-1}(t) G_1(t, \mathbf{x}(t, \mathbf{z}_\alpha)) dt \right). \quad (2.4)$$

Si il existe $a \in V$ avec $\mathcal{G}(a) = 0$ et $\det((d\mathcal{G}/d\alpha)(a)) \neq 0$, alors il existe une solution T -périodique $\varphi(t, \varepsilon)$ du système (2.1) telle que $\varphi(0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{z}_\alpha$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Preuve. Voir [24] et [27] ; pour une preuve plus courte, voir [3]. ■

2.2 Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels continus

D'après le théorème B de [20], on obtient le résultat suivant adapté au système suivant (2.5), voir aussi les théorèmes 11.5 et 11.6 de [29].

Théorème 2.2.1 On considère le système suivant

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.5)$$

où $D \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert, ε est un paramètre suffisamment petit, les fonctions $F_i : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ pour $i = 0, 1$ et $R : \mathbb{R} \times D \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont T -périodiques en la variable t , et pour chaque $t \in \mathbb{R}$, les fonctions $F_0(t, \cdot) \in \mathcal{C}^1$, $F_1(t, \cdot) \in \mathcal{C}^0$, $D_x F_0$, et $R \in \mathcal{C}^0$ sont localement lipschitziennes par rapport à la seconde variable. On note par $x(t, z, \varepsilon)$ la solution du système (2.5), tel que $x(0, z, \varepsilon) = z$. Supposons qu'il existe un sous-ensemble ouvert et borné V de D avec $\bar{V} \subset D$, tel que pour tout $z \in \bar{V}$, la solution $x(t, z, 0)$ est T -périodique. On désigne par $M_z(t)$ la matrice fondamentale de l'équation variationnelle

$$\dot{x}(t) = D_x F_0(t, x(t, z, 0)),$$

associée à la solution périodique $x(t, z, 0)$, tel que $M_z(0)$ est la matrice identité. On considère la fonction $\mathcal{F} : \bar{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^t M_z^{-1}(t) F_1(t, x(t, z)) dt,$$

2.3. AUTRE MÉTHODE DE MOYENNISATION DU PREMIER ORDRE POUR LES SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS DISCONTINUS

s'il existe a telle que $\mathcal{F}(a)$ et $\det(D_z \mathcal{F}(a)) \neq 0$, alors pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système (2.5) admet une solution T -périodique $x(t, a_\varepsilon, \varepsilon)$, telle que $a_\varepsilon \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, le type de stabilité de la solution périodique $x(t, a_\varepsilon, \varepsilon)$ est donné par les valeurs propres de la matrice $D_z \mathcal{F}(a)$.

2.3 Autre méthode de moyennisation du premier ordre pour les systèmes différentiels discontinus

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert et $h : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 ayant 0 comme valeur régulière. Considérons $F^1, F^2 : \mathbb{R} \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$ fonctions continues et $\Sigma = h^{-1}(0)$. Nous définissons le système de Filippov comme

$$\dot{x}(t) = F(t, x) = \begin{cases} F^1(t, x) & \text{si } (t, x) \in \Sigma^+ \\ F^2(t, x) & \text{si } (t, x) \in \Sigma^- \end{cases} \quad (2.6)$$

où $\Sigma^+ = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times D : h(t, x) > 0\}$ et $\Sigma^- = \{(t, x) \in \mathbb{R} \times D : h(t, x) < 0\}$.

La variété Σ est divisée dans la fermeture de deux régions disjointes, à savoir la région de croisement (Σ^c) et la région de glissement (Σ^s)

$$\begin{aligned} \Sigma^c &= \{p \in \Sigma : \langle \nabla h(p), (1, F^1(p)) \rangle \cdot \langle \nabla h(p), (1, F^2(p)) \rangle > 0\}, \\ \Sigma^s &= \{p \in \Sigma : \langle \nabla h(p), (1, F^1(p)) \rangle \cdot \langle \nabla h(p), (1, F^2(p)) \rangle < 0\}. \end{aligned}$$

On considère le système différentiel associé au système (2.6)

$$\dot{x}(t) = F(t, x) = \chi_+(t, x) F^1(t, x) + \chi_-(t, x) F^2(t, x), \quad (2.7)$$

où χ_+, χ_- sont les fonctions caractéristiques définies comme

$$\chi_+(t, x) = \begin{cases} 1 & \text{si } h(t, x) > 0, \\ 0 & \text{si } h(t, x) < 0, \end{cases}$$

et

$$\chi_-(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{si } h(t, x) > 0, \\ 1 & \text{si } h(t, x) < 0. \end{cases}$$

Les systèmes (2.6) et (2.7) ne coïncident pas dans Σ , mais en appliquant la convention de Filippov pour les solutions des systèmes (2.6) et (2.7) (voir [13]) passant par un point $(t, x) \in \Sigma$, on a que ces solutions ne dépendent pas de la valeur de $F(t, x)$, donc les solutions sont les mêmes.

Soit P l'espace formé par les solutions périodiques de (2.7). Si $\dim P = \dim D = d$, alors le résultat suivant découle directement du théorème B de [19].

Théorème 2.3.1 *On considère le système différentiel*

$$\dot{x}(t) = F_0(t, x) + \varepsilon F_1(t, x) + \varepsilon^2 R(t, x, \varepsilon), \quad (2.8)$$

où

$$\begin{aligned} F_i(t, x) &= \chi_+ F_i^1(t, x) + \chi_- F_i^2(t, x), \\ R(t, x) &= \chi_+ R^1(t, x) + \chi_- R^2(t, x), \end{aligned}$$

avec $F_i^1 \in C^1$, pour $i = 0, 1$, et R^1, R^2 sont des fonctions continues, T -périodiques en la variable $t \in \mathbb{R}$ et sont localement lipschitziennes par rapport à la seconde variable.

Pour $z \in D$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, notons $x(t, z, \varepsilon)$ la solution du système (2.8), tel que $x(0, z, \varepsilon) = z$. On définit la fonction moyenne

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^t M(s, z)^{-1} F_1(s, x(s, z, 0)) ds,$$

où $x(s, z, 0)$ est une solution périodique de (2.8) avec $\varepsilon = 0$, telle que $x(0, z, 0) = z$, et $M(s, z)$ est la matrice fondamentale du système variationnel $y = D_x F_0(t, x(t, z, 0))y$ associé au système non perturbé évalué sur la solution périodique $x(s, z, 0)$, tel que $M(0, z) = Id$. De plus, nous supposons les hypothèses suivantes.

(H_-) Il existe un sous-ensemble ouvert borné $C \subset D$, tel que, pour ε suffisamment petit, chaque orbite commençant de C atteint l'ensemble de discontinuité seulement à sa région de croisement.

(H_+) Pour $a \in C$ avec $\mathcal{F}(a) = 0$, il existe un voisinage $U \subset C$ de a , tel que $\mathcal{F}(a) \neq 0$, pour tout $z \in \bar{U} \setminus \{a\}$ et $\det(D_z \mathcal{F}(a)) = 0$.

Alors, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, il existe une solution T -périodique $x(t, a_\varepsilon, \varepsilon)$ de (2.8), telle que $a_\varepsilon \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. De plus, la stabilité de la solution périodique $x(t, \varepsilon)$ est donnée par les valeurs propres de la matrice $D_z \mathcal{F}(a)$.

Les solutions périodiques émergeant de la précession cylindrique d'un satellite axisymétrique en orbite circulaire

3.1 Introduction et résultats principaux

Pour un satellite rigide à symétrie dynamique soumis aux couples gravitationnels d'un champ de force newtonien central et à d'autres petits couples perturbés, nous établissons des conditions suffisantes pour l'existence de mouvements périodiques autour du centre de masse du satellite qui sont asymptotique au mouvement de translation dans une coordonnée absolue système pour lequel l'axe de symétrie du satellite est perpendiculaire au plan de son orbite circulaire. Ce type de mouvement, appelé équilibre cylindrique, est bien connu dans la littérature sur ces sujets (voir [25], et [30] pour plus de détails). Ces mouvements ont une application importante aux problèmes d'orientation du satellite en ce qu'un satellite peut atteindre un régime nominal spécifié le long de trajectoires périodiques uniquement par l'influence des couples gravitationnels et d'autres petits couples perturbés induits par un mécanisme de contrôle. L'équilibre cylindrique est ici un cas particulier de l'un des trois types de précession régulière d'un satellite symétrique en orbite circulaire.

Dans ce mouvement, la projection de la vitesse angulaire absolue du satellite sur son axe de symétrie est nulle.

Dans ce qui suit, désignons par $OXYZ$ le système de coordonnées orbitales : l'axe OX est dirigé le long de l'orbite, l'axe OY le long de la binormale et l'axe OZ le long du rayon vecteur du centre de masse du satellite O .

De plus soit $Oxyz$ un système de coordonnées attaché au satellite, avec l'axe Oz pointant le long de l'axe de symétrie du satellite. L'orientation de ce repère $Oxyz$ par

CHAPITRE 3. LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES ÉMERGEANT DE LA PRÉCESSION CYLINDRIQUE D'UN SATELLITE AXISYMETRIQUE EN ORBITE CIRCULAIRE

rapport au repère orbital sera précisée par les angles d'Euler ψ, θ, ϕ . La projection de la vitesse angulaire absolue du satellite sur l'axe de symétrie est une intégrale du mouvement. Supposons que sa valeur soit zéro; alors en termes de variables $q_1 = \theta - \pi/2$ et $q_2 = \psi - \pi$ nous pouvons écrire les équations différentielles décrivant le mouvement de l'axe de symétrie des satellites dans le système de coordonnées orbitales comme une paire d'équations différentielles du second ordre donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{d\tau^2} - 2 \cos^2 q_1 \cos q_2 \frac{dq_2}{d\tau} + \sin q_1 \cos q_1 \left(\frac{dq_2}{d\tau} \right)^2 - \sin q_1 \cos q_1 \cos^2 q_2 \\ + 3(\alpha - 1) \sin q_1 \cos q_1 = 0, \\ \cos q_1 \frac{d^2 q_2}{d\tau^2} + 2 \cos q_1 \cos q_2 \frac{dq_1}{d\tau} - 2 \sin q_1 \frac{dq_2}{d\tau} - \cos q_1 \sin q_2 \cos q_2 = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Dans les équations précédentes, la variable τ est le temps, l'inertie du paramètre satellite $\alpha = C/A$ est définie comme le rapport de ses moments d'inertie polaire et équatorial. A partir des propriétés physiques, le paramètre α vérifie l'inégalité suivante : $0 \leq \alpha \leq 2$. La solution $q_1 = q_2 = 0$ de (3.1) correspond à un mouvement de translation du satellite (dans le repère absolu) dans lequel son axe de symétrie est perpendiculaire au plan de l'orbite.

En utilisant le changement de variable $(x, y) = (q_1, q_2)$, et la linéarisation des équations de mouvement (3.1) en $(x, y) = (0, 0)$, nous obtenons

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{d\tau^2} - 2 \frac{dy}{d\tau} - (4 - 3\alpha)x = 0, \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2 \frac{dx}{d\tau} - y = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

Dans ce travail, nous fournissons des conditions suffisantes en utilisant la méthode de moyennisation pour l'existence de solutions périodiques émergeant de la précession cylindrique d'un satellite symétrique sur une orbite circulaire ayant des équations de mouvement

$$\begin{cases} \frac{d^2 x}{d\tau^2} - 2 \frac{dy}{d\tau} - (4 - 3\alpha)x = \varepsilon F_1 \left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau} \right), \\ \frac{d^2 y}{d\tau^2} + 2 \frac{dx}{d\tau} - y = \varepsilon F_2 \left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau} \right), \end{cases} \quad (3.3)$$

où ε est un petit paramètre et les fonctions lisses F_1 et F_2 sont périodiques en τ et en résonance $p : q$ avec certaines des solutions périodiques du satellite symétrique en précession cylindrique avec p et q sont des entiers positifs relativement premiers.

3.1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

Le système non perturbé (3.2) a un point singulier unique à l'origine avec des valeurs propres

$$\pm\omega_1 i, \pm\omega_2 i,$$

et $\pm\omega_k i (k = 1, 2)$ les racines de $\omega^4 + (3\alpha - 1)\omega^2 + (4 - 3\alpha) = 0$ si le paramètre α vérifie l'inégalité suivante $1 < \alpha < 4/3$. Dans ce travail, nous supposons des fréquences non résonnantes. D'autres possibilités pour les fréquences dans le domaine complet du paramètre α sont un travail en cours. Ce système dans l'espace de phase $(x, (dx/d\tau), y, (dy/d\tau))$ a deux plans constitués de solutions périodiques. Ces solutions périodiques ont des périodes

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \text{ou} \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2},$$

en conséquence, ils appartiennent au plan associé aux vecteurs propres de valeurs propres respectivement $\pm\omega_1 i$ ou $\pm\omega_2 i$. Nous étudierons lesquelles de ces solutions périodiques persistent pour le système perturbé $\pm\omega_1 i, \pm\omega_2 i$ et $\pm\omega_k i (k = 1, 2)$ les racines de $\omega^4 + (3\alpha - 1)\omega^2 + (4 - 3\alpha) = 0$ si le paramètre α vérifie l'inégalité suivante $1 < \alpha < 4/3$. Dans ce travail, nous supposons des fréquences non résonnantes. D'autres possibilités pour les fréquences dans le domaine complet du paramètre α sont un travail en cours. Ce système dans l'espace de phase $(x, (dx/d\tau), y, (dy/d\tau))$ a deux plans constitués de solutions périodiques (variétés centrales). Ces solutions périodiques ont des périodes $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$ ou $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$ selon qu'elles appartiennent au plan associé aux vecteurs propres de valeurs propres $\pm\omega_1 i$ ou $\pm\omega_2 i$, respectivement. Nous étudierons lesquelles de ces solutions périodiques persistent pour le système perturbé (3.3) lorsque le paramètre ε est suffisamment petit et les fonctions perturbées F_i pour $i = 1, 2$ ont une période pT_1/q , ou pT_2/q avec p et q sont des entiers positifs relativement premiers.

On définit Φ_1 et Φ_2 par

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= 4(3\alpha - 7 + \sqrt{3(5 + 3\alpha)(\alpha - 1)})^{-1}, \\ \Phi_2 &= 4(3\alpha - 7 - \sqrt{3(5 + 3\alpha)(\alpha - 1)})^{-1}, \end{aligned}$$

et les fonctions

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(X_0, Y_0) &= \int_0^{pT_1} (\cos(\omega_1\tau) F_1^*(\tau) - \sin(\omega_1\tau) F_2^*(\tau)) d\tau, \\ \mathcal{G}_2(X_0, Y_0) &= \int_0^{pT_1} (\sin(\omega_1\tau) F_1^*(\tau) + \cos(\omega_1\tau) F_2^*(\tau)) d\tau, \end{aligned} \quad (3.4)$$

avec

$$\begin{aligned} F_1^*(\tau) &= \frac{\Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1} F_2(\tau, \mathcal{A}_1(\tau), \mathcal{B}_1(\tau), \mathcal{C}_1(\tau), \mathcal{D}_1(\tau)), \\ F_2^*(\tau) &= -\frac{\omega_1}{\Phi_2\omega_2^2 - \Phi_1\omega_1^2} F_1(\tau, \mathcal{A}_1(\tau), \mathcal{B}_1(\tau), \mathcal{C}_1(\tau), \mathcal{D}_1(\tau)), \end{aligned} \quad (3.5)$$

CHAPITRE 3. LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES ÉMERGEANT DE LA PRÉCESSION CYLINDRIQUE D'UN SATELLITE AXISYMMÉTRIQUE EN ORBITE CIRCULAIRE

et

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1(\tau) &= \Phi_1 (X_0 \cos (\omega_1 \tau) + Y_0 \sin (\omega_1 \tau)), \\ \mathcal{B}_1(\tau) &= \omega_1 \Phi_1 (Y_0 \cos (\omega_1 \tau) - X_0 \sin (\omega_1 \tau)), \\ \mathcal{C}_1(\tau) &= -(\omega_1^{-1}) (Y_0 \cos (\omega_1 \tau) - X_0 \sin (\omega_1 \tau)), \\ \mathcal{D}_1(\tau) &= X_0 \cos (\omega_1 \tau) + Y_0 \sin (\omega_1 \tau),\end{aligned}$$

une solution (X_0^*, Y_0^*) du système non linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1 (X_0, Y_0) = 0, \\ \mathcal{G}_2 (X_0, Y_0) = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

tel que

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)}{\partial (X_0, Y_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) = (X_0^*, Y_0^*)} \right) \neq 0,$$

est appelé solution simple du système (3.6). Notre résultat principal sur les solutions périodiques de (3.3) qui bifurquent des solutions périodiques du système non perturbé (3.2) avec la période T_1 parcourue p fois est le suivant.

Théorème 3.1.1 *Supposons que les fonctions F_k des équations du mouvement (3.3) sont périodiques en τ et de période pT_1/q avec p et q des entiers positifs relativement premiers. Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour toute solution simple $(X_0^*, Y_0^*) \neq (0, 0)$ du système non linéaire (3.6), le système perturbé (3.3) admet une solution périodique $(x(\tau, \varepsilon), y(\tau, \varepsilon))$ tendant quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la solution périodique*

$$(x(\tau), y(\tau)) = (\mathcal{A}_1(\tau), \mathcal{C}_1(\tau)), \quad (3.7)$$

du système non perturbé (3.2) a parcouru p fois.

Corollaire 3.1.1 *Si $F_1 \left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau} \right) = 0$ et $F_2 \left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau} \right) =$*

$\cos(\omega_1 t) (1 - x^2) \left(\frac{dx}{d\tau} \right)^2$, alors le système perturbé (3.3) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit admet deux solutions périodiques $(x(\tau, \varepsilon), y(\tau, \varepsilon))$ tendant quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers les deux solutions périodiques $(x(\tau), y(\tau))$ de (3.2) données par (3.7) avec $(X_0^, Y_0^*) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\Phi_1}, 0 \right)$ et $(X_0^*, Y_0^*) = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{\Phi_1} \right)$, respectivement.*

On définit maintenant les fonctions

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_3 (Z_0, W_0) &= \int_0^{pT_2} (\cos (\omega_2 \tau) F_3^*(\tau) - \sin (\omega_2 \tau) F_4^*(\tau)) d\tau, \\ \mathcal{G}_4 (Z_0, W_0) &= \int_0^{pT_2} (\sin (\omega_2 \tau) F_3^*(\tau) + \cos (\omega_2 \tau) F_4^*(\tau)) d\tau,\end{aligned} \quad (3.8)$$

3.1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS PRINCIPAUX

avec

$$\begin{aligned} F_3^*(\tau) &= -\frac{\Phi_1}{\Phi_2 - \Phi_1} F_2(\tau, \mathcal{A}_2(\tau), \mathcal{B}_2(\tau), \mathcal{C}_2(\tau), \mathcal{D}_2(\tau)), \\ F_4^*(\tau) &= \frac{\omega_2}{\Phi_2 \omega_2^2 - \Phi_1 \omega_1^2} F_1(\tau, \mathcal{A}_2(\tau), \mathcal{B}_2(\tau), \mathcal{C}_2(\tau), \mathcal{D}_2(\tau)), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\tau) &= \Phi_2 (Z_0 \cos(\omega_2 \tau) + W_0 \sin(\omega_2 \tau)), \\ \mathcal{B}_2(\tau) &= \omega_2 \Phi_2 (W_0 \cos(\omega_2 \tau) - Z_0 \sin(\omega_2 \tau)), \\ \mathcal{C}_2(\tau) &= -(\omega_2^{-1}) (W_0 \cos(\omega_2 \tau) - Z_0 \sin(\omega_2 \tau)), \\ \mathcal{D}_2(\tau) &= Z_0 \cos(\omega_2 \tau) + W_0 \sin(\omega_2 \tau), \end{aligned}$$

considérons le système non linéaire

$$\begin{cases} \mathcal{G}_3(Z_0, W_0) = 0, \\ \mathcal{G}_4(Z_0, W_0) = 0. \end{cases} \quad (3.9)$$

Notre résultat principal sur les solutions périodiques des équations différentielles (3.3) qui bifurquent des solutions périodiques du système non perturbé (3.2) de période T_2 parcourue p fois est le suivant.

Théorème 3.1.2 *Supposons que les fonctions F_k des équations du mouvement (3.3) sont périodiques en τ et de période pT_2/q avec p et q des entiers positifs relativement premiers. Alors pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit et pour toute solution simple du système simple $(Z_0^*, W_0^*) \neq (0, 0)$ du système non linéaire (3.9), le système perturbé (3.3) admet une solution périodique $(x(\tau, \varepsilon), y(\tau, \varepsilon))$ tendant quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la solution périodique*

$$((x(\tau), y(\tau)) = (\mathcal{A}_2(\tau), \mathcal{C}_2(\tau)), \quad (3.10)$$

du système non perturbé (3.2) a parcouru p fois.

Corollaire 3.1.2 *Si $F_1\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right) = \sin^3(\omega_2 \tau) (1 - xy)$ et $F_2\left(\tau, x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right) = \cos(\omega_2 \tau) \left(\frac{dx}{d\tau}\right)$, alors le système perturbé (3.3) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit admet une solution périodique $(x(\tau, \varepsilon), y(\tau, \varepsilon))$ tendant quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers la solution périodique $(x(\tau), y(\tau))$ du système non perturbé (3.2) donné par (3.10) avec*

$$(Z_0^*, W_0^*) = \left(\sqrt{\frac{3\omega_2}{2\Phi_2}}, \sqrt{\frac{3\omega_2}{2\Phi_2}} \right),$$

3.2 Preuve des théorèmes 3.1.1 et 3.1.2

En introduisant les variables $(X_1, Y_1, Z_1, W_1) = \left(x, \frac{dx}{d\tau}, y, \frac{dy}{d\tau}\right)$ nous écrivons le système différentiel (3.3) comme un système différentiel de premier ordre défini dans \mathbb{R}^4 . Ainsi, nous avons

$$\begin{cases} \frac{dX_1}{d\tau} = Y_1, \\ \frac{dY_1}{d\tau} = 2W_1 + (4 - 3\alpha)X_1 + \varepsilon F_1(\tau, X_1, Y_1, Z_1, W_1), \\ \frac{dZ_1}{d\tau} = W_1, \\ \frac{dW_1}{d\tau} = -2Y_1 + Z_1 + \varepsilon F_2(\tau, X_1, Y_1, Z_1, W_1), \end{cases} \quad (3.11)$$

le système (3.11) avec $\varepsilon = 0$ est équivalent à (3.2), appelé simplement dans ce qui suit le système non perturbé, sinon, on a le système perturbé.

Nous écrivons le système (3.11) de manière à ce que la partie linéaire à l'origine soit dans sa forme normale réelle de Jordan. Ensuite, en faisant le changement de variables $(\tau, X_1, Y_1, Z_1, W_1) \leftrightarrow (\tau, X, Y, Z, W)$ donné par

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ W_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 \\ 0 & \omega_1 \Phi_1 & 0 & \omega_2 \Phi_2 \\ 0 & -1/\omega_1 & 0 & -1/\omega_2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} & 0 & 0 & \frac{\Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1} \\ 0 & -\frac{\omega_1}{\Phi_2 \omega_2^2 - \Phi_1 \omega_1^2} & -\frac{\Phi_2 \omega_1 \omega_2^2}{\Phi_2 \omega_2^2 - \Phi_1 \omega_1^2} & 0 \\ \frac{1}{\Phi_2 - \Phi_1} & 0 & 0 & -\frac{\Phi_1}{\Phi_2 - \Phi_1} \\ 0 & \frac{\omega_2}{\Phi_2 \omega_2^2 - \Phi_1 \omega_1^2} & \frac{\Phi_1 \omega_1^2 \omega_2}{\Phi_2 \omega_2^2 - \Phi_1 \omega_1^2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \\ W_1 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

3.2. PREUVE DES THÉORÈMES 3.1.1 ET 3.1.2

le système différentiel (3.11) devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{d\tau} = \omega_1 Y + \varepsilon F_1^*, \\ \frac{dY}{d\tau} = -\omega_1 X + \varepsilon F_2^*, \\ \frac{dZ}{d\tau} = \omega_2 W + \varepsilon F_3^*, \\ \frac{dW}{d\tau} = -\omega_2 Z + \varepsilon F_4^*, \end{array} \right. \quad (3.14)$$

où

$$\begin{aligned} F_1^*(\tau, X, Y, Z, W) &= \frac{\Phi_2}{\Phi_2 - \Phi_1} F_2(\tau, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \\ F_2^*(\tau, X, Y, Z, W) &= -\frac{\omega_1}{\Phi_2 \omega_2^2 - \Phi_1 \omega_1^2} F_1(\tau, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \\ F_3^*(\tau, X, Y, Z, W) &= -\frac{\Phi_1}{\Phi_2 - \Phi_1} F_2(\tau, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \\ F_4^*(\tau, X, Y, Z, W) &= \frac{\omega_2}{\Phi_2 \omega_2^2 - \Phi_1 \omega_1^2} F_1(\tau, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \Phi_1 X + \Phi_2 Z, & \mathcal{B} &= \omega_1 \Phi_1 Y + \omega_2 \Phi_2 W, \\ \mathcal{C} &= -\left(\frac{Y}{\omega_1} + \frac{W}{\omega_2} \right), & \mathcal{D} &= X + Z, \end{aligned}$$

la partie linéaire du système différentiel (3.14) à l'origine, est en la forme normale réelle de Jordan. Dans le lemme suivant, nous caractérisons les orbites périodiques du système non perturbé.

Lemme 3.2.1 *Les solutions périodiques du système différentiel (3.14) avec $\varepsilon = 0$ sont*

$$\begin{aligned} X(\tau) &= X_0 \cos(\omega_1 \tau) + Y_0 \sin(\omega_1 \tau), \\ Y(\tau) &= Y_0 \cos(\omega_1 \tau) - X_0 \sin(\omega_1 \tau), \\ Z(\tau) &= 0, \\ W(\tau) &= 0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

de période T_1 , et

$$\begin{aligned} X(\tau) &= 0, \\ Y(\tau) &= 0, \\ Z(\tau) &= Z_0 \cos(\omega_2 \tau) + W_0 \sin(\omega_2 \tau), \\ W(\tau) &= W_0 \cos(\omega_2 \tau) - Z_0 \sin(\omega_2 \tau), \end{aligned} \quad (3.16)$$

de période T_2 .

CHAPITRE 3. LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES ÉMERGEANT DE LA PRÉCESSION CYLINDRIQUE D'UN SATELLITE AXISYMETRIQUE EN ORBITE CIRCULAIRE

Preuve. Puisque le système (3.14) avec $\varepsilon = 0$ est un système différentiel linéaire, la preuve s'ensuit facilement. ■

Preuve du Théorème 3.1.1. Supposons que les fonctions F_1 et F_2 de (3.3) sont périodiques en τ et de période pT_1/q avec p et q des entiers positifs relativement premiers. On peut alors penser que le système (3.3) est périodique en τ de période pT_1 . En pensant ainsi le système différentiel et les solutions périodiques (3.15) ont la même période pT_1 .

Nous appliquerons le théorème 2.1.1 de Chapitre 2 au système différentiel (3.14). Notons que le système (3.14) peut s'écrire sous la forme d'un système (2.1) prenant

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{pmatrix}, \quad t = \tau, \quad G_0(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_1 Y \\ -\omega_1 X \\ \omega_2 W \\ -\omega_2 Z \end{pmatrix},$$

$$G_1(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1^* \\ F_2^* \\ F_3^* \\ F_4^* \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G_2(t, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

nous étudierons quelles solutions périodiques (3.15) du système non perturbé (3.14) avec $\varepsilon = 0$ peuvent se poursuivre en solutions périodiques du système perturbé (3.14) pour $\varepsilon \neq 0$ suffisamment petit.

Nous allons décrire les différents éléments qui apparaissent dans l'énoncé du théorème 6 dans le cas particulier du système différentiel (3.14).

Ainsi, on a que $\Omega = \mathbb{R}^4, k = 2$ et $n = 4$. Soit $r_1 > 0$ arbitrairement petit et soit $r_2 > 0$ arbitrairement grand. On prend le sous-ensemble ouvert et borné V du plan $Z = W = 0$ comme

$$V = \left\{ (X_0, Y_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : r_1 < \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} < r_2 \right\}.$$

Comme d'habitude $\text{Cl}(V)$ désigne la fermeture de V . Si $\alpha = (X_0, Y_0)$, alors on peut identifier V avec l'ensemble

$$\{\alpha \in \mathbb{R}^2 : r_1 < \|\alpha\| < r_2\},$$

ici $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^2 . La fonction $\beta : \text{Cl}(V) \rightarrow \mathbb{R}^2$ est $\beta(\alpha) = (0, 0)$. Ainsi, dans notre cas, l'ensemble

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \{\mathbf{z}_\alpha = (\alpha, \beta(\alpha)), \alpha \in \text{Cl}(V)\}, \\ &= \left\{ (X_0, Y_0, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : r_1 \leq \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \leq r_2 \right\}. \end{aligned}$$

Clairement pour chaque $\mathbf{z}_\alpha \in \mathcal{Z}$ on peut considérer la solution périodique $\mathbf{x}(\tau, \mathbf{z}_\alpha) = (X(\tau), Y(\tau), 0, 0)$ donnée par (3.15) de période pT_1 .

3.2. PREUVE DES THÉORÈMES 3.1.1 ET 3.1.2

Calcul de la matrice fondamentale $M_{z_\alpha}(\tau)$ du système différentiel linéaire (3.14) avec $\varepsilon = 0$ associé à la solution T -périodique $\mathbf{z}_\alpha = (X_0, Y_0, 0, 0)$ telle que $M_{z_\alpha}(0)$ est l'identité de \mathbb{R}^4 , on obtient que $M(\tau) = M_{z_\alpha}(\tau)$ est égal à

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1\tau) & \sin(\omega_1\tau) & 0 & 0 \\ -\sin(\omega_1\tau) & \cos(\omega_1\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2\tau) & \sin(\omega_2\tau) \\ 0 & 0 & -\sin(\omega_2\tau) & \cos(\omega_2\tau) \end{pmatrix}.$$

D'autre part $M^{-1}(\tau)$ est égal à

$$\begin{pmatrix} \cos(\omega_1\tau) & -\sin(\omega_1\tau) & 0 & 0 \\ \sin(\omega_1\tau) & \cos(\omega_1\tau) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\omega_2\tau) & -\sin(\omega_2\tau) \\ 0 & 0 & \sin(\omega_2\tau) & \cos(\omega_2\tau) \end{pmatrix},$$

notons que la matrice $M_{z_\alpha}(\tau)$ ne dépend pas de la solution périodique particulière $\mathbf{x}(\tau, \mathbf{z}_\alpha)$. Depuis la matrice

$$M^{-1}(0) - M^{-1}(pT_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) & \sin\left(\frac{2p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \\ 0 & 0 & -\sin\left(\frac{2p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) & 2\sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \end{pmatrix},$$

satisfait les hypothèses d'un énoncé (ii) du théorème 2.1.1 parce que le déterminant

$$\begin{vmatrix} 2\sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) & \sin\left(\frac{2p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \\ -\sin\left(\frac{2p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) & 2\sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \end{vmatrix} = 4\sin^2\left(\frac{p\pi\omega_2}{\omega_1}\right) \neq 0,$$

(ω_1 et ω_2 sont des fréquences non résonnantes) nous pouvons appliquer ce théorème au système (3.14).

Maintenant $\xi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ est $\xi(X, Y, Z, W) = (X, Y)$. On calcule la fonction

$$\mathcal{G}(X_0, Y_0) = \mathcal{G}(\alpha) = \xi \left(\frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} M_{z_\alpha}^{-1}(\tau) G_1(\tau, \mathbf{x}(\tau, \mathbf{z}_\alpha)) d\tau \right),$$

et on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(X_0, Y_0) &= \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} (\cos(\omega_1\tau) F_1^*(\tau) - \sin(\omega_1\tau) F_2^*(\tau)) d\tau, \\ \mathcal{G}_2(X_0, Y_0) &= \frac{1}{pT_1} \int_0^{pT_1} (\sin(\omega_1\tau) F_1^*(\tau) + \cos(\omega_1\tau) F_2^*(\tau)) d\tau, \end{aligned}$$

CHAPITRE 3. LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES ÉMERGEANT DE LA PRÉCESSION CYLINDRIQUE D'UN SATELLITE AXISYMETRIQUE EN ORBITE CIRCULAIRE

où les fonctions F_k^* pour $k = 1, 2$ sont celles données en (3.5). Alors, d'après le théorème 2.1.1 on a que pour toute solution simple $(X_0^*, Y_0^*) \in V$ du système de fonctions

$$\begin{cases} \mathcal{G}_1(X_0, Y_0) = 0, \\ \mathcal{G}_2(X_0, Y_0) = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

on a une solution périodique $(X, Y, Z, W)(\tau, \varepsilon)$ du système (3.14) telle que $(X, Y, Z, W)(0, \varepsilon) \rightarrow (X_0^*, Y_0^*, 0, 0)$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Notons que le système (3.17) est équivalent au système (3.6), car les deux équations ne diffèrent que par une constante multiplicative non nulle. En revenant sur le changement de coordonnées (3.12), on obtient une solution périodique $(X_1, Y_1, Z_1, W_1)(\tau, \varepsilon)$ du système (3.15) telle que

$$\begin{pmatrix} X_1(\tau, \varepsilon) \\ Y_1(\tau, \varepsilon) \\ Z_1(\tau, \varepsilon) \\ W_1(\tau, \varepsilon) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \Phi_1(X_0^* \cos(\omega_1\tau) + Y_0^* \sin(\omega_1\tau)), \\ \omega_1 \Phi_1(Y_0^* \cos(\omega_1\tau) - X_0^* \sin(\omega_1\tau)), \\ -\frac{1}{\omega_1}(Y_0^* \cos(\omega_1\tau) - X_0^* \sin(\omega_1\tau)), \\ X_0^* \cos(\omega_1\tau) + Y_0^* \sin(\omega_1\tau), \end{pmatrix},$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. Par conséquent on obtient une solution périodique $(x(\tau, \varepsilon), y(\tau, \varepsilon))$ du système (3.3) telle que

$$(x(\tau, \varepsilon), y(\tau, \varepsilon)) \rightarrow \begin{pmatrix} \Phi_1(X_0^* \cos(\omega_1\tau) + Y_0^* \sin(\omega_1\tau)), \\ -\frac{1}{\omega_1}(Y_0^* \cos(\omega_1\tau) - X_0^* \sin(\omega_1\tau)), \end{pmatrix},$$

quand $\varepsilon \rightarrow 0$. ■

Preuve du Théorème 3.1.2. Cette preuve est complètement analogue à la preuve du théorème 3.1.1.. ■

3.3 Preuve des deux corollaires

Preuve du Corollaire 3.1.1. Sous les hypothèses du corollaire 3.1.1, le système non linéaire (3.4) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1(X_0, Y_0) &= \frac{\Phi_1^2 \Phi_2^2 \omega_1^2 \left(\Phi_1^2 (X_0^2 + Y_0^2)^2 - 2(X_0^2 + 3Y_0^2) \right)}{16(\Phi_1 - \Phi_2)}, \\ \mathcal{G}_2(X_0, Y_0) &= \frac{\Phi_1^2 \Phi_2 \omega_1^2 X_0 Y_0}{4(\Phi_1 - \Phi_2)}, \end{aligned}$$

Ce système admet les quatre solutions suivantes $(X_0^*, Y_0^*) = \left(\pm \frac{\sqrt{2}}{\Phi_1}, 0 \right)$ et $(X_0^*, Y_0^*) = \left(0, \pm \frac{\sqrt{6}}{\Phi_1} \right)$. Mais les solutions qui diffèrent par un signe sont des conditions initiales

3.3. PREUVE DES DEUX COROLLAIRES

différentes d'une même solution périodique du système (3.3). En outre

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)}{\partial (X_0, Y_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{\Phi_1}, 0\right)} \right) = \frac{\Phi_1^2 \Phi_2^2 \omega_1^4}{8 (\Phi_1 - \Phi_2)^2} \neq 0,$$

et

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2)}{\partial (X_0, Y_0)} \Big|_{(X_0, Y_0) = \left(0, \frac{\sqrt{6}}{\Phi_1}\right)} \right) = -\frac{9\Phi_1^2 \Phi_2^2 \omega_1^4}{8 (\Phi_1 - \Phi_2)^2} \neq 0,$$

montrer que ces solutions sont simples. Donc, par le théorème 3.1.1, nous n'avons que deux solutions périodiques de (3.3).

■

Preuve du Corollaire 3.1.2. Sous les hypothèses du corollaire 3.1.2, le système non linéaire (3.8) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_3(Z_0, W_0) &= \frac{3\omega_2 - 2\Phi_2 Z_0 W_0}{8(\Phi_1 \omega_1^2 - \Phi_2 \omega_1^2)}, \\ \mathcal{G}_4(Z_0, W_0) &= \frac{(Z_0^2 - W_0^2) \Phi_2}{16(\Phi_1 \omega_1^2 - \Phi_2 \omega_1^2)}. \end{aligned}$$

Ce système admet les trois solutions réelles suivantes

$$(Z_0^*, W_0^*) = \left(\sqrt{\frac{3\omega_2}{2\Phi_2}}, \sqrt{\frac{3\omega_2}{2\Phi_2}} \right), \quad (Z_0^*, W_0^*) = \left(-\sqrt{\frac{3\omega_2}{2\Phi_2}}, -\sqrt{\frac{3\omega_2}{2\Phi_2}} \right),$$

et

$$(Z_0^*, W_0^*) = (0, 0).$$

Mais la solution (0, 0) est dégénérée, alors que

$$\det \left(\frac{\partial (\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_4)}{\partial (Z_0^*, W_0^*)} \Big|_{(Z_0^*, W_0^*) = \left(\sqrt{\frac{3\omega_2}{2\Phi_2}}, \sqrt{\frac{3\omega_2}{2\Phi_2}}\right)} \right) = \frac{3\Phi_2 \omega_2}{32(\Phi_1 \omega_1^2 - \Phi_2 \omega_1^2)^2} \neq 0,$$

Par conséquent, d'après le théorème 3.1.2, nous avons une solution périodique de (3.3). ■

Les solutions périodiques du système différentiel linéaire par morceaux continus et discontinus de Michelson

4.1 Introduction

Les systèmes différentiels linéaires par morceaux continus et discontinus apparaissent de manière naturelle dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de la science, par exemple, dans la théorie du contrôle, dans l'étude des circuits électriques, et dans les problèmes mécaniques, voir les centaines de références qui apparaissent dans le livre [11] et dans [23]. Ici, nous allons étudier les solutions périodiques de systèmes différentiels linéaires par morceaux continus et discontinus utilisant de nouveaux résultats sur la méthode de moyennisation développée pour ces systèmes dynamiques non lisses. Les applications de ces nouveaux résultats sur la méthode de moyennisation pour étudier les solutions périodiques

L'analyse de systèmes dynamiques non lisses a nécessité des changements pratiques de variables pour écrire le système différentiel initial sous la forme normale de la méthode de moyennisation. Nous allons faire ces applications à une version de systèmes différentiels linéaires par morceaux continus et discontinus provenant du système différentiel de Michelson. De tels systèmes différentiels linéaires par morceaux ont également été étudiés par d'autres auteurs, voir ([4, 5, 6, 7, 8]). Il faut mentionner que les idées et outils utilisés pour faire ces applications de la méthode de moyennisation pour étudier les solutions périodiques de ces deux systèmes dynamiques non lisses de Michelson peuvent être appliqués à des systèmes dynamiques non lisses généraux.

4.1. INTRODUCTION

On considère le système différentiel de Michelson suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = c^2 - y - \frac{x^2}{2}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et $c \geq 0$ est un paramètre. Le point désigne la dérivée par rapport à une variable indépendante t . Ce système est dû à Michelson [26] pour étudier les solutions d'ondes progressives de l'équation de Kuramoto-Sivashinsky. Elle se pose également dans l'analyse du déploiement de la singularité nilpotente de codimension 3, voir [12] et [14].

Ce système a été largement étudié d'un point de vue dynamique. Michelson [26] a prouvé que si $c > 0$ est suffisamment grand, alors le système (4.1) a une unique solution bornée qui est une orbite hétérocline transversale reliant les deux singularités finies $(-\sqrt{2}c, 0, 0)$ et $(\sqrt{2}c, 0, 0)$. Dans [22], il existe une preuve analytique de l'existence d'une bifurcation à zéro-Hopf pour le système (4.1).

Dans ([8, 6]), les auteurs considèrent une version linéaire continue par morceaux du système différentiel de Michelson changeant la fonction non linéaire x^2 dans (4.1) par la fonction linéaire par morceaux $|x|$. Pour un tel système, ils ont prouvé que certains aspects dynamiques du système de Michelson subsistent comme l'existence d'un cycle hétéroclinique. En faisant le changement de variable $(x, y, z, c) \rightarrow (2\varepsilon X, 2\varepsilon Y, 2\varepsilon Z, 2\varepsilon d)$ avec $d \geq 0$ et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit au système différentiel de Michelson (4.1), suivi du changement de la fonction $X^2 \rightarrow |x|$, et en notant à nouveau X, Y , et Z par x, y , et z , on obtient le système

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y + \varepsilon(2d^2 - |x|), \end{cases} \quad (4.2)$$

que nous appelons le système différentiel linéaire par morceaux continu de Michelson. Notons que ce système est réversible, car il est invariant par changement de variables $(x, y, z, t) \rightarrow (-x, y, -z, -t)$.

De nombreux problèmes de physique, d'économie, de biologie et de domaines appliqués sont modélisés par des systèmes différentiels discontinus, mais il n'existe que peu de techniques analytiques pour étudier leurs solutions périodiques. Dans [21], les auteurs ont appliqué la méthode de moyennisation à des systèmes différentiels discontinus. Une amélioration de ce résultat pour une classe beaucoup plus grande de systèmes différentiels discontinus est donnée dans [19].

Si dans le système différentiel de Michelson continu (4.1), on change la fonction continue $|x|$ par la discontinue $|x| + \text{sign}(x)$, où

$$\text{sign } x = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ 1 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

CHAPITRE 4. LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU SYSTÈME
DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE PAR MORCEAUX CONTINUS ET
DISCONTINUS DE MICHELSON

on obtient le système différentiel linéaire par morceaux discontinu de Michelson

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = -y + \varepsilon(2d^2 - |x| - \text{sign } x), \end{cases} \quad (4.3)$$

Dans ce travail, nous étudions d'abord analytiquement les solutions périodiques des systèmes différentiels linéaires par morceaux continus et discontinus de Michelson. Ainsi, notre premier résultat principal est le suivant

Théorème 4.1.1 *Pour tout $d > 0$ et $\varepsilon = \varepsilon(d) > 0$ suffisamment petit, le système différentiel linéaire par morceaux continu de Michelson (4.2) admet une solution périodique de la forme*

$$\begin{aligned} x(t) &= -\pi d^2 + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ y(t) &= \pi d^2 \sin t + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ z(t) &= \pi d^2 \cos t + \mathcal{O}(\varepsilon). \end{aligned}$$

De plus, cette solution périodique est linéairement stable.

On rappelle qu'une solution périodique est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres correspondant au point fixe de l'application de Poincaré associée à cette solution ont une partie réelle négative, alors cette solution périodique est localement asymptotiquement stable. Si l'une des valeurs propres a une partie réelle positive, la solution périodique est instable. Si toutes les valeurs propres ont des parties réelles nulles, alors on dit que la solution périodique est linéairement stable; dans ce cas, la stabilité linéaire ne fournit aucune information sur le type de stabilité que possède la solution périodique lorsque l'on prend en compte les termes non linéaires, pour plus de détails, voir le théorème 11.6 de [29].

Notons que l'orbite périodique obtenue dans notre théorème 4.1.1 n'est pas réversible, car : $(-d^2\pi, d^2\pi \sin t, d^2\pi \cos t)$ ne sont pas invariants par changement de variables $(x, y, z, t) \rightarrow (-x, y, -z, -t)$. Par conséquent, cette orbite périodique n'a aucune relation avec l'orbite périodique étudiée par le système différentiel linéaire par morceaux continu de Michelson (1.2) de [7] qui est réversible. Nous notons également que notre système différentiel linéaire par morceaux continu de Michelson (4.2) et le système (1.2) de [7] ne coïncident pas.

Théorème 4.1.2 *Pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, le système différentiel linéaire par morceaux discontinu de Michelson (4.3) satisfait les énoncés suivants.*

(a) *Si $(-1 + 2d^2)\frac{\pi}{2} < 0$, alors le système (4.3) admet deux solutions périodiques $(x(t, \varepsilon), r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon))$ de la forme*

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) = (x_0, r_0 \sin t, r_0 \cos t) + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

4.2. PREUVE DES THÉORÈMES 4.1.1 ET 4.1.2

où

$$r_0 = \frac{2\sqrt[2]{1-a^2}}{a\sqrt[2]{1-a^2} + \arcsin a}, \quad x_0 = -r_0(1+a)$$

et a prend la valeur des deux zéros uniques de la fonction

$$g(a) = \frac{2a^2 - 2 + \pi a\sqrt[2]{1-a^2}d^2 + \arcsin a(\pi d^2 + \arcsin a - a\sqrt[2]{1-a^2})}{a\sqrt[2]{1-a^2}d^2 + \arcsin a}$$

dans l'intervalle $(-1, 1)$.

(b) Si $(-1 + 2d^2)\frac{\pi}{2} > 0$, alors le système (4.3) admet une solution périodique de la forme (4.4) donnée par l'unique zéro de la fonction $g(a)$ dans l'intervalle $(-1, 1)$.

4.2 Preuve des Théorèmes 4.1.1 et 4.1.2

4.2.1 Preuve du Théorème 4.1.1

En faisant le changement en coordonnées cylindriques $x = x, y = r \sin \theta$ et $z = r \cos \theta$, le système différentiel linéaire par morceaux continu de Michelson (4.2) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = r \sin \theta, \\ \dot{r} = \varepsilon (2d^2 - |x|) \cos \theta, \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} (2d^2 - |x|) \sin \theta, \end{cases} \quad (4.4)$$

maintenant en prenant θ comme variable indépendante, le système précédent devient

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = x' = r \sin \theta + \varepsilon (2d^2 - |x|) \sin^2 \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ \frac{dr}{d\theta} = r' = \varepsilon (2d^2 - |x|) \cos \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (4.5)$$

Le système non perturbé est

$$\begin{cases} x' = r \sin \theta, \\ r' = 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Pour chaque (x_0, r_0) , la solution $(x(\theta, x_0, r_0), r(\theta, x_0, r_0))$, telle que $x(0, x_0, r_0), r(0, x_0, r_0) = (x_0, r_0)$ est

$$(x(\theta, x_0, r_0), r(\theta, x_0, r_0)) = (x_0 + r_0(1 - \cos \theta), r_0),$$

qui est 2π périodique pour tout $(x_0, r_0) = (0, 0)$. Lorsque $r_0 = 0$, on a une droite de points d'équilibre.

Maintenant, notez que la fonction $F_0(\theta, (x, r)) = (r \sin \theta, 0)$ est de classe \mathcal{C}^∞ et en particulier \mathcal{C}^1 et que la fonction

$$F_1(\theta, (x, r)) = (2d^2 - |x|)(\sin^2 \theta, \cos \theta),$$

CHAPITRE 4. LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU SYSTÈME
DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE PAR MORCEAUX CONTINUS ET
DISCONTINUS DE MICHELSON

est de classe \mathcal{C}^0 , et les deux sont Lipschitzienne. Par conséquent, le système différentiel (4.4) satisfait les hypothèses du théorème 2.2.1. Ensuite, par le théorème 2.2.1, nous devons calculer la fonction moyennée

$$\mathcal{F}(x_0, r_0) = \int_0^{2\pi} M(\theta)^{-1} F_1(\theta, x(\theta, (x_0, r_0))) d\theta,$$

où

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \cos \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est la matrice fondamentale du système différentiel variationnel associé au système (4.6) évalué sur la solution périodique $(x_0 + r_0(1 - \cos \theta), r_0)$, telle que $M(0)$ est la matrice identité. Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_0, r_0) &= \int_0^{2\pi} (2d^2 - |x_0 + r_0(1 - \cos \theta)|) \begin{pmatrix} 1 & 1 - \cos \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (2d^2 - |x_0 + r_0(1 - \cos \theta)|) \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \end{aligned}$$

on remarque que $g(\theta) = g(-\theta)$ et $g(\theta)$ sont 2π périodiques. Donc

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} g(\theta) d\theta.$$

Pour calculer cette intégrale, il faut étudier les zéros de la fonction $G(\theta) = x_0 + r_0(1 - \cos \theta)$. Comme $G(\theta) = 0$ si et seulement si $\theta = \pm \arccos(\frac{x_0 + r_0}{r_0})$ et que la fonction $\arccos(x)$ prend des valeurs réelles quand $x \in [-1, 1]$, on considère les trois cas suivants.

Cas 1. $x_0 \leq -2r_0$ ou équivalent $\frac{x_0 + r_0}{r_0} \leq -1$. Alors, $r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta \leq 0$ dans $[0, \pi]$.

Cas 2. $x_0 \in (-2r_0, 0)$ ou équivalent $|\frac{x_0 + r_0}{r_0}| < 1$. Alors

(i) $r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta < 0$ si $\theta \in (0, \arccos(\frac{r_0 + x_0}{r_0}))$;

(ii) $r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta > 0$ si $\theta \in (\arccos(\frac{r_0 + x_0}{r_0}), \pi)$.

Cas 3. $x_0 \geq 0$ ou équivalent $\frac{x_0 + r_0}{r_0} \geq 1$. Alors, $r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta \geq 0$ dans $[0, \pi]$.

4.2. PREUVE DES THÉORÈMES 4.1.1 ET 4.1.2

Dans le calcul de l'intégrale $\int_0^\pi g(\theta)d\theta$, on distingue les trois cas précédents.

Cas 1. Dans ce cas, la fonction moyennée est

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x_0, r_0) &= 2 \int_0^{2\pi} (2d^2 - |x_0 + r_0(1 - \cos \theta)|) \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= 2\pi(4d^2 + 3r_0 + 2x_0, -r_0),\end{aligned}$$

dont le zéro unique est $(x_0, r_0) = (-2d^2, 0)$. Puisque cette condition initiale correspond à un point d'équilibre du système non perturbé (4.6), la méthode de moyennisation dans ce cas ne fournit pas de solutions périodiques.

Cas 3. De manière analogue au cas 1, nous avons

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x_0, r_0) &= 2 \int_0^{2\pi} (2d^2 - |x_0 + r_0(1 - \cos \theta)|) \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= 2\pi(4d^2 - 3r_0 - 2x_0, r_0),\end{aligned}$$

dont le zéro unique est $(x_0, r_0) = (2d^2, 0)$. La conclusion suit comme dans le cas 1.

Cas 2. Ici

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(x_0, r_0) &= 2 \int_0^{\arccos\left(\frac{r_0+x_0}{r_0}\right)} (2d^2 + |x_0 + r_0(1 - \cos \theta)|) \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &\quad + 2 \int_{\arccos\left(\frac{r_0+x_0}{r_0}\right)}^\pi (2d^2 - |x_0 + r_0(1 - \cos \theta)|) \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} d\theta \\ &= \begin{pmatrix} f_1(x_0, r_0) \\ f_2(x_0, r_0) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}f_1(x_0, r_0) &= 4\pi d^2 - \frac{\sqrt[2]{-x_0(2r_0+x_0)}}{r_0} (6r_0 + 2x_0) \\ &\quad - 2(3r_0 + 2x_0) \arcsin\left(\frac{r_0+x_0}{r_0}\right), \\ f_2(x_0, r_0) &= 2(r_0 + x_0) - \frac{\sqrt[2]{-x_0(2r_0+x_0)}}{r_0} \\ &\quad + 2r_0 \arcsin\left(\frac{r_0+x_0}{r_0}\right).\end{aligned}$$

Pour résoudre le système $f_1(x_0, r_0) = f_2(x_0, r_0) = 0$, en faisant le changement de variables $x_0 \rightarrow X$ où $x_0 = -r_0 - Xr_0$ avec $-1 < X < 1$, rappelons que $\left|\frac{x_0 + r_0}{r_0}\right| < 1$.

Alors, le système devient

$$\begin{aligned} 2\pi d^2 + \left((X-2)\sqrt[3]{1-X^2} + (1-2X)\arcsin X \right) r_0 &= 0, \\ r_0 \left(X\sqrt[3]{1-X^2} + \arcsin X \right) &= 0. \end{aligned}$$

Puisque r_0 doit être positif, de la deuxième équation, il résulte que $X = 0$, et $r_0 = \pi d^2$. Par conséquent, nous avons la solution $(x_0, r_0) = (-\pi d^2, \pi d^2)$.

Le jacobien de (f_1, f_2) en $(x_0, r_0) = (-\pi d^2, \pi d^2)$ est 4. Il résulte du théorème 2.2.1 et pour tout $d > 0$ et $\varepsilon = \varepsilon(d) > 0$ suffisamment petit, le système (4.5) admet une solution périodique $\varphi(\theta, \varepsilon) = (x(\theta, \varepsilon), r(\theta, \varepsilon)) = (-d^2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon), d^2\pi + \mathcal{O}(\varepsilon))$. De plus, les valeurs propres de la matrice jacobienne de (f_1, f_2) en $(-\pi d^2, \pi d^2)$ sont $\pm 2i$, donc la solution périodique est linéairement stable.

Maintenant, il faut identifier la solution périodique du système (4.2) qui correspond à la solution périodique trouvée. En revenant au système (4.4) avec la variable indépendante t , on obtient la solution périodique

$$(x(t, \varepsilon), r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon)) = (-d^2\pi, d^2\pi, t(\bmod 2\pi)) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Enfin, en revenant au système (4.2), on trouve la solution périodique

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) = (-d^2\pi, d^2\pi \sin t, d^2\pi \cos t) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

4.2.2 Preuve du Théorème 4.1.2

En faisant le changement en coordonnées cylindriques $x = x, y = r \sin \theta$ et $z = r \cos \theta$, le système différentiel linéaire par morceaux discontinu de Michelson (4.3) devient

$$\begin{cases} \dot{x} = r \sin \theta, \\ \dot{r} = \varepsilon (2d^2 - |x| - \text{sign } x) \cos \theta, \\ \dot{\theta} = 1 - \frac{\varepsilon}{r} (2d^2 - |x| - \text{sign } x) \sin \theta. \end{cases} \quad (4.7)$$

ou d'une manière équivalente

$$\begin{cases} x' = r \sin \theta + \varepsilon (2d^2 - |x| - \text{sign } x) \sin^2 \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \\ r' = \varepsilon (2d^2 - |x| - \text{sign } x) \cos \theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2), \end{cases} \quad (4.8)$$

où la prime désigne la dérivée par rapport à θ . Ce système différentiel satisfait les hypothèses du théorème 2.3.1, nous allons donc l'appliquer pour trouver certaines de ses solutions périodiques. En utilisant la notation du théorème 2.3.1, on a que

$$F_1(\theta, x, r) = (2d^2 - |x| - \text{sign } x) \begin{pmatrix} \sin^2 \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

4.2. PREUVE DES THÉORÈMES 4.1.1 ET 4.1.2

Comme dans le théorème 4.1.1, le système non perturbé est donné par (4.6) et la matrice fondamentale est

$$M(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \cos \theta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, par le théorème 2.3.1, nous devons calculer

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_0, r_0) &= \int_0^{2\pi} M(\theta)^{-1} F_1(\theta, x(\theta, (x_0, r_0)), r(\theta, (x_0, r_0))) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta \end{aligned}$$

où

$$g(\theta) = (2d^2 - |x_0 + r_0(1 - \cos \theta)| - \text{sign}(x_0 + r_0(1 - \cos \theta))) \begin{pmatrix} 1 - \cos \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Puisque $g(\theta)$ est 2π -périodique et $g(\theta) = g(-\theta)$, alors

$$\int_0^{2\pi} g(\theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} g(\theta) d\theta$$

Comme dans l'étude du système différentiel continu, nous séparons le calcul de la fonction moyenne correspondant au système discontinu (4.8) dans les trois mêmes cas qui apparaissent dans la preuve du théorème 4.1.1.

Cas 1. Dans ce sous-cas, $r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta < 0$ dans $[0, \pi]$. Ensuite, la fonction moyennée est

$$F(x_0, r_0) = \pi (2 + 4d^2 + 3r_0 + 2x_0, r_0).$$

Cette fonction n'a pas de zéros avec $r_0 > 0$, donc la méthode de moyennisation dans ce cas ne détecte aucune solution périodique.

Cas 2. Maintenant, nous avons

$$F(x_0, r_0) = \pi (-2 + 4d^2 - 3r_0 - 2x_0, r_0).$$

La conclusion suit comme dans le cas 1.

Cas 3. Ici, $r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta < 0$ et $\theta \in (0, \arccos(\frac{r_0 + x_0}{r_0}))$, et $r_0 + x_0 - r_0 \cos \theta > 0$, quand $\theta \in (\arccos(\frac{r_0 + x_0}{r_0}), \pi)$, donc

$$\mathcal{F}(x_0, r_0) = \begin{pmatrix} f_1(x_0, r_0) \\ f_2(x_0, r_0) \end{pmatrix},$$

CHAPITRE 4. LES SOLUTIONS PÉRIODIQUES DU SYSTÈME
DIFFÉRENTIEL LINÉAIRE PAR MORCEAUX CONTINUS ET
DISCONTINUS DE MICHELSON

avec

$$\begin{aligned}
 f_1(x_0, r_0) &= \sqrt[2]{\frac{x_0(2r_0 + x_0)}{r_0^2}} (3r_0 + x_0 + 2) \frac{\pi}{2} (4d^2 - 3r_0 - 2x_0 + 2) \\
 &\quad + (3r_0 + 2x_0 + 2) \arccos\left(\frac{r_0 + x_0}{r_0}\right) \\
 f_2(x_0, r_0) &= \frac{\pi r_0}{2} - \arccos\left(\frac{r_0 + x_0}{r_0}\right) r_0 \\
 &\quad + (r_0 + x_0 + 2) \sqrt{-\frac{x_0(2r_0 + x_0)}{r_0^2}}.
 \end{aligned}$$

Pour résoudre le système $f_1(x_0, r_0) = f_2(x_0, r_0) = 0$, en faisant le changement de variable $x_0 \rightarrow X$, où

$$x_0 = -r_0 - Xr_0, \quad (4.9)$$

avec $-1 < X < 1$. Ensuite, le système devient

$$\begin{aligned}
 2\pi d^2 + \sqrt[2]{1 - X^2} ((X - 2)r_0 - 2) + (2 - 2Xr_0 + r_0) \arcsin X &= 0, \\
 \sqrt{1 - X^2} (2 - 2Xr_0) - r_0 \arcsin X &= 0.
 \end{aligned}$$

De la deuxième équation, on obtient

$$r_0 = \frac{2\sqrt[2]{1 - X^2}}{X\sqrt[2]{1 - X^2} + \arcsin X}. \quad (4.10)$$

En substituant r_0 dans la première équation, nous obtenons $g(X) = 0$, où $g(X)$ est

$$\frac{2X^2 - 2 + \pi X \sqrt[2]{1 - X^2} d^2 + \arcsin X (\pi d^2 + \arcsin X - X \sqrt[2]{1 - X^2})}{X \sqrt[2]{1 - X^2} + \arcsin X}.$$

Par des calculs faciles, on trouve les limites suivantes

$$\begin{aligned}
 \lim_{X \nearrow -1} g(X) &= (-1 + 2d^2) \frac{\pi}{2}, \\
 \lim_{X \lesssim 0} g(X) &= +\infty, \\
 \lim_{X \gtrsim 0} g(X) &= -\infty, \\
 \lim_{X \lesssim 1} g(X) &= (1 + 2d^2) \frac{\pi}{2}.
 \end{aligned}$$

Donc, par continuité de la fonction $g(X)$ dans les intervalles $(-\infty, 0)$ et $(0, +\infty)$, il s'ensuit que $g(X)$ admet un zéro dans l'intervalle $(-\infty, 0)$ si $(-1 + 2d^2) \frac{\pi}{2} < 0$ et que $g(X)$ possède toujours un zéro dans l'intervalle $(0, +\infty)$. De plus, puisque la dérivée

4.2. PREUVE DES THÉORÈMES 4.1.1 ET 4.1.2

$g(X) > 0$ dans ces deux intervalles, ces zéros sont les zéros uniques de la fonction $g(X)$.

Puisque pour chaque zéro de $g(X)$, on a un unique zéro (x_0, r_0) de système $f_1(x_0, r_0) = f_2(x_0, r_0) = 0$ (voir (4.10) et (4.9)), et on obtient deux solutions du système $f_1(x_0, r_0) = f_2(x_0, r_0) = 0$ si $(-1 + 2d^2)\frac{\pi}{2} \leq 0$, et une seule si $(-1 + 2d^2)\frac{\pi}{2} > 0$. En calculant le jacobien de la fonction $(f_1(x_0, r_0), f_2(x_0, r_0))$ en (4.10) et (4.9), on obtient

$$\frac{X^4 - 5X^2 + 6X\sqrt{1-X^2}\arcsin X + (4X^2 - 1)(\arcsin X)^2 + 4}{1 - X^2} \geq 4,$$

si $X \in (-1, 1)$. Donc, par le théorème 2.3.1, on obtient deux solutions périodiques du système différentiel (4.8) si $(-1 + 2d^2)\frac{\pi}{2} < 0$, et une solution périodique si $(-1 + 2d^2)\frac{\pi}{2} > 0$. Ces solutions périodiques sont de la forme

$$(x(\theta, \varepsilon), r(\theta, \varepsilon)) = (x_0 + \mathcal{O}(\varepsilon), r_0 + \mathcal{O}(\varepsilon)),$$

où x_0 et r_0 sont donnés par (4.10) et (4.9) lorsque X est un zéro de $g(X)$. En reprenant le système (4.7) avec la variable indépendante t , on obtient la solution périodique

$$(x(t, \varepsilon), r(t, \varepsilon), \theta(t, \varepsilon)) = (x_0, r_0, t(\bmod 2\pi)) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Enfin, en revenant au système (4.3), on trouve la solution périodique

$$(x(t, \varepsilon), y(t, \varepsilon), z(t, \varepsilon)) = (x_0, r_0 \sin t, r_0 \cos t) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Conclusion générale

La méthode de moyennisation est un outil utile et efficace pour étudier le nombre de solution périodiques isolée pour certains systèmes différentiels, et cette méthode peut être appliquée pour obtenir la forme, la stabilité et l'expression approximative des solutions périodiques.

L'application de méthode de moyennisation pour les systèmes différentiels continus et discontinus à deux versions distinctes du système différentiel de Michelson : un système différentiel linéaire par morceaux continu de Michelson et un système différentiel linéaire par morceaux discontinu de Michelson a donné des résultats importants sur le nombre de solutions périodiques de ces systèmes.

Nos travaux futurs consisteront à appliquer cette méthode à d'autres systèmes différentiels avec des applications physiques spécifiques.

Bibliographie

- [1] R. Benterki and J. Llibre, Centers and limit cycles of polynomial differential systems of degree 4 via averaging theory, *J. Comput. Appl. Math.* **313** (2017), 273 – 283.
- [2] T. Blows and L. Perko, Bifurcation of limit cycles from centers and separatrix cycles of planar analytic systems, *SIAM Rev.* **36** (1994), 341 – 376.
- [3] A. Buica, J. P. Françoise and J. Llibre, Periodic solutions of nonlinear periodic differential systems with a small parameter, *Commun. Pure Appl. Anal.* **6** (2007), 103 – 111.
- [4] V. Carmona, S. Fernandez-García, F. Fernandez-Sánchez, E. García-Medina and A. E. Teruel, Reversible periodic orbits in a class of 3D continuous piecewise linear systems of differential equations, *Nonlinear Analysis. Theory Methods Appl.* **75** (2012), 5866 – 5883.
- [5] V. Carmona, S. Fernandez-García, F. Fernandez-Sánchez, E. García-Medina and A. E. Teruel, Noose bifurcation and crossing tangency in reversible piecewise linear systems. *Nonlinearity.* **27** (2014), 585 – 606.
- [6] V. Carmona, F. Fernandez-Sánchez, E. García-Medina and A. E. Teruel, Existence of homoclinic connections in continuous piecewise linear systems. *Chaos.* **20** (2010), 013124.
- [7] V. Carmona, F. Fernandez-Sánchez, E. García-Medina and A. E. Teruel, Noose structure and bifurcations of periodic orbits in reversible three-dimensional piecewise linear differential systems. *J Nonlinear Sci.* **25** (2015), 1209 – 1224.
- [8] V. Carmona, F. Fernandez-Sánchez and A. E. Teruel, Existence of a reversible T-point heteroclinic cycle in a piecewise linear version of the Michelson system. *SIAM J Appl Dyn Syst.* **7** (2008), 1032 – 1048.
- [9] C. Christopher and C. Li, Limit cycles of differential equations. *Advanced Courses in Mathematics. CRM Barcelona.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.
- [10] B. Coll, J. Llibre and R. Prohens, Limit cycles bifurcating from a perturbed quartic center, *Chaos Solit. Fract.* **44** (2011), 317 – 334.
- [11] M. di Bernardo, C. Budd, A. R. Champneys and P. Kowalczyk, Piecewise-smooth dynamical systems. Theory and applications. *Applied Mathematical Sciences*, vol **163**. Springer, London, 2008.

BIBLIOGRAPHIE

- [12] F. Dumortier, S. Ibañez and H. Kokubu, New aspects in the unfolding of the nilpotent singularity of codimension three. *Dyn Syst.* **16** (2001), 63 – 95.
- [13] A. F. Filippov, *Differential equations with discontinuous righthand side. Mathematics and Its Applications.* Kluwer, Dordrecht. 1988.
- [14] E. Freire, E. Gamero, A. J. Rodriguez-Luis and A. Algaba, A note on the triple-zero linear degeneracy : normal forms, dynamical and bifurcation behaviors of an unfolding. *Int J Bifur Chaos.* **12** (2002), 2799 – 2820.
- [15] H. Giacomini, J. Llibre and M. Viano, On the shape of limit cycles that bifurcate from Hamiltonian centers, *Nonlin. Anal. : The Meth. Appl.* **41** (2000), 523–537.
- [16] M. Han, J. Yang and P. Yu, Hopf bifurcations for near-Hamiltonian systems, *Int. J. Bifurcation and Chaos.* **19** (2009), 4117 – 4130.
- [17] M. Han and P. Yu. *Normal Forms, Melnikov Functions and Bifurcations of Limit Cycles*, vol. **181** Springer Science & Business Media (2012).
- [18] C. Li, J. Llibre and Z. Zhang, Weak focus, limit cycles and bifurcations for bounded quadratic systems, *J. Diff. Eqs.* **115** (1995), 193 – 223.
- [19] J. Llibre and D. Novaes, On the periodic solutions of discontinuous piecewise differential systems. (2016), (preprint).
- [20] J. Llibre, D. Novaes and M. A. Teixeira, Higher order averaging theory for finding periodic solutions via Brouwer degree. *Nonlinearity.* **27** (2014), 563–583.
- [21] J. Llibre, D. Novaes and M. A. Teixeira, On the birth of limit cycles for non-smooth dynamical systems. *Bull Sci Math.* **139** (2015), 229 – 244.
- [22] J. Llibre and X. Zhang, On the Hopf-zero bifurcation of the Michelson system. *Nonlinear Anal Real World Appl.* **12** (2011), 1650 – 1653.
- [23] O. Makarenko and J. S. W. Lamb, Dynamics and bifurcations of nonsmooth systems : a survey. *Phys D*, **241** (2012), 1826 – 1844.
- [24] I. G. Malkin, *Some problems of the theory of nonlinear oscillations*, (Russian) Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow. 1956.
- [25] A. P. Markeev, Asymptotic motion of a satellite about its center of mass. *Soviet Astronomical Letters.* **14** (1988) 118 – 120.
- [26] D. Michelson, Steady solutions for the Kuramoto–Sivashinsky equation. *Phys D.* **19** (1986), 89 – 111.
- [27] M. Roseau, *Vibrations non linéaires et théorie de la stabilité*, Springer Tracts Nat. Philos., vol.8, Springer-Verlag, Berlin–NewYork. 1966 (in French).
- [28] S. Smale, Mathematical problems for the next century. *Math. Intell.* **20** (1998), 7 – 15.
- [29] F. Verhulst, *Nonlinear differential equations and dynamical systems*, 2nd edn. Springer, Berlin. 2000.

BIBLIOGRAPHIE

- [30] L. S. Wang, P. S. Krishnaprasad and J. H. Maddocks, Hamiltonian dynamics of a rigid body in a central gravitational field. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. **50** (1991), 349 – 386.
- [31] G. Xiang and M. Han, Global bifurcation of limit cycles in a family of polynomial systems, *J. Math. Anal. Appl.* **295** (2004), 633 – 644.