



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique  
Université Larbi Tébessi - Tébessa  
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
**Département:** Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études  
Pour l'obtention du diplôme de **MASTER**  
**Domaine:** Mathématiques et Informatique  
**Filière:** Mathématiques  
**Option:** Equations aux dérivées partielles et applications

### Thème

# Combinaison de différents types de synchronisation pour les systèmes dynamiques

#### Présenté Par:

DJAALALI Chahinez  
SELLAMI Khedidja

#### Devant le jury :

Mme : GASRI Ahlem	MCA Université Larbi Tébessi	Encadreur
Mme : DEGAICHIA Hakima	MCA Université Larbi Tébessi	Présidente
Mme : MEZHOUD Rachida	MAA Université Larbi Tébessi	Examinatrice

**Date de soutenance :** 12/06/2022



# Remerciements

Nous remercions tout d'abord, **ALLAH** le tout puissant qui nous à donné la force, la volonté et le courage et nous à aidée à compléter ce travail.

Nous exprimons notre profonde gratitude à notre encadreur **Mme. GASRI Ahlem** d'avoir dirigé ce travail et pour tout l'aide et les conseils éclairés qu'il nous a prodigués pour mener cette mémoire avec beaucoup de patience et d'indulgence.

Nous remercions également les membres de jury **Mme. DEGAICHIA Hakima** pour avoir accepté de présider et **Mme. MEZHOUD Rachida** qui ont accepté d'examiner ce travail et pour l'honneur qu'ils nous font d'avoir assisté à notre soutenance.

Nous remercions toujours notre famille pour son soutien, et nos salutations profondes à nos mères pour leurs prières, leurs encouragements et leur soutien tout au long de notre travail.

Finalement, nous remercions tous ceux qui participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail même par un mot d'encouragement parmi mes enseignantes, mes amies, mes collègues.



# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

➤ *Mes très chers parents :*

*Djamila et Abd Elmadjid.*

➤ *Mes très chers sœurs :*

*Abir, Samah, Abla, Salma et Rim.*

➤ *Mon cher frère : Ali.*

➤ *Toute ma famille.*

➤ *Tous mes amis et mes collègues.*

*Chahinez*



# Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à :*

➤ *Mes très chers parents :*

*Elchikha et Abd Elmadjid.*

➤ *Mon fiancé et partenaire de vie : Hicham .*

➤ *Mes très chers sœurs :*

*Mouna, Zaman, Khaoula, Souaad  
et Bassma.*

➤ *Mes chers frères :*

*Naim, Salah, Hamza et Islam.*

➤ *Toute ma famille.*

➤ *Mes amis : Chahinez, Abla, Anissa, Aya*

*Amira, Majda, Nada et Zahia.*

*Khedidja*

# Resumé

Dans ce mémoire aborde le problème de combinaison de différents types de synchronisation entre différents systèmes chaotiques d'ordre entier dimensionnel en 4-D à temps continu, sur la base d'étude de la stabilité basée sur la méthode directe de Lyapunov, avec une fonction de Lyapunov définie positive, définie par la méthode de contrôle actif pour un nouveau schéma CS, PS, FSPS et FSHPS sont présentent. Un exemple illustratif est réalisé pour montrer l'efficacité l'approche proposée.

**Les mots clés :** système dynamique, système chaotique, stabilité, fonction de Lyapunov, synchronisation, maître, esclave, combinaison, contrôle actif, CS, PS, FSPS et FSHPS.

# ABSTRACT

In this work addresses the problem of combination of different types of synchronization between different chaotic systems of integer order in 4-D in continuous time, on the basis of the study of stability based on the Lyapunov direct method, with a positive definite Lyapunov function, defined by the active control method for a new scheme CS, PS, FSPS and FSHPS are present. An illustrative example is made for show the effectiveness of the approach proposes.

**Key words** : dynamical system, chaotic system, stability, Lyapunov function, synchronization, master, slave, combination, actif control, CS, PS, FSPS and FSHPS.

## ملخص

تتناول هذه المذكرة مشكلة المزج بين أنواع مختلفة من المزامنة بين مختلف الأنظمة الفوضوية المستمرة ذات بعد صحيح في البعد 4، باعتماد دراسة الاستقرار باستعمال الطريقة المباشرة لليابونوف، مع دالة ليابونوف المعرفة الموجبة المحددة بطريقة التحكم الفعال من أجل مخطط جديد (المزامنة الكاملة CS)، (المزامنة الاسقاطية PS)، (المزامنة الكاملة الاسقاطية FSPS) و(المزامنة الكاملة الهجينة الاسقاطية FSHPS) الموضحة سابقا ثم تقديم مثال توضيحي لظهار فعالية الطريقة المقترحة.

**الكلمات المفتاحية :** الأنظمة الحركية، الأنظمة الفوضوية، الاستقرار، دالة ليابونوف، المزامنة، السيد، العبد، المزج، التحكم الفعال، المزامنة الكاملة، المزامنة الاسقاطية، المزامنة الكاملة الاسقاطية، المزامنة الكاملة الهجينة الاسقاطية.

# Table des matières

<b>Introduction générale</b>	<b>2</b>
<b>1 Préliminaires</b>	<b>3</b>
1.1 Introduction . . . . .	3
1.2 Systèmes dynamiques . . . . .	3
1.2.1 Systèmes dynamiques continues . . . . .	4
1.2.2 Systèmes dynamiques discrets . . . . .	4
1.3 Espace de phase . . . . .	4
1.4 Espace d'état . . . . .	4
1.5 Systèmes autonomes ou non autonomes . . . . .	4
1.6 Point fixe . . . . .	5
1.7 Orbite et trajectoire . . . . .	5
1.8 Stabilité des systèmes dynamiques à temps continue . . . . .	5
1.8.1 Classification des points d'équilibres . . . . .	6
1.8.2 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte) . . . . .	9
1.8.3 Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe) . . . . .	9
1.9 Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires . . . . .	10
1.10 Conclusion . . . . .	11
<b>2 Théorie du chaos</b>	<b>12</b>
2.1 Introduction . . . . .	12
2.2 Définition du chaos . . . . .	12
2.3 Caractéristiques du chaos . . . . .	13
2.3.1 Sensibilité aux conditions initiales . . . . .	13
2.3.2 La non-linéarité . . . . .	13

2.3.3	La structure fractale . . . . .	13
2.3.4	Le déterminisme . . . . .	14
2.4	Les attracteurs . . . . .	14
2.4.1	Les types d'attracteurs . . . . .	14
2.5	Détection du chaos . . . . .	15
2.5.1	L'exposant de Lyapunov . . . . .	15
2.5.2	Dimension fractale . . . . .	18
2.5.3	Routes vers le chaos . . . . .	18
2.6	Utilisation du chaos . . . . .	19
2.6.1	En biologie . . . . .	19
2.6.2	En communication . . . . .	22
2.6.3	En économie . . . . .	22
2.6.4	En informatique . . . . .	23
2.6.5	En art . . . . .	23
2.7	Quelques exemples des systèmes chaotiques à temps continu . . . . .	24
2.7.1	Système de Lorenz . . . . .	24
2.7.2	Système de Rössler . . . . .	24
2.7.3	Système de Lorenz en 4-D . . . . .	25
2.7.4	Système de Chen en 4-D . . . . .	25
2.8	Conclusion . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques</b>	<b>26</b>
3.1	Introduction . . . . .	26
3.2	Définitions de synchronisation . . . . .	26
3.2.1	Définition de synchronisation en mathématique . . . . .	27
3.3	Différentes types de synchronisation . . . . .	27
3.3.1	Synchronisation complète . . . . .	27
3.3.2	Anti-Synchronisation . . . . .	28
3.3.3	Synchronisation projective . . . . .	28
3.3.4	Synchronisation FSHP . . . . .	28
3.3.5	Synchronisation généralisée . . . . .	29
3.3.6	Synchronisation FSPS . . . . .	29
3.4	Méthodes de synchronisation . . . . .	30
3.4.1	Méthode de contrôleur actif . . . . .	30
3.4.2	Méthode du Backstepping . . . . .	31

3.5 Conclusion . . . . .	38
<b>4 Combinaison de quatre types de synchronisation pour un système dynamique de 4-D</b>	<b>39</b>
4.1 Introduction . . . . .	39
4.2 Résultats théoriques . . . . .	40
4.3 Exemple numérique. . . . .	44
4.4 Conclusion . . . . .	48
<b>Conclusion générale</b>	<b>49</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>50</b>

---

## Liste des tableaux

<b>Tableau N°</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<i>TAB.1.1</i>	Classification des régimes permanents selon les exposants de <b>Lyapunov</b>	17
<i>TAB.1.2</i>	Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de <b>Lyapunov</b>	17

---

# Liste des figures

<b>Figure N°</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<i>FIG.1.1</i>	Classification des points d'équilibre dans $\mathbb{R}^2$	6
<i>FIG.1.2</i>	Différents types de stabilité de <b>Lyapunov</b>	9
<i>FIG.2.1</i>	Attracteur d'un modèle de cerveau (activité électrique)	20
<i>FIG.2.2</i>	L'espace de phase pour le modèle du cœur dans un cas régulier (à gauche) et dans un cas chaotique (à droite)	20
<i>FIG.2.3</i>	Le signal ECG	21
<i>FIG.2.4</i>	Communication chaotique par le système de <b>Pecorra et Carroll</b>	22
<i>FIG.2.5</i>	Le triangle de <b>Sierpinski</b> un exemple de fractale	23
<i>FIG.2.6</i>	Attracteur de <b>Lorenz</b>	24
<i>FIG.4.1</i>	Evolution temporelle des différents erreurs de synchronisation entre les systèmes de <b>Chen</b> et de <b>Lorenz</b>	47

---

# Notations

$x^*$	point fixe
$A$	matrice constante
$\lambda$	valeur propre
$O(x_0)$	orbite
$\varphi_t$	flot
$Jf(x)$	la matrice <b>Jacobienne</b>
$\lambda$	exposant de <b>Lyapunov</b>
$d$	la distance
$A$	attracteur
$t$	la période de solution
$D_{KY}$	dimension de <b>Kaplan</b> et <b>York</b>
$e(t)$	l'erreur
$h$	application
$U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$	est un contrôleur
$\alpha_i$	des constants
$V$	fonction de <b>Lyapunov</b>
$\dot{x}(t)$	système hyperchaotique maître
$\dot{y}(t)$	système hyperchaotique esclave

# Introduction générale

Un système dynamique est un système qui se varie dans le temps d'une façon causale et déterministe, il désigne généralement la branche de recherche active des mathématiques, à la frontière de la topologie, de l'analyse, de la géométrie, de la théorie de la mesure et des probabilités. Les systèmes dynamiques sont néanmoins apparus assez tôt dans l'histoire scientifique puisqu'on peut les reconnaître dans les premiers travaux de la mécanique donnant lieu à des équations différentielles [1].

En effet, les travaux fondamentaux de **Lorenz** en 1963 ont donné un aperçu scientifique de reconnaissance d'un nouveau type de mouvement appelé Chaos. La théorie du chaos étudie en détail comment une petite erreur sur la connaissance de l'état initial d'une évolution temporelle déterministe peut donner lieu à une incertitude des prédictions qui croît rapidement avec le temps. On dit qu'il y a une dépendance sensible aux conditions initiales. Selon **Alexandre Lyapunov**, la façon la plus pertinente pour la description de cette caractéristique est à travers l'utilisation des exposants positifs de Lyapunov. Si le système dynamique a plus d'un exposant de Lyapunov positif, alors le système est considéré comme hyperchaotique [2].

La synchronisation des systèmes chaotiques est devenue un sujet important en science non linéaire non seulement pour son importance en théorie mais aussi pour ses applications potentielles dans divers domaines, par exemple, la communication sécurisée, les sciences chimiques et biomédicales, les sciences de la vie, le génie électromécanique, etc. Au cours des dernières décennies, de nombreuses méthodes ont été appliquées avec succès à la synchronisation du chaos, telles que la méthode PC, le contrôle de rétroaction linéaire, le contrôle adaptatif, la conception de recul, le contrôle actif et Backstepping [3].

Le but principale de ce mémoire est l'étude de la synchronisation entre deux systèmes hyperchaotiques de **Lorenz** comme système maître et Chen comme système esclave par un combinaison entre quatre différents types de synchronisation CS, PS, FSPS et FSHPS, basé sur la méthode de contrôle actif.

Ce mémoire comprend quatre chapitre.

- Le premier chapitre présente les notions de base qui sont nécessaires pour les systèmes dynamiques et l'étude de stabilité avec différente méthode.
- Le deuxième chapitre présente la théorie de chaos, et nous avons également fourni des exemples des systèmes chaotiques et hyperchaotiques à temps continu.
- Le troisième chapitre on trouve quelques définitions et différents types de synchronisation avec les méthodes de synchronisation la plus usé.
- Le quatrième chapitre est focalisé sur l'étude des deux systèmes hyperchaotiques de 4-D maître et esclave à temps continue par une combinaison entre quatre différents types de synchronisation CS, PS, FSPS et FSHPS, puis on démontre l'efficacité du schéma de synchronisation par une simulation numérique.

# Chapitre 1

## Préliminaires

### 1.1 Introduction

En mathématiques, en chimie et en physique théorique, un système dynamique est un ensemble très général de composants en interaction (un système), répartis sur plusieurs états et structurés selon certaines propriétés, il est le plus souvent régi par un ensemble d'équations différentielles décrivant le mouvement des composants (leur dynamique) où interviennent une classe de paramètres accessibles.

Dans ce chapitre nous présentons les définitions nécessaires qui permettent de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques, puis nous abordons des notions importantes sur la stabilité des systèmes dynamiques continus.

### 1.2 Systèmes dynamiques

**Définition 1.1** *Un système dynamique est défini par un triplet  $(X, T, f)$ , constitué de l'espace d'états  $X$ , du domaine temporel  $T$  et d'une fonction de transition d'état  $f : X \times T \rightarrow X$  qui possède la propriété, pour tout  $x \in X$  et  $t_1, t_2 \in T$  :*

$$\begin{cases} f(x, 0) = x \\ f(f(x, t_1), t_2) = f(x, t_1 + t_2) \end{cases} \quad (1.1)$$

**Définition 1.2** *On distingue deux grandes catégories des systèmes dynamiques : les systèmes à temps continu et les systèmes à temps discret.*

*Si  $T = \mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}$ , le système est dit à temps continu, et si  $T = \mathbb{N}$  ou  $\mathbb{Z}$ , le système est dit à temps discret [4].*

### 1.2.1 Systèmes dynamiques continus

Un système dynamique dans un temps continu est représenté par un système d'équations différentielles de la forme :

$$\dot{X}_t = \frac{dX}{dt} = f(X, t, p) \quad (1.2)$$

où  $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $X \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^r$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  désigne la dynamique du système.

### 1.2.2 Systèmes dynamiques discrets

Un système dynamique dans le cas discret est représenté par une application (fonction itérative) sous la forme :

$$X_{k+1} = f(X_k, p) \quad (1.3)$$

où  $X_k \in \mathbb{R}^n$ ,  $p \in \mathbb{R}^r$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  indique la dynamique du système en temps discret.

## 1.3 Espace de phase

L'espace de phase est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

## 1.4 Espace d'état

L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système. Cet espace peut être continu ou discret.

## 1.5 Systèmes autonomes ou non autonomes

- Lorsque la variable indépendante  $t$  apparaît explicitement dans l'expression de  $f$ , le système est dit non autonome. En général, c'est un inconvénient majeur pour la résolution numérique et il est préférable de s'en affranchir.
- On peut toujours transformer un système non autonome en système autonome (où  $t$  n'apparaît pas explicitement) [5].

## 1.6 Point fixe

### Cas discret

on appelle "**point fixe**" d'un système dynamique tout point  $x^*$  tel que :

$$x^* = f(x^*) \quad (1.4)$$

Parfois, ces points sont appelés aussi points stationnaires ou points d'équilibres .

### Cas continue

Un point fixe (ou critique ou singulier ou point stationnaires) de l'équation  $\dot{x} = f(x)$  est un point  $x^*$  vérifiant [6] :

$$f(x^*) = 0 \quad (1.5)$$

## 1.7 Orbite et trajectoire

### Cas continue :

**Définition 1.3** Une trajectoire est une solution du système différentiel.

On considère le système dynamique continue (1.2) l'orbite est définie par :

$$O(x_0) = \{x(t), -\infty < t < +\infty\} \quad (1.6)$$

**Définition 1.4** Soit le système dynamique continue (1.2), un point  $x$  est dit  $t$ -périodique [7] :

$$\forall t \in \mathbb{R} : \dot{x}(t) = x(t) \quad (1.7)$$

**Définition 1.5** [8] L'orbite d'un point  $x$  est l'image de la trajectoire issue de  $x$  .

## 1.8 Stabilité des systèmes dynamiques à temps continue

La notion de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires autour des points d'équilibres. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet donc d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est proche d'un point d'équilibre. Il existe quelques concepts pour la stabilité des systèmes dynamiques tels que la stabilité au sens de Lyapunov.

Donc la stabilité est un des aspects essentiels dans l'étude des systèmes dynamiques linéaires et non linéaires .

### 1.8.1 Classification des points d'équilibres

#### a. Cas des systèmes linéaires

Considérons le système linéaire :

$$\dot{x}(t) = Ax \quad (1.8)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  et  $A$  une matrice constante inversible  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $A$  .

**Définition 1.6** 1. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont réelles et de même signe, la solution  $x = 0$  est appelée **noeud**.

2. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont réelles, non nulles et de signe différent, la solution  $x = 0$  est appelée **selle**.

3. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) \neq 0, i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = 0$  est appelée **foyer**.

4. Si les valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sont complexes avec  $\text{Re}(\lambda_i) = 0, i = 1, \dots, n$ , la solution  $x = 0$  est appelée **centre**.

Tous ces cas sont regroupés (FIG.1.1).

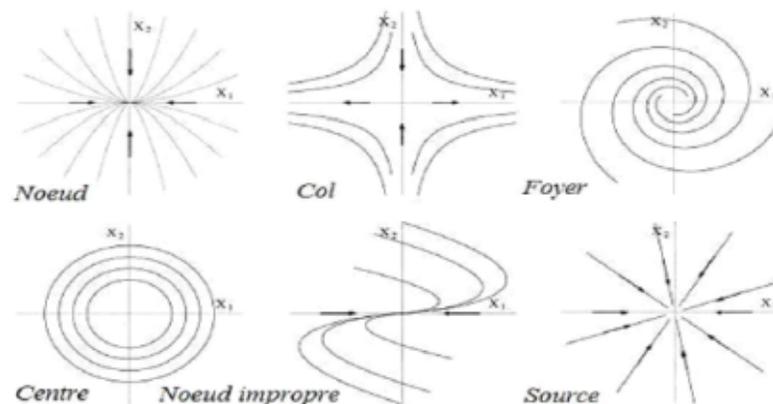


FIG.1.1 – Classification des points d'équilibre dans  $\mathbb{R}^2$

## b. Cas des systèmes non linéaires

Considérons maintenant le système non linéaire :

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (1.9)$$

**Définition 1.7** Un point critique de  $x^*$  de (1.9) est appelé *puits* si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles négatives, il est appelé *sources* si toutes les valeurs propres de la matrice  $A = Df(x^*)$  ont des parties réelles positives, il est appelé *selle* s'il est hyperbolique et si  $A = Df(x^*)$  a au moins une valeur propre avec une partie réelle positive ou au moins une valeur propre avec une partie réelle négative.

**Théorème 1.1** Soit  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f \in C^1$ , un système dynamique à temps continu. Si  $x^*$  un point fixe ( $f(x^*) = 0$ ), alors si les valeurs propres de  $Df(x^*)$  sont de partie réelle négative  $x^*$  est stable, et instable si l'une de ces valeurs propres de  $Df(x^*)$  est de partie réelle positive.

### Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu

Considérons une classe des systèmes non linéaires décrits par le système dynamique autonome :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \quad (1.10)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  continue.

Nous désignons par  $x^*$  un point d'équilibre de (1.10),  $f(x^*, t) = 0$ ,  $\forall t \geq t_0$ , et par  $x(t, t_0, x_0)$  la solution à l'instant  $t > t_0$  du système (1.10) initialisée en  $x_0$  à l'instant  $t_0$ , et  $f$  une fonction non linéaire.

**Définition 1.8 (Stabilité)** L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  stable au sens de Lyapunov du système (1.10) est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t, t_0, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.11)$$

**Définition 1.9 (Stabilité uniforme)** L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  uniformément stable au sens de Lyapunov du système (1.10) est :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.12)$$

**Définition 1.10 (Attractivité)** L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  attractif du système (1.10) est :

$$\forall \delta = \delta(t_0) > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t, t_0, x_0)) = 0, \forall t \geq t_0. \quad (1.13)$$

Lorsque  $\delta(t_0) = +\infty$ , on dit que l'origine est globalement attractive.

**Définition 1.11 (Stabilité asymptotique)** L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  asymptotiquement (resp. globalement asymptotiquement) stable du système (1.10) s'il est stable et attractif (resp. globalement attractif).

$$\exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t, x(t_0)) - x^*\| = 0. \quad (1.14)$$

Donc, la stabilité asymptotique signifie qu'on peut déterminer un voisinage du point d'équilibre tel que n'importe quelle trajectoire, issue d'un point  $x(0)$  appartenant à un voisinage de  $x^*$ , tend vers  $x^*$  lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

**Définition 1.12 (Stabilité exponentielle)** L'origine est un point d'équilibre  $x^*$  localement exponentiellement stable du système (1.10) s'il existe deux constantes strictement positives  $a, b$  telles que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x(t_0) - x^*\| < \delta \implies \|x(t, x(t_0)) - x^*\| < a \|x(t_0) - x^*\| \exp(-bt), \forall t \geq t_0, \forall a \in B_r. \quad (1.15)$$

Lorsque  $B_r = \mathbb{R}^n$ , on dit que l'origine est globalement exponentiellement stable.

**Définition 1.13 (Instabilité)** Le point d'équilibre  $x^*$  est dit instable s'il n'est pas stable au sens de Lyapunov.

**Définition 1.14** Une solution  $\Phi(t)$  du système (1.10) telle que  $\Phi(t_0) = \Phi_0$  est dite stable au sens de Lyapunov tel que toute solution  $x(t)$  de (1.10) dont la valeur initiale  $x(t_0)$  vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|x(t_0) - \Phi_0\| < \delta \implies \|x(t) - \Phi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0. \quad (1.16)$$

si en plus de cette définition on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t) - \Phi(t)\| = 0. \quad (1.17)$$

alors la solution  $\Phi(t)$  est dite asymptotiquement stable.

Tous ces cas sont montrés (FIG.1.2) [9].

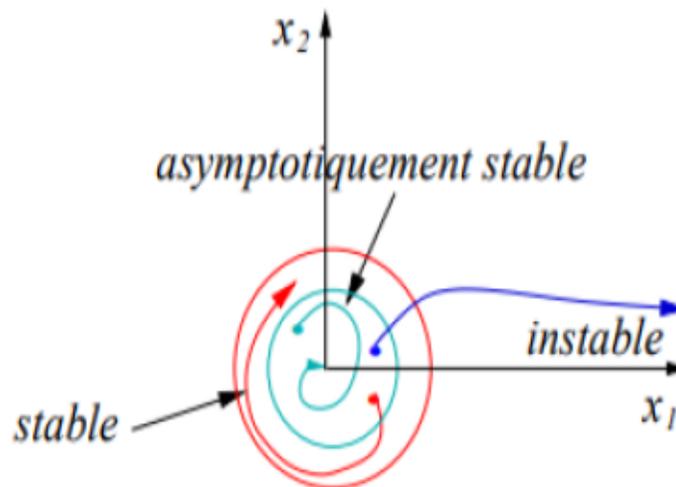


FIG.1.2 – Différents types de stabilité de Lyapunov.

### 1.8.2 Première méthode de Lyapunov (méthode indirecte)

La première méthode de Lyapunov est basée sur l'examen de la linéarisation autour du point d'équilibre  $x^*$  du système (1.10). Plus précisément, on examine les valeurs propres  $\lambda_i$  de la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre. Selon cette méthode, les propriétés de stabilité de  $x^*$  s'expriment comme suit :

- Si toutes les valeurs propres de la matrice jacobienne ont une partie réelle strictement négative,  $x^*$  est exponentiellement stable.
- Si la matrice Jacobienne possède au moins une valeur propre à partie réelle strictement positive,  $x^*$  est instable.

**Remarque 1.1** Cette méthode ne permet pas de dire si l'équilibre est stable ou instable quand la matrice Jacobienne comporte au moins une valeur propre nulle, et aucune valeur propre avec partie réelle strictement positive. Dans ce cas, la stabilité de l'équilibre peut être étudiée dans ce sous-espace par la seconde méthode.

### 1.8.3 Seconde méthode de Lyapunov (méthode directe)

La première méthode de Lyapunov est simple à appliquer, mais elle ne permet d'analyser la stabilité des équilibres que très partiellement. La seconde méthode est plus difficile à mettre en œuvre, mais elle est d'une portée beaucoup plus générale. Elle est basée sur la définition d'une fonction particulière, notée  $V(x)$  est appelée fonction de Lyapunov.

Le théorème suivant résume cette méthode [10].

**Théorème 1.2** *Le point d'équilibre  $x^*$  du système (1.10) est stable s'il existe une fonction (par rapport à  $x$ ) définie positive dans un région autour de  $x^*$   $V(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$  continuellement différentiable ayant les propriétés suivantes :*

**i)**  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $x^* \in D$ .

**ii)**  $V(x^*) = 0$  et  $V(x) > V(x^*)$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$ .

**iii)**  $\dot{V}(x) \leq 0$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$  ;  $\dot{V}(x) = \sum_{j=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} \dot{x}_j = \sum_{j=0}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(x)$ .

– Si de plus pour  $x$ ,  $\dot{V}(x) < 0$ ,  $\forall x \neq x^*$  dans  $D$ , alors  $x^*$  est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov.

– Si on suppose encore que  $V$  tend vers l'infini lorsque  $x \in \mathbb{R}^n$  tend vers l'infini (en norme), alors toutes les trajectoires, même celles qui démarrent loin de  $x^*$ , tendent vers  $x^*$  (on dit que  $x^*$  est globalement asymptotiquement stable).

**Remarque 1.2** *Il n'y a aucune méthode pour trouver une fonction de Lyapunov.*

**Remarque 1.3** *Le Théorème 1.2 est une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix de la fonction de Lyapunov et ne permet pas conclure si on ne trouve pas une telle fonction [9].*

## 1.9 Linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires

Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad (1.18)$$

où  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , et  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  et soit  $x^*$  un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation  $\varepsilon(t)$  soit appliquée au voisinage du point d'équilibre  $x^*$ . La fonction  $f$  peut être développée en série de **Taylor** au voisinage du point  $x^*$  comme suit :

$$\dot{\varepsilon}(t) + \dot{x}^* = f(x^* + \varepsilon(t)) \simeq f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.19)$$

où  $J_f(x^*)$  est la matrice Jacobienne de la fonction  $f$  définie par :

$$J_f(x^*) = \left( \begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x^*} \quad (1.20)$$

Comme  $f(x^*) = \dot{x}^*$ , alors l'équation (1.19) devient :

$$\dot{\varepsilon}(t) = J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.21)$$

L'écriture (1.21) veut dire que le système (1.18) est linéarisé [9].

## 1.10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques notions de base des systèmes dynamiques tels que quelques définitions des systèmes dynamiques, espace de phase, espace d'état, systèmes autonomes ou non autonomes, point fixe et les orbites.

Ensuite, nous donnons la stabilité des systèmes dynamiques continues et quelques méthodes d'étude de la stabilité (classification des points d'équilibres, stabilité au sens de Lyapunov, première et deuxième méthode de Lyapunov), puis la linéarisation des systèmes dynamiques non linéaires continues.

# Chapitre 2

## Théorie du chaos

### 2.1 Introduction

Le terme chaos a été introduit avec sa signification actuelle en 1976 par **Jim Yorke**, un mathématicien de l'université du Maryland, mais le début des études du chaos peut être imputé à **Henri Poincaré** au début du *XXe* siècle, puis elles ont été ressuscitées en 1961 par le météorologue américain **Edward Lorenz**, professeur de mathématiques au MIT (Massachusetts Institute of Technology) qui est considéré après ses recherches sur le chaos, en tant que père officiel.

On appelle donc un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres, et il est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. [11].

### 2.2 Définition du chaos

En général il n'ya pas de définition rigoureuse du chaos, car ce phénomène est plus une notion philosophique qu'une notion scientifique, on peut observer le phénomène du chaos dans plusieurs domaines, mais comment le formaliser ?, la réponse est négative car jusqu'à l'heure actuelle, il n'existe pas une théorie générale qui donne une explication ou une caractérisation finale de ce phénomène. Tout ce qu'il est possible de dire est qu'il existe plusieurs critères physiques qui permettent de confirmer qu'un système est chaotique. soit le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $x \in \mathbb{R}^n$  est la variable d'état, et soit  $\varphi_t(x_0)$  la solution de l'équation (2.1) qui passe par  $x_0$  quand  $t = t_0$ .

**Définition 2.1** On dit que la fonction  $f : I \longrightarrow I$  possède une sensibilité aux conditions initiales s'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour un certain  $x \in I$  et un certain voisinage  $V \subset I$  de  $x$ , il existe  $y \in I$  tel que  $\|f^n(x) - f^n(y)\| > \delta$ .

**Définition 2.2 (Ensemble dense)** soit  $Y \subset X$  On dit que  $Y$  est dense dans  $X$  si, pour tout  $x \in X$ , il existe  $y \in Y$  arbitrairement proche de  $x$ , autrement dit  $Y$  est dense dans  $X$  si pour tout  $x \in X$  on peut trouver une suite  $\{y_n\}$  de  $Y$  qui convergent vers  $x$ .

**Définition 2.3** la fonction  $f : I \longrightarrow I$  est dite transitive topologiquement si pour toute paire d'ensembles ouverts  $U, V \subset I$ , il existe  $k > 0$  tel que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .

**Théorème 2.1 (Théorème de Devaney)** Soit la fonction  $f : I \longrightarrow I$

1. Si la fonction  $f$  est sensible aux conditions initiales.
2. la fonction  $f$  est topologiquement transitive, dans le sens que pour toute paire de sous-ensembles ouverts  $U, V \subset I$ , il existe  $k > 0$  tel que  $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$ .
3. Les points périodiques de la fonction  $f$  sont denses dans  $I$ . Alors la fonction  $f$  est chaotique [12].

## 2.3 Caractéristiques du chaos

### 2.3.1 Sensibilité aux conditions initiales

C'est-à-dire pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement.

### 2.3.2 La non-linéarité

Un système linéaire admet toujours des solutions, les effets sont prévisibles et proportionnels aux causes qui les ont engendrés. On peut le décomposer en sous-ensembles ou le composer avec d'autres systèmes sans qu'il perd ses propriétés.

Mais un système non-linéaire, n'est pas en général soluble, plus on tente de le décomposer, plus la complexité interne se révèle.

### 2.3.3 La structure fractale

Le comportement d'un système chaotique se reproduit de manière auto-similaire à des échelles différentes. Plus on le regarde de près, plus on découvre de nouveaux détails comparables à ceux

qu'on observait aux échelles supérieures. Sa représentation géométrique ne s'intègre pas dans un espace de dimension entière, mais de dimension fractionnaire (une courbe, n'est plus tout à fait une courbe, mais elle n'est pas devenue une surface) [13].

### 2.3.4 Le déterminisme

Un système chaotique est déterministe (plutôt que probabiliste), c'est-à-dire qu'il soumit à des lois qui décrivent complètement son mouvement. La notion de déterminisme signifie donc la capacité de prédire l'état futur d'un phénomène à partir d'un événement passé. Cependant, dans les phénomènes aléatoires, il est impossible de prévoir les trajectoires d'une quelconque particule [14].

## 2.4 Les attracteurs

**Définition 2.4** [5] *Un attracteur est un objet géométrique vers lequel tendent toutes les trajectoires des points de l'espace des phases, c'est à dire une situation (ou un ensemble de situations) vers lesquelles évolue un système, quelles que soient ses conditions initiales. Mathématiquement, l'ensemble  $A$  est un attracteur si :*

1.  $A$  est un ensemble compact et invariant par le flot  $\varphi_t$  (c-à-d  $\varphi_t(A) = A$  pour tout  $t$ ).
2. Pour tout voisinage  $U$  de  $A$ , il existe un voisinage  $V$  de  $A$  tel que toute solution  $X(t, X_0) = \varphi_t(X_0)$  restera dans  $U$  si  $X_0 \in V$ .
3.  $\bigcap_{t \geq 0} \varphi_t(V) = A$ .
4. Il existe une orbite dense dans  $A$ .

### 2.4.1 Les types d'attracteurs

#### Les attracteurs réguliers

Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques. et il existe trois types distincts :

1. **Le point fixe** : est le plus simple et le plus courant d'attracteurs, dans lequel le système évolue vers un état de repos (point).
2. **Un cycle limite** : c'est une trajectoire fermée qui attire toutes les trajectoires proches.
3. **Un tore** : représente les mouvements résultant de deux ou plusieurs oscillations indépendantes que l'on appelle parfois "mouvements quasi périodique".

## Les attracteurs étranges

Les attracteurs étranges sont des formes géométriques complexes qui caractérisent l'évolution des systèmes chaotiques : au bout d'un certain temps, tous les points de l'espace des phases donnent les trajectoires qui tendent à former l'attracteur étrange.

L'attracteur étrange se caractérise par :

1. Sensibilité aux conditions initiales (deux trajectoires de l'attracteur initialement voisines finissent toujours par s'éloigner l'une de l'autre, ceci traduit un comportement chaotiques).
2. La dimension  $d$  de l'attracteur est fractale avec  $2 < d < n$  (ce qui justifie l'adjectif étrange).
3. L'attracteur est de volume nulle dans l'espace des phases [15].

## 2.5 Détection du chaos

### 2.5.1 L'exposant de Lyapunov

Le 12 octobre 1892 **Lyapunov** soutient à l'université de Moscou une thèse de doctorat intitulée : Le problème général de la stabilité du mouvement.

Il y introduit l'idée de mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines. Lorsque cette divergence croît exponentiellement avec le temps pour presque toutes les conditions initiales voisines d'un point donnée, on a le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, idée à laquelle sont attachés les exposants de **Lyapunov**, qui donnent une mesure quantitative de cette divergence exponentielle locale et mesure en fait le degré de sensibilité d'un système dynamique. Rappelons d'abord cette formule et voyons comment **Lyapunov** a pu arriver à déduire une telle formule.

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \left( \dot{f}(x_{i-1}) \right) \right| \quad (2.2)$$

Considérons un système dynamique quelconque dont la condition initiale  $x_0$  est affectée d'une erreur infinitésimal  $E_0$ . Après  $n$  itération, l'erreur initiale  $E_0$  sera donc amplifiée d'un facteur  $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$ , notons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à, puisque :

$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$ , il suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale.

Le logarithme d'un produit correspond à une somme de logarithme, utilisons plutôt le logarithme du produit pour compléter cette étude.

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left( \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \right) \\ &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \end{aligned} \quad (2.3)$$

Avant de faire tendre cette dernière quantité vers l'infini, calculons d'abord la moyenne de la somme obtenue. On arrive ainsi à l'exposant de **Lyapunov** :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right) \quad (2.4)$$

$E_i$  et  $E_{i-1}$  étant de très petites valeurs, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation associée à l'équation utilisée si naturellement la fonction est dérivable. En effet soit  $f(x_i)$  cette fonction.

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}) \quad (2.5)$$

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} \quad (2.6)$$

Puisque

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad (2.7)$$

Alors si  $f$  est dérivable, on a :

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \text{ lorsque } E_{i-1} \rightarrow +\infty \quad (2.8)$$

Par conséquent

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \left( f'(x_{i-1}) \right) \right| \quad (2.9)$$

lorsque l'exposant de **Lyapunov** est positif :

$$\ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0 \quad (2.10)$$

et par conséquent

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1 \quad (2.11)$$

L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera dans ce cas sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si au contraire l'exposant de **Lyapunov** est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant.

### Classification des orbites suivant le signe de l'exposant de Lyapunov

-Si  $\lambda < 0$ , l'orbite est attractive vers un point fixe ou orbite périodique stable. Il caractérise les système dissipatif. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif, plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de **Lyapunov**  $\lambda$  qui tend vers  $-\infty$ .

-Si  $\lambda = 0$ , l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

-Si  $\lambda > 0$ , l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités : ces points sont dit instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison. Pour un système continue, l'espace de phase est un ensemble de lignes croisées [16].

Etat stable	Flot	Dimension de Lyapunov	Exposant de lyapunov
point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
périodique d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
périodique d'ordre $k$	k-tore	$k$	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
Chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper-chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

"TAB.2.1 – Classification des régimes permanents selon les exposants de **Lyapunov**"

### Caractérisation d'un attracteur par le signe des exposants de Lyapunov

Un exposant de Lyapunov positive indique que selon la direction qu'il représente la divergence entre deux trajectoires voisines augmente exponentiellement avec le temps.

Il s'agit donc bien là d'une caractérisation d'un attracteur étrange. Pour une application bidimensionnelle, on peut dès lors résumer la correspondance entre le type de l'attracteur et signe des exposants de **Lyapunov** dans le tableau [17] :

Type d'attracteur	Signe des exposants de Lyapunov
point d'équilibre	-, -, -
Cycle limite périodique	0, -, -
Cycle limite quasi périodique	0, 0, -
Attracteur étrange	+, 0, -

"TAB.2.2 – Caractérisation des attracteurs par le signe des exposants de **Lyapunov**"

## 2.5.2 Dimension fractale

L'étude d'un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^q$  invariant, fermé et borné (attracteur) d'un système dynamique gouverné par une application  $f$  comprend souvent la détermination d'un nombre représentant la dimension de  $A$  selon une définition appropriée de cette propriété. Ce nombre peut être assez important surtout quand  $A$  est un attracteur chaotique.

Par exemple, un point à la dimension 0, un segment à la dimension 1, un carré plein (intérieur et bord) à la dimension 2, un cube plein (intérieur et limite) à la dimension 3, etc. Cette idée intuitive n'est pas assez sophistiquée pour les objets géométriques complexes, y compris les attracteurs étranges.

Il peut arriver que différentes définitions de dimension attribuent différents nombres à l'un des sous-ensembles complexes de  $\mathbb{R}^q$ , pour lesquels l'idée intuitive de dimension a échoué. De plus, ces nombres ne peuvent pas être des nombres entiers. Un objet géométrique dont la dimension (dans une définition appropriée) n'est pas un entier s'appelle une fractale. Quelques définitions différentes de dimension fractales comme : Dimension de Hausdorff, Dimension de capacité, Dimension de corrélation et Dimension Kaplan et Yorke (Dimension de **Lyapunov**).

### Dimension Kaplan et Yorke (Dimension de Lyapunov).

Soit  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ , les  $n$  exposants de **Lyapunov** d'un attracteur d'un système dynamique et soit  $j$  le grand entier naturel tel que  $:\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_j \geq 0$ . Alors la dimension de Kaplan et Yorke (**Lyapunov**) est donnée par :

$$D_{KY} = \frac{\sum_{i=1}^j \mu_i}{|\mu_{j+1}|}$$

Si aucun  $j$  existe alors  $D_{KY} = 0$  (comme le cas d'un point hyperbolique stable) ; et si l'attracteur est chaotique alors  $D_{KY} > 0$  est un nombre fractionnaire [18].

## 2.5.3 Routes vers le chaos

Un système dynamique possède en général un ou plusieurs paramètres dit "contrôle", qui agissent sur les caractéristiques de la fonction de transition. Selon la valeur du paramètre de contrôle, les mêmes conditions initiales mènent à des trajectoires correspondant à des régimes dynamiques qualitativement différents. La modification continue du paramètre de contrôle conduit dans bien des cas à une complexification progressive du régime dynamique développé par le système.

- a- **L'intermittence vers le chaos** : un mouvement périodique stable est entrecoupé par des bouffées de turbulence. Lorsqu'on augmente le paramètre de contrôle, les bouffées de turbulence deviennent de plus en plus fréquentes, et finalement, la turbulence domine[13].
- b- **Le doublement de période** : ce scénario de transition est sans doute le plus connu, par augmentation du paramètre de contrôle de l'expérience, la fréquence du régime périodique double, puis est multipliée par 4, par 8, par 16, ...etc, les doublements étant de plus en plus rapprochés, on tend vers un point d'accumulation au quel on obtiendrait hypothétiquement une fréquence infinie, c'est à ce moment que le système devient chaotique.
- c- **Par quasi-périodicité** : ce scénario via la quasi-périodicité a été mise en évidence par les travaux théoriques de **Ruelle** et **Takens**. Dans un système dynamique à comportement périodique à une seule fréquence si nous changeons un paramètre alors, il apparaît une deuxième fréquence, si le rapport entre les deux fréquences, si le rapport entre les deux fréquences et rationnelle le comportement est périodique, mais si le rapport est irrationnel le comportement est quasi-périodique, alors on change de nouveau le paramètre et il apparaît une troisième fréquence et ainsi de suite jusqu'au chaos [7].

## 2.6 Utilisation du chaos

C'est la classe la plus intéressante, car c'est pour ce type de système que la détection du chaos offre un grand potentiel. Cette classe couvre un énorme spectre d'applications, dont principalement la finance, l'économie, le biomédical, l'art, l'hydraulique, les réseaux, l'écologie et la liste ne cesse de s'agrandir. Par la suite, nous allons explorer un cas où on peut rencontrer le chaos sans avoir le modèle proprement dit du système qui a généré celui-ci, il s'agit du coeur[9].

### 2.6.1 En biologie

La théorie du chaos, en biologie, permet d'expliquer les différences de populations animales, et les oscillations cérébrales (électroencéphalogramme), c'est-à-dire un enregistrement graphique de l'activité électrique du cerveau au moyen d'électrodes placées sur le cuir chevelu d'un attracteur étrange.

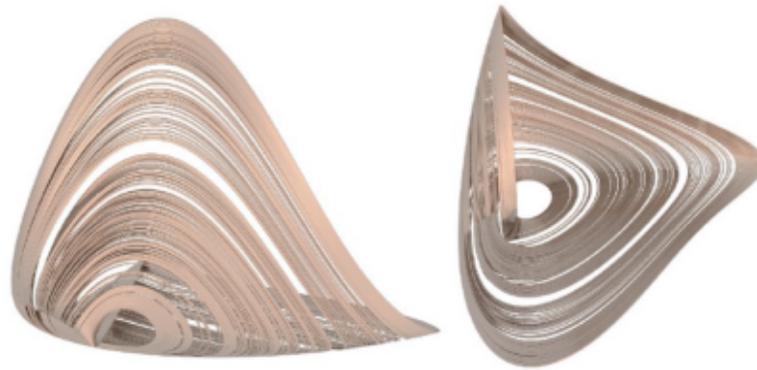


FIG.2.1 – Attracteur d'un modèle de cerveau (activité électrique)

Ainsi, les arythmies typiques de nombreuses maladies cardiaques s'expliquent également par la théorie du chaos. Dans un coeur normal, les impulsions électriques traversent les fibres musculaires de manière uniforme, forçant le ventricule cardiaque à se contracter et à pomper le sang. Une fois contractées, les fibres deviennent insensibles aux signaux électriques ; Parlez de la période réfractaire.

Ainsi, des différences de durée de la période de résistance d'une région du ventricule à une autre seraient à l'origine d'une contractilité spastique à l'origine de la crise cardiaque [19].

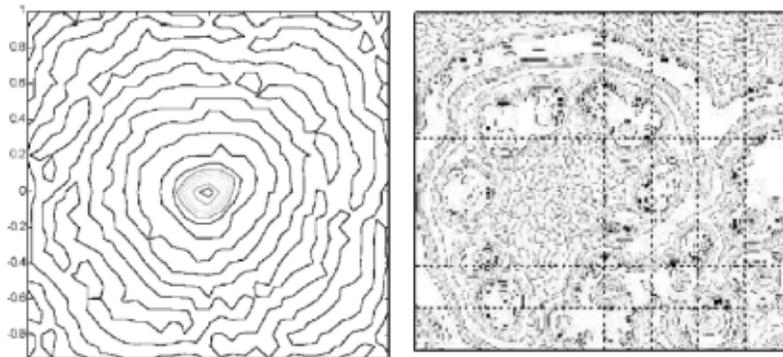


FIG.2.2 – Espace de phase pour le modèle du coeur dans un cas régulier (à gauche) et dans cas chaotique (à droite)

### Cas de pratique médicale (le coeur)

Les deux phases mécaniques de fonctionnement du coeur sont la systole et la diastole. Un oscillateur physio - électrique appelé le noeud sinusal génère des impulsions électriques qui sont conduites par le système de distribution neurocardiaque aux différents muscles. La forme de ces

impulsions change durant le cycle de conduction générant ainsi une forme particulière appelée le signal ECG (Electro Cardio Gramme) (FIG.2.1).

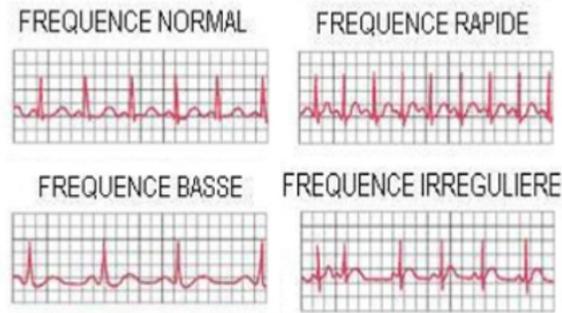


FIG.2.3 – Le signal ECG

Des études ont choisi d'explorer les modèles mathématiques du coeur proposés par les biomathématiciens. L'un de ces travaux a étudié comment un comportement chaotique peut être généré dans le modèle du système autonome cardiaque. Le modèle comporte deux variables d'état  $e$  et  $g$  où  $e$  représente le potentiel électrique (excitation rapide) et  $g$  représente la récupération (déchargement lent).

Les équations qui régissent le modèle sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial e}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) d_{i,j} \left(\frac{\partial e}{\partial x_j}\right) - f(e) - g \\ \frac{\partial g}{\partial t} = \varepsilon(e,g) (ke - g) \end{cases} \quad (2.12)$$

Où  $d_{ij}$  est le tenseur de conductivité quantifiant la non-isotropie du tissu cardiaque.

$f(e)$  est définie comme suit :

$$\begin{cases} C_1 e & \text{pour } e < e_1 \\ -C_2 e + a & \text{pour } e_1 = e_2 = e \\ C_3 (e - 1) & \text{pour } e > e_2 \end{cases} \quad (2.13)$$

et  $\varepsilon(e, g)$  définie comme suit :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 & \text{pour } e < e_2 \\ \varepsilon_2 & \text{pour } e > e_2 \\ \varepsilon_3 & \text{pour } e < e_1 \text{ et } g < g_1 \end{cases} \quad (2.14)$$

Avec :

$$e_1 = 0.0026, e_2 = 0.837, C_1 = 20, C_2 = 3, C_3 = 15, a = 0.06, k = 3.$$

$$\varepsilon_1^{-1} = 75, \varepsilon_2^{-1} = 1.8, \text{ et } 0.5 < \varepsilon_3^{-1} < 10$$

Enfin, les résultats de la simulation pour un cas normal et un cas de défibrillation cardiaque sont montrés [9].

### 2.6.2 En communication

L'image d'un modèle chaotique est structuré autour d'un squelette constitué d'un ensemble d'orbites périodiques instables (UPO), l'ensemble de ces UPO, dense dans l'attracteur, ainsi que les orbites transitant entre elles, forment l'attracteur chaotique. L'idée d'utilisations du chaos dans les sécurités communications à Multi-Utilisateurs sont souvent basées sur le contrôle et l'utilisation adéquate des (UPO), l'idée principale est de se servir du squelette d'un attracteur chaotique comme un réservoir d'ondes potentiels de communications. De cette façon, le nombre d'utilisateurs est pourvus chacun d'un code propre dans le même canal. L'intérêt des attracteurs multi-plis réside dans leur possibilité de permettre de générer des orbites plus courtes (par un chaos plus compliqué) et donc une transmission plus rapide des messages, ainsi qu'une meilleure sécurité dans les communications.

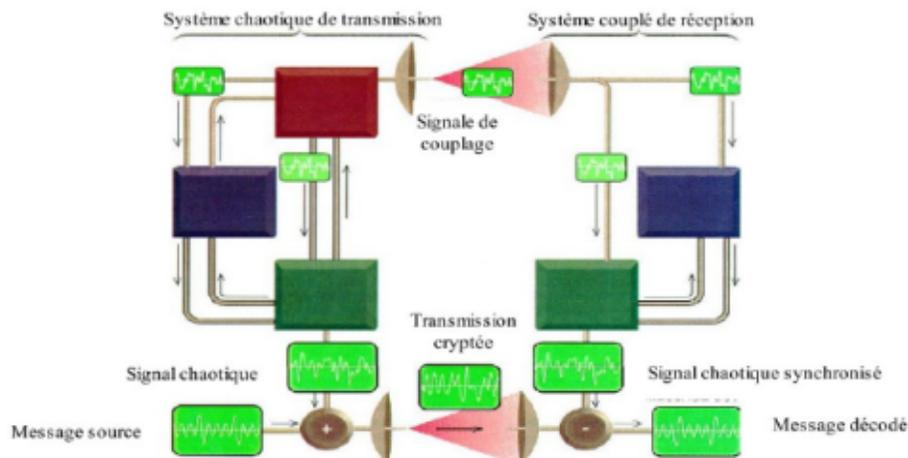


FIG.2.4 – Communication chaotique par le système de Pecorra et Carroll

### 2.6.3 En économie

En économie, les mouvements commerciaux et les marchés financiers, ainsi que les cycles économiques, peuvent être expliqués en partie par la théorie du chaos, où les fractales ont un lien

très étroit avec le hasard, et permettent donc, la modélisation d'expériences aléatoires complexes, d'où l'utilisation en finance, modéliser les variations des cours boursiers.

### 2.6.4 En informatique

En informatique, des méthodes de compression d'images ont été développées à partir de fractales. Les images synthétiques, au cinéma ou dans le domaine des jeux vidéo, sont de plus en plus réalistes, toujours grâce à des fractales.

En effet, les objets fournis par la géométrie euclidienne sont peu susceptibles de représenter fidèlement le monde : voyons-nous souvent, dans la nature, des cercles ou des cubes parfaits ? Non, les formes de la nature répondent beaucoup plus facilement aux formes fractales.

### 2.6.5 En art

Même dans le domaine de l'art, depuis les années 1980, la beauté des fractales a été exploitée et appréciée, et on a assisté à une prolifération d'expositions sur le thème de ces images fascinantes. Les images fractales ont un certain intérêt esthétique, mais on peut se demander si elles ont une autre utilité. Nous pouvons remarquer quelques fonctions remarquables des fractales dans différents domaines.

Les fractales sont des figures géométriques avec une propriété d'auto-similarité. Ainsi, nous observons des modèles similaires dans le dessin de la fractale quelle que soit l'échelle à laquelle nous la regardons. Donnons en exemple le fameux triangle de Sierpinski constitué d'un triangle équilatéral divisé en sous-triangles équilatéraux, eux-mêmes subdivisés en triangles équilatéraux, etc[19].

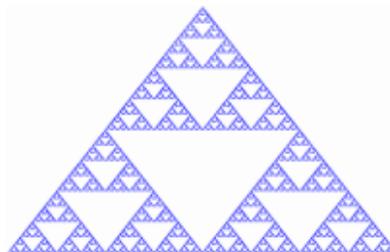


FIG.2.5 – Le triangle de Sierpinski  
un exemple de fractale

## 2.7 Quelques exemples des systèmes chaotiques à temps continu

### 2.7.1 Système de Lorenz

Le système de Lorenz est un exemple célèbre de système différentiel au comportement chaotique pour certaines valeurs de paramètres, ce système est défini par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = -rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \quad (2.15)$$

Ci dessous l'attracteur de Lorenz ( l'espace des phases ) et la cordonnée  $x$  obtenus à partir des valeurs numériques  $\sigma = 10$ ,  $r = \frac{8}{3}$  et  $b = 28$  [20].

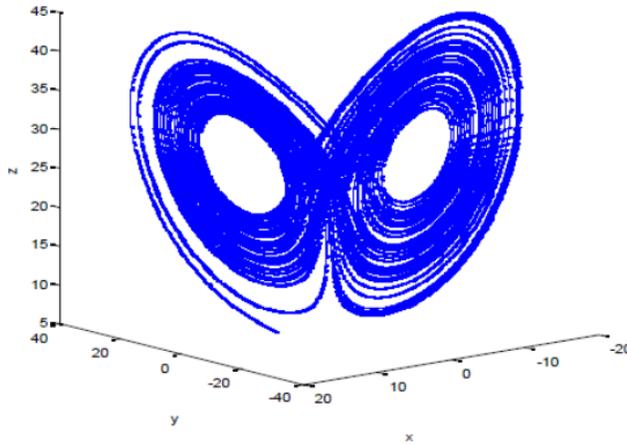


FIG.2.6 – Attracteur de Lorenz [21]

### 2.7.2 Système de Rössler

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + z(x - c) \end{cases} \quad (2.16)$$

Ce système qui a été proposé par l'allemand **Otto Rossler**, est lié à l'étude de l'écoulement des fluides, il découle des équations de **Navier-Stokes**. Les équations de ce système ont été décou-

vertes à la suite de travaux en cinétique chimique. Pour une simulation numérique, nous prenons  $a = 0.398$ ,  $b = 2$  et  $c = 4$  [20].

### 2.7.3 Système de Lorenz en 4-D

Le système hyperchaotique de **Lorenz** en 4-D on peut définir par l'EDO non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -a_1x_1(t) + a_2x_2(t) + x_4(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_2x_1(t) - x_2(t) - x_4(t) - x_1x_3 \\ \dot{x}_3(t) = -a_3x_3(t) + x_1x_2 \\ \dot{x}_4(t) = 0.1x_2x_3 \end{cases} \quad (2.17)$$

avec  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 28$  et  $a_3 = \frac{8}{3}$ .

### 2.7.4 Système de Chen en 4-D

Le système hyperchaotique de **Chen** en 4-D définie par :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -b_1y_1(t) + b_1y_2(t) + u_1 \\ \dot{y}_2(t) = 4y_1(t) + b_2y_2(t) + 4y_4(t) - 10y_1y_3 + u_2 \\ \dot{y}_3(t) = -b_3y_3(t) + y_2^2 + u_3 \\ \dot{y}_4(t) = -b_4y_1(t) + u_4 \end{cases} \quad (2.18)$$

avec  $b_1 = 35$ ,  $b_2 = 21$ ,  $b_3 = 3$  et  $b_4 = 2$  [22].

## 2.8 Conclusion

Ce chapitre est réservé à la théorie du chaos, le phénomène du chaos est caractérisé par la sensibilité aux conditions initiales, son attracteur étrange, sa dimension fractale et au moins l'un de ses exposants de **Lyapunov** est positif, cependant il existe un certain nombre de transition vers le chaos.

Pour conclure ce chapitre, nous avons présenté quelques exemples, les plus célèbres tel que système de **Lorenz**, système de **Rössler**..., qui illustrent le comportement des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques en temps continu.

# Chapitre 3

## Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques

### 3.1 Introduction

Le phénomène de synchronisation a été étudié depuis long temps. Au 17<sup>ème</sup> siècle, **Huygens** (1629 – 1695) remarqua ce phénomène en étudiant deux horloges de fréquences légèrement différentes. Il constata qu'en les reliant l'une à l'autre avec un morceau de bois, elles affichaient toutes les deux la même heure : elles se synchronisation. Deux exemples de synchronisation existente dans la nature, dans le domaine de la science de la vie et de la terre, ainsi que dans les domaines techniques. En neurobiologie, la notion de synchronisation apparait pour expliquer le fonctionnement du cerveau : chaque activité est produite par un ensemble de neurones dont les signaux électriques oscillent de manière synchrone.

Dans le domaine des communications, les procédés utilisés pour transmettre l'information sous forme numérique exigent, en général, un synchronisme précis entre certaines fonctions du récepteur et les fonctions correspondantes de l'émetteur.

Par "synchronisme", on entend que les générateurs rythmant les deux fonctions associés doivent avoir la même fréquence nominale et présenter un déphasage constant et bien déterminé [23].

### 3.2 Définitions de synchronisation

**Définition 3.1** (de Larousse) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : Syn veut dire ensemble et Chrono veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations, en fonction du temps.*

**Définition 3.2 (générale)** La synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.

### 3.2.1 Définition de synchronisation en mathématique

Après plusieurs tentatives pour définir mouvement synchronisé, **Brown** et **Kocarev** ont récemment fourni une définition mathématique de la synchronisation. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) \end{cases} \quad (3.1)$$

où,  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $Y(t) \in \mathbb{R}^m$  sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

**Définition 3.3 (Brown et Kocarev)** Les sous-systèmes dans les équations (3.1) sont synchronisés sur la trajectoire de  $\varphi(w_0)$ , par rapport aux propriétés  $g_X$  et  $g_Y$  ; s'il existe un instant indépendant de l'application  $h$  tel que  $\|h(g_X; g_Y)\| = 0$ .

Avec le choix de  $g_X$ ,  $g_Y$  et  $h$  on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe des différents types de synchronisation [24].

## 3.3 Différentes types de synchronisation

Nous rappelons les différents types de synchronisation citées dans la littérature, y compris la synchronisation complète, la synchronisation généralisée, la synchronisation projective, la synchronisation FSP et la synchronisation FSHP.

### 3.3.1 Synchronisation complète

Soit le système chaotique maître représenté par

$$\dot{X} = F(X(t)) \quad (3.2)$$

d'où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système (3.2) et  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Et un système chaotique esclave donné par

$$\dot{Y} = G(Y(t)) + U \quad (3.3)$$

d'où  $Y(t) \in \mathbb{R}^n$  est l'état du système (3.3) et  $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un vecteur de contrôle à déterminer. On définit l'erreur de la synchronisation complète en tant que

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (3.4)$$

Ainsi, le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur  $U$  de sorte que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0 \quad (3.5)$$

d'où  $\|\cdot\|$  est la norme euclidienne.

Si  $F = G$ , la relation devient une synchronisation complète identique.

Si  $F \neq G$ ; c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés [25].

### 3.3.2 Anti-Synchronisation

**Définition 3.4** [26] On parle d'une anti-synchronisation des systèmes (3.1) et (3.2) si :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) + X(t)\| = 0 \quad (3.6)$$

### 3.3.3 Synchronisation projective

On dit qu'on a une synchronisation projective si les variables d'état  $y_i(t)$  du système chaotique esclave  $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$  se synchronisent avec une constante multiple de l'état  $x_i(t)$  du système chaotique maître  $X(t) = (x_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ , tels que :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow \infty} |y_i(t) - \alpha_i(x_i(t))| = 0, \forall (x(0), y(0)); i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.7)$$

Le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux à  $-1$  représente un cas d'anti-synchronisation complète.

### 3.3.4 Synchronisation FSHP

On dit qu'on a une synchronisation FSHP (en anglais full state hybrid projective synchronization), si chaque variable d'état  $y_i(t)$ ;  $1 \leq i \leq n$ ; du système chaotique esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables de l'état  $x_i(t)$ ;  $1 \leq i \leq n$ ; du système chaotique maître, tels que :

$$\exists \beta_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \lim_{t \rightarrow \infty} \left| y_i(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij}(x_j(t)) \right| = 0, \forall (x(0), y(0)); i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective .

### 3.3.5 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. On considère un couple de systèmes maitreesclave représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = F(X(t)) \\ \dot{Y}(t) = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (3.9)$$

d'où  $X(t) \in \mathbb{R}^n$ ;  $Y(t) \in \mathbb{R}^m$  sont les état des systèmes maître et esclave, respectivement,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$  est un contrôleur.

S'il existe un contrôleur  $U$  et une fonction  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales  $x(0)$  et  $y(0)$ ; vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \phi X(t)\| = 0, \forall x(0), \forall y(0) \quad (3.10)$$

alors, les systèmes maître-esclave (3.9) se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction . Si la fonction  $\phi$  est définie par  $\phi(X(t)) = \Lambda X(t)$  tel que  $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{m \times n}$ , on dit qu'on a une synchronisation full-state hybride projective [25].

### 3.3.6 Synchronisation FSPS

Ont présenté la synchronisation notée FSPS (en anglais : Full State Projective Synchronization) qui signifie que les deux systèmes émetteur et récepteur synchronisent jusqu'à une constante non-nulle  $h$ .

**Définition 3.5** Pour le système (3.9), on dit qu'il y a une synchronisation FSPS, s'il existe un constant  $h(h \neq 0)$ , telle que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - hX(t)\| = 0 \quad (3.11)$$

c'est-à-dire [9] :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y_i - hX_i\| = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

## 3.4 Méthodes de synchronisation

### 3.4.1 Méthode de contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par **Bai** et **Lonngren**. C'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme a été présentée par **M. A. Ahan**, **O. I. Olusola** et **al**, **K. S. Ojo** et **al**.

Soient deux systèmes chaotiques à synchronisent maître et esclave définis par :

$$\begin{cases} \dot{X} = F(X(t)) \\ \dot{Y} = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (3.13)$$

Où  $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^n$  sont les vecteurs d'états des systèmes maître et esclave respectivement, et  $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un contrôleur à déterminer.

Pour que les deux systèmes se synchronisent nulle faut que l'erreur entre les trajectoires des systèmes, donc le système converge vers zéro lorsque le temps tends vers l'infini, cet erreur est déterminé comme suit :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (3.14)$$

Alors

$$\dot{e}(t) = \dot{Y}(t) - \dot{X}(t) \quad (3.15)$$

$$\dot{e}(t) = G(Y(t)) - F(X(t)) + U \quad (3.16)$$

Si on peut écrire la quantité  $G(Y(t)) - F(X(t))$  de la façon suivante :

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) \quad (3.17)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U \quad (3.18)$$

tel que  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est une matrice constante et  $N$  une fonction non linéaire, le contrôleur  $U$  est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(t), y(t)) \quad (3.19)$$

d'où  $V$  est le contrôleur actif défini par :

$$V = -Le(t) \quad (3.20)$$

d'où  $L$  est une matrice de contrôle inconnue, on obtient donc la formule finale de l'erreur :

$$\dot{e}(t) = (A - L)e(t) \quad (3.21)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître et le système esclave est transformée en problème de zéro stabilité du système (3.20) [27].

### 3.4.2 Méthode du Backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de **Lyapunov** avec la conception du contrôleur nécessaire, En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = f_1(x_1, x_2), \\ \dot{X}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ \dot{X}_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{cases} \quad (3.22)$$

et

$$\begin{cases} \dot{Y}_1 = f_1(y_1, y_2), \\ \dot{Y}_2 = f_2(y_1, y_2, y_3), \\ \vdots \\ \dot{Y}_n = f_n(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) + u. \end{cases} \quad (3.23)$$

d'où  $f_1$  est une fonction linéaire,  $f_i, (i = 2, 3, \dots, n)$ , sont des fonctions non-linéaires et  $u$  est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (3.22) et (3.23). L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ \vdots \\ e_n = y_n - x_n. \end{cases} \quad (3.24)$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = g_1(e_1, e_2), \\ \dot{e}_2 = g_2(e_1, e_2, e_3), \\ \vdots \\ \dot{e}_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u. \end{cases} \quad (3.25)$$

d'où  $g_1$  est une fonction linéaire, et  $g_i, (i = 2, 3, \dots, n)$ , sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle  $u$  qui assure la convergence du système  $e_i, (i = 1, 2, \dots, n)$ , vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (3.25) doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n),$$

et pour chaque sous système on définit une fonction de **Lyapunov**  $V$  positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j) \quad (3.26)$$

d'où  $j$  est l'ordre du sous-système,  $u_j, \alpha_j$  représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre  $j$ .  $u_j$  et  $\alpha_j$  sont calculés à chaque fois de telle sorte que  $\dot{V}_j < 0$  [28].

### Exemple numérique

**Synchronisation du système chaotique de Lorenz via méthode de contrôleur actif :** Considérons les systèmes identiques chaotiques complète de Lorenz (d'après l'erreurs) sous la forme paramétrique triangulaire suivant comme système **maître** (émetteur) :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -10(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_1 = (x_1 - y_1) - z_1(9 + x_1), \\ \dot{z}_1 = 9(x_1 + y_1) - 3z_1 + x_1y_1. \end{cases} \quad (3.27)$$

Soit le système **esclave** (récepteur) :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -10(x_2 - y_2) + u_1, \\ \dot{y}_2 = (x_2 - y_2) - z_2(9 + x_2) + u_2, \\ \dot{z}_2 = 9(x_2 + y_2) - 3z_2 + x_2y_2 + u_3. \end{cases} \quad (3.28)$$

Où  $u_i, i = 1, 2, 3$  sont les fonctions du contrôle actifs qui seront déterminées ultérieurement.

Pour la synchronisation complète, définissons les états erreurs pour chaque variable d'état :

$$\begin{cases} e_x = x_2 - x_1 \\ e_y = y_2 - y_1 \\ e_z = z_2 - z_1 \end{cases} \quad (3.29)$$

Et suivons les étapes de la procédure du contrôle actif, par soustraction des équations du systèmes (3.27) de ceux des équations du systèmes (3.29) on utilisant la définition du système (3.28), on obtient les dynamiques du système erreur suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -10e_x + 10e_y + u_1, \\ \dot{e}_y = e_x - e_y - 9e_z - x_2z_2 + x_1z_1 + u_2, \\ \dot{e}_z = 9e_x + 9e_y - 3e_z + x_2y_2 - x_1y_1 + u_3. \end{cases} \quad (3.30)$$

d'après la méthode de contrôleur actif, l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$\dot{e}(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U$$

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_y(t) \\ \dot{e}_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & -9 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2z_2 + x_1z_1 \\ x_2y_2 - x_1y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

D'où

$$U = V - N(X(t) - Y(t))$$

On définit le contrôleur  $U$  comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = v_1, \\ u_2 = x_2z_2 - x_1z_1 + v_2, \\ u_3 = -x_2y_2 + x_1y_1 + v_3. \end{cases} \quad (3.32)$$

les dynamiques du système erreur devient :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -10e_x + 10e_y + v_1, \\ \dot{e}_y = e_x - e_y - 9e_z + v_2, \\ \dot{e}_z = 9e_x + 9e_y - 3e_z + v_3. \end{cases} \quad (3.33)$$

$V$  le contrôleur actif défini par  $V = -Le(t)$  nous le choisissons comme suit :

$$\begin{cases} v_1 = -10e_x, \\ v_2 = -e_x - 2e_y - 9e_z + v_2, \\ v_3 = 9e_x + 9e_y + 8e_z. \end{cases} \quad (3.34)$$

D'où la matrice de contrôle inconnue

$$L(t) = \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 9 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

On obtient la formule finale d'erreur :

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= (A - L)e(t), \\ \begin{pmatrix} \dot{e}_x(t) \\ \dot{e}_y(t) \\ \dot{e}_z(t) \end{pmatrix} &= \left( \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 1 & -1 & 9 \\ 9 & 9 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -10 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 9 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_z(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & -18 \\ 0 & 0 & -10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x(t) \\ e_y(t) \\ e_z(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.36)$$

On calcule le polynôme caractéristique et on trouve les valeurs propres  $\lambda_1 = -10$ ,  $\lambda_2 = -3$ ,  $\lambda_3 = -11$ , tous les  $\lambda$  sont négatives.

Donc le système est asymptotiquement stable au sens de **Lyapunov**, ce qui assure que pour tout  $t \rightarrow +\infty$  l'erreur  $e_i \rightarrow 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

C'est-à-dire la synchronisation complète de deux systèmes est réalisée.

**Synchronisation du système chaotique de Lorenz via méthode de Backstepping :** Soit le système esclave :

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = -10(x_2 - y_2) + u_1, \\ \dot{y}_2 = (x_2 - y_2) - z_2(9 + x_2) + u_2, \\ \dot{z}_2 = 9(x_2 + y_2) - 3z_2 + x_2y_2 + u_3. \end{cases} \quad (3.37)$$

Pour la synchronisation complète, l'erreur est défini par :

$$\begin{cases} e_x = x_2 - x_1 \\ e_y = y_2 - y_1 \\ e_z = z_2 - z_1 \end{cases} \quad (3.38)$$

Sa dynamique est :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \dot{x}_2 - \dot{x}_1 \\ \dot{e}_y = \dot{y}_2 - \dot{y}_1 \\ \dot{e}_z = \dot{z}_2 - \dot{z}_1 \end{cases} \quad (3.39)$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = -10e_x + 10e_x, & (1) \\ \dot{e}_y = e_x - e_y - 9e_z - x_2e_z - z_1e_x, & (2) \\ \dot{e}_z = 9e_x + 9e_y - 3e_z + ye_x + x_1e_y + U. & (3) \end{cases} \quad (3.40)$$

**Première étape :**

Considérons la stabilité du deuxième sous-système, ses dynamiques sont calculés en prenant :

$$\dot{e}_x = -10e_x + 10e_x,$$

Définissons la première variable virtuelle du " **Backstepping** "  $w_1$  et la commande virtuelle  $\alpha_1$  comme :

$$\begin{cases} w_1 = e_x, \\ w_2 = e_y - \alpha_1. \end{cases} \quad (3.41)$$

$\alpha_1$  est la fonction linéarisante du sous-système (1),  $w_2$  est une nouvelle variable.

D'où, le sous-système (1) devient :

$$\dot{w}_1 = \dot{e}_x = -10w_1 + 10w_1 + 10\alpha_1. \quad (3.42)$$

Choisissons une fonction de **Lyapunov** :

$$V_1(w_1) = \frac{1}{2}w_1^2, \quad (3.43)$$

La dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_1(w_1) = w_1\dot{w}_1 = -10w_1^2 + 10w_1w_2 + 10w_1\alpha_1, \quad (3.44)$$

Pour rendre  $\dot{V}_1(w_1)$  négative définie, on choisi la fonction stabilisant  $\alpha_1 = 0$ ,

Alors l'équation du premier sous-système devient :

$$\dot{w}_1 = 10w_2 - 10w_1, \quad (3.45)$$

Les coordonnées de conception ont changées de  $(e_x, e_y)$  vers  $(w_1, w_2)$ .

**Deuxième étape :**

Considérons la stabilité du deuxième sous- système, ses dynamiques sont calculées en prenant :

$$\dot{e}_y = e_x(1 - z_1) - e_y - e_z(9 + x_2), \quad (3.46)$$

Donc les dynamiques du deuxième sous- système en  $(w_1, w_2)$  sont :

$$\dot{w}_2 = \dot{e}_y - \dot{\alpha}_1 = e_x(1 - z_1) - e_y - e_z(9 + x_2) = w_1(1 - z_1) - w_2 - e_z(9 + x_2), \quad (3.47)$$

La nouvelle loi de contrôle virtuelle est choisie de telle façon à avoir :

$$w_3 = e_z - \alpha_2, \quad (3.48)$$

$\alpha_2$  est la fonction stabilisante pour le deuxième sous-système,  $w_3$  est une nouvelle variable d'état.

$$\dot{w}_2 = w_1(1 - z_1) - w_2 - w_3(9 + x_2) - \alpha_2(9 + x_2), \quad (3.49)$$

Et une fonction de **Lyapunov** appropriée au deuxième sous-système (3.49) comme :

$$V_2(w_1, w_2) = V_1(w_1) + \frac{1}{2}w_2^2, \quad (3.50)$$

La dérivée dans le temps est :

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = -10w_1^2 - w_2^2 + w_2(w_1(11 - z_1) - w_3(9 + x_2) - \alpha_2(9 + x_2)), \quad (3.51)$$

Pour rendre  $\dot{V}_2(w_1, w_2)$  négative définie, on choisi :

$$\alpha_2 = \frac{(11 - z_1)}{(9 + x_2)}. \quad (3.52)$$

Alors

$$\dot{V}_2(w_1, w_2) = -10w_1^2 - w_2^2 + w_2w_3(9 + x_2), \quad (3.53)$$

Alors l'équation du deuxième sous-système devient :

$$w_2 = -10w_1 - w_2 - w_3(9 + x_2). \quad (3.54)$$

**Troisième étape :**

L'équation du troisième sous-système devient :

$$\dot{w}_3 = \dot{e}_z - \dot{\alpha}_2, \quad (3.55)$$

Avec

$$\dot{e}_z = w_1(9 + y_2) + w_2(9 + x_1) - 3w_3 - 3\alpha_2 + U, \quad (3.56)$$

Et

$$\dot{\alpha}_2 = \frac{110w_2(9 + x_2) - 110w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}, \quad (3.57)$$

Donc

$$\dot{w}_3 = w_1(9 + y_2) + w_2(9 + x_1) - 3w_3 - 3\alpha_2 + U - \frac{110w_2(9 + x_2) - 110w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}, \quad (3.58)$$

Choisissons une fonction de **Lyapunov** :

$$V_3(w_1, w_2, w_3) = V_1(w_1) + V_2(w_1, w_2) + \frac{1}{2}w_3^2, \quad (3.59)$$

Donc

$$\begin{aligned} \dot{V}_3(w_1, w_2, w_3) = & -10w_1^2 - w_2^2 - 3w_3^2 + w_3(-w_2(9 + x_2) + w_1(9 + y_2) + w_2(9 + x_1)) \\ & - 3\frac{11w_1}{(9 + x_2)} + U - \frac{110w_2(9 + x_2) - 110w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

Pour rendre  $\dot{V}_3(w_1, w_2, w_3)$  négative définie, on choisi  $U$  comme :

$$U = w_2(9 + x_2) - w_1(9 + y_2) - w_2(9 + x_1) + 3\frac{11w_1}{(9 + x_2)} + \frac{110w_2(9 + x_2) - 110w_1(9 + y_2)}{(9 + x_2)^2}, \quad (3.61)$$

Alors la dérivée de la fonction de **Lyapunov** globale du système est :

$$V_3(w_1, w_2, w_3) = -10w_1^2 - w_2^2 - 3w_3^2, \quad (3.62)$$

Le système finale en  $(e_x, e_y, e_z)$  est [8] :

$$\begin{cases} \dot{e}_x = \dot{w}_1 = 10w_2 - 10w_1, \\ \dot{e}_y = \dot{w}_2 = -10w_1 - w_2 - w_3(9 + x_2), \\ \dot{e}_z = -3w_3 + w_2(9 + x_2), \end{cases} \quad (3.63)$$

## 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques définitions de synchronisation, ensuite nous avons défini quelques différents types de synchronisation comme la synchronisation CS, anti synchronisation, synchronisation PS, FSHP, GS et FSPS.

Nous avons énoncé deux méthodes de synchronisation sont la méthode de contrôleur actif et la méthode de Backstepping, un exemple numérique donné pour illustre l'efficacité des deux approches développées.

# Chapitre 4

## Combinaison de quatre types de synchronisation pour un système dynamique de 4-D

### 4.1 Introduction

La synchronisation des systèmes chaotiques a attiré trop de chercheurs au cours des deux dernières décennies et a plusieurs applications importantes en science et en ingénierie telle que les cryptosystèmes [29] et les communications sécurisées [30].

Une configuration de base de la synchronisation chaotique consiste en deux systèmes chaotiques : un système maître (ou un système d'entraînement (émetteur)) et un système esclave conçu (ou un système de réponse (récepteur)). A noter que les systèmes maître et esclave via un signal transmis afin que la trajectoire du système esclave se synchronise avec celle du système maître. Plusieurs différents types de synchronisation ont été intensivement étudiés et de plusieurs résultats théoriques ont été obtenus au cours des 20 dernières années. Parmi les types de synchronisation, on peut citer : synchronisation complète (CS) [31][32], synchronisation généralisée (GS) [33], synchronisation projective (PS) [34][35], synchronisation (FSPS) en anglais " full state projective synchronization " [36], synchronisation (MPS) en anglais " modified projective synchronization " [37], synchronisation (FPS) en anglais " function projective synchronization " [38], synchronisation (MFPS) en anglais " modified function projective synchronization " [39], synchronisation (GFPS) en anglais " généralised function projective synchronization " [40] et synchronisation (FSHPS) en anglais " full state hybrid projective synchronization " [41]. Parmi tous les types de synchronisation chaotique, PS a été signalé pour la première fois dans des systèmes

partiellement linéaires et à fait l'objet d'études approfondies ces dernières années car il peut obtenir une communication plus rapide grâce à sa fonction proportionnelle. La synchronisation projective à été largement étudiée pour que le système d'entraînement peut être synchronisé avec les réponses des états dynamiques synchronisés en tant que matrice de mise à l'échelle constante. De plus, FSPS peut être utilisé pour obtenir une communication plus sécurisée que PS dans une application pour sécuriser les communications, car il est évident que l'imprévisibilité du facteur de fonction vectorielle dans FSPS est supérieure à celle du même facteur d'échelle dans PS.

Récemment, un nouveau type de synchronisation connu sous le nom de FSHPS à été introduit et appliqué aux systèmes chaotiques et hyperchaotiques en temps continu, qui comprend PS et FSPS. Dans FSHPS, chaque état du système de réponse se synchronise avec une combinaison linéaire d'états du système d'entraînement.

Dans ce travail, basé sur la théorie de la stabilité de **Lyapunov**, différents schémas de synchronisation pour les systèmes dynamiques hyperchaotiques, tels que CS, PS, FSPS et FSHPS, sont combinés pour obtenir la synchronisation entre deux systèmes dynamiques hyperchaotiques couplés en temps continu en 4-D. Le nouveau schéma est donné et illustré avec le système hyperchaotiques de Lorenz [42] et le système hyperchaotiques de Chen [43] comme exemples. Les résultats théoriques du schéma proposé sont présentés dans la section 2. Dans la section 3, la synchronisation de deux systèmes **Lorenz** et **Chen** sont hyperchaotiques et couplés et réalisé et des simulations numériques sont présentées pour vérifier l'efficacité du schéma de synchronisation proposé. La conclusion est donnée dans la section.

## 4.2 Résultats théoriques

Nous considérons le système chaotique maître décrit par :

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^4 a_{ij}x_j(t) + f_i(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.1)$$

où  $X(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))^T \in \mathbb{R}^4$  est le vecteur d'état du système (4.1),  $(a_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ .

Nous considérons le système esclave comme suit :

$$\dot{y}_i(t) = \sum_{j=1}^4 b_{ij}y_j(t) + g_i(x_1, x_2, x_3, x_4) + u_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.2)$$

où  $Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t))^T \in \mathbb{R}^4$  est le vecteur d'état du système (4.2),  $(b_{ij}) \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  et  $f_i, g_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions non linéaires et  $U = (u_i)_{1 \leq i \leq 4}$  sont des contrôleurs vecteur déterminé.

On définit le système d'erreur comme suit :

$$\begin{cases} e_1(t) = y_1(t) - x_1(t), \\ e_2(t) = y_2(t) - \alpha_1 x_2(t), \\ e_3(t) = y_3(t) - (\alpha_2 x_2(t) + \alpha_3 x_3(t)), \\ e_4(t) = y_4(t) - (\alpha_4 x_2(t) + \alpha_5 x_3(t) + \alpha_6 x_4(t)). \end{cases} \quad (4.3)$$

où  $\alpha_i \notin \{-1, 0, 1\}$  pour  $1 \leq i \leq 6$  sont les constantes d'échelle. D'après le système d'erreur (4.3), il est clair que la première partie des deux systèmes chaotiques (4.1) et (4.2) est la synchronisation complète (CS), la deuxième partie du système esclave est en la synchronisation projective (PS) avec le première et deuxième parties de système esclave, le troisième partie de système esclave est dans la synchronisation (FSPS) en anglais " full state projective synchronization ". Enfin, la partie de système esclave est en la synchronisation (FSHPS) en anglais " full state hybrid projective synchronization " avec le système maître. Alors on peut définir la coexistence de CS, PS, FSPS et FSHPS entre les deux systèmes maître et esclave.

La dynamique des erreurs entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2) peut être déduire comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^4 b_{ij} e_j(t) + \sum_{j=1}^4 \Lambda_{ij} x_j(t) + \varphi_i(t) + u_i(t), \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (4.4)$$

Pour réaliser la synchronisation entre le système maître (4.1) et le système esclave (4.2), on peut choisir les contrôleurs de synchronisation  $u_i(t)$ , ( $1 \leq i \leq 4$ ) comme suit :

$$u_i(t) = u_i^L + u_i^N, \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (4.5)$$

Où  $u_i^L, u_i^N$  sont des contrôleurs linéaires et non linéaires, respectivement, satisfont :

$$\begin{aligned} \dot{e}_1(t) &= \dot{y}_1(t) - \dot{x}_1(t), \\ &= x_1(b_{11} - a_{11}) + x_2(\alpha_1 b_{12} + \alpha_2 b_{13} + \alpha_4 b_{14} - a_{12}) + x_3(\alpha_3 b_{13} - a_{13} + \alpha_5 b_{14}) \\ &\quad + x_4(\alpha_6 b_{14} - a_{14}) + (g_1(t) - f_1(t)) + (b_{11}e_1 + b_{12}e_2 + b_{13}e_3 + b_{14}e_4) + u_1, \\ \dot{e}_2(t) &= \dot{y}_2(t) - \alpha_1 \dot{x}_2(t), \\ &= x_1(b_{21} - \alpha_1 a_{21}) + x_2(\alpha_1 b_{22} + \alpha_2 b_{23} + \alpha_4 b_{24} - \alpha_1 a_{22}) + x_3(\alpha_5 b_{24} - \alpha_1 a_{23} + \alpha_3 b_{23}) \\ &\quad + x_4(\alpha_6 b_{24} - \alpha_1 a_{24}) + (g_2(t) - \alpha_1 f_2(t)) + (b_{21}e_1 + b_{22}e_2 + b_{23}e_3 + b_{24}e_4) + u_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \dot{e}_3(t) &= \dot{y}_3(t) - (\alpha_2 \dot{x}_2(t) + \alpha_3 \dot{x}_3(t)), \\
 &= x_1 (b_{31} - \alpha_3 a_{31} - \alpha_2 a_{21}) + x_2 (\alpha_1 b_{32} + \alpha_2 b_{33} + \alpha_4 b_{34} - \alpha_2 a_{22} - \alpha_3 a_{32}) \\
 &\quad + x_3 (\alpha_5 b_{34} - \alpha_2 a_{23} + \alpha_3 b_{33} - \alpha_3 a_{33}) + x_4 (\alpha_6 b_{34} - \alpha_2 a_{24} - \alpha_3 a_{34}) \\
 &\quad + (g_3(t) - (\alpha_2 f_2(t) + \alpha_3 f_3(t))) + (b_{31} e_1 + b_{32} e_2 + b_{33} e_3 + b_{34} e_4) + u_3, \\
 \dot{e}_4(t) &= \dot{y}_4(t) - (\alpha_4 \dot{x}_2(t) + \alpha_5 \dot{x}_3(t) + \alpha_6 \dot{x}_4(t)), \\
 &= x_1 (b_{41} - \alpha_4 a_{21} - \alpha_5 a_{31} - \alpha_6 a_{41}) + x_2 (\alpha_1 b_{42} + \alpha_2 b_{43} + \alpha_4 b_{44} - \alpha_4 a_{22} - \alpha_5 a_{32} - \alpha_6 a_{42}) \\
 &\quad + x_3 (\alpha_5 b_{44} - \alpha_4 a_{23} - \alpha_5 a_{33} - \alpha_6 a_{43} + \alpha_3 b_{43}) + x_4 (\alpha_6 b_{44} - \alpha_4 a_{24} - \alpha_5 a_{34} - \alpha_6 a_{44}) \\
 &\quad + (g_4(t) - (\alpha_4 f_2(t) + \alpha_5 f_3(t) + \alpha_6 f_4(t))) + (b_{41} e_1 + b_{42} e_2 + b_{43} e_3 + b_{44} e_4) + u_4.
 \end{aligned}$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Lambda_{11} = b_{11} - a_{11}, \\
 \Lambda_{12} = \alpha_1 b_{12} + \alpha_2 b_{13} + \alpha_4 b_{14} - a_{12}, \\
 \Lambda_{13} = \alpha_3 b_{13} - a_{13} + \alpha_5 b_{14}, \\
 \Lambda_{14} = \alpha_6 b_{14} - a_{14}, \\
 \Lambda_{21} = b_{21} - \alpha_1 a_{21}, \\
 \Lambda_{22} = \alpha_1 b_{22} + \alpha_2 b_{23} + \alpha_4 b_{24} - \alpha_1 a_{22}, \\
 \Lambda_{23} = \alpha_5 b_{24} - \alpha_1 a_{23} + \alpha_3 b_{23}, \\
 \Lambda_{24} = \alpha_6 b_{24} - \alpha_1 a_{24}, \\
 \Lambda_{31} = b_{31} - \alpha_3 a_{31} - \alpha_2 a_{21}, \\
 \Lambda_{32} = \alpha_1 b_{32} + \alpha_2 b_{33} + \alpha_4 b_{34} - \alpha_2 a_{22} - \alpha_3 a_{32}, \\
 \Lambda_{33} = \alpha_5 b_{34} - \alpha_2 a_{23} + \alpha_3 b_{33} - \alpha_3 a_{33}, \\
 \Lambda_{34} = \alpha_6 b_{34} - \alpha_2 a_{24} - \alpha_3 a_{34}, \\
 \Lambda_{41} = b_{41} - \alpha_4 a_{21} - \alpha_5 a_{31} - \alpha_6 a_{41}, \\
 \Lambda_{42} = \alpha_1 b_{42} + \alpha_2 b_{43} + \alpha_4 b_{44} - \alpha_4 a_{22} - \alpha_5 a_{32} - \alpha_6 a_{42}, \\
 \Lambda_{43} = \alpha_5 b_{44} - \alpha_4 a_{23} - \alpha_5 a_{33} - \alpha_6 a_{43} + \alpha_3 b_{43}, \\
 \Lambda_{44} = \alpha_6 b_{44} - \alpha_4 a_{24} - \alpha_5 a_{34} - \alpha_6 a_{44}.
 \end{array} \right. \quad (4.6)$$

Aussi :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \varphi_1(t) = g_1(t) - f_1(t), \\
 \varphi_2(t) = g_2(t) - \alpha_1 f_2(t), \\
 \varphi_3(t) = g_3(t) - \alpha_2 f_2(t) - \alpha_3 f_3(t), \\
 \varphi_4(t) = g_4(t) - \alpha_4 f_2(t) - \alpha_5 f_3(t) - \alpha_6 f_4(t).
 \end{array} \right. \quad (4.7)$$

On peut utiliser les théorèmes suivants :

**Théorème 4.1** Si les constantes  $(k_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  sont choisies telles que :

$$\begin{cases} b_{ij} - k_{ij} = k_{ji} - b_{ji} & \text{if } i \neq j \\ k_{ii} > b_{ii} \end{cases} \quad (4.8)$$

Alors, les deux systèmes maître (4.1) et esclave (4.2) sont globalement synchronisés sous les contrôleurs  $(u_i)_{1 \leq i \leq 4}$  sont construits comme suit :

$$u_i(t) = u_i^L + u_i^N = - \sum_{j=1}^4 k_{ij} e_j - R_i(t), \quad 1 \leq i \leq 4, \quad (4.9)$$

où  $(k_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  sont des constantes de contrôle à concevoir et  $(R_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$  sont des fonctions définies ultérieurement.

**Preuve.** En substituant la loi de contrôle (4.9) dans (4.4), le système d'erreur peut être écrit comme suit :

$$\dot{e}_i(t) = \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - k_{ij}) e_j(t), \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (4.10)$$

Construire la fonction candidate de **Lyapunov** sous la forme suivante :

$$V(e(t)) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{2} e_i^2(t). \quad (4.11)$$

La dérivée temporelle de  $V$  le long de la solution du système d'erreurs (4.10) est la suivante :

$$\begin{aligned} \dot{V}(e(t)) &= \sum_{i=1}^4 \dot{e}_i(t) e_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^4 \left( \sum_{j=1}^4 (b_{ij} - k_{ij}) e_j(t) \right) e_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^4 (b_{ii} - k_{ii}) e_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [(b_{ij} - k_{ij}) + (b_{ji} - k_{ji})] e_i(t) e_j(t). \end{aligned} \quad (4.12)$$

En utilisant les conditions (4.8), on trouve :  $\dot{V}(e(t)) = \sum_{i=1}^4 (b_{ii} - k_{ii}) e_i^2(t) < 0$ . Alors, la solution nulle du système d'erreurs (4.10) est globalement asymptotiquement stable. On conclut que les deux systèmes maître (4.1) et esclave (4.2) sont globalement synchronisés. ■

Par la même procédure de preuve de **Théorème 4.1**, on peut prouver les théorèmes suivants.

**Théorème 4.2** Les deux systèmes maître (4.1) et esclave (4.2) sont globalement synchronisés sous la loi de contrôleur de synchronisation suivantes :

$$\begin{cases} u_1 = -k_{11}e_1 - R_1(t), \\ u_2 = -k_{21}e_1 - k_{22}e_2 - R_2(t), \\ u_3 = -k_{31}e_1 - k_{32}e_2 - k_{33}e_3 - R_3(t), \\ u_4 = -k_{41}e_1 - k_{42}e_2 - k_{43}e_3 - k_{44}e_4 - R_4(t), \end{cases} \quad (4.13)$$

si les constantes  $(k_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  sont choisissons telles que :

$$\begin{cases} b_{ij} - k_{ij} = -b_{ji} & \text{si } i > j \\ k_{ii} > b_{ii}, \end{cases} \quad (4.14)$$

**Théorème 4.3** Les deux systèmes maître (4.1) et esclave (4.2) sont globalement synchronisés sous la loi de contrôleur de synchronisation suivante :

$$\begin{cases} u_1 = -k_{11}e_1 - k_{12}e_2 - k_{13}e_3 - k_{14}e_4 - R_1(t), \\ u_2 = -k_{22}e_2 - k_{23}e_3 - k_{24}e_4 - R_2(t), \\ u_3 = -k_{33}e_3 - k_{34}e_4 - R_3(t), \\ u_4 = -k_{44}e_4 - R_4(t). \end{cases} \quad (4.15)$$

si les constantes  $(k_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$  sont choisissons telles que :

$$\begin{cases} b_{ij} - k_{ij} = -b_{ji} & \text{if } i < j \\ k_{ii} > b_{ii}. \end{cases} \quad (4.16)$$

**Théorème 4.4** Les deux systèmes maître (4.1) et esclave (4.2) sont globalement synchronisés sous la forme des contrôleurs  $(u_i(t))_{1 \leq i \leq 4}$  sont construits comme suit :

$$u_i(t) = -k_{ii}e_i(t) - \sum_{j=1, i \neq j}^4 k_{ij}e_j(t) - R_i(t), \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (4.17)$$

si les constantes  $(k_{ii})_{1 \leq i \leq 4}$  sont choisissons telles que :

$$k_{ii} > b_{ii}, \quad 1 \leq i \leq 4. \quad (4.18)$$

### 4.3 Exemple numérique.

Deux systèmes dynamiques hyperchaotiques en 4-D sont considérés pour valider la critère de synchronisation du chaos proposé.

En tant que le système maître, nous considérons le système de **Lorenz** et le système de **Chen** comme système esclave.

Le système de **Lorenz** en 4-D [42] on peut être d'écrit par l'EDO non linéaire en 4-D suivant :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & 1 \\ a_2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1x_3 \\ x_1x_2 \\ 0.1x_2x_3 \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

où  $a_1 = 10$ ,  $a_2 = 28$  et  $a_3 = \frac{8}{3}$ .

Nous considérons le système esclave est le système de **Chen** en 4-D [43] d'écrit par :

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \dot{y}_3(t) \\ \dot{y}_4(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -b_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 4 & b_2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -b_3 & 0 \\ -b_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -10y_1y_3 \\ y_2^2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.20}$$

où  $b_1 = 35$ ,  $b_2 = 21$ ,  $b_3 = 3$  et  $b_4 = 2$  et  $(u_1, u_2, u_3, u_4)^T$  est un contrôleur vectoriel.

Selon la définition de système d'erreur (4.3), les erreurs entre le système maître de **Lorenz** (4.19) et le système esclave de **Chen** (4.20) sont d'écrites comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1(t) = \dot{y}_1(t) - \dot{x}_1(t) \\ \quad = -b_1 e_1 + b_1 e_2 + (a_1 - b_1)x_1 + (\alpha_1 b_1 - a_1)x_2 - x_4 + u_1, \\ \dot{e}_2(t) = \dot{y}_2(t) - \alpha_1 \dot{x}_2(t) \\ \quad = 4e_1 + b_2 e_2 + 4e_4 + (4 - \alpha_1 a_2)x_1 + (\alpha_1 b_2 + 4\alpha_4 + \alpha_1)x_2 + 4\alpha_5 x_3 \\ \quad \quad + (4\alpha_6 + \alpha_1)x_4 + \alpha_1 x_1 x_3 - 10y_1 y_3 + u_2, \\ \dot{e}_3(t) = \dot{y}_3(t) - (\alpha_2 \dot{x}_2(t) + \alpha_3 \dot{x}_3(t)) \\ \quad = -b_3 e_3 - \alpha_2 a_2 x_1 + \alpha_2(1 - b_3)x_2 + \alpha_3(a_3 - b_3)x_3 \\ \quad \quad + \alpha_2 x_4 + \alpha_2 x_1 x_3 - \alpha_3 x_1 x_2 + y_2^2 + u_3, \\ \dot{e}_4(t) = \dot{y}_4(t) - (\alpha_4 \dot{x}_2(t) + \alpha_5 \dot{x}_3(t) + \alpha_6 \dot{x}_4(t)) \\ \quad = -b_4 e_1 + (-\alpha_4 a_2 - b_4)x_1 + \alpha_4 x_2 + \alpha_5 a_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \\ \quad \quad - \alpha_5 x_1 x_2 - 0.1\alpha_6 x_2 x_3 + \alpha_4 x_1 x_3 + u_4. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

**Corollaire 4.1** Les deux systèmes hyperchaotiques de **Lorenz** et le système hyperchaotique de **Chen** contrôlé sont globalement synchronisés sous la loi de contrôleurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(t) = -k_1 e_2 - R_1(t), \\ u_2(t) = -k_2 e_1 - k_3 e_2 - k_4 e_4 - R_2(t), \\ u_3(t) = -R_3(t), \\ u_4(t) = b_4 e_1 - k_5 e_4 - R_4(t). \end{array} \right. \quad (4.22)$$

où les fonctions  $(R_i)_{1 \leq i \leq 4}$  sont choisissons comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} R_1(t) = (a_1 - b_1)x_1 + (\alpha_1 b_1 - a_1)x_2 - x_4, \\ R_2(t) = (4 - \alpha_1 a_2)x_1 + (\alpha_1 b_2 + 4\alpha_4 + \alpha_1)x_2 + 4\alpha_5 x_3 \\ \quad + (4\alpha_6 + \alpha_1)x_4 + \alpha_1 x_1 x_3 - 10y_1 y_3, \\ R_3(t) = -\alpha_2 a_2 x_1 + \alpha_2(1 - b_3)x_2 + \alpha_3(a_3 - b_3)x_3 \\ \quad + \alpha_2 x_4 + \alpha_2 x_1 x_3 - \alpha_3 x_1 x_2 + y_2^2, \\ R_4(t) = (-\alpha_4 a_2 - b_4)x_1 + \alpha_4 x_2 + \alpha_5 a_3 x_3 + \alpha_4 x_4 \\ \quad - \alpha_5 x_1 x_2 - 0.1\alpha_6 x_2 x_3 + \alpha_4 x_1 x_3. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

Substituant les systèmes (4.22) et (4.23) dans le système (4.21) le système d'erreur peut être d'écrit comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{e}_1(t) = -b_1 e_1 + (b_1 - k_1) e_2, \\ \dot{e}_2(t) = (4 - k_2) e_1 + (b_2 - k_3) e_2 + (4 - k_4) e_4, \\ \dot{e}_3(t) = -b_3 e_3(t), \\ \dot{e}_4(t) = -k_5 e_4. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

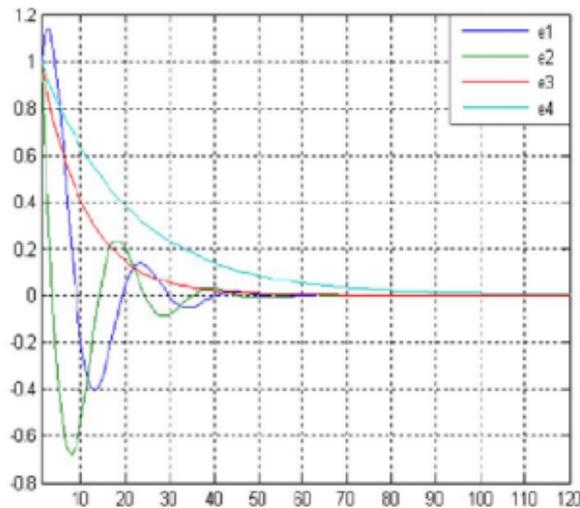
où les constants de contrôle  $(k_i)_{1 \leq i \leq 5}$  sont choisissons comme  $k_1 = b_1$ ,  $k_2 = k_4 = 4$ ,  $k_5 = 4$  et  $k_3 > b_2$ .

Alors, on obtient le système d'erreur suivante :

$$\begin{cases} \dot{e}_1(t) = -b_1 e_1(t), \\ \dot{e}_2(t) = (b_2 - k_3) e_2(t), \\ \dot{e}_3(t) = -b_3 e_3(t), \\ \dot{e}_4(t) = -k_5 e_4(t). \end{cases} \quad (4.25)$$

Ainsi, à partir la théorie de stabilité de **Lyapunov**, c'est la solution nulle de système d'erreur (4.25), qui est globalement asymptotiquement stable c'est à dire :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e_i(t)\| = 0$ , par conséquent les systèmes maître (4.19) et esclave (4.20) sont globalement synchronisés.

La figure suivante montre l'évolution du temps des erreurs  $e_1, e_2, e_3, e_4$  entre le système maître (4.19) et le système esclave (4.20).



*FIG.4.1* – Evolution temporelle des différents erreurs de synchronisation entre les systèmes de Chen et de Lorenz

Avec l'utilisation du logiciel matlab, on trouve le résultat numérique illustré à la *FIG.4.1* où  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$ ,  $e_3(t)$  et  $e_4(t)$  sont des erreurs de synchronisation pour CS, PS, FSPS et FSHPS, respectivement.

## 4.4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudiés la synchronisation entre deux systèmes dynamiques hyperchaotiques. Sur la base de la théorie de **Lyapunov**, quatre types de synchronisation différentes sont combinés pour obtenir une synchronisation entre les systèmes hyperchaotiques en 4-D en temps continu. L'exemple numérique et la simulation ont été utilisés pour montre l'efficacité du schéma proposé. Ce shéma combiné de synchronisation développé ici peut être utilisé pour améliorer la sécurité de la communication et assurer la cryptologie des transmissions[22].

# Conclusion générale

Dans ce mémoire, nous avons présenté une nouvelle d'étude sur une combinaison de différentes types de synchronisation réalisée des systèmes dynamiques chaotiques d'ordre entier à temps continu en 4-D, elle est divisée en quatre chapitres :

- Le premier chapitre consiste à donner quelques définitions préliminaires qui permettent cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques puis à aborder une notion importante qui la stabilité des systèmes.
  - Dans le deuxième chapitre, nous avons présentés la théorie de chaos, ensuite nous attachons au comportement chaotiques comme l'attracteur de Lorenz, de Rössler et de Chen.
  - Le troisième chapitre est réservée la théorie de synchronisation puis a abordé à leurs types et les méthodes les plus utilisées comme la méthode de contrôleur actif et de Backstepping.
  - Dans le dernière chapitre nous avons étudié la méthode de synchronisation entre deux systèmes hyperchaotiques en 4-D par utilisé quatre différents types de synchronisation CS, PS, FSPS, FSHPS.
- Enfin, nous avons donné un exemple numérique pour montré l'efficacité à la méthode proposée.

# Bibliographie

- [1] A. Roumir et R. Kahoul, Modélisation et identification hybrid des systèmes dynamiques en utilisant la logique floue type 1 et l'algorithme d'optimisation PSO, Mémoire de Master, Université Mohamed Boudiaf M'sila, 2021, p1.
- [2] S. Rezzag, Etude et estimation des bornes des systèmes dynamiques chaotiques et hyperchaotiques, Thèse de doctorat, Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi, 2016, p6.
- [3] H. Djemmal, Application de la bornitude d'un nouveau système hyperchaotique à la synchronisation, Mémoire de Master, Université Larbi Ben M'hidi-Oum El Bouaghi, 2020, p34.
- [4] S. Masri, systèmes dynamiques discrettes, Mémoire de Master, Université Mohamed Kheider Biskra, 2019, p4.
- [5] M. Labid, Contrôle de synchronisation de quelques types des systèmes dynamiques chaotiques, Centre universitaire Abdelhafid Boussouf Mila, Thèse de doctorat, 2021, p12–13–14.
- [6] B. Ghenaiet et O. Khechba, Différents types de synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques, Mémoire de Master, Université Larbi Tébessi -Tébessa-, 2017,p9.
- [7] Ch. Kharkhache et S. Chaïbi, le chaos dans les systèmes dynamiques, Mémoire de Master, Université Larbi Tébssi -Tébessa-, 2019, p11 – 12.
- [8] B. Sakhri et L. Ghrieb, Étude d'un type de synchronisation IHFPS des systèmes chaotiques, Mémoir de Master, Université Larbi Tébessi -Tébessa-, 2020, p3.
- [9] A. Gasri, Chaos et synchronisation(généralisé) dans les systèmes dynamiques,Mémoire de doctorat,Université Freres Mantouri Constantine-1-, 2018, p13à23.
- [10] A. Bessam, Etude d'un système dynamique chaotique, Mémoire de Master, Université Mohamed Kheider Biskra, 2020, p8 – 9.
- [11] M. Kouidri et A. Daifi, Etude de la Synchronisation de deux circuits identiques generateurs de signaux chaotiques, Mémoire de Master, Université de Bouira, 2016, p6.

- [12] T. Menacer, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, Thèse de doctorat, Université Constantine-1-, 2014.
- [13] N. Madjeralli, La borne extrême et l'ensemble positivement invariant pour le système chaotique de pan , Université Larbi Ben M'hidi Oum-El Bouaghi, 2019, p24 – 25.
- [14] Ch. Bouchelaghem et I. Zentout, Nouveau schéma de Communication sécurisée a base du Chaos, Memoire de Master, Université Abd Elhafid Boussouf Mila, 2020, p10.
- [15] S. Chouat, Synchronisation identique des système chaotique, Mémoire de Master, Université Mohamed Kheider Biskra, 2019, p5 – 6.
- [16] A. Bouzida et M. Mahmoudi, Synchronisation globale entre deux systèmes chaotiques à n dimension, Mémoire de Master, Université Larbi Tébessi -Tébessa-, 2019, p24.
- [17] T. Hamaizia, Systèmes dynamiques et chaos " Application à l'optimisation à l'aide d'algorithme chaotique ", Thèse de doctorat, Université Constantine-1-, 2013, p25.
- [18] R. Bououden, Systèmes dynamiques chaotiques : Application à l'optimisation, Thèse de doctorat, Université Freres Mantouri Constantine-1-, 2019, p60 à 64.
- [19] Z. Chougui, Quelques schémas de synchronisation chaotique dans les systèmes dynamiques fractionnaires, Thèse de doctorat, Université Larbi Tébssi -Tébessa , 2021, p30 à 33.
- [20] A. Zemouche, Sur l'observation de l'état du Systèmes dynamiques non linéaire, Université Louis Pasteur -Strasbourg I-, 2007.
- [21] H. Bouchenine et O. Guermache, Etude de la dynamique et chaotique du Système de Lorenz, Memoire de Master, université Abd Elhafide Boussouf Mila, 2021, p23.
- [22] A. Gasri, International conference on recent advances in mathematics and informatics, Tebessa, September 21th, 22th, 2021 "ICRAMI 21 Proceeding".  
"Combination of Four Types of Synchronization for 4-D Dynamical Systems"
- [23] A. Ghozli et A. Chaib, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques, Mémoire de Master, Université Larbi Tébssi -Tébessa-, 2017, p59.
- [24] A. Senouci, Systèmes dynamiques et synchronisation, Thèse de doctorat, Université Mohamed Kheider Biskra, 2020, p67.
- [25] E. Boukhalifa, Sur le chaos et synchronisation dans les systèmes dynamiques discrets, Thèse de doctorat, Université Badji Mokhtar Annaba, 2017, p93 à 96.
- [26] L. Jouini, Quantification et synchronisation du chaos dans les systèmes dynamiques discrets, Thèse de doctorat, Université Larbi Tébssi -Tébessa-, 2021, p36.

- [27] Y. Harir et H. Mechri, La coexistence de la synchronisation généralisée et la synchronisation généralisée inverse entre deux systèmes chaotiques et hyperchaotiques, Mémoire de Master, Université Larbi Tébssi -Tébessa-,2021, p37 – 38.
- [28] A. Ouannas, Sur la synchronisation des systèmes chaotiques discrets, Thèse de doctorat, Université Freres Mantouri Constantine-1-, 2015.
- [29] R. Rhouma and S. Belghith, "Cryptoanalysis of a chaos based cryptosystem on DSP", Comm. Nonlinear Sci. Num. Simul, vol. 16, pp. 876 – 884, 2012.
- [30] A. K. Mittal, A. Dwivedi and S. Dwivedi, "Parameter adaption technique for rapid synchronization and secure communication", Eur. Phys. J. Special Topics, vol.223, pp. 1549 – 1560, 2014.
- [31] T. Banerjee, D. Biswas and B. C. Sarkar,"Complete and generalized synchronization of chaos and hyper chaos in a coupled first order time delayed system", Nonlinear Dyn., vol. 71, pp.279 – 290, 2013.
- [32] S. FAL-Azzawi and M.M. Aziz, "Chaos synchronization of nonlinear dynamical systems via a novel analytical approach", Alexandria Eng. J., vol.57(4), pp.3493 – 3500, 2018.
- [33] X. He, C. Li, J. Huang and L. Xiao, "Generalized synchronization of arbitrary-dimensional chaotic systems", Optik, vol. 126, pp. 454 – 459, 2015.
- [34] J. Chen, L. Jiao, J. Wu and X. Wang, "Projective synchronization with different scale factors in a driven-response complex network and its application in image encryption", Nonlinear Anal. Real World Appl., vol. 11, pp. 3045 – 3058, 2010.
- [35] A.S. Al-Obeidi and S.F. AL-Azzawi, "Projective synchronization for a class of 6 –  $D$  hyperchaotic Lorenz system", Indonesian J. of Elec. Eng. Comp. Sci., vol.16, pp.692 – 700, 2019.
- [36] K. Zhang, H. Wang and H. Fang, "Feedback control and hybrid projective synchronization of a fractional-order Newton-Leipnik system", Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. (2012), vol. 17, pp.317 – 328, 2012.
- [37] G. H. Li, "Modified projective sychronization of chaotic systems", Chaos, Solitons and Fractals, vol. 32, pp. 1786 – 1790, 2007.
- [38] H. Dua, Q. Zeng, C. Wang and M. Ling, "Function projective synchronization in coupled chaotic systems", Nonlinear Anal. Real World Appl, vol.11, pp. 705 – 712, 2010.
- [39] H. Du, Q. Zeng and C. Wang, "Modified function projective synchronization of chaotic systems", Chaos, Solitons & Fractals, vol. 42, pp. 2399 – 2404, 2009.

- [40] Z. Li and X. Zhao, "Generalized function projective synchronization of two different hyperchaotic systems with unknown parameters" *Nonlinear Anal. Real World Appl*, vol. 12, pp. 2607 – 2615, 2011.
- [41] M. Hu, Z. Xu and R. Zhang, "Full state hybrid projective synchronization of a general class of chaotic maps", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*, vol. 13, pp. 782 – 789, 2008.
- [42] L. Stenflo, "Generalized Lorenz equations for acoustic-gravity waves in the atmosphere", *Phys. Scri.*, vol. 53, pp. 83 – 84, 1996.
- [43] J. L. Xin, D. Hao and H. Meng, "A new four-dimensional hyperchaotic Chen systems and its generalized synchronization", *Chin. Phys. B*, vol. 19(10), pp. 501 – 517, 2010.