



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

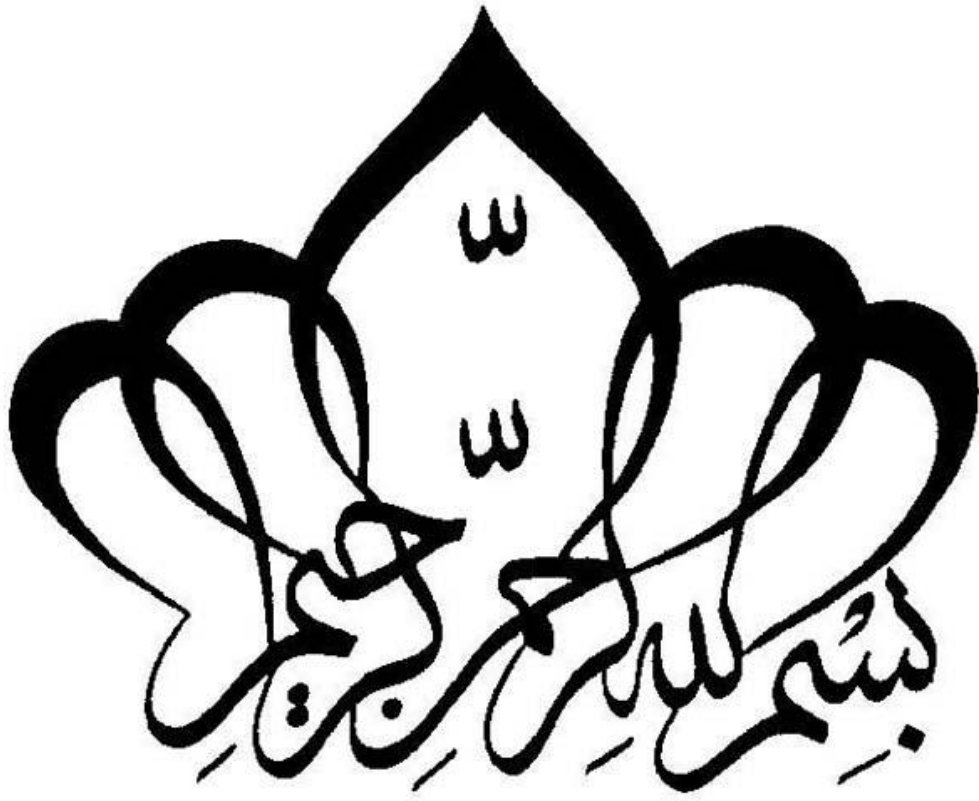
Synchronisation des Systèmes Dynamiques Continus Chaotiques

Présenté Par:
Hafiane Islam
Brahmi oualid

Devant le jury :

Mr, Fareh Hannachi	MCA	Université Larbi Tébessi	Président
Mme, Mezhoud Rachida	MAA	Université Larbi Tébessi	Examinatrice
Mr, Boukhalifa El-Hafsi	MCB	Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 11/06/2022



إهداء

اليك انت وحدلك يا صاحب السيرة العطرة و صاحب الفكرة المستتير ، فأنت وحدك من كان له الفضل الأول علي ، لك أنت والدي الحبيب "الهادي" أطال الله في عمره.

اليك أنت يا من وضعتني على طريق الحياة ، فأنت من جعلتني ربط الجأش ، و يا من سهرتني عليا حتى صرت رجل كبير ، لك انتي يأمي الغالية "خديجة" أطال الله في عمرها .

اليك انت رفيقة الحياة و الكفاح زوجتي الغالية

الى العينين اللتين استمد منها القوة والاستمرار ابني العزيز "ضياء الدين"

الى زينة حياتي و بهجتها الى الابتسامات التي تغمد علي الأمل إبنتي "كوثر"

الى المحبة التي تنصب و الخير بلا حدود الى من شاركتهم كل حياتي ، أنتما جوهرتي الثمينة أخواتي "رضا ، منير ، فضل الدين ، نبيلة ، هدى ، مبروكة" حماكما الله

الى كل الاقارب والاصدقاء

الى كل الاساتذة و خاصة الاستاذ المشرف "بوخالفة الحفصي" جزاك الله ألف خير على مساعدتك و توجيهاتك القيمة .

الطالب :

براهمي وليد

إهداء

الحمد لله وكفى والصلاة على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى أما بعد
الحمد لله الذي وفقنا لتتميم هذه الخطوة في مسيرتنا الدراسية بمذكرتنا هذه ثمرة الجهد
والنجاح بفضلته تعالى مهداة الى الوالدين الكريمين حفظهما الله تعالى وأدامهما نورا
لدربي.

إلى من علمني ان الدنيا كفاح وسلاحها العلم والمعرفة وظل بجانبني طول العمر يفرغ
من طاقته ليغذي ، الى من سعى لاجل راحتي ونجاحي الى اعظم واعز رجل في
الكون **أبي العزيز "جمال"**.

إلى من ساندتني في صلاتها ودعائها الى من سهرت الليالي تنير دربي الى من
تشاركني أفراحي وأحزاني إلى نبع العطف والحنان الى اجمل إبتسامة في حياتي، إلى
أروع امرأة في الوجود **أمي الغالية "يمينة"**

كذلك الى الذي ظفرت به الدنيا هدية من الاقدار أخي ورفيق دربي **"أيوب"**

الى كل الزملاء والاصدقاء
الى كل الاساتذة و خاصة الاستاذ المشرف **"بوخالفة الحفصي"** جزاك الله ألف خير
على مساعدتك و توجيهاتك القيمة

الطالب :
حفيان اسلام

Remerciements

Tout d'abord, nos remerciements les plus sincères nous les exprimons à Allah tout puissant, le Miséricordieux qui nous donne la force, le courage et la patience, puis la réussite.

Nous exprimons toute notre profonde reconnaissance à notre encadreur **Dr. Boukhalfa el hafi** maître de conférences à l'université de Tébessa, pour tout l'effort qu'il a fourni pour nous faciliter et aider à accomplir notre projet de fin d'étude, et aussi pour le choix de ce thème riche et moderne.

Nos considérables remerciements, s'adresse également à monsieur **Dr. Fareh Hannachi**, maître de conférences à l'université de Tébessa, qui nous a honoré pour avoir accepté de présider le jury de ce mémoire.

Nous remercions chaleureusement **Mme. Mezhoud Rachida**, maître assistant à l'université de Tébessa, pour avoir accepté d'être membre de jury, et évaluer notre travail.

Nous n'oublions pas aussi l'ensemble de tous nos enseignants et collègues du cycle universitaire, que nous les envoyons nos sincères expressions de l'appréciation et du respect.

Résumé :

L'objectif de ce mémoire est la mise en oeuvre des systèmes dynamiques continus non linéaires. Précisément, leur présentation mathématique, leurs points d'équilibre, l'étude de leurs stabilité, puis enfin leurs types de bifurcation, où nous démontrons que plusieurs systèmes ont des fluctuations imprévisibles à long terme, d'ici la présence du phénomène chaotique. La synchronisation du chaos fait partie aussi de ce travail, où l'arrivée de deux systèmes chaotiques en même temps a importance pour des différentes raisons, et dans tous les domaines, où nous donnons un exemple de synchronisation de deux systèmes dynamiques continus non linéaires chaotiques.

Les mots clés :

Système dynamique continue, espace de phase, chaos, bifurcation, points d'équilibre, stabilité, modèle de Lorenz, modèle de Rossler, synchronisation.

Abstract :

The objective of this thesis is the implementation of nonlinear continuous dynamical systems. Precisely, their mathematical presentation, their equilibrium points , the study of their stability, then finally their types of bifurcation, where we demonstrate that several systems have unpredictable fluctuations in the long term, from here the presence of the chaotic phenomena. The synchronization of chaos is also part of this work, where the arrival of two chaotic systems at the same time is important for different reasons, and in all fields, where we give an example of synchronization of two continuous nonlinear chaotic dynamical systems .

Keywords :

Continuous dynamical system, phase space, chaos, bifurcation, equilibrium point, stability, the Rossler model, the Lorenz model, synchronization.

ملخص

الهدف من هذه المذكرة هو تقديم الأنظمة الديناميكية المستمرة الغير خطية على وجه التحديد، التقديم الرياضي، نقاط التوازن، ودراسة استقرارها ، ثم أخيراً أنواع التشعب ، حيث نثبت أن العديد من الأنظمة لها تقلبات غير متوقعة على المدى الطويل ، ومن هنا وجود ظاهرة الفوضى.

تعد مزامنة الفوضى أيضاً جزءاً من هذا العمل ، حيث يكون وصول نظامين فوضويين في نفس الوقت أمراً مهماً لأسباب مختلفة ، وفي جميع المجالات ، حيث نقدم مثالاً لمزامنة نظامين ديناميكين غير خطيين مستمرين.

الكلمات المفتاحية :

النظام الديناميكي المستمر، الفوضى ، التشعب ، النقاط الثابتة ، الاستقرار، نظام لورنز، نظام روسلر ، المزامنة.

TABLE DES MATIÈRES

	Page
I. Notions sur les systèmes dynamiques à temps continus	1
1.1 Définition d'un système dynamique à temps continus	1
1.1.1 L'espace des phases :	3
1.1.2 L'espace d'état :	3
1.1.3 Orbites ou trajectoires :	4
1.1.4 Points périodiques et cycles limite :	5
1.2 Points d'équilibre	6
1.2.1 Linéarisation des systèmes non lineaire :	7
1.2.2 Théorème de Hartmann-Grobman :	8
1.3 Attracteurs	8
1.3.1 Notion d'attracteur :	8
1.4 Stabilité des points d'équilibre	10
1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu :	11
1.4.2 Méthode des fonctions de Lyapunov :	13
1.5 Bifurcations	14
1.5.1 Introduction :	14
1.5.2 Définitions de bifurcation :	14

	Page
1.5.3	Diagramme de bifurcation : 15
1.5.4	Différents types de Bifurcation : 15
II.	Route vers le chaos 25
2.1	Bref historique sur le chaos 25
2.2	Caractéristique du chaos 28
2.2.1	Sensibilité aux condition initiales : 28
2.2.2	Non linéarité : 29
2.2.3	Le déterminisme : 30
2.2.4	L'aspect aléatoire : 30
2.2.5	Attracteurs etranges : 30
2.3	Outils de quantifacation et mesure du chaos 31
2.3.1	Exposants de Lyapunov : 31
2.3.2	L'algorithme de wolf : 35
2.3.3	Dimension fractale : 35
2.3.4	Dimension de Hausdorff : 36
2.3.5	Dimension de Capacité : 36
2.3.6	Dimension de Lyapunov : 37
2.3.7	Dimension d'information : 37
2.3.8	Dimension de corrélation : 37
III.	Exemples de systèmes dynamiques à temps continus chaotiques 39
3.1	Model de Lorenz 39
3.2	Model de Rössler 47
IV.	Synchronisation du chaos 51
4.0.1	Introduction : 51
4.0.2	Définitions de la synchronisation : 51
4.1	Types de Synchronisation 53
4.1.1	Anti-Synchronisation : 53

4.1.2	Synchronisation complète :	53
4.1.3	Synchronisation décalée :	54
4.1.4	Synchronisation projective :	55
4.1.5	Synchronisation FSHP :	55
4.1.6	Synchronisation généralisée :	56
4.1.7	Synchronisation Q-S :	56
4.2	Méthodes de synchronisation	57
4.2.1	Méthode du contrôleur actif :	57
4.2.2	Méthode du Backstepping :	58
4.2.3	Méthode du mode glissant :	60
4.3	Exemple de synchronisation complète des systèmes dynamiques à temps continus	63
4.4	Conclusion générale	66

Notation

x^*	point fixes
λ	valeur propre
$\text{Re}(\lambda)$	partie réel du valeur propre
$\text{Im}(\lambda)$	partie imaginaire du valeur propre
$Df(x)$	la matrice Jacobienne
μ	paramètre de contrôle
$\varphi_t(x)$	flot du système
T	la période de solution
$\lambda(x_0)$	exposant de Lyapunov
$v(x_1, \dots, x_n)$	fonction de Lyapunov
\exp	fonction exponotielle
A	attracteur
Id	identité
$e(t)$	l'erreur
$U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$	contrôleur
α_i	facteur d'échelle
$X'(t)$	système chaotique maître
$Y'(t)$	système chaotique esclave
$\mu_d(M)$	la mesure de l'ensemble M .
\mathbb{R}	l'ensemble des nombres réels.
\mathbb{R}^n ,	l'ensemble des parties de \mathbb{R}^n .
\mathbb{N}	l'ensemble des nombres naturels.
\mathbb{Z}	l'ensemble des nombres entiers.

Introduction Générale

Trois révolutions au bout du vingtième siècle dans les sciences, dont la première concerne l'univers et la relativité de **Newton**¹ sur le problème de la stabilité du système solaire, et la seconde l'équation de **Schrödinger**² menant à la mécanique quantique, certains auteurs, considèrent une troisième révolution, relative au comportement chaotique des systèmes dynamiques en général, Ils sont développés durant le XIX^{ème} siècle; effectivement, vers la fin de ce siècle, le mathématicien physicien et philosophe français **Henri Poincaré**³ avait déjà mis en exergue le phénomène de la sensibilité aux conditions initiales[26], il montra dans son étude du système solaire qu'il existait des orbites stables et d'autres instables et que parfois, une très faible perturbation dans le système pouvait générer un changement d'état d'une orbite. Il s'est rendu compte que des causes parfaitement semblables pouvaient ne pas entraîner les mêmes effets.

Puis, plusieurs recherches sur la sensibilité du mouvement ont été réalisées, **Alexandre Lyapunov**⁴, le mathématicien russe qui avait introduit l'idée de mesurer l'écart entre deux trajectoires ayant des conditions initialement voisines, lorsque cet écart évolue exponentiellement il s'agit de la sensibilité aux conditions initiales, et **Edward Lorenz**⁵ météorologue américain analysait le comportement d'un système dynamique non-linéaire inspiré d'un modèle de l'atmosphère terrestre. En proportion de différentes valeurs des paramètres, un nouveau comportement dynamique était souligné. Les trois variables d'état du système, donnant lieu à déterminer l'évolution des masses d'air, agissaient une activité intermittente, imprévisible. Edward Lorenz soutenait que, dans les systèmes non-linéaires de petites différences dans les conditions initiales reproduisent à long terme des systèmes complètement différents. C'est d'ici les premiers pas pour comprendre le chaos déterministe.

Plus généralement, un système dynamique décrit l'évolution des phénomènes qui évoluent au cours du temps. Le terme "système" se réfère à un ensemble des variables d'état (dont la valeur évolue au

¹Isaac Newton (1642-1727), est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais, puis britannique. Figure emblématique des sciences, il est surtout reconnu pour avoir fondé la mécanique classique, pour sa théorie de la gravitation universelle.

²Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (12 août 1887 à Vienne – 4 janvier 1961) est un physicien, philosophe et théoricien scientifique autrichien.

³Henri Poincaré (1854-1912), est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français. Il a réalisé des travaux d'importance majeure en optique et en calcul infinitésimal. Ses avancées sur le problème des trois corps en font un fondateur de l'étude qualitative des systèmes d'équations différentielles et de la théorie du chaos.

⁴Alexandre Mikhaïlovitch Liapounov (1857-1918) est un mathématicien russe, il a apporté une grande contribution à l'analyse de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires ou non.

⁵Edward Norton Lorenz (1917-2008), est un scientifique américain, travaillant comme météorologue au "Massachusetts Institute of Technology", il découvre par hasard, en 1963, que l'on peut obtenir un comportement chaotique avec seulement trois variables, soit un système non linéaire à trois degrés de liberté.

cours du temps) et aux interactions entre ces variables. L'ensemble des variables d'état d'un système sert à structurer un espace mathématique appelé "espace des phases"; cette illustration permet de distinguer un comportement régulier d'un comportement purement aléatoire et donc prévisible.

Simultanément aux recherches sur le chaos dans les systèmes dynamiques, un axe de recherches en mathématiques s'est élargi parallèlement, s'intéresse à la synchronisation des mouvements chaotiques, un thème attire l'attention de plusieurs chercheurs, parmi eux on trouve **Yamada et Fujisaka** [35] qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, **Afraimovich et Al.** ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique et ultérieurement **Pecora et Carroll** [28]. ont défini la synchronisation chaotique connue sous le nom de synchronisation identique, développée sur la base de circuits chaotiques couplés, avec l'un appelé maître et l'autre esclave. Une autre approche plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont **Rulkov et Al.** ont posé les bases. En raison de ses applications dans la télécommunication, la transmission sécurisée d'informations, [1], et la cryptographie [16], les systèmes dynamiques chaotiques jouent un rôle plus important, car de nombreux modèles mathématiques des processus physiques, des phénomènes biologiques, des réactions chimiques et des systèmes économiques, ont été définis à l'aide des systèmes dynamiques. Par conséquent, il est important de considérer la synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques.

Notre mémoire réparti sur quatre chapitres importants et liés l'un de l'autre, dont le premier est consacré aux systèmes dynamiques continus dans leur généralité, comme par exemple, les définitions de base, d'espace d'état, le système dynamique continu, les points d'équilibre avec leur classification et stabilité, en passant par la théorie de bifurcation.

Le deuxième chapitre, nous fait une tournée vers les outils de mesure et de quantification du chaos dans tel système, en décrivant les notions d'attracteur régulier; attracteur étrange, sensibilités aux conditions initiales, exposant de Lyapunov.

Pour la bonne illustration du chaos dans les systèmes dynamiques continus, nous citons dans le troisième chapitre, quelques exemples universels de systèmes dynamiques continus comme le modèle de Lorenz et le modèle de Rossler.

Finalement, en quatrième chapitre, en passant par la présentation des différents types de synchronisations des systèmes dynamiques, en donnons un exemple illustratif avec succès, où les erreurs de la synchronisation tendent vers zéro.

Liste des figures

Figure	Titre
1.1	Points fixes attracteurs
1.2	l'attracteur positif
1.3	Espace des phases sur l'axe des abscisses
1.4	Exemple de bifurcation noeud-col
1.5	Diagramme de bifurcation Noeud-col
1.6	La bifurcation fourche supercritique correspond à une brisure spontanée de la symétrie $x \longleftrightarrow -x$ On $x' = \mu x - x^3$ On représente ici sa forme normale
1.7	Diagramme de bifurcation supercritique.
1.8	Bifurcation fourche sous-critique. On représente ici sa forme normale $x' = \mu x + x^3$.
1.9	Diagramme d'une bifurcation fourche sous-critique.
1.10	La bifurcation transcritique correspond à un échange de stabilité des 2 points fixes On représente ici sa forme normale $x' = \mu x - x^2$
1.11	Diagramme de bifurcation transcritique
1.12	Diagramme de bifurcation fourche a)super critique b)sous critique.
2.1	L'attracteur de Lorenz
2.2	Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique.
2.3	Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase.
3.1	L'attracteur de Lorenz.
3.2	Diagramme de bifurcation du système de Lorenz (effet papillon).
3.3	Modèle de Lorenz $r = 5$
3.4	Modèle de Lorenz $r = 10$
3.5	Modèle de Lorenz $r = 15$
3.6	Modèle de Lorenz $r = 20$
3.7	Modèle de Lorenz $r = 24$
3.8	Modèle de Lorenz $r = 26$
3.9	Modèle de Lorenz $r = 28$
3.10	Attracteur étrange de Rössler.

CHAPITRE I

Notions sur les systèmes dynamiques à temps continu

1.1 Définition d'un système dynamique à temps continu

On peut définir un système dynamique comme une description d'un phénomène physique qui évolue au cours du temps continu.

Définition I.1 *L'évolution du système dynamique continu est quand à lui défini par une équation différentielle du premier ordre EDO, où le temps est la variable décrivant l'évolution du système :*

$$\begin{cases} x' = f(x, \mu, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m, t) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_m, t) \end{cases} \quad (1.2)$$

telles que :

$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$: est le champ de vecteur , qui désigne la dynamique du système (1.1) .

$x = (x_1, \dots, x_n) \in U \subset \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état.

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in V \subset \mathbb{R}^r$: le vecteur des paramètres.

- Lorsque l'application f dépend explicitement du temps le système (1.1) est dit non autonome.

Dans le cas contraire on dit que le système (1.1) autonome.

- Lorsque l'application f est continue et vérifiée la condition Lipshitzienne sur un certain intervalle I de la variable x , on peut assurer l'existence et l'unicité de la solution pour toute condition initiale $x_0 \in I$.

- La loi d'évolution de (1.2) ne fait dépendre l'évolution du système que de son état actuel et non de son histoire.

Définition I.2 Une solution du système (1.1) est une fonction $t \rightarrow x(t)$, définie d'un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ dans U telle que pour tout $t \in I$ on a $x' = f(x, \mu, t)$.

Remarque I.1 Les systèmes dont on ne connaît pas de solution analytiques, leur étude inclut la résolution numérique des équations différentielles en utilisant les méthodes de Rung-kutta ou Euler.[17]

Définition I.3 (flot) : Soit le système (1.1) pour un point initial x_0 donné, on note $\varphi^t(x_0) = x(t)$ la trajectoire issue de ce point au temps $t \in \mathbb{R}$. Ainsi :

$$\varphi^t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

vérifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}, \frac{d\varphi^t(x_0)}{dt} = f(\varphi^t(x_0))$$

L'application $\varphi^t : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est appelée le flot au temps $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit, le flot est une solution du système différentiel qui décrit l'évolution d'un système dynamique.[21].

1.1.1 L'espace des phases :

Définition I.4 Un système dynamique est caractérisé par un certain nombre de variable d'état, qui on la propriété de définir complètement l'état du système à un instant donné. Le comportement dynamique du système est ainsi relié à l'évolution de chacune de ces variables d'état. Cet espace est appelé l'espace de phase où chaque point définit un état et le point associé à cet état décrit une trajectoire, appelé également une orbite.

Pour une condition initiale et un jeu de paramètres $\vec{\mu}$ donnés, ce système admet une solution unique. Pour représenter graphiquement l'évolution du système, deux méthodes sont possibles.

La première méthode, classique, consiste à tracer n diagrammes temporels de la forme $x_i(t)$. Ce type de représentation n'est pas complètement satisfaisante pour deux raisons :

- Il n'est pas possible de voir plus d'une dizaine de courbes. L'analyse de l'influence des conditions initiales est donc très partielle. Seule une dizaine de cas sont testés.

- Il n'est pas possible de repérer visuellement la nature de certaines évolutions. Par exemple, il n'est pas possible de prévoir si un système apparemment stable qui oscille autour d'un état va le rester ou bien diverger aux temps très longs.

La deuxième méthode, répandue dans le domaine des systèmes dynamiques, consiste à tracer la **trajectoire** du système dans l'espace des degrés de liberté que l'on appelle **espace des phases**. Cet espace comporte n dimensions et ses axes sont x_1, \dots, x_n . il peut être égal à \mathbb{R}^n ou bien être plus petit que ce dernier. Dans cette représentation, le temps ne figure pas explicitement. Le point représentant l'état du système se déplace sur une trajectoire lorsque le temps s'écoule (à une vitesse que le graphique n'indique pas). Parfois, les trajectoires sont désignées par le vocable orbites.[23]

Définition I.5 L'espace des phases est un espace souvent multi-dimensionnel permettant d'interpréter géométriquement le mouvement d'un système dynamique décrit par des équations différentielles par rapport au temps.

1.1.2 L'espace d'état :

Définition I.6 L'espace d'état est un ensemble des coordonnées nécessaires à la description complète d'un système.

Définition I.7 Un système non linéaire autonome, de dimension n , à pour représentation d'état, en temps continu :

$$\begin{cases} x'(t) = f(x, \mu) \\ y(t) = g(x, \mu) \end{cases} \quad (1.3)$$

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non linéaire

$g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est un fonction vectoriel non linéaire.

$x'(t)$: la dérivée par rapport au t du vecteur état x .

$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$: le vecteur d'état.

$y = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$: le vecteur de sortie

$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m) \in V \subset \mathbb{R}^r$: le vecteur des paramètres.

t : le temps, $t \in \mathbb{R}_+$

Remarque I.2 Le vecteur d'état $x(t) = [x_{(1)}(t) \dots x_{(n)}(t)]^T$, en temps continu, évolue dans l'espace d'état ou espace de phase. Dans le cas particulier où $n = 2$, l'espace de phase est dit plan de phase.

1.1.3 Orbites ou trajectoires :

Définition I.8 On appelle trajectoire d'un point x de M l'application définie sur G et à valeurs dans M par :

$$\begin{cases} \varphi : G \longrightarrow M \\ t \longrightarrow \varphi^t(x) \end{cases} \quad (1.4)$$

On appelle orbite d'un point x l'image de la trajectoire issue de x c'est à dire le sous ensemble $\gamma(x)$ de l'espace des phases défini par : $\gamma(x) = \varphi_t(x)$. Un élément x de Ω est dit point fixe, ou point d'équilibre du système dynamique son orbite est $\{x\}$ [20].

Définition I.9 Soit $x(t)$ la solution du système (1.3) issue de la condition initiale $x(0)$. La trajectoire $x(t)$ dans l'espace d'état est appelée trajectoire de phase ou orbite du système, issu de la condition initiale $x(0)$.

Définition I.10 L'image d'une solution x est appelée orbite (trajectoire) et notée :

$$\gamma(x) = \{a \in \Omega; \exists t \in I : x(t) = a\} \quad (1.5)$$

L'orbite est tangente en chacun de ses points au champ de vecteur f .

Définition I.11 Une trajectoire est une solution du système différentiel. On considère le système dynamique continu (1.1) l'orbite est définie par :

$$O(x_0) = \{x(t); -\infty < t < +\infty\} \quad (1.6)$$

1.1.4 Points périodiques et cycles limite :

Définition I.12 Le système (1.1), un point x est dit T -périodique : $\forall t \in \mathbb{R} : x(t+T) = x(t)$ et $x(t+\bar{T}) = x(t)$, pour $0 < \bar{T} < T$, est alors appelé la période de la solution .

Remarque I.3 Caractérisant un régime périodique , la solution possède une seule fréquence de base.

Remarque I.4 Une orbite périodiques $O(x)$ est toujours une suite de points périodique. Tous ces points s'appellent point périodique de période T .

Définition I.13 (*cycles limite*) : le système suivant :

$$\begin{cases} x' = P(x, y) \\ y' = Q(x, y) \end{cases} \quad (1.7)$$

telle que P et Q sont des polynômes en x et y à coefficients réels de degré d .

Un cycle limite C est une trajectoire fermée isolée dans l'espace, c'est à dire qu'il existe un voisinage de C dans lequel il n'y a pas d'autres courbes fermées.

Théorème I.1 *C étant la trajectoire d'un cycle limite, toutes les trajectoires intérieures et extérieures voisines de C sont telle que :*

1- *Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent autour de C , pour $t \rightarrow +\infty$, le cycle limite est stable.*

2- *Si toutes les trajectoires intérieures et extérieures s'enroulent, toutes en spirale autour de C , pour $t \rightarrow -\infty$, le cycle limite est instable.*

1.2 Points d'équilibre

Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours de temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibres du système.

En général, on ne sait pas résoudre explicitement des équation différentielles non linéaire. On fait alors une étude qualitative de ses solutions. Cette étude va commencer par la recherche des points fixes du système (1.1).

En ces points fixes, la vitesse s'annule : $x' = 0$

Définition I.14 *Un point d'équilibre du système (1.1) est un point x^* de l'espace des phases vérifiant l'équation $f(x^*) = 0$.*

Remarque I.5 *Le point fixe géométriquement est une intersection entre la courbe de notre fonction $f(x)$ avec l'axe des abscisses $y = 0$.*

Exemple I.1 *Les points fixes de $x' = x^2 - 1$ est deux points : $x^* = 1$ et $x^* = -1$.*

Exemple I.2 *On considéron la fonction f :*

$$f(x) = \mu + \frac{x}{1+x^2}$$

Les racines de $f(x) = 0$ sont :

$$f(x) = 0 \iff -\mu(1+x^2) = x \iff -\mu - \mu x^2 - x = 0$$

$$\iff \mu x^2 + x + \mu = 0 \tag{1.8}$$

$$\iff \Delta = 1 - 4\mu^2$$

Exemple I.3 L'équation (1.8) possède $\left\{ \begin{array}{l} 2 \text{ solution réelles si } \Delta > 0 \text{ c'est à dire } -\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2} \\ 1 \text{ solution double si } \Delta = 0 \text{ c'est à dire } \mu = \pm \frac{1}{2} \\ \Delta < 0 \text{ solution réelle sinon} \end{array} \right.$

1.2.1 **Linéarisation des systèmes non linéaire :** Considérons le système dynamique non linéaire défini par :

$$x'(t) = f(x(t)) \tag{1.9}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$, et $f = (f_1, \dots, f_n)$ et soit x^* un point d'équilibre de ce système.

Supposons qu'une petite perturbation $\varepsilon(t)$ soit appliquée au voisinage du point d'équilibre x^* .

La fonction f peut être développée en série de Taylor au voisinage du point x^* comme suit :

$$\varepsilon' + x'^* = f(x^* + \varepsilon(t)) \simeq f(x^*) + J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t) \tag{1.10}$$

où $J_f(x^*)$ est la matrice Jacobienne de la fonction f définie par :

$$J_f(x^*) = \left(\begin{array}{cccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{array} \right)_{x=x^*} \tag{1.11}$$

Comme $f(x^*) = x'^*$, alors l'équation (1.10) devient :

$$\varepsilon'(t) = J_f(x^*) \cdot \varepsilon(t) \quad (1.12)$$

L'écriture (1.12) veut dire que le système (1.9) est linéarité.

1.2.2 Théorème de Hartmann-Grobman : Le système dynamique (1.9). Soit x^* un point fixe du système (1.9) et soit $J_f(x^*)$ la matrice Jacobienne au point x^* , alors le théorème d'Hartmann-Grobman s'énonce :

Théorème I.2 *Si $J_f(x^*)$ admet des valeurs propres non nulles ou imaginaires purs, alors il existe un homéomorphisme qui transforme les orbites du flot non linéaire vers celles du flot linéaire dans certaines voisinages U de x^* .*

Ce théorème va nous permettre de lier la dynamique du système non linéaire (1.9) à la dynamique du système linéarisé (1.12).

1.3 Attracteurs

1.3.1 Notion d'attracteur :

Définition I.15 *Un attracteur est défini comme une sous partie fermée de La région de l'espace de phases vers laquelle convergent les trajectoires d'un système dynamique dissipatif s'appelle "attracteur". Les attracteurs sont des formes géométriques qui caractérisent l'évolution à long terme des systèmes dynamiques.*

Il y a deux types d'attracteurs : les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques :

1.3.1.1 Attracteurs réguliers :

Définition I.16 *Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution des systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent des "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase restent indéfiniment voisines. et peuvent être de deux sortes :*

- **Un point fixe :** *la trajectoire du pendule dissipatif simple (dans l'espace des phases représentant son altitude et sa vitesse), par exemple, tend vers l'origine du repère, quelles que soient la position et la vitesse initiales.*

- **Un cycle limite** : la trajectoire du pendule idéal dans ce même espace des phases, par exemple. Pour tous les attracteurs réguliers, c'est-à-dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires de "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes, à partir d'une situation connue. [2]

1.3.1.2 Attracteurs étranges :

Définition I.17 L'expression d'un attracteur étrange a été utilisée pour la première fois en 1971 par Ruelle et Takens, il désigne une figure dans l'espace des phases représentant le comportement d'un système dynamique

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions que l'on trouve dans la littérature sont restrictives.

Un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

Remarque I.6 Les différents types d'attracteurs étranges : Les attracteurs chaotiques peuvent être classés en trois types principaux : attracteur hyperbolique, Quasi-attracteur, et attracteur de type **Lorenz**.

Définition I.18 On distingue seulement deux types d'attracteurs qui sont des points fixes, Il s'agit des noeuds stables et des foyers stables, représentés (Figure 1.1)

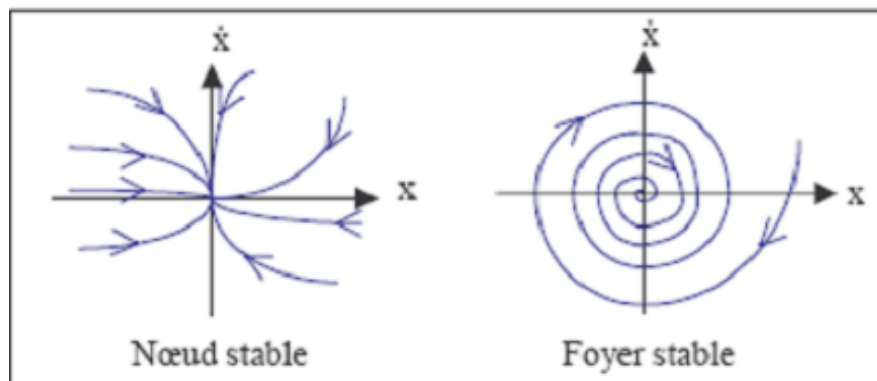


Fig1.1 : Points fixes attracteurs

Exemple I.4 Soit le système :

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases} \quad (1.13)$$

l'origine est le seul point critique pour ce système (1.13).

On voit sur la (Figure 1.2) que le point critique (0,0) est un attracteur positif.

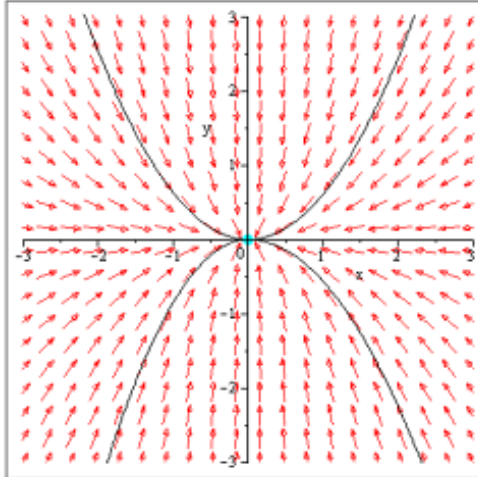


Fig1.2 : Attracteur positif

1.4 Stabilité des points d'équilibre

La concepte de stabilité d'un système dynamique caractérise le comportement de ses trajectoires au voisinage des points fixes. L'analyse de la stabilité d'un système dynamique permet alors d'étudier l'évolution de sa trajectoire d'état lorsque l'état initial est très proche d'un point fixes. La théorie de stabilité au sens de Lyapunov est valable pour toute équation différentielle. Cette notion signifie que la solution d'une équation différentielle initialisée au voisinage d'un point fixes en reste toujours suffisamment proche.

Les systèmes dynamique sont nombreux et variés. Nous étudions la nature qualitatif de l'état du systèmes dynamiques continus : est-il stable ou instable [8].

Théorème I.3 x^* est un point équilibre (critique) de le système non linéaire (1.9) et λ_i , $i = (1, \dots, n)$: les valeurs propres de la matrice $A = Df(x^*)$, est appelé puits si toutes les λ_i , $i = (1, \dots, n)$ ont des parties réelles négatives, d'où x^* est stable. il est appelé sources si toutes les λ_i , $i = (1, \dots, n)$ ont des parties réelles positive, d'où x^* est instable.[8]

Définition I.19 (centre) : Un point fixe est dit centre si le déterminant du Jaccobien du système (1.1) est positif et est de trace nulle (i.e à $\det(J) > 0$ et $\text{tr}(J) = 0$), alors les valeurs propres sont imaginaires pures (c'est-à-dire $\text{Re}(\lambda_i) = 0$).

Exemple I.5 (centre) : Soit le système :

$$\begin{cases} x'(t) = y \\ y'(t) = -4x \end{cases} \quad (1.14)$$

On a par comparaison du système (1.2) et (1.14) :

$$\begin{cases} y = f(x, y) \\ -4x = g(x, y) \end{cases} \quad (1.5)$$

alors le point équilibre est $(0, 0)$

donc la matrice jacobienne est :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\text{tr}(J) = 0$, $\det(J) = 4 > 0 \implies$ par la définition (du centre) : le point d'équilibre est un centre.

1.4.1 Stabilité au sens de Lyapunov en temps continu :

Définition I.20 Considérons une classe des systèmes non linéaires décrits par le système dynamique :

$$\begin{aligned}x'(t) &= f(x(t), t) \\x(t_0) &= x_0\end{aligned}\tag{1.16}$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue.

Nous désignons par x^* un point d'équilibre de (1.16), $f(x^*, t) = 0, \forall t \geq t_0$, et par $x(t, t_0, x_0)$ la solution à l'instant $t \geq t_0$ du système (1.16) initialisée en x_0 à l'instant t_0 , et f une fonction non linéaire.

Définition I.21 *Le point d'équilibre du système (1.1) est **stable au sens de Lyapounov** [37] si pour des condition initiale x_0 si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t, t_0, x_0) - x^*\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0\tag{1.17}$$

Définition I.22 *Le point d'équilibre du système (1.1) est **attractif** [37] si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t, x_0) - x^*) = 0\tag{1.18}$$

Définition I.23 *Le point d'équilibre du système (1.1) est **asymptotiquement stable** [37] lorsqu'il est à la fois stable au sen de Lyapunov et attractif.*

Définition I.24 *Le point d'équilibre du système (1.1) est **exponentiellement stable** [37] s'il existe deux constantes strictement positives a et b et s'il existe $t_0 > 0$, tels que :*

$$\|x(t, x_0) - x^*\| < a \exp(-bt), \text{ pour tout } t \geq t_0\tag{1.19}$$

Définition I.25 *Le point d'équilibre du système (1.1) est **instable au sens de Lyapunov** [37] lorsqu'il n'est pas stable au sen de Lyapunov.*

Remarque I.7 *Les points peuvent être stables ou instables , à savoir la convergence ou la divergence entre les trajectoires voisines[4].*

Remarque I.8 - *La courbe est la **trajectoire** et le dessin est appelé **portrait de phase**.*

-En partant d'une condition initiale quelconque , le segment suivi par un point sur la ligne est une

trajectoire , et ce tracé est un portrait de phase [8]. **Les points fixes** sont les points d'équilibre, ils peuvent être stables ou instables

- Le signe de $f(x)$ permet de reporter sur l'axe des abscisses, confondu avec l'espace des phases, la direction du flot (Figure 1.3)

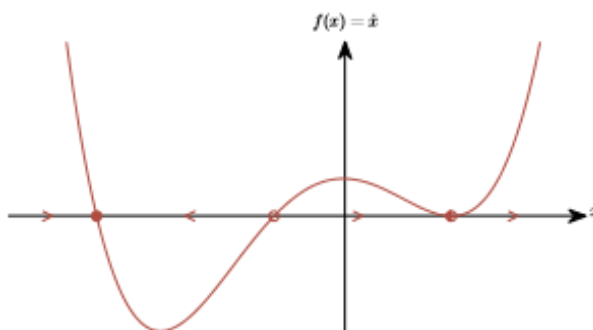


Fig1.3 : Espace des phases sur l'axe des abscisses

1.4.2 **Méthode des fonctions de Lyapunov** : Soit $v(x_1, \dots, x_n)$ une fonction différentiable.

Soit le système autonome :

$$x'_i = f_i(x_1, \dots, x_n), i = 1, \dots, n \quad (1.20)$$

$$v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x) \quad (1.21)$$

si $x(l) = (x_1(l), \dots, x_n(l))$ satisfait (1.20).

Théorème I.4 Pour le système (1.20), il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ de signe défini positif (ou négatif) telle que $v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction semi définie négative (ou positive) ou identiquement nulle alors le point d'équilibre $(0, \dots, 0)$ est stable au sens de Lyapunov.

$v(x_1, \dots, x_n)$ est dite fonction de Lyapunov.

Théorème I.5 Si pour le système (1.20) il existe une fonction de signe définie $v(x_1, \dots, x_n)$ telle que $v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction de signe défini inverse de v alors le point d'équilibre $x = (0, \dots, 0)$ est asymptotiquement stable.

Théorème I.6 Supposons que pour le système (1.20) il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ différentiable dans un voisinage de l'origine et telle que $v = (0, \dots, 0) = 0$.

Si $v' = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} f_i(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction définie positive et s'il existe aussi près que l'on veut

de l'origine $(0, \dots, 0)$ des points en les quels $v(x_1, \dots, x_n) > 0$ alors le point d'équilibre $(0, \dots, 0)$ est instable.

Théorème I.7 Supposons que pour le système (1.20) il existe une fonction $v(x_1, \dots, x_n)$ différentiable dans un voisinage de $(0, \dots, 0)$ et satisfaisant aux conditions suivantes :

- Dans n'importe quel voisinage Ω de $(0, \dots, 0)$ il existe un domaine Ω_1 dans lequel $v(x_1, \dots, x_n) > 0$ et $v(x_1, \dots, x_n) = 0$ pour $v(x_1, \dots, x_n) \in Fr_{\Omega_1}$.

- Le point d'équilibre $(0, \dots, 0) \in Fr_{\Omega_1}$.

- Dans Ω_1 ; $\frac{\partial v}{\partial t} = f \cdot \nabla v$ est une fonction définie positive.

Alors le point d'équilibre $(0, \dots, 0)$ de (1.20) est instable.

1.5 Bifurcations

1.5.1 **Introduction :** La notion bifurcation a été introduit par **Henri Poincaré** au début du XXe siècle dans ces travaux sur les système différentielles. Les propriétés des systèmes dynamiques non linéaires, qui évoluent au cours du temps, sont fortement liées à l'évolution des points d'équilibre du système. Tout changement dans leur nombre ou leur stabilité agit parfois de façon dramatique sur le comportement du système. De plus, ces changements se font suivant un petit nombre de scénarios qui permettent d'indiquer une classification des changements des comportements.[5] , [10].

1.5.2 Définitions de bifurcation :

Définition I.26 Le terme bifurcation est utilisé pour désigner dans un sens large, toute modification qualitative du comportement d'un système dynamique suit à la variation de l'un de ces paramètres ;

une bifurcation correspond donc à la collision de deux objets (point répulsif ou selle, attracteur) ou de deux variétés et ceci est une méthode géométrique efficace pour les décrire ; la collision de deux objets donne naissance à une bifurcation locale alors que la collision de deux variétés donne naissance à une bifurcation globale.

soit :

$$x' = \frac{dx}{dt} = f(x, t, \mu) \quad (1.22)$$

avec le paramètre de contrôle μ , et soit x^* sa solution.

Définition I.27 Une bifurcation est un changement qualitatif de la solution x^* du système (1.22) lorsqu'on modifie μ , et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité et l'apparition de nouvelles solutions.

Définition I.28 Un système est dit structurellement stable ou robuste si le portrait de phase ne change pas dans une perturbation de ses paramètres. Par conséquent une bifurcation correspond à une perte de stabilité structurelle (la valeur du paramètre μ pour laquelle le système (1.22) n'est pas structurellement stable).

1.5.3 Diagramme de bifurcation :

Définition I.29 Diagramme c'est un résumé toute l'information sur la bifurcation et permet comprendre de ce fait comment évolue le système.

Définition I.30 Un système diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation.

1.5.4 Différents types de Bifurcation : Dans cette section, on considère trois types de bifurcations : bifurcation locale, bifurcation super-critique et sous-critique et la bifurcation globales.

1.5.4.1 Bifurcation locale : Les bifurcation locales sont appelées ainsi car elles peuvent toujours être identifiées lors d'une linéarisation de système au voisinage de la solution. Le critère de détection utilisé dans le cas des bifurcation locales concerne les valeurs propres de Jacobien. Il existe plusieurs types de bifurcation locales, parmi les quelles on peut citer :

- Bifurcation noeud-col ou saddle node,
- Bifurcation Fourche ou pitchwork,
- Bifurcation transcritique,

Bifurcation noeud-col : Une fonction linéaire ne change pas le nombre de racines [12] . Le polynôme le plus simple qui change de nombre de racines en fonction du paramètre μ est le polynome quadratique $f(x) = \mu + x^2$.

Dans le système (1.23), on peut réécrire la fonction f sous la forme :

$$f(x; \mu) = x^2 - \mu \tag{1.23}$$

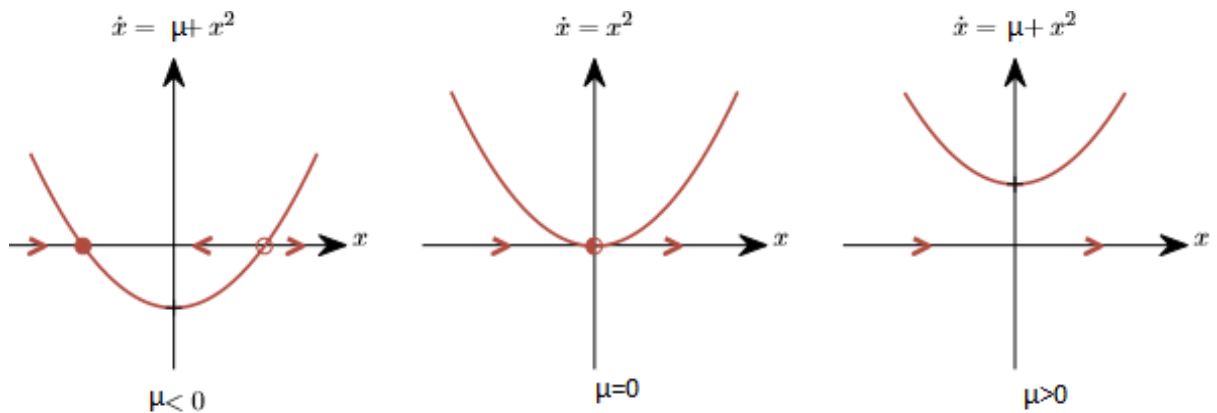


Fig1.4 : Exemple de bifurcation noeud-col

Nous appellons la fonction (1.23) la forme normale de la bifurcation noeud-col. Etudions le comportement de l'équation (1.23).

Les points fixes de cette dernière sont :

$$x_{\pm}^* = \mp \sqrt{\mu}, \tag{1.24}$$

Qui existent seulement pour $\mu > 0$, leur stabilité est déterminée par :

$$f'(x_{\pm}^*) = -2x_{\mp}^* = -2(\mp\sqrt{\mu}) = \mp 2\sqrt{\mu}; \quad (1.25)$$

Selon les signes de $f'(x^*)$ on voit que $x_+^* = \sqrt{\mu}$ est instable tandis que $x_-^* = -\sqrt{\mu}$ est stable.

Remarque I.9 Même étude faite lorsque $f(x, \mu) = -\mu - x^2$, $f(x, \mu) = +\mu + x^2$, $f(x, \mu) = -\mu + x^2$.

Mais dans tous les cas, il y a une transition à $\mu = 0$ entre existence d'aucun point fixe et de deux points fixes dont un est stable et l'autre instable.

La figure (1.5) présente le diagramme de bifurcation noeud-col (la variation du point d'équilibre en fonction de paramètre μ pour le cas $f(x, \mu) = +\mu - x^2$).

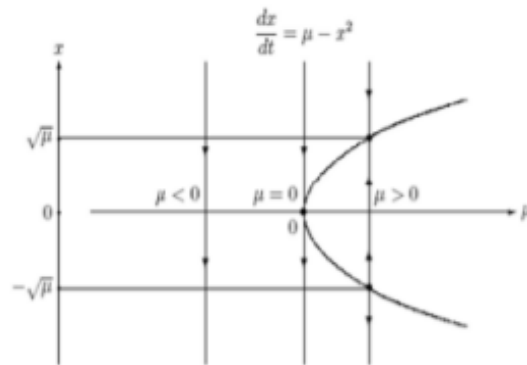


Fig1.5 : Diagramme de bifurcation
Noeud-col

Bifurcation fourches : Si on peut réduire $f(x; \mu)$ à un polynôme cubique à ces quatre cas :

$$f(x, \mu) = \mu x - x^3 \quad (1.26)$$

$$f(x, \mu) = \mu x + x^3 \quad (1.27)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x + x^3 \quad (1.28)$$

$$f(x, \mu) = -\mu x - x^3 \quad (1.29)$$

La forme normal de la bifurcation fourche super-critique est l' équation (1.26)

Cette équation (1.26) est invariante par le changement de variable $x \longleftrightarrow -x$. Sa résolution graphique est portée (Figure1.6)

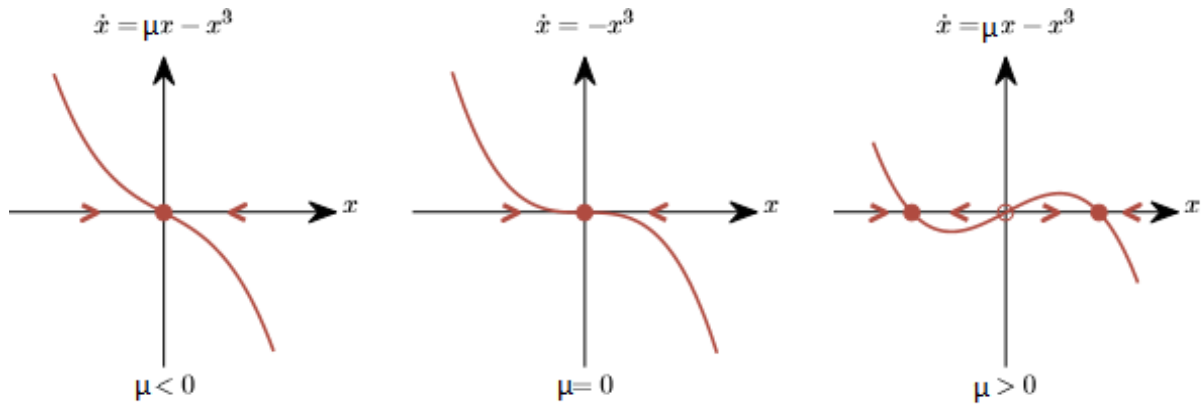


Fig1.6 : La bifurcation fourche supercritique correspond une brisure spontane de la symtrie $x \longleftrightarrow -x$ On represente ici sa forme normal $x' = \mu x - x^3$

Nous calculons ses points fixes :

$$f(x^*) = x^*(\mu - x^{*2}) = 0 \implies \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{\mu} & \text{pour } \mu > 0 \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes.

$$f'(x^*) = (\mu - 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ \mu - 3\mu = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{\mu} \end{cases}$$

Donc le point fixe sont :

$\mu < 0$: 1 seul point fixe : $x^* = 0$ stable.

$\mu = 0$: 1 seul point fixe : $x^* = 0$ mais moins stable car la pente est nulle

$\mu > 0$: 3 points fixes : $x^* = 0$ instable, $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ stables.

Quand les branches de nouveaux points fixes $x^* = \pm\sqrt{\mu}$ sont créés. Ces nouveaux points fixes sont toujours stables quand ils existent.

La diagramme de bifurcation est reporté sur la (Figure 1.7)

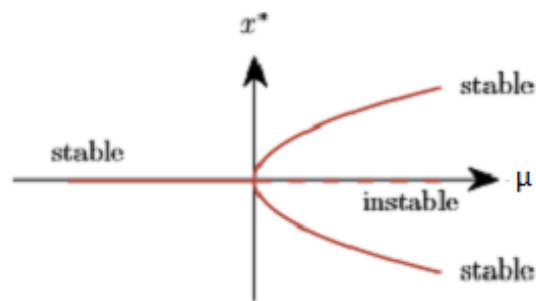


Fig1.7 : Diagramme de bifurcation
supercritique.

Faisons le même calcul pour l'équation (1.27) qui est la forme normal d'une bifurcation fourche sous-critique.

Cette équation (1.27) est également invariante par le changement de variable $x \longleftrightarrow -x$. Sa résolution graphique est portée (Figure1.8).

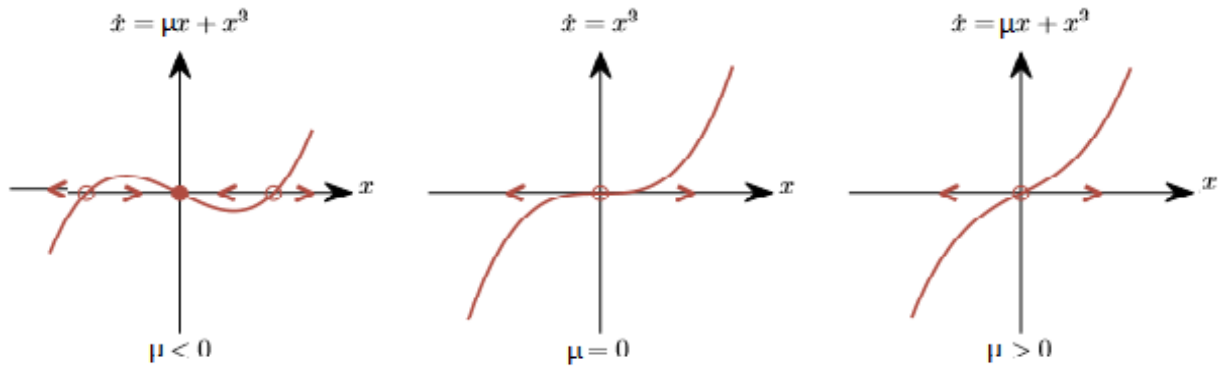


Fig1.8 : Bifurcation fourche sous-critique. On représente ici sa forme normale $\dot{x} = \mu x + x^3$.

Nous calculons ses points fixes :

$$\mu x^* + x^{*3} = (\mu + x^{*2})x^* = 0 \implies \begin{cases} x^* = 0 & \text{pour tout } \mu \\ x^* = \pm\sqrt{-\mu} & \text{pour } \mu < 0 \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes.

$$f'(x^*) = (\mu + 3x^{*2}) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ \mu + 3(-\mu) = -2\mu & \text{pour } x^* = \pm\sqrt{-\mu} \end{cases}$$

Donc le point fixe sont :

$\mu < 0$: 3 points fixes : $x^* = 0$ stable, $x^* = \pm\sqrt{-\mu}$ instables.

$\mu \geq 0$: 1 seul points fixe, $x^* = 0$ instables.

Le diagramme de bifurcation est reporté sur la (Figure 1.9) . Ce type de bifurcation va conduire tout les points vers l'infini, sauf ceux à l'intérieur d'une parabole. [4]

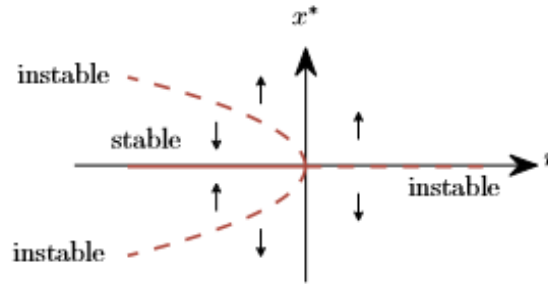


Fig 1.9 : Diagramme d'une bifurcation fourche sous-critique.

Bifurcation transcritiques (d'échange de stabilité) : Si f est contrainte à ne pas avoir de terme constant, le développement limité mène à la forme normal d'une bifurcation transcritique, qui est la dernière bifurcation stationnaire dans une dimension.

Dans certaines situations , un point fixes est toujours un point fixe, quelle que soit la valeur du paramètre de contrôle, mais sa stabilité peut changer, on considère la forme normal un bifurcation transcritique suivante :

$$x' = f(x, \mu) = \mu x - x^2 = (\mu - x)x \tag{1.30}$$

Cette équation est analogue à l'équation logistique, mais nous autorisons ici des valeurs négatives pour x . L'analyse graphique est reportée (Figure 1.10).

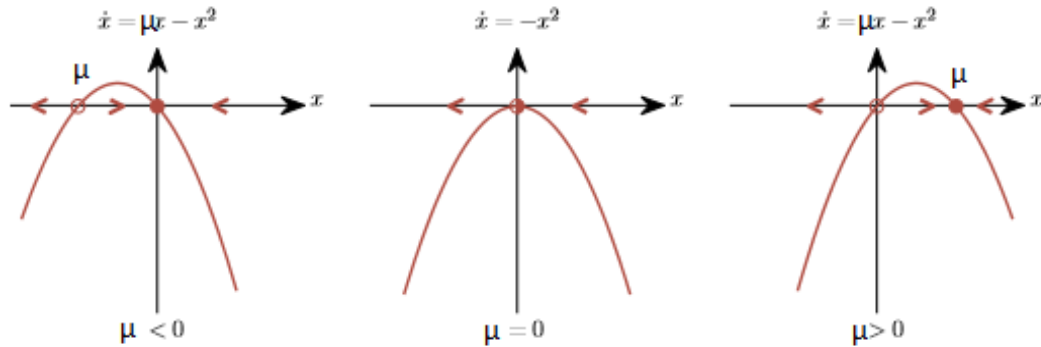


Fig1.10 : La bifurcation transcritique correspond un change de stabilit des 2 points fixes. On represente ici sa forme normal $x' = \mu x - x^2$

Cette équation analogue à l'équation logistique.

les équation admet deux points d'équilibres $x^* = 0$ et $x^* = \mu$.

L'analyse usuelle donne :

$$\mu x^* - x^{*2} = (\mu - x^*)x^* = 0 \implies \begin{cases} x^* = 0 \\ x^* = \mu \end{cases}$$

Nous étudions la stabilité de ces points fixes :

$$f'(x^*) = (\mu - 2x^*) = \begin{cases} \mu & \text{pour } x^* = 0 \\ -\mu & \text{pour } x^* = \mu \end{cases}$$

Donc le point fixe sont :

$\mu < 0$: 2 points fixes : $x^* = 0$ stable , $x^* = \mu$ instable.

$\mu = 0$: 1 point fixes semi-stable : $x^* = 0 = \mu$.

$\mu > 0$: 2 points fixes : $x^* = 0$ instable, $x^* = \mu$ stable.

Lorsque μ passe de positif à négatif, il ya échange de stabilité. Le diagramme de bifurcation est reporté sur la (Figure 1.11). Ici les deux points fixes ne disparaissent pas à la collision mais échangent leur stabilité.

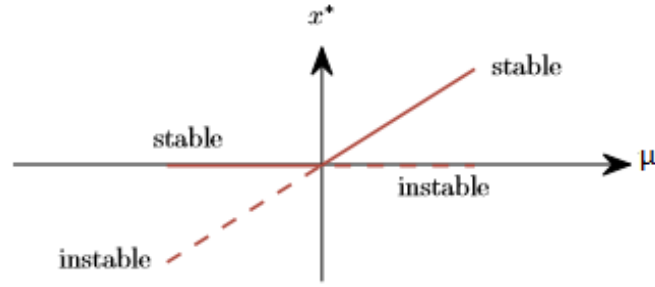


Fig1.11 : Diagramme de bifurcation transcritique.

1.5.4.2 **Bifurcation super-critique et sous-critique** : La distinction de la bifurcation super-critique et sous-critique est intéressante, car les deux n'ont pas de toute la même signification. En effet, pour des valeurs décroissantes du paramètre, dans le cas de la bifurcation super-critique le système passe continument d'un équilibre "**haut**" ou "**bas**" à un équilibre moyen. Au contraire, dans le cas de la bifurcation sous-critique, le système est sur l'équilibre "moyen" et brusquement cet attracteur disparaît et la solution du système saute de manière discontinue vers un autre attracteur ou diverge vers l'infini par exemple, si le système représente une population, il ya une différence énorme entre le passage doux d'un régime de croissance à un autre (bifurcation super-critique) et l'extinction brutale de la population (bifurcation sous-critique).

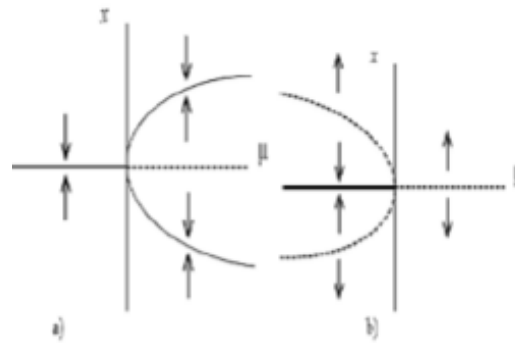


Fig1.12 : Diagramme de bifurcation fourche a)super critique b)sous critique.

1.5.4.3 **Bifurcations globales** : Ces types de bifurcation correspondent à des collisions de deux variétés et elles ne font pas forcément intervenir le voisinage de la solution. Ici, les linéarisation locales autour de la solution ne seront donc d'aucune d'aide. C'est pour cela que ces bifurcations sont appelées "globales" et parmi ces types on peut citer :

a) Orbites hétérocliniques : Ces bifurcation résultent de la collision de variétés stables et instables de deux selle séparées. En effet, c'est un phénomène assez rare.

b) Orbites homocliniques : Ces sont variétés stables et instables d'une même selle qui entrent en collision selon le signe d'une certaine quantité.

Les orbites hétérocliniques et homocliniques ont une grande importance pour l'étude du comportement chaotique des systèmes dynamiques et les solutions des ondes progressives dans les équations aux dérivées partielles.

CHAPITRE II

Route vers le chaos

Nous entamons dans ce chapitre par un bref historique sur la naissance du terme chaos , puis nous présentons les caractéristiques du chaos, quelques outils de quantification et de mesure du chaos, comme l'exposant de Lypunov, et la dimension fractale.

2.1 Bref historique sur le chaos

Généralemen, il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, et plusieurs explication sont données au phénomènes chaotiques, comme confusion, et aussi un indésirable aspect du désordre, abime essentiel et aléatoire indésirable et agitation.

Plusieur travaux prédispose l'invention de cette branche de mathémtiques dans sa façon moderne, nous commençons par **Henri Poincaré** en 1889 [26], dans le problème des trois corps, puis en 1908, l'idée de "chance" a été publié par Poincaré.

La divergence globale des trajectoires dans l'espace de courbure négative a été inscrite par **Jacques Hadamard**, en 1890 puis en 1908, la signification générale de son théorème a été discuté par **Pierre Duhem** qui a déclaré que les premières conditions aléatoires introduites dans le théorème d'**Hadamard** ne permettent pas de prédire le système chaotique d'une façon complète.

Durant des milliers d'années les êtres humains ont noté que de petites causes pourraient avoir de grands effets et que c'était dur de prédire n'importe quoi pour certain. Ce qui avait causé une agitation parmi les scientifiques dans quelques systèmes de dire que les petits changements de conditions initiales pourraient mener aux prédictions différentes, cette prédiction elle-même devient inutiles.

Le mathématicien français, **Jacques Hadamard** prouvé, à la fin du XIX^{ème} siècle, un théorème sur la « dépendance sensible aux conditions initiale » au sujet du mouvement sans friction d'un point sur une surface ou le courant géodésique sur une surface de courbure négative.[3]

Pendant 1927, **Bathazar Van Der Pol** a noté vraisemblablement le comportement bruyant « occasionnelle » dans un circuit oscillatoire du tube électronique gouverné par une simple équation différentielle non linéaire.

Ensuite en 1940, **Mary Cartwright Tôt** et **John Littlewood** on noté que l'équation de **Bathazar Van Der Pol** pourrait exposer d'une façon ou d'une autre des solutions sensibles à tous les chiffres dans ses condition initiale .

Plusieur mathématiciens comme **Kolmogorov**, **Arnold** et **Moser** (entre les années 1920 et 1960) poursuivirent l'étude des systèmes hamiltonien non linéaire en suivant la tradition de **Poincaré**.

Au début des années 1960, la désignation laborieuse des entrées et des productions de processeurs de données mentales constituait un facteur essentiel facilitant la "révolution cognitive" considérer l'esprit comme un système cybernétique dynamique avait été l'approche la plus rapide selon **Miller**, **Gallanter** et **Pribram**. En 1972, **Newell** et **Simon** ont proposé une nouvelle approche qui a dénoncé la précédente en considérant l'esprit comme une règle basée sur un processeur de symbole.[3]

Particulièrement à travers un travail de **Steve Smale**, en 1960, des preuves mathématiques ont été données pour qu'il pourrait y avoir des équations différentielles dans lesquelles une telle sensibilité est générique, et la fin des années 1960, est le début des simulations numériques des équations différentielles avec un comportement complexe, en premier principalement sur les calculatrices analogiques, et plus tard les calculatrices numériques. [36]

E. N. Lorenz s'intéressait à la météorologie, qui n'était pas encore vraiment considérée comme une science par un grand nombre de personnes. A cette époque, on dépensait en effet beaucoup de ressources pour tenter d'étalir des prévisions météorologiques très loin d'être précises .

En se basant sur un modèle informatique de trois variable seulement (simplifié jusqu'à le rendre presque ridicule par rapport à ceux développés par des instituts prévés), Lorenz étudie la prévision du temps et obtient bientôt des résultats inédits.[3]

E. N. Lorenz montre que les mouvements atmosphériques ne sont pas périodiques, et que des changements minimes dans les paramètres intiaux peuvent aboutir à des résultats totalement différents . C'est la sensibilité aux conditions initiales ou "effet papillon".

"Effet papillon", terme correspond à une image quelque peu péotique : la battement d'ailes d'un papillon peut provoquer une tornade à l'autre bout du monde. .Mais l'orgine première de ce terme vient en réalité de la forme de l'attracteur de Lorenz, qui peut être assimilée aux ailes d'un papillon [3].

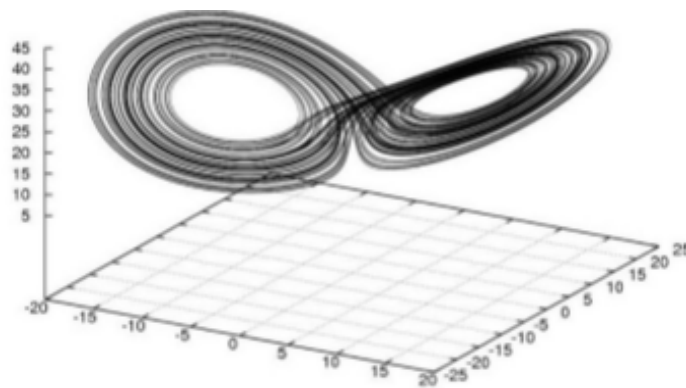


Fig 2.1 : L'attracteur de Lorenz

L'attracteur de **Lorenz** est défini comme l'ensemble à long terme des trajectoires dans l'espace des phases du modèle créé par **Lorenz**. Puis, il conclut de sa découverte qu'il est impssible de réaliser une prévision météorologique précise à long terme. En effet, des incertitudes inévitable dans les donnée fournies aux modèles et de la quantité de paramètre à prendre en compte comme le vent, la température, le degré d'humidité rendent cela impossible. De plus, il réalise qu'il suffit ici de trois variables seulement pour provoquer un comportement chaotique : l'introduction d'un nombre très limité de données peut induire une dynamique à la fois complexe et imprévisible.[3]

Il met en évidence que la complexité peut être le propre d'un système.On pensait jusque-là qu'elle résultait d'apports accidentels dus à une multitude de cause.

E.N.Lorenz formalise en 1960 sa théorie du chaos. Il décrit comment, en jouant seulement sur quelques variables, un comportement chaotique peut être engendré dans un système en théorie très simple.

Puis, en 1977, **Ilya Prigogine** à gagné le Prix Nobel en chimie, il travaillé sur l'entropie des systèmes ouverts, c'était le rassemblement et l'écoulement de la matière, l'énergie, ou l'information entre le système et son environnement .**Prigogine** à utilisé un système dissipatif qui montre que les structures les compliqué peuvent évoluer de façons très simples. ou selon un ordre qui sort du chaos.

T.Matsumoto et **L.O.Chua** [6] en 1986 observeront pour la première fois un attracteur chaotique dans un circuit électronique très simple , construit avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux à cinq segments, cette observation a été le point de départ dans le développement de la théorie des circuits non linéaires, et par la suite les circuits électroniques chaotiques[16]. Avec expériences numériques, **Matsumoto** vérifia que ce circuit est de nature chaotique, mais il vérifia aussi que les autres circuits, qu'il a appelé : "les circuits de chua", à cette époque **Matsumoto** et ses étudiants réussissent aussi à modifier les circuits de **Rosenthal** pour obtenir deux résistances non linéaires terminales, avec une fonction linéaire par morceaux préalablement choisie. Deux ans après, **Tokumasu** réussit à adapter le circuit de **Rosenthal** pour obtenir la non linéarité voulue [28].

2.2 Caractéristique du chaos

Il existe un ensemble de propriétés qui résument les caractéristiques observées dans les systèmes chaotiques .Elle sont considérées comme des critères mathématiques qui définissent le chaos. Les plus connues sont :

- Sensibilité aux condition initiales
- Non-linéarité
- Déterminisme
- L'aspect aléatoire
- Attracteurs étranges

2.2.1 Sensibilité aux conditions initiales : La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du XIX^e siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en **1963** par **Lorenz** lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système.

La plupart des systèmes chaotiques exhibent la sensibilité aux conditions initiales, pour deux conditions initiales arbitraires très voisines initialement, les deux trajectoires correspondantes à ces données initiales divergent exponentiellement, par suite les deux trajectoires sont incomparables.

D'un point de vue mathématique, on dit que f montre une dépendance sensible aux conditions initiales lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, \exists (y, p) \in D; \|x - y\| < \varepsilon \implies \|f^p(x) - f^p(y)\| > \delta \quad (2.1)$$

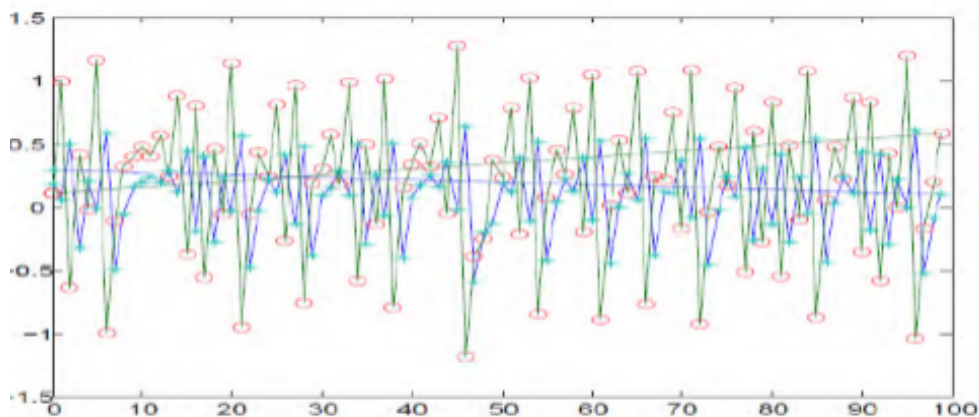


Fig.2.2 : Sensibilité aux conditions initiales de l'application logistique.

La sensibilité des trajectoires chaotiques aux conditions initiales est une autre caractéristique permettant de reconnaître un comportement chaotique.

2.2.2 Non linéarité :

Définition II.1 *Un système chaotique est un système dynamique non linéaire. Un système linéaire ne peut pas être chaotique. Le comportement chaotique d'un système dynamique non linéaire est aux non linéarités. En général, pour prévoir des phénomènes générés par les systèmes dynamiques, la démarche consiste à construire un modèle mathématique qui établit une relation entre un ensemble de causes et un ensemble d'effets. Si cette relation est une opération de proportionnalité, le phénomène est linéaire. Dans le cas d'un phénomène non linéaire, l'effet n'est pas proportionnel à la cause.*[2]

2.2.3 Le déterminisme :

Définition II.2 *La notion de déterminisme signifie la capacité "prédire" le futur d'un phénomène à partir d'un événement passé ou présent. L'évolution irrégulière du comportement d'un système chaotique est due aux non linéarités.*

Dans les phénomènes aléatoires, il est absolument impossible de prévoir la trajectoire d'une quelconque particule. À l'opposé, un système chaotique a des règles fondamentales déterministes et non probabilistes.[2]

2.2.4 L'aspect aléatoire : Les systèmes chaotiques se comportent, les points du système remplissent l'espace des phases au hasard, en effet d'une manière qui peut sembler aléatoire. Cet aspect du chaos vient du fait que l'on est incapable de donner une description mathématique du mouvement, aucune structure n'apparaît. Mais ce comportement est en fait décrit par des équations non linéaires parfaitement déterministes, comme par exemple les équations de **Newton** régissant l'évolution d'au moins trois corps en interaction.

2.2.5 Attracteurs étranges : L'expression d'un attracteur étrange a été utilisée pour la première fois en 1971 par Ruelle et Takens[30], il désigne une figure dans l'espace des phases représentant le comportement d'un système dynamique

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique et toutes les définitions que l'on trouve dans la littérature sont restrictives.

Un attracteur est défini comme une sous-partie fermée de l'espace des phases qui "attire" toutes les autres orbites vers elle.

Les attracteurs chaotiques étranges peuvent être classés en trois types principaux :

2.2.5.1 Attracteur hyperbolique : Ensembles-limites structurellement stables. Généralement, la plupart des systèmes physiques connus n'appartiennent pas à cette classe des systèmes d'attracteurs hyperboliques.

2.2.5.2 Quasi-attracteur : Ces types d'attracteurs sont des ensembles-limites renfermant des orbites périodiques de différents types topologiques et des orbites structurellement instables.

2.2.5.3 Attracteur de type Lorenz : Attracteur de type Lorenz ne sont pas structurellement stables, mais leurs orbites homoclines et hétéroclines sont structurellement stables (hyperboliques) et aucune des orbites périodiques instables apparaissent sous les petites variations des paramètres.

2.3 Outils de quantification et mesure du chaos

Sachant que la perte de l'information sur les conditions initiales induite par un comportement chaotique, expliquerait en partie la complexité du comportement de certains systèmes réels. Cependant, ne disposant pas de conditions nécessaires et/ou suffisantes pour caractériser un système chaotique, pour cela nous cherchons des moyens quantitatifs permettant de reconnaître, de distinguer un comportement chaotique d'un comportement aléatoire ou erratique [11].

La **quantification du chaos** permet dans certains cas de décrire la dynamique d'un système et son passage à un régime chaotique en fonction des variations de certains paramètres, dits paramètres de contrôle du système.[2]

2.3.1 Exposants de Lyapunov : La distance entre deux trajectoires initialement proches tend à augmenter à une vitesse exponentielle, puis à se stabiliser lorsque la distance atteint une valeur limite de l'ordre du diamètre de l'attracteur. Étant donné une précision sur les mesures, le temps que mettent deux conditions initiales dont la distance à l'origine est de l'ordre de cette précision constitue l'horizon prédictif du système. Les exposants dits de **Lyapunov** permettent de mesurer ce taux de divergence.[28]

Alexander Lyapunov (1857-1918) a développé un paramètre qui nous permet de calculer le taux de divergence entre l'évolution de trajectoires issues de conditions initiales proches au sein de cet espace borné qu'est l'attracteur étrange.

Ce paramètre de contrôle est appelé "Exposants de Lyapunov" qui est une quantité permettant de caractériser le chaos temporel et est défini pour un système dynamique par :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |f'(x_{i-1})| \right) \quad (2.2)$$

Soit un système dynamique quelconque la condition initiale x_0 est affectée d'une erreur infinitésimale E_0 sera amplifiée d'un facteur $\left| \frac{E_n}{E_0} \right|$, remarquons que l'erreur diminue lorsque le facteur est inférieur à 1 et augmente s'il est supérieur à 1, on a :

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| = \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| \cdot \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| \cdots \left| \frac{E_2}{E_1} \right| \cdot \left| \frac{E_1}{E_0} \right|$$

il se suffit alors de calculer ce produit pour déterminer la façon dont s'amplifie l'erreur initiale.

En appliquant le logarithme d'un produit correspond à une somme de lui-même, on obtient

$$\begin{aligned} \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| &= \ln \left| \frac{E_n}{E_{n-1}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-1}}{E_{n-2}} \right| + \ln \left| \frac{E_{n-2}}{E_{n-3}} \right| + \dots + \ln \left| \frac{E_2}{E_1} \right| + \ln \left| \frac{E_1}{E_0} \right| \\ &= \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \end{aligned} \quad (2.3)$$

Quand n tend vers l'infini dans la somme au dessus, nous obtenons l'exposant de **Lyapunov**.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \right) \quad (2.4)$$

E_i et E_{i-1} étant de très petite valeur, le rapport correspond à la dérivée de la fonction associée à l'équation utilisée si, naturellement la fonction est dérivable. Soit $f(x_i)$ cette fonction.

$$E_i = f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1}) \quad (2.5)$$

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} \quad (2.6)$$

Puisque

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) \quad (2.7)$$

si f est dérivable, on a

$$\frac{E_i}{E_{i-1}} = \frac{f(x_{i-1} + E_{i-1}) - f(x_{i-1})}{E_{i-1}} = f'(x_{i-1}) \quad (2.8)$$

alors, par conséquent

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left| \frac{E_i}{E_{i-1}} \right| \quad (2.9)$$

Si l'exposant de **Lyapunov** est positif, nous avons

$$\lambda = \ln \left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 0 \quad (2.10)$$

qui implique que

$$\left| \frac{E_n}{E_0} \right| > 1 \quad (2.11)$$

L'erreur infinitésimale du début ira donc en augmentant. Le système sera donc sensible aux très petites variations de sa condition initiale, une des caractéristiques des systèmes chaotiques. Si au contraire l'exposant de **Lyapunov** est négatif, l'erreur infinitésimale du début ira en diminuant. L'erreur initiale n'aura dans ce cas aucun effet à long terme. Généralement, on peut distinguer trois cas suivant le signe de l'exposant de **Lyapunov**.

- Si $\lambda < 0$, l'orbite est attractive vers un point fixe ou orbite périodique stable. Il caractérise les systèmes dissipatifs. Ce type de système exhibe une stabilité asymptotique, plus l'exposant est négatif,

plus la stabilité est grande. Les points fixes et les points périodiques super stables ont un exposant de **Lyapunov** λ qui tend vers $-\infty$

- Si, $\lambda = 0$, l'orbite est un point fixe neutre. Un système physique avec un tel exposant est dit conservateur. Dans cette situation, les orbites gardent une séparation constante.

- Si, $\lambda > 0$, l'orbite est instable et chaotique. Tous les points voisins doivent être visités : ces points sont instables. Pour un système discret, on a un ensemble de points sans aucun rapport de liaison.

Pour un système continu, l'espace de phases est un ensemble de lignes croisées.

Etat stable	attracteur	Dimension de lyapunov	Exposant de lyapunov
point d'équilibre	point	0	$\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 \leq 0$
périodique	cercle	1	$\lambda_1 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 \leq 0$
périodique d'ordre 2	tore	2	$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_3 \leq 0$
périodique d'ordre k	k-tore	k	$\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0, \lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} \leq 0$
chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$
Hyper-chaotique		Non entier	$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i < 0$

Table 1.1 - Attracteurs et exposants de **Lyapunov**

divergent après un temps $\Delta t = t_2 - t_1$ vers Z_2 tel que :

$$|Z_2| \approx \exp(\lambda \cdot \Delta t) |Z_1| \tag{2.12}$$

Où λ est l'exposant de lyapunov .

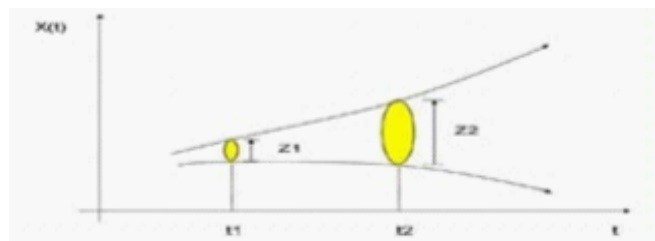


Fig2.3 : Divergence de deux trajectoires dans le plan de phase.

Pour un attracteur non chaotique, les exposants de Lyapunov sont tous inférieurs ou égaux à zéro et leur somme est négative.

Un attracteur étrange possédera toujours au moins trois exposants de Lyapunov, dont un au moins doit être positif.

2.3.2 L'algorithme de Wolf : Cet algorithme permet de calculer les exposants de Lyapunov à partir du calcul effectif de la divergence de deux trajectoires après t pas de temps .

L'algorithme fait en plus varier un paramètre de contrôle choisi pour permettre de visionner l'évolution de la sensibilité aux conditions initiales selon ce dernier. Il faut remarquer que l'algorithme de **Wolf** calcule l'exposant de Lyapunov le plus grand. Pour ce faire, il fait la moyenne des sommes des divergences normalisées, et puisque l'exposant le plus grand aura la plus grande influence sur le système.

Les étapes de l'algorithme sont :

- 1- changement du paramètre de contrôle.
- 2- choix aléatoire d'une condition initiale.
- 3- évolution du système dans le but d'atteindre un attracteur.
- 4- création d'une nouvelle trajectoire à partir de la trajectoire courante à laquelle on ajoute une petite perturbation
- 5- évolution dans l'attracteur de ces deux trajectoires voisines et calculs de la moyenne de la divergence renormalisée entre ces deux trajectoires.
- 6- réajustement de l'écart, permettant ainsi à chaque pas de temps de l'évolution du point précédant le calcul d'une moyenne de la divergence.
- 7- retour au point (5) effectué selon un nombre donné.
- 8- retour au point (1).
- 9- dessin de l'exposant de Lyapunov le plus grand en fonction du paramètre de contrôle donné

2.3.3 Dimension fractale : Le terme « la dimension fractale » est utilisé comme une référence quelquefois à ce qui est appelé la dimension de capacité plus communément (lequel est, en parlant

en gros, l'interprète, D dans l'expression $n(\varepsilon) = \varepsilon^{-D}$, où $n(\varepsilon)$ est le nombre minimal d'ensembles ouverts de diamètre ε suffisantes de couvrir l'ensemble).

le terme dimension est souvent lié à celui de coordonnée, c'est à dire variable nécessaire pour décrire la position d'un élément, d'un ensemble et cette dimension est par définition un nombre entier

La dimension de l'attracteur :

- Si l'attracteur est un point sa dimension est 0.
- Si l'attracteur est une ligne ou une courbe fermée sa dimension est 1 et ainsi de suite.

il y a un autre genre d'attracteur qui a une forme inhabituelle, une structure géométrique fractale due à l'étirement dans une direction et au repliement dans une autre direction qui est l'attracteur étrange.

il y a deux types de dimensions fractales :

1 - Celles dont la définition dépend uniquement des propriétés métriques de l'espace dans lequel se trouve l'ensemble (attracteur ou non), dimension de Hausdorff, dimension de capacité,... etc

2 - Celles dont la définition, en plus des propriétés métriques tient compte de la dynamique du système, c'est à dire d'une mesure de la répartition du temps de séjour d'une trajectoire précise, dimension de corrélation, dimension d'information, dimension ponctuelle, fonction de dimension de corrélation, fonction de dimension d'information, dimension de Lyapunov, etc...

2.3.4 Dimension de Hausdorff : Informellement, des objets **auto-similaire**¹ avec des paramètres N, s sont décrit par une loi de puissance tel que : $N = s^d$, où $d = \frac{\ln N}{\ln s}$, est la "dimension" de la loi de puissance, connu sous le nom " la dimension de Hausdorff". Formellement, soit A un sous espace d'un espace métrique X , alors la dimension de Hausdorff $D(A)$ est l'infinité des $d \geq 0$ tel que la mesure d -dimensionnelle de Hausdorff de l'ensemble A est égale 0; (pas nécessairement un nombre entier).[25]

2.3.5 Dimension de Capacité : La dimension de capacité d'un espace métrique compact X est le nombre réel $d_{capacité}$ tel que si $n(\varepsilon)$ désigne le nombre minimal d'ensembles ouverts de diamètre

¹auto- similaire Si aucun j existe (comme le cas d'un point hyperbolique stable) alors D_L est égale à 0, et si l'attracteur est chaotique alors D_L est un nombre fractionnaire.

moins ou égale à ε qui peut donner un recouvrement de l'espace X , alors $n(\varepsilon)$ est proportionnel à ε^{-D} quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$d_{\text{capacité}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\ln N}{\ln \varepsilon} \quad (2.13)$$

2.3.6 Dimension de Lyapunov :

Définition II.3 Soit A un attracteur représenté dans un espace multidimensionnel de dimension d , Kaplan et York ont suggéré de calculer la dimension de cet attracteur en utilisant ses exposants de Lyapunov de la manière suivante :

soient $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_n$, la dimension de Lyapunov D_L est définie par :

$$D_L = j + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j}{|\lambda_{j+1}|} = \frac{\sum_{i=1}^{i=j} \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} + j \quad (2.14)$$

où j est plus grand entier qui satisfait : $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0$

2.3.7 Dimension d'information : La fonction d'information est défini par :

$$I = - \sum_{i=1}^{i=N} P_i(\varepsilon) \ln [P_i(\varepsilon)] \quad (2.15)$$

où $P_i(\varepsilon)$ est la mesure naturelle, ou la mesure de probabilité normalisé tel que $\sum_{i=1}^{i=N} P_i(\varepsilon) = 1$.

La dimension d'information est définie alors par :

$$d_{\text{inf}} = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{I}{\ln(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^{i=N} \frac{P_i(\varepsilon) \ln [P_i(\varepsilon)]}{\ln(\varepsilon)} \quad (2.16)$$

S'il est également possible que chaque élément soit visité, alors, $P_i(\varepsilon)$ est indépendant de i et

$$\sum_{i=1}^{i=N} P_i(\varepsilon) = N \cdot P_i(\varepsilon) = 1$$

donc $P_i(\varepsilon) = \frac{1}{N}$, et $d_{\text{inf}} = d_{\text{capacité}}$

2.3.8 Dimension de corrélation : On définit l'intégrale de corrélation comme suit :

$$C(\varepsilon) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N^2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} H(\varepsilon - |x_i - x_j|) \quad (2.17)$$

où H est fonction de Heaviside donnée par : $H(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$, et elle vérifie la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)dx$ pour une fonction de teste $\varphi(x)$. Dans les applications la fonction de Heaviside est utilisée les modèles des circuits électriques.

Quant la limite au-dessous existe, la dimension de corrélation est définie comme suit :

$$D_2 = d_{cor} = \lim_{\varepsilon, \varepsilon' \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left[\frac{C(\varepsilon)}{C(\varepsilon')} \right]}{\ln \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} \right)} \quad (2.18)$$

Remarque II.1 : Les trois dimensions satisfont :

$$d_{cor} \leq d_{inf} \leq d_{capacité} \quad (2.19)$$

où $d_{correlation}$ est la dimension de corrélation, d_{inf} est la dimension d'information, et $d_{capacité}$ est la dimension de capacité.

CHAPITRE III

Exemples de systèmes dynamiques à temps continus chaotiques

3.1 Model de Lorenz

Edward Lorenz fut un météorologue qui, le premier, mit en évidence le caractère chaotique de la météorologie. Le couplage de l'atmosphère avec l'océan est décrit par le système d'équations aux dérivées partielles couplées de Navier-Stokes de la mécanique des fluides. En 1963, Lorenz eut l'idée de chercher un modèle d'équations pour étudier l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

Ce modèle a joué un rôle historique important puisque son évolution temporelle fait apparaître un comportement chaotique. De plus, il constitua le premier et célèbre système différentiel dissipatif permettant d'observer un attracteur étrange pour certaines valeurs des paramètres.[33]

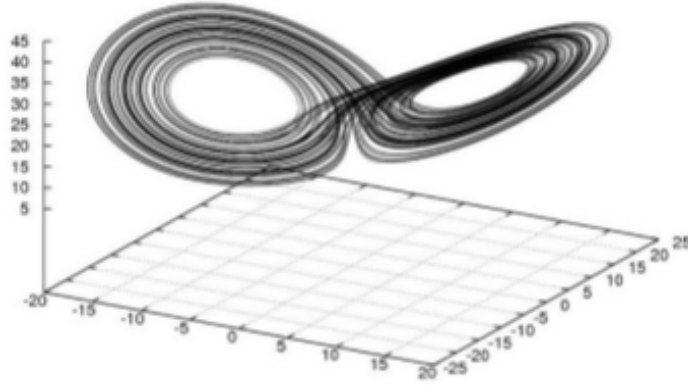


Fig3.1 : L'attracteur de Lorenz.

Dans sa version exprimée en paramètres et variables réduits, le système de trois équations différentielles couplées s'écrit :

$$\begin{cases} x' = f_1(x, y, z) = a(y - x) \\ y' = f_2(x, y, z) = rx - y - xz = x(r - z) - y \\ z' = f_3(x, y, z) = xy - bz \end{cases} \quad (3.1)$$

L'espace des phases est tridimensionnel. Les valeurs de a et b sont fixées tel que : $a = 10$ et $b = \frac{8}{3}$

x : représente la vitesse.

y : la différence locale de température.

z : la distortion des profils de température (par rapport au cas linéaire conductif).

a : est proportionnel au nombre de Prandtl.

b : l'élongation de la boîte (la taille du système).

r : le paramètre de contrôle positif.(le nombre de Rayleigh réduit).

Equilibre du modèle

Cherchons les points d'équilibre (x, y, z) de ce système dynamique vérifiant $x' = y' = z' = 0$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a(y-x) = 0 \\ x(r-z) - y = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ay = ax \\ y(r-z) = y \\ y^2 - b(r-1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x \\ z = r-1 \\ y = \pm\sqrt{b(r-1)} \end{cases}$$

Si $r < 1$ Dans ce cas , il n'y a qu'un seul point fixes : $(0, 0, 0)$

Si $r > 1$ il ya deux point : $(\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, (r-1)) ; (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, (r-1))$.

L'étude de la stabilité des points d'équilibre repose sur le signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne A obtenue en linéarisant le système autour d'un point fixes. L'expression de la matrice Jacobienne A du système est :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon'_x \\ \varepsilon'_y \\ \varepsilon'_z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

avec $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)$ d'où :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & -x \\ y & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Au point $(0, 0, 0)$ les valeurs propres λ de la matrice A :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix}$$

Par conséquent ona :

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -a - \lambda & a & 0 \\ r & -1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -b - \lambda \end{vmatrix}$$

d'où le polynôme caractéristique :

$$(\lambda + b) (\lambda^2 + (1 + a) \lambda + a(1 - r)) = 0 \implies \Delta = (1 + a)^2 - 4a(1 - r)$$

a pour racines :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-(a+1) + \sqrt{(a+1)^2 - 4a(1-r)}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-(a+1) - \sqrt{(a+1)^2 - 4a(1-r)}}{2} \\ \lambda_3 = -b \end{array} \right.$$

$$\text{Pour } \left\{ \begin{array}{l} a = 10 \\ b = \frac{8}{3} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40r}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40r}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{array} \right.$$

- Si $r < 1$, toutes les valeurs propres sont négatives, le point d'équilibre est noeud stable.

- Si $r = 1$, les valeurs propres sont : $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -(a+1), \lambda_3 = -b$ (C'est un bifurcation fourche), le point d'équilibre est dit marginal.

- Si $r > 1$, on a $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0$. L'origine est devenue instable (col).

le stabilité des points fixes pour $r > 1$. Dans ce cas, la matrice Jacobienne A s'exprime :

$$A = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique d'où :

$$\lambda^3 + (a + b + 1) \lambda^2 + b(a + r) \lambda + 2ba(r - 1) = 0$$

Selon les valeurs du paramètre r , ce polynôme de degré trois peut avoir :

- Trois racines réelles négatives (le point fixe stables) ou bien une racine réelle et deux racines complexes conjuguées .

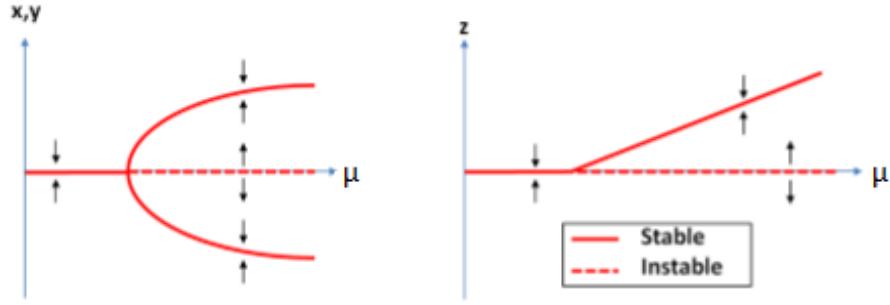


Fig3.2 : Diagramme de bifurcation du systme de Lorenz (effet papillon)

On va chercher à savoir s'il existe une valeur critique r_c pour laquelle les point fixes deviennent instable. une valeur propre réelle change de signe . Cela équivaut à un changement de signe d'une valeur propre réelle est impossible car si $\lambda = 0$ on a forcément $r = 1$. On peut donc rechercher pour quelles valeurs de r on peut obtenir deux racines iw et $-iw$ de partie réelle nulle. En reportant la valeur $\lambda = iw$ dans l'équation :

$$iw^3 + (iw)^2(a + b + 1) + b(a + r)iw + 2ab(r - 1) = 0$$

On obtient les deux conditions :

$$\begin{cases} -w^2(a + b + 1) + 2b(r - 1)a = 0 \\ -iw^3 + iwb(a + r) = 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

En éliminant w^2 , il vient du valeur critique r_c :

et on a par (3.3) :

$$\begin{cases} w^2 = \frac{2ab(r_c - 1)}{a + 1 + b} \\ w^3 = wb(a + r_c) \iff w^3 = w.w^2 \iff w^2 = ab + br_c \end{cases}$$

$$r_c = \frac{a(a+b+3)}{a-b-1} = \frac{470}{19} \simeq 24.73, \text{ pour } \begin{cases} a = 10 \\ b = \frac{8}{3} \end{cases}$$

$$w = \pm \sqrt{\left(ab + b \frac{ab + \frac{2ab}{a+b+1}}{2ab} \right)} = \pm ((ab+b)r_c) \simeq 92.64$$

On trouve donc que, pour $r \geq r_c$, la trajectoire est chaotique. Elle tourne alors autour d'un de deux équilibres instables comme si elle y convergerait puis elle bascule vers l'autre équilibre. C'est le célèbre effet papillon.[13] [38].

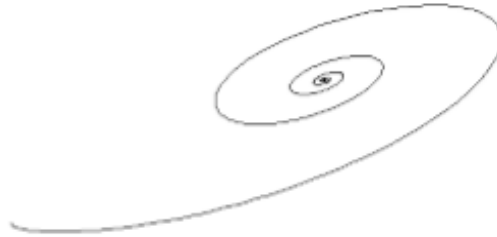


Fig 3.3 : Modle de Lorenz $r = 5$

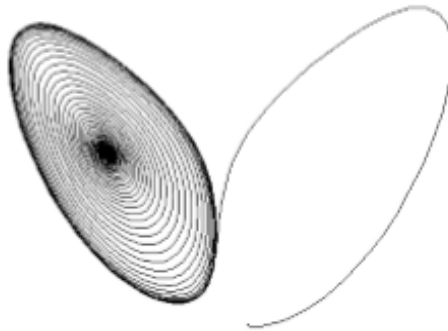


Fig 3.4 : Modle de Lorenz $r = 10$

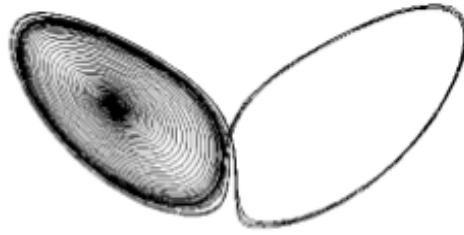


Fig 3.5 : Modle de Lorenz $r = 15$



Fig 3.6 : Modle de Lorenz $r = 20$

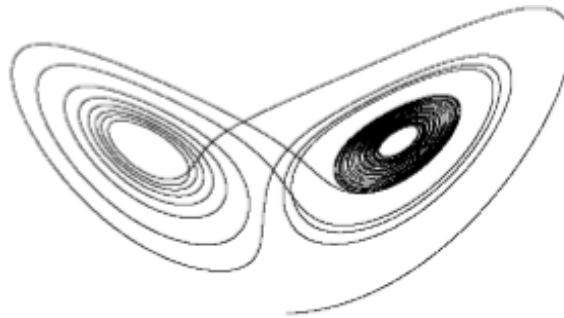


Fig 3.7 : Modle de Lorenz $r = 24$

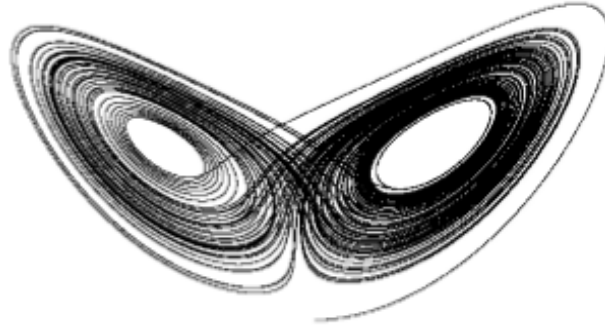


Fig 3.8 : Modle de Lorenz $r = 26$

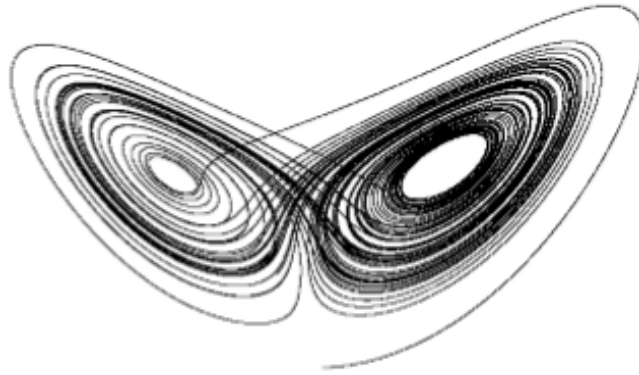


Fig 3.9 : Modle de Lorenz $r = 28$

Les exposants de Lyapunov :

Les calculs des exposants de Lyapunov donne les valeurs suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{-11 + \sqrt{81 + 40 \times 28}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{-11 - \sqrt{81 + 40 \times 28}}{2} \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 11.828 \\ \lambda_2 = -22.828 \\ \lambda_3 = -\frac{8}{3} \end{array} \right.$$

telque le système (3.1) pour $a = 10, b = \frac{8}{3} r = 28$, avec les conditions $x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0.01$

on a : $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$, et $\lambda_3 < 0$

Donc d'après le tableau de classification des régimes permanents selon les exposants de Lyapunov on voit que le système est chaotique.

3.2 Model de Rössler

L'attracteur de **O.Rössler** (1974) issu de travaux en cinétique chimique, correspond lui aussi à une formulation dans le cadre de la mécanique des fluides; il est associé au système différentiel non- linéaires. Ces équations différentielles définissent un système dynamique à temps continu et tridimensionnel qui présente une dynamique chaotique. L'ensemble des trajectoires à long terme de ce système définit un attracteur étrange aux propriétés fractales. (a,b,c étant des paramètres réels) [24].

L'article originale de **O.Rössler** indique que l'attracteur de **Rössler** était censé se comporter de la même manière que l'attracteur de Lorenz , mais également pour être plus simple à analyser, il ne présente qu' une seule spirale.[14]

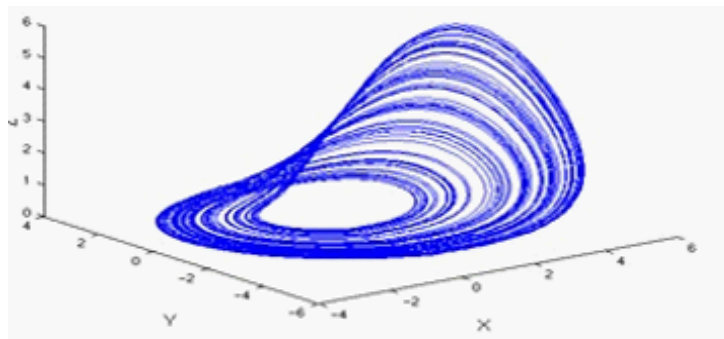


Fig3.10 : Attracteur trange de Rssler

Les équations de ce système sont les suivantes :

$$\begin{cases} x' = -y - z = -(y + z) \\ y' = x + ay \\ z' = b - cz + xz = b + z(x - c) \end{cases} \quad (3.4)$$

Tel que a, b, c sont des constantes (paramètres de bifurcation) .

Pour $a = 0.2; b = 0.2; c = 5.7$.

Une partie de l'élégance de l'attracteur de Rössler est due au fait que deux de ses équations sont linéaires, on pose $z = 0$, permet d'examiner le comportement sur le plan (x, y) .

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x + ay \end{cases} \quad (3.5)$$

La stabilité dans le plan (x, y) , peut alors être trouvée en calculant les valeurs propres de la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & a \end{pmatrix}$$

Alors le polynôme caractéristique est :

$$\lambda^2 - a\lambda + 1 = 0 \implies \Delta = a^2 - 4$$

Donc les valeurs propres sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4}}{2} \\ \lambda_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4}}{2} \end{cases}$$

Cherchons les points fixes de ce système dynamique les trois équations de Rössler vérifiant : $x' = y' = z' = 0$

$$\begin{cases} x' = 0 \\ y' = 0 \\ z' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y - z = 0 \\ x + ay = 0 \\ b + z(x - c) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -ay \\ b + (-y)[(-ay) - c] = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z = -y \\ x = -ay \\ ay^2 + cy + b = 0 \end{cases}$$

On a : $ay^2 + cy + b = 0 \iff \left\{ y_{1,2} = \frac{-c \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$, tel que $\Delta = c^2 - 4ab > 0$.

d'où :

$$(x; y; z) \equiv \left(\frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2}; \frac{-c \mp \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}; \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

Alors les deux points fixes sont :

$$\begin{cases} M_1 = \left(\frac{c + \sqrt{c^2 - 4ac}}{2}; \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}; \frac{c + \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a} \right) \\ M_2 = \left(\frac{c - \sqrt{c^2 - 4ac}}{2}; \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a}; \frac{c - \sqrt{c^2 - 4ac}}{2a} \right) \end{cases}$$

Comme cité plus haut l'un des point instables , est situé au centre de la spirale et l'autre se situe hors de l'attracteur.

3.2.0.1 Régime périodiques et chaotique : On a la stabilité de chacun de ces points fixes peut être analysée en déterminant leurs valeurs propres respectives et vecteurs propres. Commencant par la matrice Jacobienne :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ z & 0 & -c \end{pmatrix}$$

Alors le polynôme caractéristique sont :

$$-\lambda^3 + (a + x - c)\lambda^2 + (ac - ax - 1 - z)\lambda + x - c + az = 0$$

pour $a = 0.1$

$$|J - \lambda I| = \begin{pmatrix} 0 - \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 0.1 - \lambda & 0 \\ z & 0 & -c - \lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2(0.1 - c) + 0.1c\lambda - c = 0$$

Selon c , on va trouvé les types des points :

$c = 4 \implies$ période 1.

$c = 6 \implies$ période 2.

$c = 8.5 \implies$ période 4.

$c = 9 \implies$ chaotique.

$c = 12 \implies$ période 3.

$c = 12.6 \implies$ période 6.

$c = 13 \implies$ chaotique.

$c = 18 \implies$ chaotique.

CHAPITRE IV

Synchronisation du chaos

4.0.1 **Introduction :** Durant la décennie passée, plusieurs types de synchronisation ont été étudiés, et différentes méthodes ont été proposées. On distingue deux modes de synchronisation. Le premier mode repose sur un couplage mutuel entre deux système chaotiques ou plus.(**Yamada** et **Fujisaka** qui ont utilisé une approche locale de la Synchronisation chaotique[35]. Par la suite, **Afraimovich** et **Al.** ont développé les concepts importants liés à la synchronisation chaotique)[31]. Le second est appelé maître et esclave ou couplage unidirectionnel [1].

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques définitions préliminaires concernant les différents types de synchronisations du chaotiques et les méthodes de synchronisation . Après avoir la présentation un exemple de simulation numérique d'un synchronisation complète des systèmes dynamiques à temps continus pour la méthode de contrôle actif.

4.0.2 **Définitions de la synchronisation :**

Définition IV.1 (*De Larousse*) *Synchronisation est un mot grec décomposé en deux parties : Syn veut dire ensemble et Chrono veut dire temps. C'est l'action de mettre en phase pour créer une simultanéité entre plusieurs opérations. en fonction du temps.*

Définition IV.2 (Générale) La Synchronisation est une manière de faire l'entretien d'un mouvement périodique (ou chaotique). La Synchronisation de deux systèmes dynamiques signifie que chaque système évolue en suivant le comportement de l'autre système.

il existe deux classes de Synchronisation suivant la manière avec laquelle les deux systèmes chaotiques sont couplés, on distingue la Synchronisation unidirectionnelle et la Synchronisation bidirectionnelle.[3]

4.0.2.1 **Synchronisation unidirectionnelle : Le maître** : est un système indépendant.

L'esclave : est un système qui est dépendant du système maître.

Dans ce cas, on n'a qu'un seul système maître qui est l'émetteur et un seul système esclave qui est le récepteur. Donc la Synchronisation est dans un seul sens.

4.0.2.2 **Synchronisation bidirectionnelle** : Dans ce cas chaque système (l'émetteur et le récepteur) peut jouer le rôle d'un maître et d'un esclave en même temps, c'est -à-dire que la Synchronisation est dans les deux sens.

4.0.2.3 **Nécessité de la synchronisation** : La Synchronisation des systèmes chaotiques semble impossible dans un premier temps, notamment à cause de la sensibilité de ces systèmes aux conditions initiales.

De plus, un système chaotique n'est pas asymptotiquement stable, c'est -à-dire que les trajectoires issues des conditions initiales voisines (légèrement différentes) divergent exponentiellement avec le temps.

En mathématique : Après plusieurs tentatives pour définir un mouvement synchronisé, **Brown et Kocarev** ont récemment fourni une définition mathématique de la synchronisation[29]. Pour construire la définition, ils supposent qu'un système dynamique, global, de dimension finie et déterministe est divisible en deux sous-systèmes :

$$\begin{aligned} X' &= F(x(t)) \\ Y' &= G(y(t)) \end{aligned} \tag{4.1}$$

où, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ et $y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont des vecteurs qui peuvent avoir des dimensions différentes.

Définition IV.3 (*Brown et Kocarev*) *Les sous systèmes dans les équation (4.1) sont synchronisés sur la trajectoire de $\varphi(\omega_0)$, par rapport aux propriétés g_x et g_y , s'il existe un instant indépendant de l'application h tel que $\|h(g_x; g_y)\| = 0$.*

Avec le choix de g_x, g_y et h on peut déterminer le type de synchronisation. Cette approche conduit à l'idée qu'il existe des différents types de Synchronisation.

4.1 Types de Synchronisation

Nous rappelons les différents types de synchronisation sur cet mémoire à savoir la synchronisation, anti-Synchronisation, la synchronisation complète Synchronisation décalée, Synchronisation projective, Synchronisation FSHP, Synchronisation généralisée, Synchronisation Q-S.

Par exemple, dans la synchronisation projective, l'état du système maître se synchronise avec un multiple de l'état du système esclave.

4.1.1 Anti-Synchronisation :

Définition IV.4 *Théoriquement, deux systèmes sont Anti-Synchronisés si d'une part, le système maître et le et le système esclave sont dits prêts pour effectuer l'anti-synchronisation entre ces deux systèmes, ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part ,la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [18]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit :*

$$e(t) = Y(t) + X(t) \tag{4.2}$$

Alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) + X(t)\| = 0 \tag{4.3}$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes.[28]

4.1.2 Synchronisation complète : La Synchronisation complète a été réalisé grâce aux effet des forces d'accouplements unidirection nelles des système c'est la forme de la synchronisation la plus simple et la plus typique.

Définition IV.5 *Supposons qu'on a deux systèmes dynamiques liés par un accouplement unidirectionnel représentés par les équations différentielles, le système chaotique maître représenté par :*

$$X'(t) = F(X(t)) \quad (4.4)$$

et le système esclave représenté par la formule suivante :

$$Y'(t) = G(Y(t)) + U \quad (4.5)$$

Tel que :

$X(t)$: est le vecteur d'état du système maître de dimension n .

$Y(t)$: est le vecteur d'état du système esclave de dimension m .

$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: champs de vecteurs F .

$G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$: champs de vecteurs G .

$U = (u_i)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ à déterminer le vecteur de contrôle.

L'erreur de la synchronisation complète est définie par :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (4.6)$$

telque :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0, \forall x(0), \forall y(0) \quad (4.7)$$

- Si $F = G$, on dit une synchronisation complète identique.

- Si $F \neq G$, on dit un synchronisation complète non identique.

4.1.3 Synchronisation décalée :

Définition IV.6 Deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $X(t)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $Y(t)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|Y(t) - X(t - \tau)\| = 0 \text{ où } \left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \|X(t) - Y(t + \tau)\| = 0 \right), \forall x(0) \quad (4.8)$$

tel que τ est un nombre positif très petit.

4.1.4 Synchronisation projective :

Définition IV.7 On dit qu'il y a une Synchronisation projective entre les deux systèmes maître et esclave. Alors si les variables d'état $y_i(t)$ du système chaotique esclave $Y(t) = (y_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(t)$ du système chaotique maître $X(t) = (X_i(t))_{1 \leq i \leq n}$ telle que :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} |y_i(t) - \alpha_i x_i(t)| = 0, \forall (x(0); y(0)); i = 1, 2, \dots, n \quad (4.9)$$

est satisfaite, pour toutes conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$ des deux systèmes, où On appelle α_i facteur d'échelle constant non nulle.[19]

- Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète.
- Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

4.1.5 Synchronisation FSHP :

Définition IV.8 On dit qu'on a une synchronisation FSHP (en anglais full state hybrid projective synchronisation), si chaque variable d'état $y_i(t); 1 \leq i \leq n$; du système chaotique esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables de l'état $x_i(t); 1 \leq i \leq n$; du système chaotique maître, tels que :

$$\exists (\beta)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| y_i(t) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j(t) \right| = 0, \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n \quad (4.10)$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective.

4.1.6 Synchronisation généralisée :

Définition IV.9 La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des système chaotiques de dimensions et de modèles différents. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux système chaotiques couplés.

On considère un couple de système maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} X'(t) = F(X(t)) \\ Y'(t) = G(Y(t)) + U \end{cases} \quad (4.11)$$

d'où $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^m$ sont les état des système maître et esclave, respectivement , $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un contrôleur.

Définition IV.10 S'il existe un contrôleur U et un fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$; vérifient :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|Y(t) - \phi(X(t))\| = 0, \forall x(0), \forall y(0) \quad (4.12)$$

alors, les système maître-esclave (4.11) se synchronisent aus sens généralisé par rapport à la fonction ϕ .

4.1.7 Synchronisation Q-S :

Définition IV.11 La Synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes[15]. Nous disons qu'un système maître, n -dimensionnelle, $X(t)$ et un système esclave, m -dimensionnelle, $Y(t)$ sont en synchronisation Q-S dans la dimension d , s'il existe un controleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation

$$e(t) = Q(X(t)) - S(Y(t)) \quad (4.13)$$

vérifie

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = 0. \quad (4.14)$$

pour toutes condition initiales $X(0)$ et $Y(0)$ des deux systèmes.[36]

4.2 Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation :

- Méthode du contrôleur actif.
- Méthode du Backstepping.
- Méthode du mode glissant.

4.2.1 Méthode du contrôleur actif :

Définition IV.12 *L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques a été proposée par **Bai et Lonngren**[7] , c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des système identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme a été présentée par **M.A.Ahan** [15], **O.I.Olusola et al**, **K.S. Ojo et al**. [22] Soient deux système chaotiques à synchronisent maître et esclave définis par :*

$$X' = F(X(t)) \quad (4.15)$$

$$Y' = G(Y(t)) + U \quad (4.16)$$

où $X(t) \in \mathbb{R}^n, Y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les vecteurs d'états des systèmes maître et esclave respectivement, et $F, G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer.

pour que les deux système se synchronisent nulle faut que l'erreur entre les trajectoires des systèmes, donc le système converge vers zéro lorsque le temps tends vers l'infini, cet erreur est déterminé comme suit :

$$e(t) = Y(t) - X(t) \quad (4.17)$$

Alors

$$e'(t) = Y'(t) - X'(t) \quad (4.18)$$

$$e'(t) = G(Y(t)) - F(X(t)) + U \quad (4.19)$$

Si on peut écrire la quantité $G(Y(t)) - F(X(t))$ de la façon suivante :

$$G(Y(t)) - F(X(t)) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) \quad (4.20)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$e'(t) = Ae(t) + N(X(t), Y(t)) + U \quad (4.21)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante

N : une fonction non linéaire,

U : le contrôle est proposé comme suit :

$$U = V - N(X(t), Y(t)) \quad (4.22)$$

d'où

V : est le contrôleur actif définit par :

$$V = -Le(t) \quad (4.23)$$

d'où

L : est une matrice de contrôle inconnue, on obtient donc la formule finale de l'erreur :

$$e'(t) = (A - L)e(t) \quad (4.24)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître (4.15) et le système esclave (4.16) et transformée en problème de zéro stabilité du système (4.24).

4.2.2 Méthode du Backstepping :

Définition IV.13 La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\begin{cases} x'_1 = f_1(x_1, x_2), \\ x'_2 = f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \vdots \\ x'_n = f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n). \end{cases} \quad (4.25)$$

et

$$\begin{cases} y'_1 = f_1(y_1, y_2), \\ y'_2 = f_2(y_1, y_2, y_3), \\ \vdots \\ y'_n = f_n(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) + u. \end{cases} \quad (4.26)$$

d'où f_1 est une fonction linéaire, $f_i (i = 2, 3, \dots, n)$, sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes (4.25) et (4.26).

L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 - x_1, \\ e_2 &= y_2 - x_2, \\ &\vdots \\ e_n &= y_n - x_n, \end{aligned} \quad (4.27)$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\begin{aligned} e'_1 &= g_1(e_1, e_2), \\ e'_2 &= g_2(e_1, e_2, e_3), \\ &\vdots \\ e'_n &= g_n(e_1, e_2, e_3, \dots, e_n) + u. \end{aligned} \quad (4.28)$$

d'où g_1 est une fonction linéaire, et $g_i, (i = 2, 3, \dots, n)$, sont des fonction non-linéaires.

L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système $e_i, (i = 1, 2, \dots, n)$, vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur (4.26) doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n),$$

et pour chaque sous système on défini une fonction de Lyapunov V positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j) \tag{4.29}$$

d'où j est l'ordre du sous-système, u_j, α_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j , u_j et α_j sont calculés à chaque fois de tel sort que $V_j' < 0$.

Remarque IV.1 Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :

- Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
- Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

4.2.3 Méthode du mode glissant :

Définition IV.14 Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant [32], est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes. Soit les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$x'(t) = Ax(t) + f(x(t)) \tag{4.30}$$

et

$$y'(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u \tag{4.31}$$

d'où $x(t) \in \mathbb{R}^n, y(t) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire et $u \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître (4.30) et le système esclave (4.31) est définie par : $e = y - x$.

La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$e' = Ae + \eta(x, y) + u \quad (4.32)$$

d'où $\eta(x, y) = f(y(t)) - f(x(t))$. Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur (4.32), la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x, y) \quad (4.33)$$

d'où v est un le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant (4.33) dans (4.32), la dynamique de l'erreur est simplifiée comme suit :

$$e' = Ae + Bv \quad (4.34)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système (4.34) par un choix approprié du contrôleur en mode glissant. Dans la méthode du mode glissant, nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j \quad (4.35)$$

d'où C : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire : $s(e) = 0, s'(e) = 0$. Alors, on peut écrire :

$$s'(e) = C(Ae + Bv) = 0 \quad (4.36)$$

donc le contrôleur v est donné par :

$$v = -(CB)^{-1}CAe \quad (4.37)$$

d'où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de $(CB)^{-1}$ est une condition nécessaire. La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par :

$$e' = [I - B(CB)^{-1}]CAe \quad (4.38)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur C doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $[I - B(CB)^{-1}C]A$ soient toutes négatives. Le contrôleur en mode glissant est proposé de la forme :

$$s' = -q\text{sgn}(s) - ks \quad (4.39)$$

d'où $\text{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe, et $q, k > 0$, sont des constantes. Dans ce cas, Le contrôleur v est donné par :

$$v = -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + q\text{sgn}(s)] \quad (4.40)$$

ce qui est équivalent à

$$v = \begin{cases} -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + q\text{sgn}(s)], & \text{si } s(e) > 0 \\ -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + q\text{sgn}(s)], & \text{si } s(e) < 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Théorème IV.1 *Le système maître (4.30) et le système esclave (4.31) sont globalement synchronisés par le contrôleur*

$$u = Bv - \eta(x; y) \quad (4.42)$$

d'où v est défini par (4.40), (A, B) soit contrôlable et $q, k > 0$.

Preuve. Pour observer la zero-stabilité de la dynamique de l'erreur de synchronisation, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{s^2}{2}$$

d'où

$$V' = -ks - q\text{sgn}(s)s$$

puisque $sgn(s)$ est toujours positive tant que $e \neq 0$ et $k, q > 0$, alors $V' < 0$. Ainsi, par la théorie de la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que la dynamique d'erreur (4.31) est globalement asymptotiquement zéro-stable. Par conséquent, il en résulte que le système maître (4.30) et le système esclave (4.31) sont globalement synchronisés ■

4.3 Exemple de synchronisation complète des systèmes dynamiques à temps continu

Pour la méthode de contrôle actif. On assume qu'on a deux systèmes de **Lorenz** .

Alors on a le système maître est :

$$\begin{cases} x_1' = a(y_1 - x_1) \\ y_1' = x_1(r - z_1) - y_1 \\ z_1' = x_1y_1 - bz_1 \end{cases} \quad (4.43)$$

et le système esclave est :

$$\begin{cases} x_2' = a(y_2 - x_2) + u_1 \\ y_2' = x_2(r - z_2) - y_2 + u_2 \\ z_2' = x_2y_2 - bz_2 + u_3 \end{cases} \quad (4.44)$$

Pour la définition de la synchronisation complète, l'erreur sont :

$$\begin{cases} e_1 = x_2 - x_1 \\ e_2 = y_2 - y_1 \\ e_3 = z_2 - z_1 \end{cases} \implies \begin{cases} e_1' = x_2' - x_1' \\ e_2' = y_2' - y_1' \\ e_3' = z_2' - z_1' \end{cases} \quad (4.45)$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} e_1' = a(e_2 - e_1) + u_1 \\ e_2' = re_1 - e_2 - x_2z_2 + x_1z_1 + u_2 \\ e_3' = -be_3 + x_2y_2 + x_1y_1 + u_3 \end{cases}$$

D'après (4.21) on a :

$$\begin{pmatrix} e'_1(t) \\ e'_2(t) \\ e'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -x_2z_2 + x_1z_1 \\ x_2y_2 - x_1y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

D'où (4.22)

$$U = V - N(X(t) - Y(t))$$

Alors le contrôleur U :

$$\begin{cases} u_1 = v_1 \\ u_2 = v_2 + x_2z_2 - x_1z_1 \\ u_3 = v_3 - x_2y_2 + x_1y_1 \end{cases} \quad (4.47)$$

Remplaçons (4.22) dans (4.45), nous trouvons :

$$\begin{cases} e'_1 = a(e_2 - e_1) + v_1 \\ e'_2 = re_1 - e_2 + v_2 \\ e'_3 = -be_3 + v_3 \end{cases} \quad (4.48)$$

D'après (4.23) nous le choisissons comme suit :

$$\begin{cases} v_1 = -ae_2 \\ v_2 = -re_1 \\ v_3 = 0 \end{cases} \quad (4.49)$$

D'où la matrice de contrôle inconnue

$$L(t) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

Donc la formule finale d'erreur :

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} e_1'(t) \\ e_2'(t) \\ e_3'(t) \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix} \quad (4.51) \\
&= \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1(t) \\ e_2(t) \\ e_3(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alour le polynôme caractéristique sont :

$$-\lambda^3 - \lambda^2(\delta + 1 + b) - \lambda(\delta + \delta b + b) - \delta b \quad (4.52)$$

Les valeurs propres de (4.52) sont :

$$\begin{cases} \lambda_1 = -a < 0 \\ \lambda_2 = -1 < 0 \\ \lambda_3 = -b < 0 \end{cases}$$

Alors le systèmes est asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, ce qui assure que pour tout $t \rightarrow \infty \implies e_i \rightarrow 0, (i = 1, 2, 3)$.

Donc la synchronisation détective .

4.4 Conclusion générale

La notion du chaos est très utile dans plusieurs domaines. En effet, en physique, en météorologie évidemment, mais aussi en biologie et chimie.[9] [14], et en sciences sociales[7]. Dans la cryptographie, la découverte des signaux chaotiques pouvons alourdir la poursuite, et aussi endommager un tel message en face des pirates, fait une grande révolution dans le monde de la communication, ces signaux de nature très imprévisibles et qui ne semblaient pas être faciles à contrôler, ils sont déterministes mais fortement sensibles aux conditions initiales et présentent une allure pseudo-aléatoire, ce qui fait du chaos un phénomène très intéressant pour cacher des signaux d'informations afin de transmettre ceux-ci d'une manière sécurisée.

L'objectif principal de ce mémoire était de présenter de façon approfondie les systèmes dynamiques continus, on donnant une synthèse sur les notions de base pour l'étude d'un tel système, comme les points d'équilibres, leurs stabilités, puis les différents types de bifurcation, qui nous amène à la détection du comportement chaotique via plusieurs caractéristiques dont la sensibilités aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov, et les attracteurs étranges.

Ensuite, nous nous attachons au comportement chaotique dans les systèmes les plus célèbres dans la littérature qui comportent des perturbations imprévisibles pour un ensemble de paramètres, et qui ont une grande utilité et citation dans plusieurs disciplines, comme l'application logistique, le model de Lorenz, et Le système de Rossler. Les différents types de synchronisation et les diverses méthodes de synchronisation les plus performantes ont lieu dans ce manuscrit, et nous avons analysé le problème de la synchronisation pour des systèmes dynamiques chaotiques en temps continu

Une méthode de contrôle a été proposée et des simulations numériques ont été faites pour montrer l'efficacité du schéma proposé, où nous couplons deux phénomènes, qui sont représentés par deux systèmes dynamiques de Lorenz, nous montrons que les erreurs tendent vers zéro avec un travail de simulation.

BIBLIOGRAPHIE

1. **Boccaletti, S., Kurths, J., Valladares, D.L., Osipov, G., Zhou, C.** "The synchronization of chaotic systems". *Physics Reports* 366, 1–101 (2002).
2. **Bouchenine H, Guermache H,** "Etude de la dynamique et chaotique du système le Lorenz". Mémoire de Mathématique centre universitaire Abd Elhafid Boussouf-Mila.2020/2021.
3. **Charkhache C, Chaïbi S** , "Le chaos dans les systèmes dynamiques".Mémoire de Magistère en Mathématique université Larbi Tébessi-Tébessa. 20/06/2019.
4. **Charru, F. (2012)**. Instabilités hydrodynamiques. EDP Sciences.
5. **Dang-Vu, H.,& Delcarte, C. (2000)**. Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica. Ellipses Ed. Marketing.
6. **Devaney, Robert L** and others, "An introduction to chaotic dynamical systems", New York, Addison-Wesley Reading, vol. 13046, 1989.
7. **E. Bai, K. E. Lonngren.** "Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control", *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 11(7), pp. 1041-1044, 2008.
8. **Eric Gonclavès de Silva,** "Introduction aux systèmes dynamiques et Chaos, Institut Polytechnique de Grenoble". Avril 2004.
9. **Grassi, G. (2012)**. "Generalized synchronization between different chaotic maps via deadbeat control" *Chinese Phys. B* , Vol. 21 (5), pp. 050505-5.
10. **Guckenheimer, J., Holmes, P.** *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New York, 1986.
11. **Guihème assael, Lucas Blaaizot.** "La théorie du chaos". Lycée du sacré-couer et Lycée etoi.2013/2014.
12. **Hale, J.K., Kocak, H.** *Dynamics and Bifurcations*. Applied Mathematics, Publisher Springer-Verlag New York, 1991.
13. **Ibtissem Talbi,** *Systèmes dynamiques non-linéaires et phénomènes de chaos*, Thèse de Magistère, Université Mentouri de Constantine. 29/06/2010.

14. **Kaouache, S. and Abdelouahab, M.S.** Modified projective synchronization between integer order and fractional order hyperchaotic systems *Jour. of Adv. Research in Dynamical and Control Systems* 10(5)(2018) 96-104.
15. **Khan, M.A. (2012).** "Synchronization of different 3D chaotic systems by generalized active control" *J. Infor. Comp. Sci.*, Vol. 7 (4), pp. 272-283.
16. **L. O. Chua**, "Chua's circuit : an overview ten years later.", *Journal of Circuits Systems & Computers*, vol.4,
17. **Li, G.H.** (2009), "Inverse lag synchronization in chaotic systems" *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 40, pp. 1076–1080.
18. **Manfeng Hu., Xu, Z.A.** (2008). "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems." *Nonlinear Analysis*, Vol. 69 (4), pp. 1091-1099.
19. **Manieri, R. Rehacek, J.** Projective synchronization in three-dimensional chaotic systems. *Phys. Rev. Lett.* 82 (15)(1999) 3042-3045.
20. **Marle, C. M. (2003).** "Systèmes dynamique : une introduction . Ellipse".
21. **Mindlin.GB, Solari.HG, Natiello.MA, Gilmore.R, Tuflaro.NB**, Classification of strange attractors by integers, *Physical Review Letters*.
22. **Olusola, O.I., Vincent, U.E., Njah, A.N., Idowu, B.A.** (2013). "Global stability and synchronization criteria of linearly coupled gyroscope." *Nonlinear Dyn. Syst. Theory*, Vol. 13(3), pp.258–269.
23. **Olivier BONNEFOY.** "Systèmes dynamiques et instabilités hydrodynamiques". Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint-Etienne, le 8/04/2021.
24. **Osipov, G.V., Pikovsky, A.S., Rosenblum, M. G., Kurths, J.** (1996), "Phase synchronization effects in a lattice of nonidentical Rössler oscillators." *Phys. Rev. E*, Vol. 55 (3), pp. 2353-2361.
25. **Poincaré, H. (1881).** Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I). *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 7,375-422.
26. **Poincaré, H. (1899).** les méthodes nouvelles de la mécanique céleste (Vol. 3). Gauthier-villars.
27. **Pyragas, K.** (1998). "Properties of generalized synchronization of chaos." *Nonlinear Anal.Model. Control*, pp. 101–29.
28. **Pecora, L.M., Carroll, T.L.** (1990). "Synchronization in chaotic systems." *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 64(8), pp. 821-824.
29. **R.Brown, L.Kocarev.** "A unifying definition of synchronization for dynamical systems." *Chaos*, vol. 10(2), pp. 344-349, June, 2000.
30. **Ruelle, D., Takens, F.** (1971), "On the nature of turbulence," *Commun. Math. Phys.*, Vol. 20, pp. 167-192.
31. **V.S. Afraimovich, N.N.Verichev, M.N. Rabinovich.** "Stochastic synchronization of oscillations in dissipative systems." *Radiophys. and Quantum Electronics*,1986 : 747757.
32. **Wang X-Y, Zhu, L-B.** (2011). "Adaptive full state hybrid projective synchronization of unified chaotic systems with unknown parameters." *Int. J. Mod. Phys. B.*, Vol. 25, pp. 4661–4666.

33. **Wang, X.Y., Song, J.M.** : Synchronization of the fractional order hyperchaos Lorenz systems with activation feedback control. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* 14(8) (2009) 3351-3357.
34. **X.X. Wu, Z. Chen**, Introduction of Chaos Theory, Shanghai Science and Technology, Bibliographic Publishing House, 1996.
35. **Yamada T., Fujisaka H.** Stability Theory of Synchronized Motion in Coupled-Oscillator Systems. *Prog. Theor. Phys.* (1983) 31 (12) : 32-47. doi : 10.1143/PTP.47.32.
36. **Yan, Z.** Chaos Q-S synchronization between Rössler system and the new unified chaotic system. *Phys. Lett. A* 334(5)(2005) 406-412.
37. **Zhang Q, Lu, J. (2008)**. "Full state hybrid lag projective synchronization in chaotic (hyperchaotic) systems" *Phys. Lett. A*, Vol. 372 (9), app. 1416-142.
38. **Zhen, W, Xia, H. and Hao , S.** Control of an uncertain fractional order economic system via adaptive sliding mode. *Neuro computing* 83 (2012) 83-88.