الجمهورية الشعبية الديمقراطية الجزائرية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة العربي التبسي – تبسة

Democratic People's Republic of Algeria
Ministry of Higher Education and Scientific Research
University of Larbi Tebessi – Tebessa

كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة
قسم الرياضيات

مطبوعة جامعية بعنوان:

دراسة المؤثرات الخطية ونظرية الاطياف

Étude des opérateurs linéaires et théorie spectrale

من اعداد **د. هادية مسعودان**

موجهة لطلبة السنة الاولى دكتوراه وطلبة الماستر- رياضيات

2017/2018

Contents

Polycopie de la theorie des opérateurs et théorie spectrale

Dr. Hadia Messaoudene

Current address: Département des sciences commerciales, Faculté des sciences économiques, commerciales et sciences de la gestion, Université Larbi Tbessi-Tebessa.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 47B47 Secondary 05A15, 15A18

Introduction

Ce travail présente une synthése des théories des opérateurs et spectrales, qui sont des domaines des mathématiques qui se sont développés dans la premiére moitié du 20 ^{eme} siécle grâce en particulier aux travaux de S. Banach, D. Hilbert et M.Fréchet.

Ces travaux ont permis de faire de grands progrés dans la résolution de plusieurs problémes et fournissent les principaux outils encore utilisés actuellement dans ces domaines.

D'un point de vue purement mathématique ont peut aussi voir la théorie des opérateurs comme une extension à la dimension infinie de la géométrie Euclidienne en dimension finie.

Ce domaine d'apparence abstraite a beaucoup d'applications concrétes, notamment en physique quantique; c'est d'ailleurs en partie pour donner un cadre mathématique adapté à la théorie quantique que D. Hilbert et J. von Neumann ont développé la théorie des opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert.

Pour terminer cette introduction je voudrais insister sur le point suivant:

La théorie des opérateurs étudie des concepts généraux, parfois loin de l'intuition géométrique, mais dont l'efficacité à été prouvée depuis presque un siécle.

Pour se familiariser en profondeur avec ses concepts et méthodes il faut constamment faire des aller-retour entre les concepts, les résultats généraux, d'une part, et les exemples qui les ont motivés d'autre part.

Ce travail est destiné aux étudiants de Master et de première année doctoract mathématiques.

Cet ouvrage est structuré de quatre chapitres:

Le premier chapitre est consacré à des sujets qui sont supposés être connus par le lecteur. Nous donnons un court résumé des théorèmes et définitions que nous allons utiliser dans les autres chapitres. Dans la premiere partie, nous parlons des espaces vectoriels, normés, Hilbert et Banach.

Dans la deuxième partie, nous donnons quelques inigalités et leurs démonstrations qui serons nécessaires aux chapitres suivants. Nous avons pourtant préféré ne pas aller trop loin dans la généralisation.

Le deuxième chapitre est un cours sur les opérateurs linéaires sur un espace de Hilbert, qui reprend les outils exposés dans la théorie des opérateurs.

Le troixième chapitre tourne essentiellement autour de l'études de differentes classes d'opérateurs normaux définis sur un espace de Hilbert et donné leurs propriétés.

Le quatriéme chapitre est consacré à la théorie spectrale où on introduit trois notions centrales: la notion du spectre, la notion de la resolvante et enfin les notions du spectre continu et residuel et leurs propriétés et applications sur les differents types d'opérateurs.

Chaque chapitre se termine avec une serie d'exercices présentant une difficulté graduée afin de vérifier si l'étudiant a bien compris et assimilé le contenu du texte et l'encourager et le faire progresser jusqu'à arriver à des résultats élaborés.

CHAPTER 1

Espaces vectoriels normés

A fin de simplifier la lecture de ce travail, le premiér chapitre de ce mémoire est consacré à donner quelques rappels, définitions et résultats d'analyse fonctionnelle. Ces rappels concernent: espaces vectoriels, normés et espaces de Hilbert et Banach. Comme on va donner quelques inigalités et leurs démonstrations qui serons nécessaires aux chapitres suivants. Nous avons préféré ne pas aller trop loin dans les généralisations.

Tous les espaces considérés seront sur le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

$\overline{\lambda}$ désigne le nombre complexe conjugué de $\lambda \in \mathbb{C}$, K désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Espaces vectoriels

Definition 1. *On appelle **espace vectoriel topologique** tout espace vectriel E muni d'une topologie rendant continues les applications:*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \times E & \rightarrow & E \\ (\lambda,y) & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

On notera également qu'une application linéaire entre espace vectoriel topologique est continue si et seulement si elle l'est en 0.

Enfin, on rappelle qu'un espace topologique est séparé, si pour tout couple de points distincts posséde des voisinages disjoints.

Exercise 1. *Montrer qu'un espace vectoriel topologique séparé localement compact (i.e. tel que chaque point admet un voisinage compact) est nécessairement de dimension finie.*

Definition 2. *Soit E un ensemble quelconque non vide. La fonction **distance** d est définie de:*

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & \mathbb{R}^{+} \\ (x,y) & \mapsto & d\left(x,y\right); \end{array}$$

telle que:
(i) $d(x,y) \geq 0$; $\forall\ x,y \in E$, $d(x,y) = 0$, implique $x = y$.(Séparation)
(ii) $d(x,y) = d(y,x); \forall\ x,y \in E$.(Symétrie)
(iii) $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z), \forall\ x,y,z \in E$.
(Inégalité triangulaire)

Un ensemble muni d'une distance devient un espace métrique, désigné par (E, d).

EXAMPLE 1. *Distances classiques*

(1) $E = \mathbb{R}; \forall x, y \in \mathbb{R} : d(x, y) = |x - y|$.
(2) $E = \mathbb{R}^n; \forall x, y \in \mathbb{R}^n$,on définit les distances:
$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} |x_i - y_i|$

$$d_2(x, y) = (\sum_{i=1}^{i=n} (x_i - y_i)^2)^{\frac{1}{2}},\text{(distance euclidienne)}$$

$d_3(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)$

(3) $E = C[a, b]$ ensemble des fonctions continues définies sur $[a, b], \forall f, g \in C[a, b]$: $d(f, g) = |f(x) - g(x)|$ est une distance sur E.

DEFINITION 3. *Deux distances d et d' définies sur un ensemble E sont équivalentes s'il existe deux réels α, β strictement positifs tels que:*

$$\alpha d(x, y) \leq d^{'}(x, y) \leq \beta d(x, y); \forall x, y \in E.$$

1.0.1. *Espaces normés.*

DEFINITION 4. *Soit E un ensemble non vide, on appelle* ***semi-norme*** *sur E, toute application φ définie de E dans $\mathbb{R}$ satisfaisant aux trois conditions suivantes:*

$[c_1]$ $\forall x \in E : \varphi(x) \geq 0$,
$[c_2]$ $\forall \lambda \in \mathbb{k}, \forall x \in E; \varphi(\lambda x) = |\lambda| \varphi(x)$,
$[c_3]$ $\forall x, y \in E : \varphi(x + y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.
pour tout x de E on note:

$$\varphi(x) = \|x\|.$$

Le couple $(E, \|.\|)$ s'appelle un espace semi-normé.

EXAMPLE 2. *1- La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des semi-normes.*

2- l'application φ définie par:

$$\begin{array}{rcl} \varphi & : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(x, y) = |x - y| \end{array}$$

est une semi-norme.

PROPOSITION 1. *Si $(E, \|.\|)$ est un espace semi-normé sur $\mathbb{k}$, alors:*

1- $\|0\| = 0$,
2- $\forall\ x, y \in E : \|x - y\| = \|y - x\|$,
3- $\forall\ x, y \in E : |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

PROOF. 1- Soit λ un élément de $\mathbb{k}$; tel que $|\lambda| \neq 1$.On a: $\lambda.0 = 0$. En vertu de la condition $[c_2]$,
on obtient:

$$\|0\| = \|\lambda.0\| = |\lambda| \|0\|.$$

D'où:

$$\|0\| (1 - |\lambda|) = 0.$$

Comme $|\lambda| \neq 1$, il en resulte que:

$$\|0\| = 0.$$

2- Pour tout x et y de E, on a:

$$\|x - y\| = \|-(y - x)\| = \|-1\| \|(y - x)\| = \|(y - x)\|.$$

3- On a:

$$y = y - x + x \Rightarrow \|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|.$$

D'où:

$$(*) \qquad \|y\| - \|x\| \leq \|x - y\|.$$

De même, on a:

$$x = x - y + y \Rightarrow \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|.$$

D'où:

$$(**) \qquad \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Les inégalités (*) et (**) prises simultanément donnent l'égalité cherchée. □

DEFINITION 5. *On appelle* ***norme*** *sur un espace vectoriel E, toute application N de E dans $\mathbb{R}$,vérifiant, en sus des trois conditions précitées de la définition précédente, la quatrième condition suivante:*

$$[c_4] \quad N(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Le couple (E, N) s'appelle espace normé. Comme précédemment, la norme N est désignée par $\|.\|$.

EXAMPLE 3. *1- La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ et le module dans $\mathbb{C}$ sont des normes.*

2- L'application citée dans l'exemple (1.2) ci-dessus n'est pas norme. Elle ne vérifié pas la condition $[c_4]$.

En effet, on a: $\|(1,1)\| = |1 - 1| = 0$ et $(1,1) \neq (0,0)$.

3- **Exemples des Normes sur $\mathbb{R}^n$**

a) $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$.

b) $\|x\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

c) $\|x\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

d) $\|x\|_p = \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \qquad 1 \leq p < +\infty$

DEFINITION 6. *Soit V un espace vectoriel (reél ou complexe); si pour tout $x \in V$; un nombre non négatif $\|x\|$ est affecté de telle manière que pour tous $x, y \in V$:*

(i) $\|x\| \geq 0; \forall x \in V$, et $\|x\| = 0$ implique $x = 0$.
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|, \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$.
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

La quantité $\|x\|$ est appelée **la norme** de x et V est connu comme un espace vectoriel normé.

Donc tous les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques.

DEFINITION 7. ***Un produit scalaire*** *sur un espace vectoriel E est une application $\langle .,. \rangle$ tel que:*

$$\begin{array}{ccc} \langle .,. \rangle & : & E \times E \to \mathbb{k} \\ (x,y) & \to & \langle x,y \rangle \end{array}$$

vérifiant:
1- Pour tout $u \in E$, l'application $u \mapsto \langle u,v \rangle$ est linéaire.
2- Pour tous $u, v \in E$, $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$.
3- Pour tout $u \in E - \{0\}$, $\langle u,u \rangle \geq 0$.
On note alors: $\|u\| = \sqrt{\langle u,u \rangle} \geq 0$.Et on vérifie que c'est une norme sur E.

REMARK 1. *Notons que dans le cas complexe, on a: pour $x, y \in H$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, on a:*

$\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha}\ \langle u,v \rangle$

EXAMPLE 4. *1-Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$,le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ est défini par:*

$\langle x,y \rangle = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$, *tels que*

$$x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n)$$

Le produit scalaire usuel de $\mathbb{C}^n$ est défini par:

$$\langle x,y \rangle = x_1 \overline{y_1} + ... + x_n \overline{y_n},$$

tels que

$$x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n.$$

- On peut définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{k}^n$ en se donnant des poids, c'est-à-dire des nombres $a_1, ..., a_n > 0$, et en posant

$$\begin{cases} \langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^n a_k x_k y_k & \text{si } \mathbb{k} = \mathbb{R} \\ \langle x,y \rangle = \sum_{k=1}^n a_k x_k \overline{y_k} & \text{si } \mathbb{k} = \mathbb{C} \end{cases}$$

2. Quelques inégalités

PROPOSITION 2. *(Inégalité de Cauchy-Schwartz)*

Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes muni d'un produit scalaire, pour $x, y \in E$; alors: $|\langle x,y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$.

De plus, les deux membres sont égaux si et seulement si x et y sont linéairement dépendants.

PROOF. a- Posons, pour tout réel t,

$$P(t) = \|x+ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\langle x,y\rangle + t^2\|y\|^2$$

Comme y est non nul et le produit scalaire défini, $\|y\|^2$est non nul également.

Par construction, cette expression polynomiale du second degré est positive ou nulle pour tout réel t. On en déduit que son discriminant est négatif ou nul : i.e

$$\langle x,y\rangle^2 - \|y\|^2\|x\|^2 \leq 0;$$

d'où l'inégalité annoncée.

b- Cas d'égalité:

Si (x,y) est lié alors $x = \lambda y$ pour un certain scalaire λ et l'on en déduit immédiatement :

$$|\langle x,y\rangle| = |\lambda| \,.\, \|y\|^2 = \|x\| \,.\, \|y\| \,.$$

Réciproquement, si

$$|\langle x,y\rangle| = \|x\| \,.\, \|y\| \,;$$

alors le discriminant ci-dessus est nul donc P admet une racine réelle (double) t, et pour ce t on a:

$$\|x+ty\|^2 = P(t) = 0,$$

donc $x = -ty$, si bien que (x,y) est lié. Ou plus directement (avec le t_0 de la variante ci-dessus): l'hypothèse équivaut à $P(t_0) = 0$, donc à $x = -t_0y$. $\square$

PROPOSITION 3. *(Identité du Parallélogramme):Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes. Pour tous $(x,y) \in E^2$, on a l'identité :*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

PROOF. Soient $x,y \in E$. On sait que:
$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x,y\rangle$
et $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle$, $\square$

PROPOSITION 4. *(Identité de polarisation):Soit E un espace vectoriel sur le corps des nombres complexes. Pour tous (x; y) $\in E^2$, on a l'identité :*

Pour tout $x,y \in E$, on a l'identité:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right)$$

PROOF. On a: $\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$
$-\|x-y\|^2 = -\langle x-y, x-y\rangle = -\|x\|^2 - \|y\|^2 + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle$
$i\|x+iy\|^2 = i\langle x+iy, x+iy\rangle = i\|x\|^2 + i\|y\|^2 + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle$
$-i\|x-iy\|^2 = -i\langle x-iy, x-iy\rangle = -i\|x\|^2 - i\|y\|^2 + \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle$
Par l'addition, On obtient l'égalité de polarisation. $\square$

REMARK 2. *Si $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ l'égalité précédente devient*

$$\forall x,y \in H; \;\; \langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$

THEOREM 1. *Soit E un espace vectoriel normé. Si la boule unité fermée de E est compacte; alors E est de dimension finie.*

PROOF. Désignons par B la boule unité de E et par $B(a,r)$ la boule de centre a et de rayon r. De la compacité de la boule unité il résulte, qu'il existe a_1,..., $a_n \in B$, tels que:

$$B \subset \underset{1\leq j\leq n}{\cup} B\left(a_j, \frac{1}{2}\right)$$

.

Soit V le sous-espace vectoriel engendré par $\{a_1, \cdots, a_n\}$, montrons que $V = E$; raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe $b \in E$ et $b \notin V$ et puisque V est fermé; donc

$$dist(b, V) = \alpha \geq 0.$$

Il existe donc $c \in V$ tel que:

$$\alpha \leq \|b - c\| \leq \frac{3\alpha}{2}$$

.

Posons $u = \frac{b-c}{\|b-c\|}$. Il existe $i : 1 \leq i \leq n$; tel que: $\|u - a_i\| \leq \frac{1}{2}$.

D'autre part on a $b = c + \|b - c\| u = c + \|b - c\| a_i + \|b - c\| (u - a_i)$;

où

$$c + \|b - c\| a_i \in V$$

et

$$\|b - c\| (u - a_i) \leq \frac{3\alpha}{4}.$$

Ce qui implique:

$$dist(b, V) \leq \frac{3\alpha}{4},$$

ce qui contredit la définition. □

3. Espaces de Hilbert et de Banach

DEFINITION 8. *On dit qu'un espace normé X est* ***complet*** *si toute suite de Cauchy a une limite dans X.*

DEFINITION 9. ***Un espace de Hilbert*** *est la donnée d'un espace vectoriel H complexe et d'une forme sesquilinéaire, i.e. linéaire en la première variable:*

$$\left\langle \lambda x + \lambda' x', y\right\rangle = \lambda \left\langle x, y\right\rangle + \lambda' \left\langle x', y\right\rangle; \ \forall x, y \in E; \ \lambda, \lambda' \in \mathbb{C}.$$

Et anti-linéaire en la seconde:

$$\left\langle x, \beta y + \beta' y'\right\rangle = \overline{\beta} \left\langle x, y\right\rangle + \overline{\beta'} \left\langle x, y'\right\rangle; \ \forall x, y \in E; \ \beta, \beta' \in \mathbb{C}.$$

Cette forme sesquilinéaire est de plus hermitienne: $\langle x, \ y\rangle = \overline{\langle x, \ y\rangle}$ et strictement positive:

$x \neq \ 0 \Rightarrow \langle x, \ y\rangle > \ 0$.

REMARK 3. *L'**espace de Hilbert** sur K est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est de plus complet pour la norme $\|.\|$. Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés séparables, c'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense.*

EXAMPLE 5. *1- L 'espace $\Bbbk^n$, muni du produit scalaire défini par: $\langle x, \ y\rangle = \sum\limits_{1\leq i\leq n} x_i \overline{y_i}$ est un espace de Hilbert.*

2- *L 'espace* $l_2(\mathbb{N}) = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} : \sum\limits_{1\leq i\leq n} |u_n|^2 converge \right\}$, *muni du produit scalaire* $\langle u,\ v\rangle = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n \overline{v_n}$ *est un espace de Hilbert.*

3- Les espaces de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres complexes jouent un rôle essentiel.

Le cas des espaces $l_p(1 \leq p \prec \infty)$; en pratique, on ne rencontre guère que les cas $p = 1; 2; \infty$.

Pour $1 \leq p \prec \infty$, on définit $\|(a_n)\|_p = \left[\sum\limits_{p=1}^{n} |a_n|^p\right]^{\frac{1}{p}}$

et $l_p = \left\{x_i : \|x\|_p \prec \infty\right\}$. Appliquons l'inégalité de Minkowsky:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{p=1}^{n} |a_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{p=1}^{n} |b_i|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

et passons à la limite pour $n \to \infty$ et montrons que $\|x\|_p$ est bien une norme, et que les l_p sont en fait des espaces de Banach.

Pour $1 \leq p; q \leq \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, on s'assure que le dual de l_p est bien l_q; en particulier le dual de l_2 est bien l_2, en accord avec le fait que l_2 est un espace de Hilbert.

Definition 10. *Si $g, h \in H$, on dit que g et h sont* ***orthogonaux****, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h\rangle = 0$.*

Si M est une partie de H, l'**orthogonal** de M défini par:

$$M^\perp = \{h \in H\ :\ \forall g \in M,\ h \perp g\}$$

Lemma 1. *Soit E une partie non vide d'un espace préhilbertien H, on a:*

(1) *$E^\perp$ est un sous-espace fermé de H.*
(2) *$E \subset F \Rightarrow F^\perp \subset E^\perp$.*
(3) *E a même orthogonal que le sous-espace fermé engendré par E.*

La remarque suivante est souvent utile:

Remark 4. *un sous-espace $M \subset H$ est dense si et seulement si $M^\perp = \{0\}$. De plus, si M est un sous-espace fermé, alors H se décompose en somme directe $H = M \oplus M^\perp$.*

On peut énoncer le **théorème de Pythagore**: si $f_1, ..., f_n \in H$ sont deux à deux orthogonaux, alors:

$$\|f_1 + ... + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + ... + \|f_n\|^2 .$$

Lemma 2. *Soit F un sous-espace d'un espace de Hilbert H. Alors, on a:*

(1) $\left(F^\perp\right)^\perp$ coïncide avec l'adhérence $\overline{F}$ de F dans H.
(2) F est dense dans H si et seulement si; $F^\perp = \{0\}$.

Critère de fermeture : Soit H un espace de Hilbert. Un sous ensemble $F \subset H$ est fermé si et seulement s'il existe une application linéaire $f : H \to \Bbbk$ continue telle que $F = \mathrm{Ker}(f)$.

Theorem 2. *Soit E une partie non-vide convexe fermée d'un espace de Hilbert H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe $y \in E$ unique tel que:*

$$\|x-y\| = \inf\{\|x-a\| : a \in E\}$$

On note y $= \mathrm{P}_E(x)$ la projection de x sur E.

Ce théorème s'applique en particulier au cas où E est un sous-espace fermé de H.

THEOREM 3. *(Théorème de la projection) Soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H. Alors, il existe une application linéaire continue $P_F : H \to F$ telle que:*

$$x = P_F(x) + (x - P_F(x))$$

et

$$\|x - P_F(x)\| = d(x, F) = \underset{y \in F}{inf} \|x - y\|.$$

De plus, pour tout $x \in H$: $x - P_F(x) \in \mathrm{F}^{\perp}$.

On appelle PF (x) la projection orthogonale de x sur F.

DEFINITION 11. *On appelle* ***espace de Banach*** *sur K tout espace vectoriel normé $\{E, \|.\|\}$ complet pour la métrique associée à la norme.*

EXAMPLE 6. *(i) Pour n un entier tel que $n \geq 1$, alors $\Bbbk^n$ est un espace de Banach ($\Bbbk = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).*

(ii) On désigne par $C_{\Bbbk}(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur $\Bbbk$ à valeurs dans K. $C_{\Bbbk}(K)$ est un espace de Banach pour la norme $\|.\|_\infty$.

Solution

(i) Il suffit de prouver que $\Bbbk$ est complet. On sait que tout produit fini d'espaces métriques complet est complet et que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont complets d'où $\Bbbk^n$ est complet, donc un espace de Banach.

(ii) Soit f_n une suite de Cauchy. Pour chaque $x \in K$ montrons successivement que $f_n(x)$ converge vers $f(x)$, tel que f est continue sur K puis que f_n converge vers f pour la norme $\|.\|_\infty$.

On a d'abord

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \tag{1.*}$$

pour tout n, m. On en déduit que $f_n(x)$ est une suite de Cauchy. $\Bbbk$ étant complet, on pose

$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Il résulte de (1.*) que f_n converge uniforément vers f sur K, f est donc continue sur K.

Soient $\varepsilon > 0$ et N_ε tel que $\forall n, m \geq N_\varepsilon$ on ait $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Il résulte alors de (1.*) que l'on a: $\|f_n - f_m\| \leq \varepsilon \;\; \forall n \geq N\varepsilon$.

EXAMPLE 7. *Soit $L^1(\mathbb{R})$ l'epace des fonctions integrables sur $\mathbb{R}$; muni d'un produit défini comme suit:*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)dt, \qquad f, g \in L^1(\mathbb{R})$$

est un espace de Banach.

DEFINITION 12. *Soient $x, y \in H$, on dit que x et y sont orthogonaux, et on écrit $x \perp y$ si $\langle x, y\rangle = 0$. Pour M une partie de H, l'orthogonal de M est défini par: $M^{\perp} = \{x \in H : \forall y \in M, \langle x, y\rangle = 0\}$*

un sous-espace $M \subset H$ est dense si et seulement si $M^{\perp} = \{0\}$. De plus, si M est un sous-espace fermé, alors H se décompose en somme directe $H = M \oplus M^{\perp}$.

THEOREM 4. *si P_M est une projection dans un sous-espace fermé M d'un espace de Hilbert H, alors P_M est un opérateur tel que $P_M^* = P_M$ et $P_M^2 = P_M$. Si P est un opérateur tel que $P^* = P$ et $P^2 = P$, alors; $M = R(P)$ est un sous-espace fermé et $P = P_M$, i.e., P est un projection dans M.*

PROOF. ($\Rightarrow$):On suppose que P_M est une projection dans H et de note $R(P_M)$ le rang de P_M par M.

Soit

$$x_1 = y_1 \oplus z_1 et\ x_2 = y_2 \oplus z_2,$$

telle que

$$y_1, y_2 \in M \ et\ z_1, z_2 \in M^{\perp}.$$

Alors

$$x_{1+}x_2 = (y_1 + y_2) \oplus (z_1 + z_2)$$

avec

$$y_1 + y_2 \in M \ et\ z_1 + z_2 \in M^{\perp},$$

alors

$$P_M (x_1 + x_2) = (y_1 + y_2) = P_M x_1 + P_M x_2,$$

et il est evident que $P_M(\alpha x) = \alpha P_M x$, alors P_M est linéaire. La preuve de bornétude de P_M se vérifie d'aprés:

$$\|P_M x_1\|^2 = \|y_1\|^2 \leq \|y_1\|^2 + \|z_1\|^2 = \|x_1\|^2$$

P_M est un opérateur de H. De plus

$$(P_M x_1, x_2) = (y_1, y_2 + z_2) = (y_1, y_2) = (y_1 + z_1, y_2) = (x_1 + P_M x_2),$$

Alors $P_M = P_M^*$. Pour tout $x \in H$ et $P_M x \in M$, on a

$$P_M^2 x = P_M (P_M x) = P_M x,$$

alors $P_M^2 = P_M$.

($\Leftarrow$):On suppose que $P = P^* = P^2$ et de note $\underline{R(P_M)}$ par M. Nous observons que M est un sous-espace fermé de H. Pour tout $x \in \overline{M}$, il existe une sequence $\{x_n\} \subset H$ telle que

$$Px_n \to x, et\ Px_n = P^2 x_n \to Px$$

par la continuité de P et $P^2 = P$. A partir de $x = Px \in M$, alors $\overline{M} = M$. Depuis $P = P^* = P^2$,

$$(x - Px, Px) = (x, Px) - (x, P^* Px) = 0.$$

Il suit que

$$x = Px \oplus (I - P)x, Px \in M$$

et $x - Px \in M^{\perp}$, donc P est la projection dans M. □

REMARK 5. *Si $M \subset H$ est un sous-espace fermé, on peut définir la* ***projection orthogonale*** *sur M, notée P_M, de la manière suivante : pour $h \in H$, $P_M h$ est l'unique élément de M tel que*

$h - P_M h \perp M$. Alors P_M est une application linéaire telle que $P_M^2 = P_M$, $\|p_M\ h\| \leq \|h\|$ pour tout $h \in H$, ker $P_M = M^\perp$ et Im $P_m = M$.

4. Base hilbertienne, Somme hilbertienne

DEFINITION 13. *Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une* ***base orthonormale*** *d'un espace de Hilbert H si*

1) $\|e_i\| = 1$.
2) L 'espace engendré Vect $\{e_i\}$ est dense dans H.
3) $e_i \perp e_j$ pour $i \neq j$.

Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale, qui est finie si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Pour simplifier l'étude, on se place dans un espace de Hilbert séparable.

DEFINITION 14. *Une partie F de H est dite dense dans H si:*

$\forall h \in$ H, $\forall \varepsilon \succ 0$, $\exists f \in$ F : $\|f - h\| \prec \varepsilon$

ou de maniére équivalente si tout h de H est limite d'une suite d'éléments f_n de F: $\|f_n - h\| \to 0$.

LEMMA 3. *Soit H un espace de Hilbert (et plus généralement espace normé). Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *H contient un sous-ensemble D qui est dénombrable et dense.*

(b) H contient une famille libre $\{f_1, \cdots\}$ qui est au plus dénombrable (qui est finie ou dénombrable) et qui engendre un sous-espace F dense dans H.

Dans ce cas, on dit que H est séparable.

DEFINITION 15. *Dans un espace de Hilbert s ´eparable H. On a les d ´efinitions suivantes:*

(a) Une famille $\{e_i, i \in I\}$ est orthogonale si
$\forall i \in I$, $\forall j \in I, i \neq j : \langle e_i, e_j \rangle = 0$.
(b) Une famille $\{e_i, i \in I\}$ est orthonormée si
$\forall i \in I$, $\forall j \in I$: $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \left\{ \begin{smallmatrix} 1 & si\ i=j \\ 0 & si\ i \neq j. \end{smallmatrix} \right.$
(c) Une famille $\{e_i, i \in I\}$ est totale si l'ensemble des combinaisons lin´eaires finies

d'éléments de $\{e_i, i \in I\}$ est dense dans H (qui engendre un sous-espace vectoriel dense dans H).

(d) Une base hilbertienne de H ou base orthonormée est une famille orthonormée totale

dans H.

EXAMPLE 8. *1. Dans $\mathbb{k}^n$, on considére la base canonique:*

$e_1 = (1, 0, \cdots, 0), e_2 = (0, 1, \cdots, 0), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots, 1)$.

Alors, pour tout $x \in \mathbb{k}^n$, on a: $x = \sum\limits_{n=1}^{n} x_i e_i$ avec $\|x\|^2 = \sum\limits_{n=1}^{n} |x_i|^2$.

2. Dans $l^2(\mathbb{N}, \mathbb{k})$, on considére la base canonique.
$e_1 = (1, 0, \cdots), e_2 = (0, 1, \cdots), \cdots, e_n = (0, 0, \cdots)$.

Alors, pour tout $x \in l^2(\mathbb{N}, \mathbb{k})$, on a:

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_i e_i$$

avec

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_i|^2 .$$

THEOREM 5. *Tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie posséde une base hilbertienne dénombrable.*

COROLLARY 1. *Tout espace de Hilbert séparable H est isométriquement isomorphe à:*

$$\begin{cases} \mathbb{k}^n \text{ en dimension finie} \\ l^2(\mathbb{N}, \mathbb{k}) \text{ en dimension infinie} \end{cases}$$

REMARK 6. *Le Chapitre 3 montre comment construire une base hilbertienne formée de vecteurs propres d'opérateurs auto-adjoints compacts. Dans l'espace L^2, on utilise fréquemment des bases spéciales formées de vecteurs propres d'un opérateur différentiel.*

Par exemple, dans $L^2([0,1], \mathbb{C})$, on considére une base hilbertienne donnée par $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$,
où pour tout n $\in \mathbb{Z}$, en est la fonction définie par:

$e_n(x) = exp(2$ [redacted] $inx), x \in [0,1].$

On trouve ainsi la théorie des séries de Fourier.
On définit maintenant la somme hilbertienne comme suit:

DEFINITION 16. *Soit $(H_n)_{n \geq 1}$ une suite de sous-espaces fermés de H. On dit que H est* ***somme hilbertienne*** *des $(H_n)_{n \geq 1}$ et on note $H = \bigoplus\limits_n H_n$ si:*

1) les H_n sont deux à deux orthogonaux, i.e.,
$\langle x, y \rangle = 0, \forall x \in H_n, \forall y \in H_m, n \neq m,$
2) l'espace vectoriel engendrè par les (H_n) est dense dans H.

THEOREM 6. *Soit H une somme hilbertienne des $(H_n)_{n \geq 1}$. Soit $x \in H$ et $x_n = P_{H_n} x$. Alors, on a:*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n.$$

REMARK 7. *Dans la suite, on considére un espace de Hilbert H séparable de dimension infinie. On indexe la base hilbertienne par I au lieu de $\mathbb{N}$, car il existe d'importants exemples où la base est indexée par I dénombrable autre que $\mathbb{N}$.*

THEOREM 7. *Soit $\{e_i, i \in I\}$ une famille orthonormée de H. Pour toute partie finie $J \neq \emptyset$ de I, pour tout $x \in H$ et tous scalaires a_j , $j \in J$,*

$$\left\| x - \sum_{j \in J} c_j(x) e_j \right\| \leq \left\| x - \sum_{j \in J} a_j e_j \right\|$$

où $c_j(x) = \langle x, e_j \rangle$.
L'égalité a lieu dans (4.1) si et seulement si $a_j = c_j(x)$ pour tout $j \in J$.

THEOREM 8. *(Inégalité de Bessel) Soit* $\{e_i, i \in I\}$ *une famille orthonormée de H.*

Alors, pour tout $x \in H$*, la série de terme générale* $|\langle x,\ e_i\rangle|^2$ *est convergente et on a:*

$$\sum_{i \in J} |\langle x,\ e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

THEOREM 9. *(Développement dans une base hilbertienne) Soit H un espace de Hilbert séparable. i) Si* $\{e_i, i \in I\}$ *est une base hilbertienne de H, on a le développement:*

$$\forall x \in H : x = \sum_{i \in J} \langle x,\ e_i\rangle\, e_i$$

où la série converge pour la topologie de H.

ii) Si $\{e_i, i \in I\}$ *est une famille orthonormée de H et si (4.2) est satisfaite, alors,*

$\{e_i, i \in I\}$ *est une base hilbertienne de H.*

(iii) Si $\{e_i, i \in I\}$ *est une base hilbertienne de H, on a l'identité de Plancherel* :

$$\forall x \in H : \|x\|^2 = \sum_{i \in J} |\langle x,\ e_i\rangle|^2$$

et celle de Parseval

$$\forall x, y \in H : \langle x,\ y\rangle = \sum_{i \in J} \langle x,\ e_i\rangle\, \overline{\langle y, e_i\ \rangle}$$

(iv) Si $\{e_i, i \in I\}$ *est une famille de vecteurs unitaires de H (i.e.,* $\forall i \in I$, $\|e_i\| = 1$*)*

satisfaisant (4.3), alors, c'est une base hilbertienne de H.

PROPOSITION 5. *(Unicit´e du développement) Si* $\{e_i, i \in I\}$ *est une base hilbertienne de l'espace de Hilbert séparable H et* $(a_i)_{i \in I}$ *une famille de scalaires telle que la série:*

$$\sum_{i \in J} \langle a_i,\ e_i\rangle$$

converge au sens de la topologie de H vers $x \in H$ *pour au moins une numrotation de l'ensemble dénombrable* I*. Alors,* $a_i = \langle x,\ e_i\rangle$ *pour tout* $i \in I$*.*

5. Exercices

Exercise 2. *Montrer qu'un espace vectoriel topologique séparé localement compact (i.e. tel que chaque point admet un voisinage compact) est nécessairement de dimension finie.*

Exercise 3. *Prouvez que sur tout espace vectoriel E de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.*

Exercise 4. *Montrer que sur un espace de Hilbert la convergence forte entraine la convergence faible et que la réciproque est vraie si et seulement si l'espace est de dimension finie. On pourra considérer une suite de vecteurs*

orthonormés.

Exercise 5. *Soient n espaces de Banach, $E_1....E_n$. Prouvez que le produit cartésien de ces espaces $E_1 \times ... \times E_n$ est un espace de Banach pour la norme $\|u\| = max\ \{\|u\|_1, ..., \|u\|_n\}$, où $u = (u_1, ..., u_n)$, $u_j \in E_j$. Une telle norme*

est appelée norme produit.

Exercise 6. *Pour $u = (u_1, ..., u_n) \in k_n$, on pose:*

$$\|u\|_p = \left(|u_1|_p + ... + |u_n|_p\right)^{\frac{1}{p}}$$

pour $p \geq 1$ réel et si $p = \infty$, $\|u\|_p = \max\left(|u_1|_p, ..., |u_n|_p\right)$.

1) Montrer que si $p = 1$ ou $p = +\infty$, $\|.\|_p$ sont des normes sur $\Bbbk_n$ équivalentes entre-elles.

On suppose maintenant $1 \prec p \prec \infty$. Soit q le réel conjugué de p i.e tel que: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

On pose $M_p(u) = sup\left\{\left|\sum_{1\leq j\leq n} u_j v_j\right|, \|v\|_q \leq 1\right\}$

2) Montrer que $M_p(u) = \|u\|_p$, $\forall u \in \Bbbk_n$. En d´eduire que $\|.\|_p$ est une norme.

Exercise 7. *Dans l'espace $\mathbb{R}^4$, on se donne cinq vecteurs : v_1 = (1,1,1,1) , v_2 = (1,2,3,4), v_3 = (3,1,4,2), v_4 = (10,4,13,7) et v_5 = (1,7,8,14) Chercher les relations de dépendance linéaires entre ces vecteurs. Si ces vecteurs sont dépendants, en extraire au moins une famille libre engendrant le même sous-espace.*

Exercise 8. *1. Est-ce que le sous-ensemble $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 2x\right\}$ de $\mathbb{R}^2$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel ? 2. Est-ce que le sous-ensemble $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; y^2 = 2x, z = 0\right\}$ de $\mathbb{R}^3$, muni des lois habituelles de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?*

Exercise 9. *Soit $E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\right\}$ .Soient a = (1, -2,3) et b = (2,1, -1) deux vecteurs. On pose F = vect(a, b). 1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. 2. Déterminer $E \cap F$. 3. A-t-on $E \oplus F$?*

EXERCISE 10. *Soit $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$l'espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ à 3 lignes et 3 colonnes. Soit $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. C'est-à-dire les matrices qui vérifient $A = {}^tA$, 1. Montrer que $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. 2. Déterminer dim($\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$).*

CHAPTER 2

Opérateurs linéaires

Dans ce chapitre on va rappeller un certain nombre de résultats, pour la plupart déja vus, sur les opérateurs linéaires dans les espaces de Hilbert ou Banach ***et en particulier sur les opérateurs compacts****.*

Dans tout ce chapitre E et F désigneront des espaces de Banach, nous noterons $L(E, F)$ (respectivement $L(E)$) l'espace des applications linéaires continues de E dans F (respectivement des endomorphismes continus de E) muni de sa norme d'opérateur habituelle.

Si H et K sont des Hilberts, on note $L(H, K)$ l'ensemble des applications linéaires bornées de H dans K, i.e., telles que la norme:

$$\|u\| = sup\{\|u(x)\|; x \in H; \|x\| \leq 1\}$$

soit finie.

$L(H, K)$ est un espace de Banach et de plus, si $v \in L(H, K)$ et $u \in L(K, N)$, alors $uv \in L(H, N)$ et $\|uv\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

Le cas le plus important est celui où $H = K$, et l'on note tout simplement $L(H)$ l'algèbre de Banach ainsi obtenue. Parmi les éléments de cette algèbre, l'unité, notée I de norme 1 (sauf le cas où $H = 0$).

1. Définitions et propriétés

Definition 17. *Soient H, H_0 des espaces de Hilbert, un opérateur T est une application*

définie de H a valeurs dans H_0 vérifiant les conditions suivantes:

(i) Additive : $T(x + y) = Tx + Ty; x, y \in H$.

(ii) Homogéne: $T(\alpha x) = \alpha Tx, x \in H$ et pour tout nombre complexe α.

Le sous-espace vectoriel $D(T) \subset H$ a valeurs dans H_0; tel que $D(T) = \{x \in H; Tx \in H_0\}$ est appelé le domaine de l'opérateur.

Remark 8. *- On notera $KerT$ le noyau de l'opérateur T i.e. $KerT = \{x \in H; Tx = 0\}$.*

- ImT désignera le sous-espace de H_0 image de H par T. On le notera aussi $T(H)$.

- $KerT$ (resp. ImT) est un sous-espace vectoriel de H (resp. de H_0). On notera que $KerT$ est toujours un sous-espace fermé de H mais ImT n'est pas forcément fermé dans H_0.

Remark 9. *- Opérateur identité noté I est défini par: $Ix = x, \forall x \in H$.*

- Opérateur nul 0 est défini: $0x = 0, \forall x \in H$.

- On note $L(H)$ l'ensemble des opérateurs sur H. Si $A \in L(H)$, on définit la norme de l'opérateur A par:

$$\|A\| = sup \{\|Ah\| \; ; \; h \in H; \; \|h\| \; \leq \; 1\}.$$

PROPOSITION 6. *Voici quelques propriétés de la norme d'un opérateur:*

1. Si $A \in L(H)$, alors $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.
2. Si $A; B \in L(H)$, alors $A + B \in L(H)$ et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
3. Si $\alpha \in \Bbbk$ et $A \in L(H)$, alors $\alpha A \in L(H)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha| \, . \|A\|$.
4. Si $A; B \in L(H)$, alors $AB \in L(H)$ et $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$ (AB désigne la composition $A \circ B$).

Les trois premiers points de la proposition précédente affirment que $\|.\|$ définit une norme sur $L(H)$.

EXAMPLE 9. *Soient X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$; l'application $A : X \to X$ définie pour $x \in X$ par:*

$$A_\lambda(x) = \lambda x$$

est un opérateur linéaire.

En effet, pour $x_1, x_2 \in X$ et $\alpha \in \mathbb{C}$; On a:

$$A_\lambda(\alpha x_1 + x_2) = \lambda(\alpha x_1 + x_2)$$

$$= \alpha(\lambda x_1) + (\lambda x_2)$$
$$= \alpha A_\lambda(x_1) + A_\lambda(x_2)$$

Cet opérateur est appelé une homothétie de rapport λ de l'espace vectoriel X.

DEFINITION 18. *Une forme sesquilinéaire f sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E est une application de $E \times E$ a valeurs dans $\mathbb{C}$ vérifiant pour tout $y \in E$:*

(a)- $x \mapsto f(x, y)$ est anti-linéaire,
(b)- $x \mapsto f(y, x)$ est linéaire,

Si E est un espace normé on dit que f est une forme sesquilinéaire bornée si de plus il existe $c \succ 0$; tel que:

$$|f(x, y)| \leq c \|x\| . \|y\|$$

THEOREM 10. *Pour tout forme sesquilinéaire bornée f sur un espace de Hilbert H, il existe un unique opérateur $A \in L(H)$ vérifiant: $f(x, y) = \langle x, Ay \rangle, \forall x, y \in H$.*

PROOF. L'application $x \mapsto \overline{f(x, y)}$ est une forme linéaire continue sur H, donc par le Théorème de Riesz il existe un unique $A_y \in H$ tel que: $f(x, y) = \langle x, A_y \rangle$ pour tout $x, y \in H$. On vérifie facilement que l'application $y \mapsto A_y$ est linéaire que l'on note par A. Comme

$$\|Ay\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|\langle x, Ay \rangle|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x, y)|}{\|x\|} \leq c \|y\|,$$

$A \in L(H)$ et vérifie la propriété énoncée. L'unicité est une conséquence de l'équivalence:

$$(\langle x, Ay \rangle = 0, \forall x, y \in H) \Leftrightarrow A = 0.$$

□

PROPOSITION 7. *Soient E, F deux Banach et $T \in L(E, F)$. Alors on a:*

(i) $Ker(T) = Ran(T^{'})^{\perp}$
(ii) $Ker(T^{'}) = Ran(T)^{\perp}$
(iii) $Ker(T)^{\perp} \supseteq Ran(T^{'})$,
(iv) $Ker(T^{'})^{\perp} = Ran(T)$.

PROOF. (i)

$$\begin{aligned} x \in Ker(T) &\Leftrightarrow l(Tx) = 0, \forall l \in F^* \\ &\Leftrightarrow T^{'}(l(x)) = 0, \forall l \in F^* \\ &\Leftrightarrow x \in Ran(T^{'})^{\perp}. \end{aligned}$$

(ii)

$$l \in Ker(T^{'})^{\perp} \Leftrightarrow$$
$$T^{'}(l(x)) = 0, \forall x \in E \Leftrightarrow$$
$$l(Tx) = 0, \forall x \in E \Leftrightarrow \in Ran(T)^{\perp}.$$

(iii) et (iv) resultent de la Proposition [chap.1, 2.9]. En effet, on a:

$$Ker(T)^{\perp} = \left((Ran(T^{'})^{\perp}\right)^{\perp} \supseteq \overline{Ran(T^{\prime})}$$

et que $Ker(T^{'})^{\perp} = (Ran(T) \perp)^{\perp} = \overline{Ran(T)}$. □

1.0.2. *Composé de plusieurs opérateurs. Soient H, H_0 et H_1 des espaces de Hilbert et $T_1 \in L(H, H_0)$ et $T_2 \in L(H_0, H_1)$ des opérateurs. Considèrons l'opérateur composé $T_2 \circ T_1 \in L(H, H_1)$.*

PROPOSITION 8. *1.On a:*$\|T_2 \circ T_1\| \leq \|T_2\| . \|T_1\|$

2. Soit $U \in L(H, H)$ un opérateur de l'espace de Hilbert H dans lui même. On définit les puissances de l'opérateur U comme étant les opérateurs de H dans H définis de la manière suivante : $U^0 = I$(l'opérateur identité), $U^1 = U, U^2 = U \circ U, ..., U^n = U \circ U^{n-1} = U^{n-1} \circ U (n \geq 1)$.

COROLLARY 2. $\forall n \in \mathbb{N}; \|T^n\| \leq \|T\|^n$.

1.0.3. *Norme d'opérateur.*

DEFINITION 19. *Soit A un opérateur borné défini sur un espace de Hilbert H, on dit que A est un opérateur borné, s'il existe*

$$c \geq 0 : \|Ax\| \leq c\|x\|; \forall x \in H;$$

$\|A\|$ *est définie par:*

$$\|A\| = inf\{c \geq 0;\ \ \|Ax\| \leq c\|x\|;\ \forall x \in H\}.$$

Voici quelques propriétés de la norme d'un opérateur:

PROPOSITION 9. *1. Si $A \in L(H)$, alors $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.*

2. Si $A; B \in L(H)$, alors $A + B \in L(H)$ et $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.
3. Si $\alpha \in K$ et $A \in L(H$, alors $\alpha A \in L(H)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha| . \|A\|$.
4. Si $A; B \in L(H)$, alors $AB \in L(H)$ et $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\|$ (AB désigne la composition $A \circ B$).
Les trois premiers points de la proposition précédente affirment que $\|.\|$ définit une norme sur $L(H)$.

EXAMPLE 10. *Si H est de dimension finie n, toute application linéaire de H dans H est continue. Étant donnée une base $(e_1, ...e_n)$ de H, on peut identifier $A \in L(H)$ à la matrice (a_{ij}) définie par $a_{ij} = \langle Ae_i; e_j \rangle$.*

EXAMPLE 11. *Soit $H = l^2$ et $(e_1, e_2, ...)$ sa base canonique. Si $A \in L(H)$, on pose $\alpha_{ij} = \langle Ae_i; e_j \rangle$. La matrice (α_{ij}) représente A de la même façon qu'en dimension finie. Cependant, on ne connaît pas de formule permettant de calculer $\|A\|$ en fonction de sa représentation matricielle. Réciproquement, étant donné $(\alpha_{ij})_{i;j \in \mathbb{N}^*}$, une condition nécessaire et sufisante pour qu'il existe un opérateur $A \in L(H)$ tel que $\langle Ae_i; e_j \rangle = \alpha_{ij}$ est que:*

$$\underset{n\in\mathbb{N}}{Sup} Sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j \right|, |x_1|^2 + ... + |x_n|^2 \leq 1 \right\} \leq +\infty.$$

Vérifions qu'on a les égalités suivantes :
$\|A\| = sup \{\|Ah\| : \|h\| = 1\} = sup \left\{ \frac{\|Ah\|}{\|h\|} : h \neq 0 \right\}$
$= inf \{c \succ 0 : \|Ah\| \leq c \|h\| \, pour \ tout \ h \in H\}$

EXERCISE 11. *Soit H un espace de Hilbert et (e_n) une base orthonormale de H. Soit (α_n) une suite bornée de scalaires et $M = sup\, |\alpha_n|$. Montrer qu'il existe un unique opérateur $A \in L(H)$ tel que $Ae_n = \alpha_n e_n$ et montrer que $\|A\| = M$. On dit que l'opérateur A est diagonal.*

EXERCISE 12. *Montrer que $L(H)$ est complet pour la norme $\|.\|$.*

DEFINITION 20. *Soit T un opérateur borné défini sur un espace de Hilbert H, on dit que T est un opérateur borné, s'il existe $c \geq 0 : \|Tx\| \leq c \|x\|, \forall x \in H$.*

$\|T\|$ est définie par:

$$\|T\| = \inf \{c \succ 0, \|Tx\| \leq c \|x\|, \forall x \in H\}$$

PROPOSITION 10. *Soit H un espace de Hilbert et $T : H \to H$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est continue.*
2. *A est continue en 0.*
3. *Il existe $x \in H$ tel que A est continue en x.*
4. *Il existe une constante $c \succ 0$ telle que $\|Th\| \leq c \|h\|$ pour tout $h \in H$.*

PROOF. Il suffit de montrer que (ii) entraîne (iii), les autres propriétés étant immédiates.

Il résulte de la continuité en 0, qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\|u\|_1 \leq \eta \Longrightarrow \|Au\|_2 \leq 1$$

Maintenant pour $u \neq 0$ on applique l'inégalité précédente à

$$v = \frac{u}{\|u\|_1} \eta$$

et on obtient (iii) avec $C = \frac{1}{\eta}$. □

EXAMPLE 12. *Un exemple d'opérateur est l'opérateur de Volterra défini sur* $L_2[0;1]$ *par* $Vf(x) = \int_0^z f(y)dy$.

EXAMPLE 13. *le shift* S *défini sur* $l^2(N)$ *par* $S(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (0, \alpha_1, \alpha_2, ...)$.

1.0.4. *Opérateur positif.*

DEFINITION 21. *On dit qu'un opérateur* A *sur un Hilbert* H *est* ***positif*** *s'il vérifie* $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ *pour*

tout $x \in H$. *On écrit* $A \geq B$ *si* $A - B$ *est positif.*

THEOREM 11. *Tout opérateur positif* A *admet un unique opérateur positif* B *tel que* $A = B^2$.

De plus, B *commute avec tout opérateur qui commute avec* A. *On appelle* B *la racine carré de* A *et on note par* $\sqrt{A}$.

PROOF. - Unicité: Soient $B_1, B_2 \geq 0$; tel que

$$B_1^2 = B_2^2 = A;$$

alors pour $i = 1, 2$.

$$B_i A = B_i^3 = A B_i$$

Un calcul direct donne:

$$0 = (B_1^2 - B_2^2)(B_1 - B_2) =$$

$$\underbrace{(B_1 - B_2)B_1(B_1 - B_2)}_{(1)\geq 0} + \underbrace{(B_1 - B_2)B_2(B_1 - B_2)}_{(2)\geq 0}$$

On en d´eduit alors que:

$$(1) - (2) = (B_1 - B_2)^3 = 0$$

En particulier, on a: $\left\|(B_1 - B_2)^4\right\| = \left\|(B_1 - B_2)^2\right\|^2 = \|(B_1 - B_2)\|^4$.

- Existence: Il suffit de le montrer pour $A \geq 0$, $\|A\| = 1$. Dans ce cas, on a: $(\mathbf{1} - A) \geq 0$

et

$$\|(\mathbf{1} - A)\| = \sup_{\|x\|=1} \langle x, (\mathbf{1} - A)\, x \rangle \leq 1.$$

La série $B = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (\mathbf{1} - A)^k$ est donc absolument convergente grâce au Lemme 2.2 avec $\sqrt{1-z} = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k z^k$ et $c_k \prec 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

On vérifie que:

$$B = \mathbf{1} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (\mathbf{1} - A)^k \geq 1 + \sum_{k=0}^{+\infty} c_k . \mathbf{1} \geq \mathbf{0}.$$

Enfin, on a:

$$B^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k+k'=n} c_k \ c_{k'} \right) (\mathbf{1}-A)^n$$

comme $\sum_{k+k'=n} c_k \ c_{k'} = 0$;pour tout $n \geq 2$, on en conclut que $B^2 = A$. □

Definition 22. *Pour tout $A \in L(H)$ on note $|A| = \sqrt{A^*A}$.*

2. Inverse d'un opérateur

Definition 23. *Soient H et H_0 des espaces de Hilbert et $A \in L(H, H_0)$ un opérateur. On dit que A est inversible s'il existe $B \in L(H_0, H)$ tel que*

$A \circ B = I_{H_0}$, et $BA = I_H$, où I_H (resp. I_{H_0}) est l'opérateur identité de H (resp. de H_0). Un tel opérateur B (lorsqu'il existe) est unique. On l'appelle opérateur inverse de A ou plus simplement inverse de A et on le note $B := A^{-1}$.

***Cas particulier** où $H = H_0$: Soit $T \in L(H)$. Dans le cas où H est de dimension finie, on sait que l'inversibilité de T a plusieurs aspects équivalents.*

Plus précisément, rappelons l'important résultat suivant:

Theorem 12. *Si $dimH \prec \infty$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1) T est inversible.
2) T est injectif.
3) T est surjectif.
4) T admet un inverse à droite (i.e. il existe $U \in L(H, H)$ tel que $T \circ U = I_H$.)
5) T admet un inverse à gauche (i.e. il existe $V \in L(H, H)$ tel que $V \circ T = I_H$.)

Remark 10. *(contre-exemple) : Si $dimH = +\infty$, les propriétés équivalentes du théorème précédent ne sont plus vraies :*

Example 14. *Soit $H = l^2$, l'espace des suites de nombres complexes de carré sommable, muni de sa norme $\||x\|^2 = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$*

Considérons l'application: $S : l^2 \to l^2$

$$x_n \mapsto y_n$$

où;

$$y_1 = 0, y_2 = x_1, ..., y_n = x_{n+1}, ...(n \geq 1).$$

Autrement dit Sx est la suite qui commence par 0 et qui ensuite est composée des mêmes termes que la suite x mais décalés d'un rang. L'application S est linéaire de l^2 dans lui même et c'est une isométrie puisque $\|Sx\|^2 = \|x\|^2$.

Donc $S \in L(l^2, l^2)$. On appelle S l'opérateur de décalage dans l^2. On voit alors facilement que :

1) S est injective (car isométrique),
2) S n'est pas surjective.
3) S admet un inverse à gauche T : $Tx_n = x_{n+1}$ (c'est l'opérateur qui efface la première coordonnée donc on a clairement $TS = l^2$).
4) L'opérateur T n'est pas inverse à droite de l'opérateur S.

Proposition 11. *Soit F un espace vectoriel normé et* $A \in$ *L(E, F) bijectif. Alors; les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) $A^{-1} \in$ *L(F,E).*
(2) Il existe $c \succ 0$ *telle que pour tout* $x \in E$ *:* $\|Ax\| \geq c\|x\|$*.*
(3) F est un espace de Banach.

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Comme A^{-1} est continu, alors, on a:

$$\forall x \in E : \left\|A^{-1}Ax\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|Ax\| .$$

Il s'ensuit,

$$\forall x \in E : \|Ax\| \geq \left\|A^{-1}\right\|^{-1} \|x\| .$$

(2) $\Rightarrow$ (3) Soit $(y_n)_n$ une suite de Cauchy dans F. L'opérateur A est bijectif, alors, il existe une suite $(x_n)_n$ dans E telle que, pour tout n $\in \mathbb{N}$: $Ax_n = y_n$. Or, d'aprés (2), pour tous n,m $\in \mathbb{N}$, on a:

$$\|x_n - x_m\| \leq c^{-1} \|A(x_n - x_m)\| \leq c^{-1} \|y_n - y_m\| .$$

Alors, $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach E. Donc, elle converge vers un élément $x \in$ E. L'opérateur A étant continu, la suite de terme général $y_n = Ax_n$ converge alors vers $Ax \in$ F. Il s'ensuit que F est un espace de Banach.

(3) $\Rightarrow$ (1) Elle découle du théorème de Banach. □

Corollary 3. *Soient F un espace de Banach et* $A \in$ *L(E, F). Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes: (1) Il existe* $c \succ 0$ *telle que pour tout* $x \in E$ *:* $\|Ax\| \geq c\|x\|$*. (2) A est injectif et Im(A) est fermé dans F.*

Proof. On pose $G = Im(A)$. (1) $\Rightarrow$ (2) On suppose qu'il existe c $\succ$ 0 telle que pour tout x $\in$ E, on a $\|Ax\| \geq c\|x\|$. Alors, A est injectif donc est une bijection de E sur G. D'aprés la Proposition 1.3.2, on conclut que G = $Im(A)$ est un espace de Banach et donc est fermé dans F. (2) $\Rightarrow$ (1) On suppose que A est injectif et G est fermé dans F. Alors, A est une bijection de E sur G et G est un espace de Banach. D'aprés la Proposition 1.3.2, il résulte l'existence d'une constante c $\succ$ 0 telle que pour tout x $\in$ E, on a: $\|Ax\| \geq c\|x\|$. □

Corollary 4. *Soient F un espace de Banach et* $A \in$ *L(E, F). Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes: (1)* $\overline{Im(A)} = F$ *et il existe* $c \succ 0$ *telle que pour tout* $x \in E$*:* $\|Ax\| \geq c\|x\|$*. (2) A est inversible.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) Si (1) a lieu, d'aprés le Corollaire 1.3.3, A est injectif et Im(A) est fermé dans F. Alors,

$$\overline{Im(A)} = Im(A) = F$$

donc, A est surjectif et donc inversible. (2) $\Rightarrow$ (1) Si (2) a lieu, on a

$$F = Im(A) \subset \overline{Im(A)} \subset F$$

Donc, Im(A) = Im(A) = F, ce qui donne le résultat d'aprés le Corollaire 1.3.3. □

Le seul résultat simple valable quelle que soit la dimension de H est le suivant :

THEOREM 13. *Si $T \in L(H,H)$ est $\|T\| \prec 1$, alors:*

1. L'opérateur $I - T$ est inversible et

$$(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} T^n.$$

2- L'ensemble des éléments inversibles de $L(H)$ noté $Inv(L(H))$ est un ouvert de $L(H)$.

3. L'application $J : Inv(L(H)) \to L(H); J(A) = A^{-1}$, est continue.

PROOF. 1.Comme $\|T\| \prec 1$, la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} T^n$ est normalement convergente dans$L(H)$, De plus, on vérifie facilement que;

$(I-T)^{-1} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} T^n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} T^n\right)(I-T)^{-1} = I,$

et donc par passage à la limite (comme

$$\left\|T^{N+1}\right\| \leq \|T\|^{N+1} \to 0; quand\ N \to +\infty)$$

on en déduit que:

$$(I-T)^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty} T^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} T^n\right)(I-T)^{-1} = I,$$

ce qui achéve de prouver (1).

Pour démontrer (2), il suffit de remarquer que si $A \in Inv(L(H))$, alors la boule ouverte centrée en A et de rayon $\frac{1}{\|A^{-1}\|}$ est contenue dans $Inv(L(H))$. En effet, si $T \in B\left(A, \frac{1}{\|A^{-1}\|}\right))$, on a

$$T = A + (T - A) = A(I + A^{-1}(T - A)).$$

Remarquons alors que:

$$\left\|A^{-1}(T-A)\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| . \|(T-A)\| \prec 1.$$

Donc d'aprés (1), on a: $I + A^{-1}(T - A)$ est inversible et comme $Inv(L(H))$ est un groupe, on en déduit que T est inversible. Pour prouver (3), fixons $A \in Inv(L(H))$ et soit $\varepsilon \geq 0$; tel que: $\varepsilon \leq \left\|A^{-1}\right\|$ Nous allons montrer que si $B \in L(H)$;tel que:

$$\|B\| \leq \frac{\varepsilon}{2\left\|A^{-1}\right\|},$$

alors on a:

$$\|J(A) - J(A+B)\| \leq \varepsilon.$$

ce qui assurera que J est continue. Tout d'abord remarquons que

$$A + B = (I + BA^{-1})A$$

et

$$\left\|BA^{-1}\right\| \leq \|B\| \, . \left\|A^{-1}\right\| \leq \frac{\varepsilon}{2\left\|A^{-1}\right\|} \leq \frac{1}{2} \leq 1.$$

Donc en utilisant (1), on obtient:

$$(A+B) \in Inv(L(H))$$

et

$$(A+B)^{-1} = A^{-1}(I+BA^{-1})^{-1} = A^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(BA^{-1}\right)^n$$

d'où: $\|J(A) - J(A+B)\| = \left\|A^{-1} - (A+B)^{-1}\right\| =$
$\left\|A^{-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \left(BA^{-1}\right)^n\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| . \sum_{n=0}^{+\infty}\left\|BA^{-1}\right\|^n$
$\leq \left\|A^{-1}\right\| \frac{\left\|BA^{-1}\right\|}{1-\left\|BA^{-1}\right\|} \leq \frac{\frac{\varepsilon}{2\left\|A^{-1}\right\|}}{1-\frac{\varepsilon}{2\left\|A^{-1}\right\|}} \leq \varepsilon.$ □

REMARK 11. *- Le théorème précédent est vrai aussi si H est remplacé par un espace de Banach quelconque.*

- Il convient de savoir utiliser le résultat du théorème sous la forme suivante :

COROLLARY 5. *Si $T \in L(H,H)$ est tel que $\|I-T\| \prec 1$, alors T est inversible et on a:*

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(I-T)^n \, .$$

THEOREM 14. *(i) Soit $A \in L(E)$; tel que $\|A\| < 1$ alors $(I-A)$ est inversibe et*

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

(ii) Si A est inversible alors, $A+B$ est inversible pour tout $B \in L(E)$ tel que $\|B\| < \|A\|^{-1}$

et on a:

$$\begin{aligned} (A+B)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(A^{-1}B\right)^n A^{-1}. \\ (A+B)^{-1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} A^{-1-n}B^n, \text{ si } A \text{ et } B \text{ commutent.} \end{aligned}$$

(ii) L'ensemble des opérateurs inversibles sur $L(E)$ noté $\mathcal{I}L(E)$ est un ouvert de $L(E)$ et l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue et même C^{∞} de $\mathcal{I}L(E)$ dans $\mathcal{I}L(E)$.

THEOREM 15. *Un opérateur $A \in L(H_1, H_2)$ est inversible si et seulement si A^* est inversible*

et on a $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

LEMMA 4. *Soient E, F et G des espaces de Banach. Si $A \in L(E, F)$ et $B \in L(F,G)$ sont deux opérateurs inversibles. Alors, $BA \in L(E,G)$ est inversible et l'on a: $(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$.*

Example 15. *1- L'application identité I est de toute évidence inversible*

2- Soit $E = L^2_N(\mathbb{R})$ et u une application définie de E dans E par

$$x \mapsto u(x) = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{2^{n-1}}x_n, ...\right)$$

avec $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$.

u est trivialement linéaire. Elle est aussi injective car son noyau est réduit à $\{0\}$. Elle est enfin surjective et de plus;

$$u^{-1}(x) = \left(x_1, 2x_2, ..., 2^{n-1}x_n, ...\right).$$

u^{-1} n'est pas bornée sur E. Elle est donc non continue. On conclus que u n'est pas inversible.

Theorem 16. *Soient T_1, T_2 des opérateurs positifs, alors:*

(i) Si $T_1 \leq T_2$, et T_1 inversible, alors; $T_2^{-1} \leq T_1^{-1}$.
(ii) Si $T_1 \leq T_2$, alors $\sqrt{T_1} \leq \sqrt{T_2}$.

Proof. (i) Si $T_1 \leq T_2$, *et T_1 inversible,* impliquent

$$0 \leq m(t_1) \leq m(t_2),$$

ou

$$m(t) = \inf\{\langle Tx, x\rangle; \|x\| = 1\},$$

et donc T_2 est inversible. On obtient

$$T_2^{\frac{-1}{2}} T_1 T_2^{\frac{-1}{2}} \leq I,$$

donc;

$$\left\|T_1^{\frac{-1}{2}} T_2^{-1} T_1^{\frac{1}{2}}\right\| = \left\|T_1^{\frac{-1}{2}} T_2^{-1} T_1^{\frac{1}{2}}\right\|^2 = \left\|T_2^{\frac{-1}{2}} T_1 T_2^{\frac{-1}{2}}\right\| \leq 1$$

ce qui donne $T_1^{\frac{-1}{2}} T_2^{-1} T_1^{\frac{1}{2}} \leq 1$, qui redonne
$T_2^{-1} \leq T_1^{-1}$.

(ii) On continue avec u inversible pour le moment. Nous avons obtenu:
$T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{-1}{2}} \leq 1$; remarquant que:

$$\left\|T_2^{\frac{-1}{4}} T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{-1}{4}}\right\| = \left\|T_1^{\frac{1}{4}} T_2^{\frac{-1}{2}} T_1^{\frac{-1}{4}}\right\| \leq 1,$$

donc
$T_2^{\frac{-1}{4}} T_1^{\frac{1}{2}} T_2^{\frac{-1}{4}} \leq 1$, ce qu'on transforme en
$\sqrt{T_1} \leq \sqrt{T_2}$.

Il faut encore établir le résultat quand T_1 n'est pas inversible; pour cela, on remplace T_1, T_2 par $T_1 + \varepsilon I, T_2 + \varepsilon I$, et on remarque que: $\sqrt{T_1 + \varepsilon I} \to \sqrt{T_1}$ et $\sqrt{T_2 + \varepsilon I} \to \sqrt{T_2}$
quand $\varepsilon \to 0$.

et le résultat est donc conséquence de la continuité de la relation d'ordre, i.e., de la fermeture topologique de C^+. □

Theorem 17. *Soient E, F deux espaces de Banach et $T \in L(E, F)$; l'opérateur transposé ${}^tT \in L(F; E)$ est inversible si et seulement T est inversible.*

PROOF. Soit T un opérateur inversible, alors $T^{-1}T = I_E$ et $TT^{-1} = I_F$ on trouve ${}^tT^t\left(T^{-1}\right) = I_{E^*}$,

et ${}^t\left(T^{-1}\right)^t T = I_{F^*}$, donc ${}^tT$ est inversible et

${}^t\left(T^{-1}\right) = \left({}^tT\right)^{-1}$.

Supposons inversement que T ne soit pas inversible. On sait que, ou bien T ne vérifie pas la condition $\overline{T(E)} = F$, ou bien T n'est pas borné. Le premiér cas, l'image $T(E)$ n'est pas dense, donc ${}^tT$ n'est pas injective, ce qui implique que ${}^tT$ n'est pas inversible.

Le deuxiéme cas, il existe une suite $(x_n) \subset E$ de vecteurs de norme un telle que $Tx_n \to 0$.

Considérons pour tout entier n l'opérateur R_n de $\Bbbk$ dans E, défini par:

$$R_n\left(x\right) = \lambda x_n.$$

Sa norme est égale à:

$\|x_n\| = 1$ et $T \circ R_n$ tend vers 0.

En transposant, ${}^tR_n^tT$ tend vers 0, alors que

$$\left\|{}^tR_n\right\| = \|R_n\| = 1$$

pour tout n, ce qui entraîne encore que ${}^tT$ ne peut être inversible. $\square$

3. Opérateurs fermés et fermables

Soit $H \times H$ un espace de Hilbert pour le produit scalaire;
$\langle (u_1, v_1), (u_2, v_2)\rangle := \langle u_1, u_2\rangle + \langle v_1, v_2\rangle$.

DEFINITION 24. *Soit T un opérateur linéaire. On appelle graphe de T, le sous-espace vectoriel de $H \times H$ noté $G\left(T\right)$ tel que:*

$G(T) := \{(\varphi, T_\varphi)\,; \varphi \in D\left(T\right)\}$.

DEFINITION 25. *Soit T un opérateur linéaire dont le domaine est dense dans H. On dit que T est **fermé** si $G(T)$ est fermé dans $H \times H$ i.e. pour toute suite (φ_n) de $D(T)$ convergente de limite φ telle que $(T\varphi_n)$ est convergente de limite ψ, $\varphi \in D(T)$ et $\psi = T_\varphi$.*

DEFINITION 26. *On dit que T est **fermable** s'il existe S fermé avec $T \subset S$ auquel cas il existe une plus petite extension fermée appelée fermeture et notée $\overline{T}$ qui vérifie $G(\overline{T}) = \overline{G(T)}$.*

THEOREM 18. *Soit T un opérateur linéaire. Alors T est borné si est seulement si T est fermé et $D(T) = H$.*

PROOF. Pour le sens direct, on a bien sûr $D(T) = H$. Par ailleurs, soit $((\varphi_n, T\varphi_n))$ une suite de $G(T)$ qui converge vers (φ, ψ), alors $\varphi \in D(T) = H$ et, comme T est borné, $(T\varphi_n)$ converge vers $T\varphi$ d'où $\psi = T\varphi$ par unicité de la limite. Quant au sens réciproque, c'est exactement le théorème du graphe fermé. $\square$

4. Théorème de Baire:

Le théorème de Baire est un outil fondamental lorsqu'on travaille en dimension infinie. Les résultats suivants n'ont rien de spécifique aux espaces de Hilbert et sont vrais dans n'importe quel espace de Banach.

THEOREM 19. *(Baire) Soient X un espace métrique complet et $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite d'ouverts denses de X. Alors $\cap U_n$ est dense dans X. De même, si $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de X, alors $\cup F_n$ est d'intérieur vide dans X.*

PROOF. Soit $B_0 \subset X$ un ouvert non vide. Comme U_1 est dense, il existe une boule B_1, de centre x_1 et de rayon $r_1 \leq 1$ telle que

$$adhB_1 \subset U_1 \cap B_0.$$

Comme U_2 est dense, il existe une boule B_2, de centre x_2 et de rayon $r_2 \leq \frac{1}{2}$, telle que

$$adhB_2 \subset U_2 \cap B_1.$$

De proche en proche, on construit B_n, de centre x_n et de rayon $r_n \leq \frac{1}{n}$, telle que

$$adhB_n \subset U_n \cap B_{n-1}.$$

En particulier, la suite $(adhB_n)$ est décroissante, et la suite (x_n) est de Cauchy donc converge ; soit x sa limite. Pour tout n, $x \in adhB_n \subset U_n$, et donc $x \in \cap U_n$. Comme on a aussi $x \in B_0$, on a montré que l'ensemble $\cap U_n$ intersecte tout ouvert, donc il est dense.

La deuxième partie de l'énoncé découle de la première en passant au complémentaire. $\square$

THEOREM 20. *(de l'application ouverte) Si $T \in L(H)$ est un opérateur surjectif, alors pour tout ouvert $U \subset H$, $T(U)$ est ouvert.*

PROOF. Comme T est linéaire, il sufit de montrer que l'image de la boule unité contient un voisinage de 0. Soit $B = B(0;1)$ la boule-unité ouverte de H. Comme T est surjectif, on peut écrire

$$T = \underset{n\in\mathbb{N}}{\cup} adh(nT(B)).$$

Par le théorème de Baire, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $adh(nT(B))$ est d'intérieur non vide. Soient $x \in H$ et $\varepsilon \succ 0$ tels que

$$adh(nT(B)) \supset B(x, \varepsilon).$$

On a aussi

$$adh(nT(B)) \supset B(-x, \varepsilon)),$$

et donc $adh(nT(B))$ étant convexe,

$$adh(nT(B)) \supset B(0, \varepsilon))$$

et donc $B \subset adhT(\lambda B)$ avec $\lambda = \frac{n}{\varepsilon}$.

Montrons que cela implique que $B \subset T(2\lambda B)$.

Soit $z \in B$; comme $z \in adhT(\lambda B)$, il existe x_1 avec $\|x_1\| \leq \lambda$ et $\|z - Tx_1\| \leq \frac{1}{2}$.

De même, comme $z - Tx_1 \in adhT(\frac{\lambda}{2}B)$, il existe x_2 avec $\|x_2\| \leq \frac{1}{2}$ et

$$\|z - Tx_1 - Tx_2\| \prec \frac{1}{4}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite (x_k) vérifiant: $\|x_k\| \prec \frac{\lambda}{2^{k-1}}$ et

$$\|z - (Tx_1 + Tx_2.... + Tx_n)\| \prec \frac{1}{2^k}.$$

La série converge normalement, on peut poser $x = \sum x_k$ et $\|x\| \prec 2\lambda$, donc $x \in 2\lambda B$. Comme T est continue, on a $Tx = z$. Ainsi $z \in T(2\lambda B)$. Ceci conclut la preuve. $\square$

5. Exercices

EXERCISE 13. *Soient H un espace de Hilbert et* (e_n) *une base orthonormale de H. Soit* $(\ \alpha_n)$ *une suite bornée de scalaires et* $M = sup\|\alpha_n\|$ *Montrer qu'il existe un unique opérateur*

$A \in L(H)$ *tel que* $Ae_n = \alpha_n e_n$ *et montrer que* $\|A\| = M$. *On dit que l'opérateur A est diagonal.*
Montrer que $L(H)$ *est complet pour la norme* $\|.\|$

EXERCISE 14. *Sur l'espace de Hilbert* $L_2[0,1]$ *on considére l'application linéaire*

$$Au(t) = \int_0^1 u(s)ds.$$

a) Montrer que A est un opérateur de
$L_2[0;1]$ *dans lui-même. Donner un majorant de sa norme.*
b) Déterminer l'adjoint A^* *de A.*

EXERCISE 15. *La matrice de Hilbert est définie pour*

$i;j \in \mathbb{N}$ *par:*$a_{ij} = (i+j+1)^{-1}$.
Montrer qu'il existe un opérateur $A \in L(l_2)$ *telle que* $\langle Ae_i;e_j\rangle = a_{ij}$, *et que* $\|A\| \leq \varepsilon$.

EXERCISE 16. *Soit* $H = l_2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *l'espace des suites réelles* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 \prec +\infty$ *muni de la norme* $\|u\|^2 = (\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2)^{\frac{1}{2}}$.
$(\lambda_n)_n$ *une suite réelle bornée quelconque. On définit l'application A de H dans H par* $A((u_n)_n) = (\lambda_n u_n)_n$. *1. Montrer que A est bien définie et continue. Calculer sa norme.*

EXERCISE 17. *Soient H un espace de Hilbert et* $A \in L(H)$ *tel que:*$\forall x \in H$, $\langle Ax, x\rangle \geq 0$. *1. Montrer que:* $\forall x \in Ker(A)$, $\forall y \in H$, $\forall t \in \mathbb{R}$: $t\langle Ay, ty - x\rangle \geq 0$. *En déduire que* $Ker(A) \subset [Im(A)]^\perp$. *2. Montrer que* $Ker(A) = [Im(A)]^\perp$ *(on peut se servir de* A^**). Que vaut alors* $[Ker(A)]^\perp$ *?*

EXERCISE 18. *Soit* (e_n) *une base orthonormale d'un espace de Hilbert H et U l'opérateur défini par* $U(e_n) = e_n+1$. *Montrer que* $\|U + I_d\| = 2$.

EXERCISE 19. *Soit H un espace de Hilbert complexe et* $T \in L(H)$ *positif. Le but de l'exercice est de démontrer que T admet une racine carrée positive unique (c'est-à-dire,* $B^2 = T$ *et* $B \geq 0$*).*

Sans perte de généralité, on peut supposer que de plus T est une contraction, c'est-à-dire $\|T\| \leq 1$, *ou encore* $0 \leq T \leq I$. *On pose aussi S = I - T. Soit* $(A_n)_{n\geq 0} \in L(H)$ *la suite définie par:*

$$A_0 = 0, A_{n+1} = \frac{1}{2}(S + A_n^2), n = 0, 1, ...$$

(1) (i) Montrer que $0 \leq S \leq I$.

(ii) Montrer que $S_n \geq 0$ *pour tout entier* $n \geq 0$.

(2) Montrer que les A_n, *ainsi que les* A_n -A_{n-1}, *sont des polynômes en* S *à coefficients positifs.*

(3) Montrer que pour tout $n \geq 0$, *An est positif et commute avec* T.

(4) Montrer que pour tout n, $A_n \leq I$.

(5) Montrer que pour tout n, $A_n \leq A_{n+1}$.

(6) En déduire qu'il existe $A \in L(H)$, $0 \leq A \leq I$, *vérifiant si on pose* $B = I$ - $A \geq 0$:

$\forall x \in H$, $A_n x \to Ax$, *et de plus* $2A = S + A^2$, $T\,A = AT$ *et* $B^2 = T$, $BT = T\,B$.

(7) Montrer que B est unique.

CHAPTER 3

Différentes classes d'opérateurs

Dans ce chapitre nous proposons une brève étude de differentes classes d'opérateurs normaux définis sur un espace de Hilbert et donné leurs propriétés.

On commence avec la notion essentielle d'adjoint d'un opérateur linéaire, plusieurs des classes particuliéres d'opérateurs bornés sur les espaces de Hilbert seront ensuite définies au moyen de cette notion.

1. Opérateur adjoint

DEFINITION 27. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et $A \in L(E;F)$; l'unique application linéaire $A^* \in L(F;E)$ tel que pour tout $x \in E$ et tout $y \in F$ on ait: $\langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$ est appelée adjointe de A.*

PROPOSITION 12. *Soient H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in L(H)$, appelé* ***adjoint*** *de A, vérifiant la relation suivante: pour tous $x, y \in H$:*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle .$$

De plus, on a: $\|A\| = \|A^*\|$.

PROOF. D'après l'inégalité de Cauchy Schwarz et la définition de la norme opérateur, on a

l'inégalité:

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \|A\| . \|x\| . \|y\| .$$

Ainsi, l'application $\ell_y : x \longmapsto \langle Ax, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H, et par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément dans H notons-le $A^*(y)$ tel que:

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle .$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in H$ et $\lambda \in K$, $A^*(y) + \lambda A^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $A^*(y + \lambda z)$. Par unicité,

$$A^*(y) + \lambda A^*(z) = A^*(y + \lambda z),$$

ce qui prouve que A^*est linéaire.

Enfin, on calcule la norme opérateur de A^*

$$\|A^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle A^* x, y\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle y, A^* x\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1, \|y\|\leq 1} |\langle Ay, x\rangle| = \|A\| .$$

$\square$

1.1. Propriétés des opérateurs adjoints. *Regroupons dans la proposition suivante quelques propriétés des adjoints.*

Proposition 13. *Soient $T, S \in L(H)$ et $\alpha \in \mathbb{k}$. Alors:*

1. $I^* = I$.
2. $(T^*)^* = T$.
3. $(\alpha T + \beta S)^* = \overline{\alpha} T^* + \overline{\beta} S^*, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
4. $(TS)^* = S^* T^*$.
5. Si T est inversible d'inverse T^{-1}, alors T^* est inversible et $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

Proof. Pour tout $y \in H$, l'application définie de H dans $\mathbb{k}$ comme suit:

$$f_y : x \mapsto \langle Ax, y \rangle$$

est linéaire et continue.

D'après le théorème de la représentation de Riesz, il existe un vecteur unique $u_y \in H$ tel que:

$$\forall x \in H, \ f_y\left(x\right) = \langle Ax, y \rangle = \langle x, u_y \rangle .$$

Pour tout $y \in H$ on pose $A^* y = u_y$.

a/ $\forall x, y, z \in H, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}$ on a

$$\begin{aligned} \langle x, A^*\left(\lambda y + \mu z\right)\rangle &= \langle Ax, \lambda y + \mu z\rangle \\ &= \overline{\lambda}\langle Ax, y\rangle + \overline{\mu}\langle Ax, z\rangle \\ &= \langle x, \lambda A^* y + \mu A^* z\rangle \end{aligned}$$

d'où la linéarité de A^*.

b/

$$\begin{aligned} \forall x &\in H, \left\|A^* x\right\|^2 = \langle A^* x, A^* x\rangle \\ &= \langle A^* x, u_x\rangle = \langle A\left(A^* x\right), x\rangle \leq \left\|A\left(A^* x\right)\right\| \left\|x\right\| \end{aligned}$$

Comme A est borné

$$\begin{aligned} \left\|A\left(A^* x\right)\right\| &\leq \left\|A\right\| . \left\|A^* x\right\| \\ &\leq \left\|A\right\| \left\|x\right\| \end{aligned}$$

Montrons que $(T^*)^* = T$.

Pour cela on montre que pour tous $x \in E$ et $y \in F$, on a: $\langle Tx; y\rangle = \langle (T^*)^* x; y\rangle$.

On a: $\langle Tx; y\rangle = \langle x; T^* y\rangle = \overline{\langle T^* y; x\rangle} = \overline{\left\langle y; \left(T^*\right)^* x\right\rangle}$
$= \langle (T^*)^* x; y\rangle$.

Pour vérifier que $(TS)^* = S^* T^*$, il suffit de montrer que pour tous $x \in E$ et $y \in F$; on a:

$$\left\langle \left(TS\right)^* x; y\right\rangle = \langle S^* T^* x; y\rangle .$$

On a, par défintion de l'adjoint,

$$\left\langle \left(TS\right)^* x; y\right\rangle = \langle x; \left(TS\right) y\rangle$$

$= \langle T^* x; Sy\rangle = \langle \left(S^* T^*\right) x; y\rangle$

Comme ceci est vrai pour tous vecteurs $x; y$, on a l'égalité $(TS)^* = S^* T^*$. □

Proposition 14. *Soit $A \in L\left(H\right)$, Alors:* $\left\|A\right\|^2 = \left\|AA^*\right\|$.

PROOF. Pour $h \in H$ avec $\|h\| \leq 1$, on a:

$$\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah \rangle = \langle A^*Ah, h \rangle \leq \|A^*Ah\| . \|h\| \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| . \|A\| .$$

d'où:

$$\|A\|^2 \leq \|A^*A\| \leq \|A^*\| . \|A\| .$$

En simplifiant par $\|A\|$, on obtient $\|A\| \leq \|A^*\|$. En remplaçant A par A^* , on obtient

$$\|A^*\| \leq \|A^{**}\| = \|A\| .$$

Ainsi $\|A\| = \|A^*\|$, et la chaîne d'inégalités est en fait une chaîne d'égalités. $\square$

1/ *L'adjoint de l'opérateur scalaire $A = \lambda I$ est l'opérateur scalaire $A^* = \overline{\lambda} I$*

$$\begin{aligned} \forall \lambda &\in \mathbb{k}, \forall x, y \in H, \ \langle x, A^*y \rangle = \langle Ax, y \rangle \\ &= \langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \left\langle x, \overline{\lambda} y \right\rangle . \end{aligned}$$

2/ *Si $A = (a_{ij})$ la représentation matricielle d'un opérateur A, alors la représentation matricielle de A^* est:*

$$\left(\overline{A^t}\right) = \left(\overline{a_{ji}}\right) .$$

En effet, on a:

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} x_j \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} \langle x, A^*y \rangle &= \langle Ax, y \rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) \overline{y_i} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n a_{ij} \overline{y_i} \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \sum_{i=1}^n \overline{\overline{a_{ij}} y_i} \end{aligned}$$

on a $(a_{ij} y_i) = A^t y$,d'où $(\overline{a_{ij}} y_i) = \overline{A^t} y$, i.e $A^* y = \overline{A^t} y$.

EXAMPLE 16. *Si $\begin{pmatrix} 1+i & 2 \\ 2i & -i \end{pmatrix}$ la représentation matricielle d'un opérateur $A \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}^2\right)$ alors A^* est représenté par $\begin{pmatrix} 1-i & -2i \\ 2 & i \end{pmatrix}$*

EXAMPLE 17. *Soient $H = L^2([0,1])$ et $A \in \mathcal{L}(H)$ tel que:*

$$\forall f \in H, \forall x \in [0,1], \ Af(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

On a:

$$\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^1 f(t)\, \chi_{[0,x]}(t)\, dt$$

alors $\forall f, g \in H$;

$$\begin{aligned}\langle f, A^{*}g\rangle &= \langle Af, g\rangle = \int_0^1 Af\left(x\right)\overline{g\left(x\right)}dx = \int_0^1\left(\int_0^1 f\left(t\right)\chi_{[0,x]}\left(t\right)dt\right)\overline{g\left(x\right)}dx\\ &= \int_0^1\int_0^1 f\left(t\right)\chi_{[0,x]}\left(t\right)\overline{g\left(x\right)}dtdx\\ &= \int_0^1 f\left(t\right)\left(\int_0^1\chi_{[0,x]}\left(t\right)\overline{g\left(x\right)}dx\right)dt.\end{aligned}$$

Donc

$$A^{*}g\left(t\right) = \int_0^1\chi_{[0,x]}\left(t\right)g\left(x\right)dx.$$

Remarquons que $0 \leq t \leq x \Leftrightarrow t \leq x \leq 1$, *d'où* $A^{*}g\left(t\right) = \int_t^1 g\left(x\right)dx.$

1.2. Propriétés des opérateurs adjoints.

THEOREM 21. *Soient* $A, B \in \mathcal{L}\left(H\right)$, *alors on a:*
(1) $\left(A^{*}\right)^{*} = A^{**} = A$
(2) $\left(A+B\right)^{*} = A^{*} + B^{*}$
(3) $\left(\lambda A\right)^{*} = \overline{\lambda}A^{*}, \forall\lambda \in \mathbb{C}$
(4) $\left(AB\right)^{*} = B^{*}A^{*}$
(5) $\left\|A^{*}\right\| = \left\|A\right\|$
(6) $\left\|A^{*}A\right\| = \left\|AA^{*}\right\| = \left\|A\right\|^{2}$
(7) *Si A est inversible, alors* A^{*} *est inversible et on a* $\left(A^{*}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{*}$

PROOF. (1) $\forall x, y \in H$; $\langle x, A^{**}y\rangle = \left\langle x, \left(A^{*}\right)^{*}y\right\rangle = \langle A^{*}x, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$
i.e $\langle x, \left(A^{**} - A\right)y\rangle = 0$ d'où $A^{**} = A$.
(2)

$$\begin{aligned}\forall x, y &\in H;\ \left\langle x,\ \left(A+B\right)^{*}y\right\rangle = \langle\left(A+B\right)x, y\rangle = \langle Ax + Bx, y\rangle\\ &= \langle Ax, y\rangle + \langle Bx, y\rangle = \langle x, A^{*}y\rangle + \langle x, B^{*}y\rangle\\ &= \langle x, A^{*}y + B^{*}\ y\rangle = \langle x,\ \left(A^{*} + B^{*}\right)y\rangle\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}\forall x, y &\in H, \forall\lambda \in \mathbb{C};\ \left\langle x, \left(\lambda A\right)^{*}y\right\rangle = \langle\left(\lambda A\right)x, y\rangle = \langle\lambda Ax, y\rangle\\ &= \lambda\langle Ax, y\rangle = \lambda\langle x, A^{*}y\rangle\\ &= \left\langle x, \overline{\lambda}A^{*}y\right\rangle\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}\forall x, y &\in H;\ \left\langle x,\ \left(AB\right)^{*}y\right\rangle = \langle\left(AB\right)x, y\rangle = \langle A\left(Bx\right), y\rangle\\ &= \langle Bx, A^{*}y\rangle = \langle x, B^{*}\left(A^{*}y\right)\rangle\\ &= \langle x, \left(B^{*}A^{*}y\right)\rangle\end{aligned}$$

(5) $\forall x \in H$,

$$\begin{gathered}\left\|A^{*}x\right\|^{2} = \langle A^{*}x, A^{*}x\rangle = \langle AA^{*}x, x\rangle \leq \left\|AA^{*}x\right\|\\ \left\|x\right\| \leq \left\|A\right\|\left\|A^{*}x\right\|\left\|x\right\|\end{gathered}$$

donc

$$\left\|A^{*}x\right\| \leq \left\|A\right\|\left\|x\right\|\ \ \forall x \in H,$$

d'où $\|A^*\| \leq \|A\|$.

De la même façon pour l'inégalité réciproque.

(6) On a

$$\|A^*A\| \leq \|A^*\| \|A\| = \|A\|^2.$$

Réciproquement,

$$\forall x \in H; \|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax \rangle$$
$$= \langle A^*Ax, x \rangle \leq \|A^*Ax\| \|x\| \leq \|A^*A\| \|x\|^2$$

identiquement $\|A\|^2 \leq \|A^*A\|$, d'où l'égalité.

Remplaçons A par A^*, on obtient $\|A\|^2 = \|A^*\|^2 = \|A^{**}A^*\| = \|AA^*\|$

(7) Si A est inversible, alors A^{-1} existe et $AA^{-1} = A^{-1}A = I$,

on a: $I = I^* = \left(AA^{-1}\right)^* = \left(A^{-1}A\right)^*$

$= \left(A^{-1}\right)^* A^* = A^* \left(A^{-1}\right)^*$,

alors A^* est inversible, et son inverse est $\left(A^{-1}\right)^*$. □

Example 18. *Soit $S : L^2 \to L^2$ un opérateur défini par*

$$S(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (0, \alpha_1, \alpha_2, ...), \text{ alors } S^*(\alpha_1, \alpha_2, ...) = (\alpha_2, \alpha_3, ...).$$

(S est nomé le shift)

Solution 1. *Soient (α_n) et (β_n) deux suites dans L^2 et $S : L^2 \to L^2$. Alors:*

$$\langle S^*(\alpha_n), (\beta_n) \rangle = \langle (\alpha_n), S(\beta_n) \rangle$$
$$= \langle (\alpha_1, \alpha_2, ...), (0, \beta_1, \beta_2, ...) \rangle$$
$$= \alpha_2 \overline{\beta_1} + \alpha_3 \overline{\beta_2} + ...$$
$$= \langle (\alpha_2, \alpha_3, ...), (\beta_1, \beta_2, ...) \rangle.$$

Ainsi S^* est bien donné par la formule annoncée.

Definition 28. *Soit E un espace de Banach, pour $x \in E$ et $f \in E'$, nous noterons parfois $\langle f, x \rangle$ au lieu de $f(x)$. Soit $T \in L(E, F)$ l'adjoint de T not´e T^* est l'opérateur linéaire $F' \to E'$ défini par:*

$$\langle T^*f, x \rangle = \langle f, Tx \rangle, \forall f \in F', x \in E.$$

On vérifie immédiatement que $T \in L(F', E')$ (et que T et T^* ont la même norme).

Definition 29. *Pour $A \subset E$, on note: $A^\perp := \{f \in E' : f(x) = 0, \forall x \in A\}$*

et de même pour $B \in E'$, on note
$B^\perp = \{x \in E : f(x) = 0, \forall f \in B\}$.

Lemma 5. *Soit $T \in L(E, F)$, alors $Im(T)$ est fermé si et seulement si:*

$Im(T) = (kerT^*)^\perp$......... (1)

Proof. Si la relation (1) a lieu; alors $Im(T)$ est évidemment fermé. Par ailleurs, l'inclusion $Im(T) \subset (ker(T^*))^\perp$ est ´evidente.

Supposons que $Im(T)$ est fermé et que l'inclusion précédente soit stricte, alors il existe $y \in (ker(T^*))^\perp \setminus Im(T)$. Par le théorème de séparation stricte, il existe alors $f \in F'$ telle que $f(y) > 0$ et $f \equiv 0$ sur $Im(T)$ c'est à dire $f \in ker(T^*)$ ce qui contredit le fait que $y \in (ker(T^*))^\perp$. □

Proposition 15. *Pour tout $A \in \mathcal{L}(H)$, on a:*
(1) $\ker A = (R(A^*))^{\perp}$
(2) $\overline{R(A)} = (\ker(A^*))^{\perp}$

Proof. (1)

$$\begin{aligned} \text{Si } x &\in \ker(A) \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow \langle Ax, y\rangle = 0, \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow \langle x, A^* y\rangle = 0, \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow x \perp A^* y, \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow x \in (R(A^*))^{\perp} \end{aligned}$$

(2) D'après (1)

$$\ker(A^*) = (R(A^{**}))^{\perp} = (R(A))^{\perp}.$$

Alors

$$(\ker(A^*))^{\perp} = (R(A))^{\perp\perp} = \overline{R(A)}.$$

□

Proposition 16. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in L(E;F)$; Alors $F = ker(T^*) \oplus \overline{(Im(T))}^{\perp}$ et*

$E = ker(T) \oplus \overline{(Im(T^*))}^{\perp}$ ou $\overline{(Im(T))}$ désignent la fermeture (pour la norme) de $Im(T)$.

Proof. Il suffit de prouver la premiére assertion, la seconde s'obtenient en échangeant le rôle de T et T*.

On a les équivalences suivantes:

$$\begin{aligned} y \in kerT^* &\Leftrightarrow \forall x \in E : \langle T^* y, x\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle y, Tx\rangle = 0 \Leftrightarrow y \perp Im(T). \end{aligned}$$

La continuité du produit scalaire (conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), implique que

$$y \perp Im(T) \Leftrightarrow y \perp \overline{Im(T)}.$$

Ainsi l'orthogonal de $kerT^*$ est l'adhérence de l'image de T. □

2. Opérateur auto-adjoint

Definition 30. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que A est un opérateur* ***auto-adjoint*** *si $A = A^*$ (on dit aussi symétrique lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ et hermitien lorsque $\mathbb{k} = \mathbb{C}$).*

Notons par $\mathcal{A}(H)$ l'ensemble des opérateurs auto-adjoints sur H.

Example 19. *1. L'opérateur identité sur un espace de Hilbert est auto-adjoint.*

2. Les opérateurs linéaires sur $\mathbb{C}^n$ donnés par des matrices hermitiennes (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq n$, c'est à dire telles que $a_{ij} = a_{ji}$ sont auto-adjoints.

3. Les projections orthogonales sur des sous-espaces fermés de H sont auto-adjoints.

En effet, soit F un sous-espace fermé d'un espace de Hilbert H. Soit P_F la projection

orthogonale de H sur F (voir Théorème 4.3.4). Alors, pour tous x, $y \in H$:

$\langle x, P_F(y)\rangle = \langle P_F(x), P_F(y)\rangle = \langle P_F(x), y\rangle$.

EXAMPLE 20. *Soit A un opérateur dont la représentation matricielle*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & -1 \end{pmatrix}$$

On a:$\overline{A^t} = A$; alors $A = A^*$.

EXAMPLE 21. *Soit A un opérateur sous la forme:*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ -i & -2 & 5 \\ 5i & 5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 3 & -i & 5i \\ i & -2 & 5 \\ -5i & 5 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{A^t} = \begin{pmatrix} 3 & i & -5i \\ -i & -2 & 5 \\ 5i & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

donc $A = A^*$.

EXAMPLE 22. *Soit $H = L^2(]0,1[)$ et $A \in \mathcal{L}(H)$ définit par:*

$$\forall f \in H, \forall x \in]0,1[, \ Af(x) = \int_0^1 e^{-|x-t|} f(t)\, dt$$

pour tout $f, g \in H$ on a:

$$\begin{aligned} \langle f, A^* g\rangle &= \langle Af, g\rangle = \int_0^1 Af(x)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{-|x-t|} f(t)\, dt\right)\overline{g(x)}dx \\ &= \int_0^1 \int_0^1 f(t)\, e^{-|x-t|}\overline{g(x)}dtdx \\ &= \int_0^1 f(t)\overline{\left(\int_0^1 e^{-|t-x|} g(x)\, dx\right)}dt \\ &= \int_0^1 f(t)\overline{Ag(t)} \end{aligned}$$

donc $A = A^*$.

2.1. Propriétés des opérateurs auto-adjoints.

PROPOSITION 17. *Si A est auto-adjoint, alors:*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}$$

PROOF. Soit

$$M = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}.$$

Si $\|h\| = 1$; alors:

$$|\langle Ah, h\rangle| \leq \|A\|,$$

et donc $M \leq \|A\|$.

D'autre part, remarquons d'abord que pour tout f dans H, $|\langle Af, f\rangle| \leq M\|f\|^2$. Si

$\|h\| = \|g\| = 1$, alors:

$$\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle = \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle Ag, h\rangle + \langle Ag, g\rangle$$
$$= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle g, A^* h\rangle + \langle Ag, g\rangle$$

Puisque $A = A^*$, cela implique:

$$\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle = \langle Ah, h\rangle \pm 2\operatorname{Re}\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, g\rangle$$

En soustrayant l'une de l'autre de ces inégalités, on obtient:

$$4\operatorname{Re}\langle Ah, g\rangle = \langle A(h+g), h+g\rangle - \langle A(h-g), h-g\rangle \leq M\left(\|h+g\|^2 + \|h-g\|^2\right).$$

On obtient alors, par l'identité du parallélogramme,

$$4\operatorname{Re}\langle Ah, g\rangle \leq 2M\left(\|h\|^2 + \|g\|^2\right) = 4M.$$

Soit maintenant $\theta \in [0, 2\pi]$; tel que $\langle Ah, g\rangle = e^{i\theta}|\langle Ah, g\rangle|$. En appliquant l'inégalité précédente avec $e^{i\theta}h$ à la place de h, on obtient

$|\langle Ah, g\rangle| \leq M$ dès lors que $\|h\| = \|g\| = 1$. On prenant le supremum sur g et h, on obtient $\|A\| \leq M$. □

Corollary 6. *Si $A = A^*$ et si $\langle Ah, h\rangle = 0$ pour tout h, alors: $A = 0$.*

Remark 12. *Ce corollaire n'est pas vrai si on ne suppose pas $A = A^*$. Par exemple, pour*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

Alors $\langle Ah, h\rangle = 0$; pour tout $h \in \mathbb{R}^2$.

Theorem 22. *Si H est un espace de Hilbert complexe et si $A \in L(H)$, alors les opérateurs*

$B = \frac{(A+A^*)}{2}$ et $C = \frac{(A-A^*)}{2i}$ sont auto-adjoints et $A = B + iC$. Les opérateurs B et C sont appelés respectivement ***partie réelle*** *et* ***partie imaginaire*** *de A.*

Example 23. *Pour tout $A \in L(H_1, H_2)$, l'opérateur $A^*A \in L(H_1)$ est auto-adjoint, car:*

$$(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A.$$

Proposition 18. *Soit A un opérateur de $\mathcal{L}(H)$, alors:*

1- Si $A, B \in \mathcal{A}(H)$, alors $AB \in \mathcal{A}(H)$ si et seulement si $AB = BA$.
2- A^*A et AA^* sont des opérateurs auto-adjoints.

Proof. 1- $\Leftarrow$ En effet si on a:

$$\begin{aligned} AB &= BA \Rightarrow (AB)^* = (BA)^* \\ (AB)^* &= B^*A^* = A^*B^* = AB \end{aligned}$$

i. e $AB \in \mathcal{A}(H)$.

$\Rightarrow$

$$AB \in \mathcal{A}(H) \Rightarrow AB = (AB)^* = B^*A^* = BA$$

2- Si $A \in \mathcal{A}(H)$ et $A \neq 0$, alors $A^2 \neq 0$.En effet, comme $A \neq 0$ il existe $x_0 \in H$ tel que $Ax_0 \neq 0$ et donc

$$\left\langle A^2x_0, x_0\right\rangle = \langle Ax_0, Ax_0\rangle = \|Ax_0\|^2 > 0$$

A^*A et AA^* sont des opérateurs auto-adjoints. □

THEOREM 23. *Soit H un espace de Hilbert sur le corps $\Bbbk$. Alors $\mathcal{A}(H)$ est fermé par rapport à la convergence forte (ponctuelle).*

PROOF. Soit $\{A_n\}$ une suite de $\mathcal{A}(H)$ qui converge fortement vers A.

Montrons que $A \in \mathcal{A}(H)$, on a d'abord $A \in \mathcal{L}(H)$ d'après le théorème de Banach-Steinhaus.

Pour tous $x, y \in H$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a:

$$\langle A_n x, y \rangle = \langle x, A_n y \rangle .$$

Fixons x et y en utilisant la continuitée du produit scalaire et en passant à la limite, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \langle A_n x, y \rangle = \left\langle \lim_{n\to\infty} A_n x, y \right\rangle = \langle Ax, y \rangle$$
$$\lim_{n\to\infty} \langle x, A_n y \rangle = \left\langle x, \lim_{n\to\infty} A_n y \right\rangle = \langle x, Ay \rangle$$

d'où

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

pour tout $x, y \in H$, i.e $A \in \mathcal{A}(H)$. □

THEOREM 24. *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$, alors $A \in \mathcal{A}(H)$ si et seulement si $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$.*

PROOF. $\Rightarrow$ Si $A \in \mathcal{A}(H)$, alors $\forall x \in H$

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle}$$

donc $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in H$.

$\Leftarrow$ Si $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in H$, alors pour tout $x \in H$

$$\langle Ax, x \rangle = \overline{\langle Ax, x \rangle} = \langle x, Ax \rangle = \langle A^* x, x \rangle$$

d'où

$$\langle (A - A^*) x, x \rangle = 0 \forall x \in H.$$

Par application de l'identité de polarisation généralisée

$$\langle Tx, y \rangle = \frac{1}{4} \left[\langle T(x+y), (x+y) \rangle - \langle T(x-y), (x-y) \rangle + i \langle T(x+iy), (x+iy) \rangle - i \langle T(x-iy), (x-iy) \rangle \right]$$

on obtient

$$\langle (A - A^*) x, y \rangle = 0; \forall x, y \in H.$$

Pour $y = (A - A^*) x$.

On obtient

$$\| (A - A^*) x \|^2 = 0; \forall x \in H$$

i.e $A = A^*$. □

PROPOSITION 19. *Tout opérateur est combinaison linéaire de deux hermitiens (ou de quatre unitaires).*

PROOF. On a: $T + T^*$ est hermitien, $T - T^*$ est anti-hermitien (égal à l'opposé de son adjoint), et donc

$$T = \frac{1}{2(T + T^*)} + \frac{1}{2i(T - T^*)}.$$

Un hermitien de norme 1 se décompose lui-même en moyenne de deux unitaires: si

$$f(t) = t + i\sqrt{1-t^2},$$

il est immédiat que:

$$\overline{f(t)}f(t) = f(t)\overline{f(t)} = 1,$$

$$f(t) + \overline{f(t)} = 2t,$$

et donc $f(T)$ est unitaire et

$$T = \frac{1}{2\left(f(t) + \overline{f(t)}\right)}.$$

$\square$

PROPOSITION 20. *Soient $A \in L(H_1, H_2)$ et $B \in L(H_2, H_3)$ des opérateurs auto-adjoint, Alors:*

(1) A^* *est borné et* $\|A^*\| = \|A\|$.
(2) $(A^*)^* = A$.
(3) $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A^*)^{\perp}$ *et* $\operatorname{Im} A = (\ker A)^{\perp}$.
(4) $(A \circ B)^* = B^* \circ A^*$
(5) $\|A^*A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$.
(6) $A^*A = 0$ *ou* $AA^* = 0$ *implique* $A = 0$.

REMARK 13. *(a) Soit $A \in L(H)$. Si A est auto-adjoint, alors, pour tout $x \in H$:$\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.*

(b) Si $\mathbb{k} = \mathbb{C}$, A est auto-adjoint si et seulement si, pour tout $x \in H$: $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.

THEOREM 25. *Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose:*

$l = \underset{\|x\|=1}{inf} \langle Ax, x\rangle$ *et* $L = \underset{\|x\|=1}{sup} \langle Ax, x\rangle$.
Alors, on a:

(1) $l, L \in [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.
(2) $\|A\| = \sup\{|\langle Ax, x\rangle| \,; x \in H$ *et* $\|A\| = 1\}$.

COROLLARY 7. *Si $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors,*

$\|A\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.

3. Opérateur isométrique

DEFINITION 31. *Soient H un espace de Hilbert et $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que A est **isométrique** si $A^*A = I$.*

3.1. Propriétés des opérateurs isométriques.

PROPOSITION 21. *A est un isométrie si et seulement si:*

$$\|Ax\| = \|x\|\,; \forall x \in H.$$

PROOF. $\Rightarrow$ Si A est une isométrie, alors $A^*A = I$, et donc

$$\forall x \in H, \|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$

$\Leftarrow$

$$\begin{aligned}
\forall x, y \quad \in \quad & H, \langle A^*Ax, y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle \\
\overset{IP}{=}\ & \frac{1}{4}\left[\|Ax + Ay\|^2 - \|Ax - Ay\|^2 + i\,\|Ax + iAy\|^2 - i\,\|Ax - iAy\|^2\right] \\
= \quad & \frac{1}{4}\left[\|A(x+y)\|^2 - \|A(x-y)\|^2 + i\,\|A(x+iy)\|^2 - i\,\|A(x-iy)\|^2\right] \\
= \quad & \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2\right] \\
= \quad & \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

donc

$$\langle (A^*A - I)\,x, y\rangle = 0,\ \forall x, y \in H$$

mettons

$$y = (A^*A - I)\,x$$

on obtient

$$(A^*A - I)\,x = 0, \forall x \in H$$

i. e

$$A^*A = I$$

□

PROPOSITION 22. *Si $A \in L(H)$, les assertions suivantes sont équivalentes:*

1. *A est une isométrique.*
2. *$A^*A = I$.*
3. *$\langle Ah, Ag\rangle = \langle h, g\rangle$; pour tout h, g dans H.*

PROOF. Comme $\langle A^*Ah, g\rangle = \langle Ah, Ag\rangle$, on voit facilement que (2) et (3) sont équivalents.

On obtient (1) à partir de (3) en prenant $g = h$. Pour montrer (1) $\Longrightarrow$ (3), on utilise la formule

de« polarisation »

$$\langle Ah, Ag\rangle = \frac{1}{4}\left(\|A(h+g)\|^2 - \|A(h-g)\|^2 + i\,\|A(h+ig)\|^2 - i\,\|A(h-ig)\|^2\right).$$

□

PROPOSITION 23. *Soient E et F deux espaces de Hilbert, l'application $T \to T^*$ est isométrique de $L(E,F)$ sur $L(F,E)$; pour tout $T \in L(E,F)$ on a $(T^*)^* = T$ et $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$. Pour tout $S \in L(E,F)$ et pour tout $T \in L(F,H)$ on a: $(T \circ S)^* = S^* \circ T^*$.*

4. Opérateurs unitaires

DEFINITION 32. *Soient E et F deux espaces de Hilbert, un élément $U \in L(E,F)$ est appelé* ***unitaire*** *si $U^* \circ U = Id_E$ et $U \circ U^* = Id_F$ .i.e. U est un opérateur* ***unitaire*** *si U est inversible et $U^{-1} = U^*$.*

4.1. Propriétés des opérateurs unitaires.

PROPOSITION 24. *Soient $U, V \in L(H)$ des opérateurs unitaires. Alors:*

(i) U est isométrique .
(ii) $\|U\| = 1$.
(iii) U^{-1} et U^* sont unitaires.
(iv) UV est unitaire.

PROOF. (i) Pour tout $v \in H$, on a: $\|Uv\|^2$

$$= \langle Uv, Uv\rangle = \langle U^*Uv, v\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2 .$$

(ii) Si $\|Uv\| = \|v\|$ pour tout $v \in H$, alors:

$$\|U\| = \sup_{v\in H} \frac{\|Uv\|}{\|v\|} = 1.$$

(iii) C'est une conséquence immédiate de la proposition 13.
(iv) On a bien .

$$(UV)^{-1} = V^{-1}U^{-1} = V^*U^* = (UV)^*$$

Par contre, une application linéaire isométrique n'est pas forcément unitaire. □

EXAMPLE 24. *Soit A un opérateur auto-adjoint, alors l'opérateur $U = (A - i)(A+i)^{-1}$ est unitaire.*

Solution *Calculons U^*;*

$$U^* = (A - i)^{-1}(A + i).$$

Or $A - i$ et $(A + i)^{-1}$ commutent.
D'où

$$UU^* = U^*U = I.$$

EXAMPLE 25. *- Tout opérateur unitaire (si $AA^* = A^*A = I$) est normal; considérons $H = \mathbb{R}^2$ et A la rotation de l'origine avec angle θ donnée par:*

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$$

A est unitaire et normal puisque :

$$A^* = A^t = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix};$$

et $AA^* = A^*A = I$.

EXAMPLE 26. *Le shift S sur $l_2(\mathbb{N})$ est isométrique, le shift S sur $l_2(\mathbb{Z})$ est unitaire.*

PROPOSITION 25. *Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T \in L(E; F)$. Les assertions suivantes sont equivalents :*

1. T est isométrique.
2. $T^*\ T = Id_E$.
Et sont equivalents :
1. T est unitaire.
2. T est surjective et $T^*\ T = Id_E$.
3. T est une isométrie surjective.

PROOF. Montrons la premiére équivalence. Supposons que T est isométrique. Montrer que $\mathrm{T}^*\mathrm{T} = \mathrm{Id}_E$ revient a montrer que pour tous x; y $\in$ E, on a $\langle T^*T(x); y\rangle = \langle x; y\rangle$: Rappelons l'identité de polarisation, a savoir,
$\langle u; v\rangle = \frac{1}{4}(\langle u+v; u+v\rangle - \langle u-v; u-v\rangle +$
$i\,\langle u+iv; u+iv\rangle - i\,\langle u-iv; u-iv\rangle)$;
pour un Hilbert complexe et:

$$\langle u; v\rangle\ \frac{1}{4}(\langle u+v; u+v\rangle - \langle u-v; u-v\rangle\,;$$

pour un Hilbert réel. En utilisant l'une ou l'autre de ces identités et le fait que: $\|T(u)\| = \|u\|$, on en déduit:

$$\langle T^*T(x); y\rangle = \langle x; y\rangle$$

Réciproquement, supposons que $T^*T = Id_E$. Ceci implique que pour tout $x \in E$,

$$\langle T^*T(x); x\rangle = \langle x; x\rangle$$

On en d eduit immédiatement pour tout $x \in E$,

$$\|T(x)\|^2 = \langle Tx; Tx\rangle = \langle x; x\rangle = \|x\|^2$$

ce qui prouve que T est bien isométrique.

Pour la preuve des trois autres equivalences, les implications 1⇒2 et 2⇒ 3 sont evidentes. Pour montrer que 3⇒ 1, on remarque qu'une isométrie linéaire est injective et donc les hypothéses de 3; impliquent que T^{-1}existe. De plus, T etant une isométrie, on a $\mathrm{T}^*\ \mathrm{T} = \mathrm{Id}_E$. En composant a droite par T^{-1}, on obtient

$$T^* = T^{-1}.$$

□

5. Opérateurs normaux

DEFINITION 33. *Soit H un espace de Hilbert et soit $A \in \mathcal{L}(H)$, on dit que A est normal s'il commute avec sont adjoint (i.e)*

$$AA^* = A^*A.$$

REMARK 14. *1. Clairement, un opérateur $A \in L(H)$ auto-adjoint ou unitaires est normal, mais la réciproque est fausse. 2. Les opérateurs normaux forment une classe dénuée de toute socialisation; alors que les unitaires socialisent par produit (si T_1, T_2 sont unitaires, T_1T_2 l'est aussi) et que les hermitiens socialisent par somme (si T_1, T_2 sont hermitiens, $T_1 + T_2$ l'est aussi), on n'a rien de tel pour les opérateurs normaux. Bien qu'ils comprennent beaucoup plus que les unitaires et les hermitiens, les opérateurs normaux sont avant tout un artifice rhétorique qui évite de dupliquer les résultats qui sont valables à la fois dans le cas unitaire et dans le cas hermitien.*

EXAMPLE 27. *1) L'opérateur nul est un opérateur normal.*
2) L'opérateur identité est un opérateur normal.
3) Tout opérateur auto-adjoint est normal; soit H un espace de Hilbert et p un projecteur orthogonal, notons F son image, alors p est auto-adjoint et normal.

4) Soit H un espace de Hilbert séparable admettant une base orthonormale $(h_n)_n$, soit $\alpha = (\alpha_n)_n$ une suite bornée de nombres complexes . On définit Δ_α sur H par:

$$\forall c = (c_n)_n \in \ell^2(\mathbb{N}), \Delta_\alpha(\sum_{n\geq 0} c_n h_n) = \sum_{n\geq 0} \alpha_n c_n h_n$$

l'application linéaire Δ_α est dite diagonale car elle admet une réprésentation matricielle diagonale relativement à la base $(h_n)_n$, avec $(\alpha_n)_n$ sur sa diagonale. On vérifie que Δ_α est continue, de norme $\|\alpha\|_\infty$, de plus $\Delta_\alpha^* = \Delta_{\bar{\alpha}}$, oŭ $\bar{\alpha}$ est la suite des nombres conjugués de la suite α.
cette opérateur est normal, en effet:

$$\Delta_\alpha \Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha \Delta_{\bar{\alpha}} = \Delta_\beta = \Delta_{\bar{\alpha}} \Delta_\alpha = \Delta_\alpha^* \Delta_\alpha$$

oŭ $\beta = (\beta_n)$ est la suite définie par $\beta_n = |\alpha_n|^2$; soit Δ_α definit par:

$$\Delta_\alpha = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

et;

$$\Delta_\alpha^* = \Delta_{\bar{\alpha}} = \begin{pmatrix} -2i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

et comme

$$\Delta_\alpha \Delta_\alpha^* = \Delta_\alpha^* \Delta_\alpha = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc Δ_α est normal.
5) Soient $H = L^2(\Omega, \mu)$ et $f \in L^\infty(\Omega, \mu)$, on définie M_f par : $M_f(g) = fg$.
on verifie que M_f est linéaire, continue, de norme $\|f\|_\infty$ et $M_f^* = M_{\bar{f}}$, en effet

$$M_f M_f^* = M_f M_{\bar{f}} = M_{|f|^2} = M_{\bar{f}} M_f.$$

6) Pour $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{C}$, A est normal.
$A^*A = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{a}a & 0 \\ 0 & \overline{b}b \end{pmatrix}$
$AA^* = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\overline{a} & 0 \\ 0 & b\overline{b} \end{pmatrix}$
7) Soit $S : L^2 \to L^2$ tel que:
$S(x_1, x_2, x_3, ...) = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$

$\langle SX, Y \rangle = \langle X, S^*Y \rangle\,; \quad X, Y \in L^2$
On pose $X = (x_1, x_2, x_3, ...)$, $Y = (y_1, y_2, y_3, ...)$
$\langle SX, Y \rangle = \langle (0, x_1, x_2, x_3, ...), (y_1, y_2, y_3, ...) \rangle$
$\qquad = 0\overline{y_1} + x_1\overline{y_2} + x_2\overline{y_3} + \cdots$
On pose $S^*Y = (z_1, z_2, z_3, ...)$
$\langle X, S^*Y \rangle = x_1\overline{z_1} + x_2\overline{z_2} + x_3\overline{z_3} + \cdots$

$$\begin{cases} \overline{z_1} = \overline{y_2} \to z_1 = y_2 \\ \overline{z_2} = \overline{y_3} \to z_2 = y_3 \\ \overline{z_3} = \overline{y_4} \to z_3 = y_4 \\ \qquad \vdots \\ \overline{z_n} = \overline{y_{n+1}} \to z_n = y_{n+1} \end{cases}$$

$(SS^*)X = S(S^*X) = S(x_2, x_3, x_4, ...)$
$\qquad = (0, x_2, x_3, x_4, ...)$
$(S^*S)X = S^*(SX) = S^*(0, x_1, x_2, x_3, ...)$
$\qquad = (x_1, x_2, x_3, ...)$
$SS^* \neq S^*S$
L'opérateur S n'est pas normal.
Les opérateurs normaux sont caractérisés par la propriétés suivante :

5.1. Propriétés des opérateurs normaux.

PROPOSITION 26. *Un opérateur borné est normal si et seulement si :* $\|Ax\| = \|A^*x\|\,, \forall x \in H$.

PROOF. 1) Si A est normal, alors $A^*A = AA^*$

$$\begin{aligned} A^*A &= AA^* \Rightarrow \forall x \in H, \langle A^*Ax, x \rangle = \langle AA^*x, x \rangle \\ &\iff \forall x \in H, \langle Ax, Ax \rangle = \langle A^*x, A^*x \rangle \\ &\iff \forall x \in H, \|Ax\|^2 = \|A^*x\|^2\,. \end{aligned}$$

2) On utilisant l'identité de polarisation on obtient :

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in H, \langle A^*Ax, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle = \frac{1}{4}\left[\|A(x+y)\|^2 - \|A(x-y)\|^2 + i\,\|A(x+iy)\|^2 - i\,\|A(x-iy)\|^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[\|A^*(x+y)\|^2 - \|A^*(x-y)\|^2 + i\,\|A^*(x+iy)\|^2 - i\,\|A(x-iy)\|^2\right] \\ &= \langle A^*x, A^*y \rangle = \langle AA^*x, y \rangle\,; \end{aligned}$$

donc

$$\forall x, y \in H,\ \langle (A^*A - AA^*)\,x, y \rangle = 0,$$

i.e.

$$A^*A - AA^* = 0,$$

alors A est normal. □

EXAMPLE 28. *Soit H un espace de Hilbert, A un opérateur tel que :* $Ax = ix, \forall x \in H$.
on a: $A^*x = -ix = -Ax$ *(A n'est pas hermitien (auto-adjoint)), d'oŭ :* $\|A^*x\| = \|Ax\|\,, \forall x \in H$.
ainsi, A est normal.

LEMMA 6. *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal, Alors* $\ker A = \ker A^*$.

PROOF. Soit $x \in \ker A$, alors

$$\|A^*x\|^2 = \langle A^*x, A^*x\rangle = \langle AA^*x, x\rangle = \langle A^*Ax, x\rangle = 0.$$

en utilisant pour la troisième égalité le fait que A est normal donc $A^*A = AA^*$. Ceci prouve donc que $\ker A \subset \ker A^*$, maintenant remarquons que si A est normal, alors A^* est normal et en appliquant l'inclusion qu'on vient de démontrer à A^*, on obtient

$$\ker A^* \subset \ker A^{**} = \ker A,$$

car

$$A^{**} = A.$$

Finalement

$$\ker A = \ker A^*.$$

□

LEMMA 7. *Soit H un espace de Hilbert et $A \in L(H)$ un opérateur normal, A est inversible si et seulement s'il existe une constante $C \succ 0$ telle que :*

$$\|Ax\| \geq C\|x\| \text{ pour tout } x \in H.$$

PROOF. $\Rightarrow$) supposons que A est inversible,

$$\forall x \in H, \|x\| = \left\|A^{-1}Ax\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|Ax\|;$$

il suffit de prendre

$$C = \frac{1}{\|A^{-1}\|}.$$

$\Rightarrow$) on a :

$$\|Ax\| \geq C\|x\|, \forall x \in H,$$

on va démontrerque A est bijectif (injectif+surjectif):
1) A est injectif, en effet, soit

$$y \in \ker A \Rightarrow Ay = 0;$$
$$\Rightarrow 0 = \|Ay\| \geq C\|y\|;$$
$$\Rightarrow C\|y\| = 0; \Rightarrow y = 0;$$

donc $\ker A = \{0\}$.
2) A est surjectif, en effet, on a

$$\overline{Im(A)} = (\ker A^*)^{\perp},$$

et comme A est normal

$$\ker A^* = \ker A$$

et donc

$$\overline{Im(A)} = (\ker A)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = H.$$

□

THEOREM 26. *1) Soit H un espace de Hilbert complexe, un opérateur $A \in L(H)$ est normal si et seulement s'il existe deux opérateur auto-adjoint $A_1, A_2 \in L(H)$ tel que $A_1A_2 = A_2A_1$ et $A = A_1 + iA_2$.*
2) Si A est normal, A est inversible si et seulement si $A_1^2 + A_2^2$ est inversible et, $A^{-1} = A^*\left(A_1^2 + A_2^2\right)^{-1}$.

PROOF. 1)i) si A est normal, alors;

$$A_1 = \frac{1}{2}\left(A + A^*\right) \; et \; A_2 = \frac{1}{2}\left(A - A^*\right)$$

satisfait à l'énoncé du théorème.
ii) Si A_1 et A_2 vérifiant les conditions du théorème alors;

$$A^*A = \left(A_1 - iA_2\right)\left(A_1 + iA_2\right) = A_1^2 + A_2^2 = \left(A_1 + iA_2\right)\left(A_1 - iA_2\right) = AA^*.$$

2) Si A est normal, alors

$$AA^* = A^*A = \left(A_1 + iA_2\right)\left(A_1 - iA_2\right) = A_1^2 + A_2^2 \qquad ((1))$$

i) si A est inversible, A^* l'est aussi, et il en est de même du produit $A^*A = A_1^2 + A_2^2$ est donc inversible.
ii) Si $A_1^2+A_2^2$ est inversible, en multipliant (1) à gauche et à droite par $\left(A_1^2 + A_2^2\right)^{-1}$, on obtient

$$A\left(A^*\left(A_1^2 + A_2^2\right)^{-1}\right) = I,$$

et

$$\left(\left(A_1^2 + A_2^2\right)^{-1} A^*\right) A = I.$$

Ceci montre que A est inversible, d'inverse donné par $A^*\left(A_1^2 + A_2^2\right)^{-1}$. □

THEOREM 27. *L'ensemble des opérateurs normaux est fermé dans $L(H)$.*

PROOF. Soit (A_n) une suite d'opérateurs normaux convergentes en norme vers $A \in \mathcal{L}(H)$, alors pour tout $x \in H$

$$\|Ax\| = \lim \|A_n x\| = \lim \|A_n^* x\| = \|Ax\|.$$

□

EXAMPLE 29. *considérons $H = \mathbb{R}^2$ et A la rotation de l'origine avec angle donnée par:*

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

A est unitaire et normal puisque :
$A^* =^t A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$
et $AA^* = A^* \; A = I$.

6. Opérateurs compacts

DEFINITION 34. *Soient E, F des espaces de Banach. Une application linéaire continue $A \in L(E, F)$ est dite* ***compacte*** *si l'image $A(\overline{B_E})$ par l'application A de la boule unité fermée $\overline{B_E}$ de l'espace E est relativement compacte (en norme) dans F. On note $K(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de E dans F. Si $E = F$ alors, on note $K(E)$.*

On rappelle que si (X, d) est un espace métrique, un sous-ensemble Y de X est dit relativement compact si son adhérence dans X est compacte.

PROPOSITION 27. *Si A est un opérateur linéaire de E dans F. Alors; les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *$A \in K(E,F)$*
2. *Pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de E, la suite $(Ax_n)_n$ admet une sous suite convergente dans F.*

PROOF. $\triangleright$ On suppose que A est un opérateur compact et on considère une suite bornée quelconque $(x_n)_n$. Si on pose $\alpha = \operatorname{Sup}_n \|x_n\|$, alors la suite $(Ax_n)_n$ est contenue dans l'ensemble $A(B_E(0,\alpha))$.

Or $A(B_E(0,\alpha))$ est relativement compact, on peut alors extraire de $(Ax_n)_n$ une sous suite convergente.

$\triangleleft$ Soient maintenant M une partie bornée de E et $(y_n)_n$ une suite d'éléments de $\overline{A(M)}$. Alors il existe une suite $(z_n)_n$ d'éléments de $A(M)$ telle que:

$$\| z_n - y_n \| \leq \frac{1}{n}.$$

Par hypothèse, la suite $(z_n)_n$ admet une sous suite convergente, la suite $(y_n)_n$ aussi. Il s'en suit que $A(M)$ est relativement compact. D'où A est compact. $\square$

REMARK 15. *Un opérateur compact est nécessairement continu, sinon il existerait une suite $(x_n)_n$ bornée telle que $\|Ax_n\| \to +\infty$, ce qui contredit la compacité.*

On rappelle maintenant le théorème d'Ascoli, qui est un outil pour montrer la compacité.

THEOREM 28. *(Théorème d'Ascoli) Soient (I,d) un espace métrique compact et (X,d') un espace métrique complet. Alors; une partie H de $C(I,X)$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

1. *H est équicontinue, i.e.,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x,y \in I, \forall f \in H, (d(x,y) < \delta) \Rightarrow d'(f(x),f(y)) < \varepsilon.$$

2. *Pour tout $x \in I$, l'ensemble $H(x) = \{f(x), f \in H\}$ est relativement compact.*

EXAMPLE 30. *Soient H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie et (x_n) une base hilbertienne de H , et $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de nombres complexe décroissante, et $T \in L(H)$ tel que:*

$$T(x_n) = \lambda_n.x_n = (\lambda_1.x_1 \ , \ \lambda_2.x_2 \ , ...)$$

Alors T est compact.

Pour démontrer que T est un opérateur compact, il suffit de montrer que T est un opérateur borné.

On a:

$$\| T(x_n) \|_{l^2} = \|\lambda_n.x_n\|_{l^2} = \| (\lambda_1.x_1 \ , \ \lambda_2.x_2 \ , ...) \|_{l^2}$$

$$\begin{aligned} & \| \quad T(x_n) \|_{l^2}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} | \lambda_i |^2 | x_i |^2 \\ & \leq \quad (\max_{i \in \mathbb{N}} (| \lambda_i |))^2 . \| x \|^2 \\ & = \quad \lambda_1^2 . \| x \|^2 ; \forall x \in l^2 \\ \textit{donc} \quad & \| \quad T \| \leq | \lambda_1 | . \end{aligned}$$

d'où T est un opérateur compact.

Example 31. *Soit $E = C([0,1], \Bbbk)$. L'opérateur de Volterra $A : E \to E$ défini par:*

$$\forall f \in E : Af(x) = \int_0^x f(t)dt, \forall x \in [0,1]$$

est compact.

On va utiliser le théorème d'Ascoli avec $I = [0,1]$ et $X = \Bbbk$. On pose $H = A(B_E)$.

Soit $f \in B_E$, pour tous $x, y \in [0,1]$, on a:

$$\begin{aligned} |Af(x) - Af(y)| &= \left| \int_x^y f(t)dt \right| \\ &\leq |x-y| \|f\|_\infty \\ &\leq |x-y| . \end{aligned}$$

D'où,

$$\forall x \in I, \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta = \varepsilon > 0; \ \forall f \in B_E, \ \forall y \in I, \ (|x-y| < \delta) \Rightarrow (|Af(x) - Af(y)| < \varepsilon).$$

Autrement dit, l'ensemble H est équicontinu. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, $H(x)$ est une partie de $\Bbbk$ donc si $H(x)$ est borné alors, $H(x)$ est relativement compacte. Or, pour tout $x \in [0,1]$, on a:

$$\begin{aligned} \forall f \quad \in \quad & B_E : |Af(x)| \leq \int_0^x |f(t)| \, dt \\ \leq \quad & x \|f\|_\infty \\ \leq \quad & x \leq 1. \end{aligned}$$

Les conditions du théorème d'Ascoli sont satisfaites, il s'en suit que A est compact.

Proposition 28. *Soit $T_n : X \to Y$ un opérateur linéaire compact pour tout $n \geq 1$, tel que T_n converge vers T dans K (X; Y). Alors; T est un opérateur compact.*

6.1. Propriétés fondamentales des opérateurs compacts.

Lemma 8. *$K(H)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $L(H)$. En particulier la somme de deux opérateurs compacts est un compact. Si $\{T_n\}_{n \geq 1}$ est une suite d'opérateurs compacts convergeant au sens de la norme des opérateurs vers T dans $L(H)$; alors T est compact.*

Proof. La caractérisation par les suites permet de montrer que $K(H)$ est un sous-espace vectoriel de $L(H)$. Pour établir la stabilité de la compacité par convergence en norme d'opérateurs, on utilisera le critère de précompacité. Il existe

n_ε tel que $\|T_{n_\varepsilon} - T\|$. Or T_{n_ε} étant compact, il existe une famille finie de vecteurs $\{v_i\}_{i\in\mathbb{N}^*}$ de H, tel que

$$T_{n_\varepsilon}(B_H) \subset \underset{1\leq i\leq N}{\cup} B_H(v_i, \varepsilon),$$

Il résulte alors de l'inégalité triangulaire,

$$T(B_H) \subset \underset{1\leq i\leq N}{\cup} B_H(v_i, 2\varepsilon);$$

d'où l'on déduit que T est compact. □

THEOREM 29. *Soient H un espace de Hilbert et A ∈ L(H); alors A est compact si et seulement si A^* est compact.*

PROOF. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de H.

Comme AA^* est compact, $(x_n)_{n\geq 1}$ admet une sous-suite $\left(x_n^{'}\right)_{n\geq 1}$telle que: $\left(AA^*x_n^{'}\right)_{n\geq 1}$soit convergente, donc $\left(AA^*x_n^{'}\right)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy.

Pour tout $n; m \in \mathbb{N}; m \prec n$.

$\left\|A^*x_n^{'} - A^*x_m^{'}\right\|^2 = \left\|A^*\left(x_n^{'} - x_m^{'}\right)\right\|^2 =$

$\left\langle A^*\left(x_n^{'} - x_m^{'}\right), A^*\left(x_n^{'} - x_m^{'}\right)\right\rangle =$

$\left\langle AA^*\left(x_n^{'} - x_m^{'}\right), \left(x_n^{'} - x_m^{'}\right)\right\rangle \leq$

$\left\|AA^*\left(x_n^{'} - x_m^{'}\right)\right\| . \left\|x_n^{'} - x_m^{'}\right\|$

$\left\|AA^*\left(x_n^{'}\right) - AA^*\left(x_m^{'}\right)\right\| . \left\|x_n^{'} - x_m^{'}\right\| \to 0$

Alors $(Ax_n^{'})$ est une suite de Cauchy, et comme H est complet, elle est donc convergente, d'où la compacité de A.

La réciproque est immédiate. □

LEMMA 9. *Soient H un espace de Hilbert et A ∈ L(H) un opérateur compact. Si (e_n) est un système orthonormé de H, alors la suite $(Ae_n)_{n\geq 1}$ tend vers 0.*

PROOF. Supposons que $(\mathrm{A}e_n)_{n\geq 1}$ converge vers (0), alors il existe $\varepsilon \succ 0$ et une sous-suite $(e_n^{'})_{n\geq 1}$

telle que:$\forall n \in \mathbb{N}^* : \|Ae_n\| \geq \varepsilon$.

Comme A est compact on peut extraire de $(e_n^{'})_{n\geq 1}$ une sous-suite $(e_n^{''})_{n\geq 1}$ telle que $(e_n^{''})$ soit convergente, donc on obtient:

$$\|x\| \geq \varepsilon \succ 0$$

$$\langle x, y\rangle = \left\langle \lim_{n\to+\infty} Ae_n^{''}, y\right\rangle = \lim_{n\to+\infty} \left\langle e_n^{''}, A^*y\right\rangle$$

D'après l'inégalité de Bessel, $\forall z \in H$; la serie

$\sum_{n\geq 1} |\langle e_n, z\rangle|^2$ converge, donc le terme général tend vers 0.

d'où:

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to+\infty} \left\langle e_n^{''}, A^*y\right\rangle = 0$$

identiqument : $x = 0$

Ce qui est une contradiction. □

REMARK 16. *Un opérateur $A \in L(E; F)$ (avec E et F deux espaces de Banach) est compact si et seulement si son adjoint $A^{'} \in L(E^{'}, F^{'})$ est compact.*

LEMMA 10. *Un opérateur $A \in L(E; F)$ est compact si et seulement si, de toute suite bornée (x_n) de E en peut extraire une sous-suite (x_{n_K}) telle que la suite (Ax_n) soit convergente.*

PROPOSITION 29. *Soient E et F deux espaces de Banach, $A \in K(E; F)$, E_0 un sous-espace fermé de E et F_0 un sous-espace fermé de F contenant $A(E_0)$.*

Alors l'opérateur $A\,|_{E_0} : E_0 \to F_0$ est compact.

PROOF. Soit (B) la boule unité fermée de E et $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B} \cap \mathrm{E}_0$, est la boule unité férmée de E_0. On a donc;

$$(A\,|_{E_0})\,(B_0) = A(B \cap E_0)$$

$$\subset (A)\,(B) \cap (A)\,(E_0) \subset (A(B) \cap F_0).$$

$(A(B))$ est une partie compacte de F, comme F_0 est fermé, $(A(B) \cap \mathrm{F}_0)$ est compact, identiquement $(A\,|_{E_0})\,(B_0)$ est relativement compact, d'où la compacité de $(A\,|_{E_0})$. □

LEMMA 11. *(Lemme de Riesz) Soient E un espace vectoriel normé, et M un sous-espace vectoriel fermé propre de E. Alors, pour tout $\delta \succ 0$; 0;il existe $\mu \in E$ de norme 1, tel que:*

$$d\,(\mu, M) \succ 1 - \delta.$$

PROOF. Soient $\delta \succ 0$ et $x \in E\,|_M$, alors: $d(x, M) \succ 0$, car M est fermée.
Posons $x = \frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|}$;pour chaque $\alpha \in$ M.
Alors

$$d(x, M) = \inf_{B \in M} \left\| \left(\frac{x-\alpha}{\|x-\alpha\|} - \beta \right) \right\|$$

$=\frac{\inf_{B \in M} (x-\alpha-\beta\|x-\alpha\|)}{\|x-\alpha\|} = \frac{d(x,M)}{\|x-\alpha\|}$
On peut prendre $\mu = x_\alpha$, si on choisit $x \in$E et $\alpha \in$ M tel que:

$$\|x - \alpha\| \prec \frac{d(x, M)}{1 - \delta}$$

On obtient

$$d(\mu, M) \succ 1 - \delta.$$

□

PROPOSITION 30. *Soit E un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée (B_E) de E est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

PROOF. Supposons que E est de dimension infinie. Construisons par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ dans B_E tel que: $\|x_n - x_m\| \succ \frac{1}{2}$;pour toute paire d'indices $n; m$ distincts. Soit M l'espace vectoriel engendré par $(x_1, x_2, ..., x_n)$. Alors M et un sous-espace vectoriel propre fermé de E, puisque M est de dimension finie.

Par le lemme de Riesz, il existe x_{n+1} de norme 1; tel que:

$$d(x_{n+1}, x_K) \succ \frac{1}{2}.$$

en particulier: $\|x_{n+1} - x_K\| \succ \frac{1}{2}; \forall K = 1, 2, 3...n.$

Toute sous-suite $\left(x_n^{'}\right)_{n\geq 1}$ de $(x_n)_{n\geq 1}$ vérifie

$\left\|x_n^{'} - x_m^{'}\right\| \succ \frac{1}{2}$;donc aucune sous-suite de $(x_n)_{n\geq 1}$ est convergente, alors B_E n'est pas compacte. □

LEMMA 12. *L'opérateur identité $I \in L(E)$ est compact si et seulement si E est de dimension finie.*

EXERCISE 20. *Soient $X = L_2[0;1]; G \in L_2([0;1] \times [0;1])$ et T un opérateur défini:*

$$\begin{aligned} T \quad &: \quad L_2[0;1] \to L_2[0;1] \\ (Tf)(x) \quad &= \quad \int_0^1 G(x;t)f(t)dt \end{aligned}$$

Prouvez que T est un opérateur compact.

SOLUTION 2. *Premiérement on va démontrer que:*

Si: $f \in L_2[0;1]$, alors: $Tf \in L_2[0;1]$.

Soit $f \in L_2[0;1]$, alors $\int_0^1 |f(t)|^2 dt \prec +\infty$.

$$\left(\int_0^1 |(Tf)(x)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \left|\int_0^1 G(x;t)f(t)dt\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\int_0^1 \left(\int_0^1 |G(x;t)f(t)| dt\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |G(x;t)|^2 dtdx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(t)|^2 dtdx\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |G(x;t)|^2 dtdx\right)^{\frac{1}{2}} . \|f\| \prec +\infty$$

Car $f \in L_2[0;1]; G \in L_2([0;1] \times [0;1])$.

D'où: $(Tf) \in L_2[0;1]; T \in B(L_2[0;1])$:

$\|T\| \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |G(x;t)|^2 \, dt dx \right)^{\frac{1}{2}}$

On a deux cas:

1er cas:

Si G est continue, $G \in C([0;1] \times [0;1])$*:*

$|(Tf)(x)| = \left| \int_0^1 G(x;t) f(t) dt \right|$

$\leq \int_0^1 |G(x;t) f(t)| \, dt$

$\leq \left(\int_0^1 |G(x;t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$

$\leq \left(\int_0^1 |G(x;t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|$

$\leq \sup \{G(x;t), (x;t) \in [0;1] \times [0;1]\} . \|f\|$

$\leq M_1 . M_2 = M$

D'où; T est borné unifomement dans (L_2[0; 1]) ; identiquement: $T \in B$ *(L_2[0; 1]) :*

On a G est uniformement continue sur $[0;1] \times [0;1]; alors:$

$\forall \varepsilon \succ 0; \exists \delta \succ 0 : \forall x, y \in [0;1]$ *tel que:* $|x - y| \leq \delta.$

$\forall t \in [0;1] : |G(x;t) - G(y;t)| \prec \varepsilon.$

Alors;

$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| = \left| \int_0^1 [G(x;t) - G(y;t)] \, f(t) dt \right| \leq$

$\int_0^1 |G(x;t) - G(y;t)| \, f(t) dt \leq$

$\left(\int_0^1 |G(x;t) - G(y;t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq$

$\left(\int_0^1 \varepsilon^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|f(t)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon^{'}$

Donc,

$$|(Tf)(x) - (Tf)(y)| \leq \varepsilon : \forall x; y \in [0;1];$$

$$f \in B(L_2[0;1]).$$

D'où; T est équicontinu.

Résultat: T est unifomement borné dans (L_2[0;1]) par M et équicontinue, alors: d'après le théorème d'Arsela-Ascoli l'opérateur T est compact.

2 ^{eme} *cas :*

Si G n'est pas continu, alors il existe une fonction G_n *continue sur ([0; 1] [0; 1]),* $G_n \in C$ *([0; 1] [0; 1]), et converge vers G dans L∈([0; 1] [0;1]):*

D'où :

$$\|G-G_n\|_{L_2}=\left(\int_0^1\int_0^1 |G(x;t)-G_n(x;t)|^2\,dtdx\right)^{\frac{1}{2}}\underset{n\to\infty}{\to}0$$

Pour $n\in\mathbb{N}$; on définie la fonction T_n, telle que:
$T_n\,:\,L_2[0;\,1]\to L_2[0;\,1]$

$$(T_nf)(x)=\left|\int_0^1 G_n(x;t)f(t)dt\right|$$

$$\|T-T_n\|_{L_1}=\left(\int_0^1\int_0^1 |T(f)-T_n(f)|^2\,dtdx\right)^{\frac{1}{2}}\leq$$

$$\left(\int_0^1\int_0^1 |G(x;t)-G_n(x;t)|^2\,|f(t)|^2\,dtdx\right)^{\frac{1}{2}}\underset{n\to\infty}{\to}0.$$

Donc; T est un opérateur compact.

Proposition 31. *Soient $A\in L(E,F)$ et $B\in L(F,G)$. Si A ou B est compact alors; BA est compact.*

Proof. Si A est compact, alors, pour tout borné $M\subset E$, $\overline{A(M)}$ est compact. Or, l'image d'un compact par une application continue est compacte, donc, $B(\overline{A(M)})$ est compact. Il résulte que

$$B\circ A(M)\subset B(\overline{A(M)})$$

est relativement compacte.

Si B est compact, alors, pour tout borné $M\subset E$, $A(M)$ est aussi borné et donc $B\circ A(M)$ est relativement compacte □

Theorem 30. *Si E ou F est de dimension finie, alors*

$$\mathcal{K}(E,F)=L(E,F).$$

Proof. Si E est de dimension finie, alors B_E sera compacte, d'où $A(B_E)$ est compacte pour tout $A\in L(E,F)$, car A est continu.

On suppose que F est de dimension finie alors, $A(B_E)$ est bornée donc relativement compacte (car F est de dimension finie). □

Theorem 31. *Si T est un opérateur compact et positif alors; $\sqrt{T}$ est compact.*

Theorem 32. *Tout opérateur linéaire compact est borné, c'est-a-dire qu'on a l'inclusion $K(E;F)\subset L(E;F)$.*

Proof. Soit $A\in K(E;F)$, alors l'image de la boule unité fermée de E par A est un ensemble relativement compact de F, donc il est borné. c'est-à-dire: il existe une constante $M\succ 0$; telle que: $\|Ay\|\leq M$;pour tout $y\in$ E:$\|y\|$= 1. On déduit que: $\forall x\in E;\|Ax\|=\left\|A\frac{x}{\|x\|}\right\|\leq M.\,\|x\|$

D'où A est borné. □

Remark 17. *1- Un opérateur linéaire A de E dans F est compact si l'image de la boule unité fermée de E par A est relativement compacte dans F.* *2-*
Tout opérateur de rang fini (dont l'image est de dimension finie) est compact .

PROPOSITION 32. *Un opérateur $A \in L(E;F)$ est compact si et seulement si, de toute suite bornée (x_n) de E en peut extraire une sous-suite (x_{n_K}) telle que la suite (Ax_n) soit convergente.*

PROOF. Supposons que A est compact, et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de E. Alors

$$H = \{(Ax_n); n \geq 1\}$$

est une partie compacte de F.

(Ax_n) est une suite d'éléments de l'ensemble compact H, elle admet donc une sous-suite convergente.

Réciproquement: Soit M une partie bornée de E et soit $(y_n)_{n\geq 1}$ une suite d'éléments de A(M), alors il existe une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ de M telle que,

$$\forall n \geq 1; Ax_n = y_n.$$

Comme $(x_n)_{n\geq 1}$ est bornée, la suite $y_n = Ax_n$ admet une sous-suite (Ax_{n_K}) convergente, d'où la compacité de A(M). □

LEMMA 13. *L'ensemble K(E; F) est un sous-espace vectoriel fermé de L(E; F) (au sens de la convergence uniforme).*

PROOF. Soit A $\in$ K(E; F), et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée d'éléments de E, alors la suite (Ax_n) admet une sous-suite (Ax_{n_i}) convergente, donc pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$; (λAx_{n_i}) est une sous-suite convergente de (λAx_n), d'où $\lambda A \in$ K(E; F).

- Pour B$\in$K(E; F) la suite (Bx_{n_i}) admet une sous-suite (B$x_{n_{ij}}$) convergente, alors la suite ((A+B)$x_{n_{ij}}$) est une sous-suite convergente de ((A+B)x_n), se qui montre que (A + B) est compact.

-Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite de K(E; F) converge on norme vers A $\in$ L(E; F), et soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite bornée de E.

-Comme A$_1$ est compact, alors (x_n) admet une sous-suite $(x_n^{(1)})$ telle que $(A_1 x_n^{(1)})$ soit convergente.

-Comme A$_2$ est compact, alors (x_n) admet une sous-suite $(x_n^{(2)})$ telle que $(A_2 x_n^{(2)})$ soit convergente, par la suite on obtient pour $p \geq 1$

une sous-suite $(x_n^{(p)})$ telle que $(A_p x_n^{(p)})$ soit convergente.

Prenons la suite diagonale

$$(x_n^{(n)}) = \left(x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, ...\right)$$

et montrons que la suite $(Ax_n^{(n)})$ est convergente.

Pour tout p; n;m $\in \mathbb{N}$, et tout $\varepsilon \succ 0$;

$\left\|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\right\| \leq \left\|Ax_n^{(n)} - A_p x_p^{(p)}\right\| + \left\|A_p x_n^{(n)} - A_m x_m^{(m)}\right\|$

$+\left\|A_p x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\right\|.$

Supposons

$$\forall n \geq 1 : \|x_n\| \leq C$$

et choisissons p

tel que:

$$\|A - A_p\| \prec \frac{\varepsilon}{3C}$$

.

Comme la suite $(A_p x_n^{(n)})$ est convergente, on peut choisir N $\succ$0 tel que: pour tout n$\in \mathbb{N}$ et tout m$\succ$N :

$$\left\| A_p x_n^{(n)} - A_p x_m^{(m)} \right\| \prec \frac{\epsilon}{3}.$$

alors on obtient d'après l'inégalité (0:2:1) que $\left\| Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)} \right\|$, donc la suite $(Ax_n^{(n)}\ )$ est de Cauchy, et par la complétude de F elle est convergente, d'où la compacité de A. □

Proposition 33. *Soient E et F deux espaces de Banach. A*$\in K\,(E,F)\,;$ *Alors pour toute suite* $(x_n)_{n\geq 1}$ *de E faiblement convergente vers* $x \in E$*, la suite* $(Ax_n)_{n\geq 1}$ *converge fortement vers (Ax).*

Proof. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de E faiblement convergente vers $x \in$ E; elle est donc bornée (conséquence du théorème de Banach-Steinhaus).

Et soit $y_n = Ax_n;\ \forall n \geq 1 et\ y = Ax$. On a: $\forall\ l \in F^{'}\ : l(y_n) - l(y) = l(y_n - y) = l(Ax_n - Ax)$ □

7. Exercices

EXERCISE 21. *Soit E un espace de Hilbert complexe et soit $T \in L(E)$. 1. Montrer que si pour tout $x \in E$ on a: $\langle T(x), x\rangle \in \mathbb{R}$, alors T est auto-adjoint. 2. En déduire que si $P \in L(E)$, alors P est positif si et seulement si pour tout $x \in E$ on a: $\langle P(x); x\rangle \geq 0$.*

EXERCISE 22. *Soient H un espace de Hilbert et $P \in L(H)$ une projection orthogonale.*

1. Si P est non nulle et n'est pas l'identité sur H montrer que P est auto-adjoint.

2. Soit $u \in L(H)$; tel que $Im(u) = Ker(u)$. Prouver que $Im(u)$ est fermé ssi il existe une constante $c \geq 0$;tel que:

$$\forall x \in H; c \left\|x - P\left(x\right)\right\| \leq \left\|u\left(x\right)\right\|$$

EXERCISE 23. *Montrer que si un opérateur A est positif, alors pour tout n $\geq$1, l'opérateur A^n est positif.*

EXERCISE 24. *Soit A un opérateur auto-adjoint. Montrer que l'opérateur U= (A-i)$(A + i)^{-1}$ est unitaire.*

EXERCISE 25. *Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in L(H)$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes. 1. T est normal. 2. pour tous x, $y \in H$, $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle T^*(x), T^*(y)\rangle$. 3. pour tout $x \in H$; $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$.*

EXERCISE 26. *Soit H un espace de Hilbert et soit $U \in L(H)$*

1) Etablir les équivalences entre i), ii), iii) et quand H est séparable, iv) et v).
i) U est un opérateur unitaire: $U^{-1} = U^*$
ii) U est un isomorphisme isométrique.
iii) U est susjectif et conserve le produit scalaire:
$U(H) = H$ et $\forall\ x, y \in H$, $\langle U(x); U(y)\rangle = \langle x; y\rangle$
iv) U transforme une base hilbetienne de H en une base hilbertienne de H.
v) U transforme toute base hilbetienne de H en une base hilbertienne de H.

EXERCISE 27. *Soit H un espace de Hilbert et soit $u \in L(H)$.*

i) Si u^*=u montrer que u=0 ssi $\langle u(x), x\rangle$=0, $\forall x \in$ H. (Considérer $\langle u(x + y), x + y\rangle$ pour tout x et y dans H).
ii) Montrer qu'il existe un unique couple (v,w) dans L(H) tel que:
v^*=v, w^*=-w et u=v+w.
Que peut-on dire de $\langle w(x), x\rangle$ si $x \in H$ et w comme ci-dessus?
Que peut-on dire de iw, de iv?
iii) Si H est un espace de Hilbert complexe et si $u \in L(H)$, montrer que;
u=0 ssi $\langle u(x), x\rangle$=0, $\forall\ x \in H$.
Si le corps de H est $\mathbb{R}$, trouver un contre exemple de u tel que:
u$\neq$ 0, $\langle u(x), x\rangle$=0, $\forall\ x \in H$.

EXERCISE 28. *Soit E un espace de Hilbert complexe et soit $T \in L(E)$. 1. Montrer que si pour tout $x \in E$ on a:*

$\langle T(x); x\rangle \in \mathbb{R}$, *alors* T *est auto-adjoint.* *2. En déduire que si* $P \in L(E)$, *alors* P *est positif si et seulement si pour tout* $x \in E$ *on a:* $\langle P(x\ );\ x\rangle \geq 0$.

EXERCISE 29. *Soit E un espace de Hilbert complexe et soit* $T \in L(E)$. *Montrer que* $T = 0$ *si et seulement si* $\langle T(x); x\rangle = 0$ *pour tout* $x \in E$. *Montrer que ce résultat est faux sur un espace de Hilbert réel.*

EXERCISE 30. *Montrer que si un opérateur A est positif, alors pour tout* $n \geq 1$, *l'opérateur* A^n *est positif.*

EXERCISE 31. *Soit H un espace de Hilbert et* $T \in L(H)$ *un opérateur auto-adjoint. Montrer que* $\|T\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle T(x); x\rangle|$. *Que peut-on en déduire?*

EXERCISE 32. *Soit H un espace de Hilbert et soit* $T \in L(H)$. *Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes:* *1.* T *est normal.* *2. pour tous* x , $y \in H$, $\langle T(x); T(y)\rangle = \langle T^*(x); T^*(y)\rangle$ *.3. pour tout* $x \in H$; $\|T(x)\| = \|T^*(x)\|$.

EXERCISE 33. *Montrer qu'un opérateur compact qui a une image fermée est de rang fini.*

EXERCISE 34. *Montrer qu'un opérateur compact qui a une image fermée est de rang fini.*

CHAPTER 4

Théorie spéctrale

Ce chapitre est consacré à la théorie spectrale où on introduit trois notions essentielles: la notion du spectre, la notion de la resolvante et enfin les notions du spectre continu, residuel, ponctuel, approché, leurs propriétés et applications sur les differents types d'opérateurs

DEFINITION 35. *Soit E un espace de Banach sur le corps $\mathbb{C}$ et soit $A \in \mathcal{B}(E)$*
1) On appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$ l'ensemble des nombres complexes λ tels que $(A - \lambda I)$ n'est pas inversible.

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ n'est pas inversible}\}$$

2) Le complémentaire de $\sigma(A)$ est noté $\rho(A)$, et s'appelle l'ensemble résolvant de A

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ est inversible}\}.$$

3) Pour $\lambda \in \rho(A)$, l'opérateur $(A - \lambda I)^{-1}$ est noté $R_\lambda(A)$, et appelé la résolvante de A.
4) Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A s'il existe un vecteur non nul $x \in H$ tel que $Ax = \lambda x$, chaque vecteur non nul x qui satisfait $Ax = \lambda x$ s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.
5) L'ensemble des valeurs propres de A est noté $\sigma_p(A)$ et s'appelle spectre ponctuel de A.
6) le réel positif $r(A) = \sup\{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\}$ s'appelle rayon spectral de A.

DEFINITION 36. *Soit $T \in L(E)$ avec E un K-espace vectoriel, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.*

2. Le complémentaire de $\sigma(A)$ est noté $\rho(A)$, et s'appelle l'ensemble résolvant de A

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (A - \lambda I) \text{ est inversible}\}.$$

DEFINITION 37. *3. Si $\lambda \in \rho(A)$, on définit* ***la résolvante*** *$R_\lambda(A)$ de A au point λ par*

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

4. L'ensemble des valeurs propre de A s'appelle ***spectre ponctuel*** *de A est donné par*

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif}\}.$$

- On appelle valeur spectrale de T tout scalaire $\lambda \in K$ tel que $T - \lambda I$ n'est pas bijective (donc n'est pas inversible). On appelle spectre de T, on note $sp(T) = \sigma(T)$ l'ensemble des valeurs specrales de T.

$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ (A - \lambda I)$ *n'est pas inversible*$\}$

- On appelle valeur propre de T *tout scalaire* $\lambda \in K$ *tel que* $T - \lambda I$ *n'est pas injectif (une valeur propre est donc une valeur spectrale), on note* $VP(T) = \sigma_p(T)$ *l'ensemble des valeurs propres de* T*. On dit parfois que les valeurs propres forment le spectre ponctuel (d'ou la notation).*

- On appelle espace propre associé a la veleur propre $\lambda \in VP(T)$ *le sous-espace vectoriel* $Ker(T - \lambda I) = N(T - \lambda I) \neq \{0\}$*. On appelle multiplicité géométrique d'une valeur propre* $\lambda \in VP(T)$ *la dimension de* $N(T-\lambda I)$ *et multiplicité algébrique la limite de* $dim N(T - \lambda I)^k$ *lorsque* $k \to \infty$*.*

- Si on a: $\lambda I - T$ *est injectif,* $Im(\lambda I - T)$ *est dense mais distinct de* E*, on dit que* λ *appartient au spectre continu de* T*, on note* $\sigma_c(T)$*. Enfin, si* $(\lambda I - T)$ *est injectif et* $Im(\lambda I - T)$ *n'est pas dense dans* E*, on dit que* λ *appartient au spectre résiduel de* T*, on note* $\sigma_r(T)$*.*

- On appelle valeur résolvante de T *tout scalaire* $\lambda \in K$ *tel que* $(T-\lambda I)$ *est bijective (donc inversible). On appelle ensemble résolvant de* T*, on note* $\rho(T)$ *l'ensemble des valeurs résolvantes de* T*.*

Donc: $\rho(T) = \{\lambda \in K; (T - \lambda I)$ *est bijective de* E *sur* $E\} = K \setminus \sigma(T)$*:*

Si $\lambda \in \rho\ (T)$ *on note* $R_{\lambda} = (\lambda I - T)^{-1} \in L(E)$ *la résolvante de* T*.*

DEFINITION 38. *Soit* T *un opérateur linéaire dont le domaine est dense et soit* $\lambda \in \mathbb{C}$*.*

Pour l'opérateur $S = (T - \lambda I) : D(T) \to H$*, on a l'arbre d'alternatives suivant :*

- *Si* S *n'est pas injectif, on dit que* λ *est une valeur propre de* T*, on parle de spectre ponctuel de* T *qu'on notera* $\sigma_P(T)$ *;*
- *sinon si* S *est injectif et;*

1: *– si* S *n'est pas surjectif et si l'image de* S *est dense dans* H*, on parle de spectre continu de* T *qu'on notera* $\sigma_{cont}(T)$ *;*

- si l'image de S *n'est pas dense dans* H*, on parle de spectre résiduel de* T *qu'on notera* $\sigma_{res}(T)$ *;*

2: *– sinon* S *est bijectif et*

- si S^{-1} *n'est pas borné, on parle de spectre résiduel de type* 2 *de* T *qu'on notera* $\sigma'_{res}(T)$ *;*

- sinon S^{-1} *est borné et* $\lambda \in \rho\ (T)$ *est un point résolvant de* T*.*

DEFINITION 39. *Soit* $\mathcal{A}$ *une algébre de Banach unitaire complexe; la quantité*

$$r(a) = max\,\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\}$$

s'appelle le rayon spectral de $a \in \mathcal{A}$*. On a déja remarqué que le spectre de* a *est contenu dans le disque de C centré en 0 et de rayon* $\|a\|$*, donc:*

$$r(a) \leq \|a\|$$

On va obtenir au théorème suivant à une formule importante qui précise cette remarque simple et qui permet d'estimer, sinon de calculer, ce le rayon spectra.

THEOREM 33. *Soient $\mathcal{A}$ une algèbre de Banach unitaire complexe et $a \in \mathcal{A}$; la suite ($\|a_n\|^{\frac{1}{n}}$) est convergente et on a:*

$$r(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

PROOF. On démontre d'abord que:

$$r(a) \leq \limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} ,$$

remarquons tout de suite que:

$$\|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|a\|$$

pour tout n $\geq$1, donc ce que nous devons démontrer est un raffinement de l'estimation

$$r(a) \leq \|a\|$$

que nous avons déja vue ; on obtiendra ce raffinement en reprenant les arguments déja employés; si b$\in \mathcal{A}$ est tel que

$$\beta = \limsup_n \|b^n\|^{\frac{1}{n}} \prec 1,$$

choisissons t réel tel que $\beta \prec$ t $\prec$ 1 ; on aura alors $\|b^n\|^{\frac{1}{n}} \prec$ t; pour n grand, donc:

$$\|b^n\|^{\frac{1}{n}} \prec t^n,$$

donc la série $\sum_k$b$_k$ sera normalement convergente, donc convergente dans le Banach $\mathcal{A}$, et la démonstration déja vue pour le lemme 1.1 nous dira que $1_{\mathcal{A}}$-b est inversible; si on écrit comme avant:

$$a - \lambda 1_{\mathcal{A}} = -\lambda(1_A - a\lambda),$$

cet élément sera inversible dés que b = $\frac{a}{\lambda}$, vérifiera

$$\limsup_n \|b^n\|^{\frac{1}{n}} \prec 1,$$

ce qui se produit quand:

$$\limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \prec |\lambda|$$

Ceci signifie qu'aucun nombre complexe λ, tel que:

$$|\lambda| \succ \limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$$

ne peut être dans le spectre de a, c'est à dire que:

$$r(a) \leq \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} .$$

La démonstration de l'inégalité inverse demande de se rappeler le cours de fonctions holomorphes ; si g(z) : B(0; R) $\to \mathbb{C}$ est holomorphe (valeur R = $+\infty$ admise), alors elle est développable en série entiére $\sum_{k=0}^{\infty}$ c$_k$z^k dans ce disque ouvert B(0; R) ; pour tout τ tel que 0 $\prec \tau \prec$ R la formule de Cauchy appliquée au cercle γ_τ de rayon r donne pour tout n $\geq$ 0

$$\tau^n c_n = \frac{1}{2i\pi}\tau^n \int_{\gamma_r} \frac{g(z)}{z^{n+1}}dz = \int_0^{2\pi} g(\tau e^{i\theta})e^{in\theta}\frac{d\theta}{2\pi}$$

ce qui fournit les inégalités de Cauchy.

Considérons la fonction vectorielle

$$f(z) = (1_{\mathcal{A}} - za)^{-1};$$

elle est définie pour tout complexe z tel que 1=z ne soit pas dans le spectre de a, ce qui est le cas lorsque:

$$|z| < R = \tau(a)^{-1};$$

de plus z→f(z) est holomorphe de B(0; R) dans $\mathcal{A}$. Par ailleurs, pour z assez petit on sait que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a^k$$

(lemme 1.1), donc:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k x^* a^k$$

; par l'unicité des coefficients de Taylor il résulte que

$$c_n = x^*(a_n) \; pour \; tout \; n.$$

Puisque $\|x^*\| \leq$1, on a:

$$|g(z)| \leq |f(z)|,$$

ce qui entraine que:

$$M(r; g) \leq M_0(r)$$

;les inégalités de Cauchy, appliquées à g, donnent $|x^*(a_n)| \leq \frac{M_0(\tau)}{r^n}$; pour tout n et toute x* $\in \mathcal{A}^*$ telle que $\|x^*\|$ =1 ; pour chaque n $\geq$1 donné on peut choisir par Hahn-Banach (corollaire 4.2.7) une forme linéaire x* telle que

$$\|x^*\| = 1 et \; x^*(a_n) = \|a_n\|;$$

on obtient ainsi

$$\|a_n\| \leq \; \frac{M_0(\tau)}{\tau^n}; pour \; tout \; n \geq 1,$$

ce qui implique

$$\limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{\tau}$$

, d'où:

$$\limsup_n \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$$

en faisant tendre r vers R = $\frac{1}{r(a)}$. La convergence de la suite $(\|a^n\|^{\frac{1}{n}})$ résulte immédiatement du lemme qui suit et du fait que pour tous p; q $\geq$1, on a $\|a^{p+q}\| \leq \|a^p\| \, \|a^q\| \cdot$ □

LEMMA 14. *Le spectre de tout opérateur $T \in L(H)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$.*

PROOF. Le spectre de T est borné car si $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifie:$|\lambda| \geq \|T\|$; alors $T - \lambda I$ est inversible. D'où $\sigma(T) \subset \overline{D(0; \|T\|)}$. Pour montrer que $\sigma(T)$ est fermé,

considérons l'application $f : \mathbb{C} \to L(H)$, définie par $f(\lambda) = \lambda I - T$. Alors f est continue et

$$\rho(T) = f^{-1}(Inv(L(H)).$$

Où $Inv(L(H))$ est l'ensemble des éléments inversibles de $L(H)$.

Ainsi $\rho(T)$ est un ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une fonction continue. Nous pouvons en conclure que $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{C}$.

Vérifions que $\sigma(T)$ est non vide. Pour cela nous allons utiliser la théorie des fonctions analytiques à valeurs vectorielles.

Considérons; $g : \rho(T) \to L(H)$ définie par $g(\lambda) = (T - \lambda I)^{-1}$.

Remarquons tout d'abord que la fonction g est continue sur $\rho(T)$. De plus, pour $\lambda_0 \in \rho(T)$ et λ proche de λ_0, on a:

$$\frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = g(\lambda)g(\lambda_0).$$

Donc par continuité de g, on obtient:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{g(\lambda) - g(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} = (g(\lambda_0))^2 .$$

Ainsi g est holomorphe sur $\rho(T)$ et on a

$$g'(\lambda_0) = g(\lambda_0)^2.$$

Supposons maintenant que $\sigma(T) = \emptyset$; donc $\rho(T) = \mathbb{C}$. Ainsi g est une fonction entiére. Montrons que g est bornée.

Pour cela remarquons que pour $|\lambda| \succ \|T\|$ on a:

$$\|g(\lambda)\| = \left\|(T - \lambda I)^{-1}\right\| =$$
$$\frac{1}{|\lambda|} \left\| \left(T - \frac{1}{\lambda} I\right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}.$$

Ainsi cela prouve que $\lim\limits_{|\lambda| \to +\infty} g(\lambda) = 0$. Par conséquent g est bornée. Le théorème de Liouville pour les fonctions analytiques à valeurs vectorielles implique que g est constante. Comme g tend vers 0 en l'infini, on en déduit que $g \equiv 0$, ce qui est absurde. $\square$

EXAMPLE 32. *Trouvons les valeurs propres de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Le polynôme caractéristique de A *est* $p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$

Les valeurs propres sont les racines de l'équation:

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0$$

donc $\lambda = -1$ *et* $\lambda = 3$

Trouvons maintenant les vecteurs propres correspondants.

Soit $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$; $Av = \lambda v$

si $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = -x_1 \\ x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = -2x_1 \\ x_1 + x_2 = -x_2 \end{cases} \Longrightarrow 2x_2 = -x_1, x_1 = 0 \Longrightarrow$$

$\begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre correspondant à* $\lambda = -1$

si $\lambda = 3$,

$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = 3x_1 \\ x_1 + x_2 = 3x_2 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4x_2 = 2x_1 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Longrightarrow x_1 = 2x_2, \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est un vecteur propre correspondant à* $\lambda = 3$.

REMARK 18. *1)les éléments de* $\sigma(A)$ *sont dits valeurs spectrales.*
2)$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; (A - \lambda I)$ *n'est pas injectif*$\}$.
3)En dimension finie $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.
4)$\sigma(A^*) = \{\bar{\lambda}; \lambda \in \sigma(A)\}$.
5)$r(A) = \lim_n \|A^*\|^{\frac{1}{n}}$.
6) Si $\lambda \in \sigma(A)$, *alors* $|\lambda| \leqslant \|A\|$.
7) $r(A) \leqslant \|A\|$.
8) Le spectre est un ensemble non vide et compact (borné et fermé).
9) Si P *est un polynôme alors :*

$$\sigma(P(A)) = P(\sigma(A)) = \{P(\lambda), \lambda \in \sigma(A)\}.$$

EXAMPLE 33. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ *un opérateur normal.*
1) $\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{-i, 2i\}$.
2)$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \{-i, 2i\}$.
3)$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \forall \lambda \in \rho(A)$ *i.e* $R_\lambda(A) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2i-\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{-i-\lambda} \end{pmatrix}$.
4) $r(A) = \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\} = 2$.

PROPOSITION 34. *Si* $A \in \mathcal{L}(H)$ *est auto-adjoint, alors,* $\sigma_p(A) \in \mathbb{R}$.

PROOF. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors il existe $x \in H \diagdown \{0\}$, tel que $Ax = \lambda x$.

$$\lambda \langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle.$$

□

PROPOSITION 35. *Soit* H *un espace de Hilbert,* $A \in \mathcal{L}(H)$ *normal, alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|A^n\| = \|A\|^n \text{ et } r(A) = \|A\|.$$

Nous dirons alors que T_1 *et* T_2 *sont unitairement conjugués . La relation «être unitairement conjugué » est encore une relation d'équivalence sur* $L(E_1)$*. Si deux opérateurs continus* $T_1 \in L(E_1)$ *et* $T_2 \in L(E_2)$ *sont conjugués,*

alors ils ont le même spectre, le même spectre ponctuel, et le même spectre résiduel:

$$\sigma(T_1) = \sigma(T_2),$$
$$Vp(T_1) = \sigma(T_2),$$
$$\sigma_r(T_1) = \sigma_r(T_2)).$$

En effet, si v est une conjugaison unitaire entre T_1 et T_2, alors T_1 -λI est inversible (respectivement injectif, non injectif d'image non dense) si et seulement si

$$v\circ(T_1-\lambda I)\circ v^{-1}=T_2-\lambda I$$

est inversible (respectivement injectif, non injectif d'image non dense).

PROPOSITION 36. *Soient E un espace de Banach complexe et $T\in L(E)$; on a: $\sigma({}^tT)=\sigma(T)$.*

PROOF. Il suffit de remarquer que

$${}^t(T-\lambda I_E)={}^tT-I_{E^*}$$

pour tout nombre complexe λ. □

PROPOSITION 37. *Soient T_1; $T_2\in L(E)$; alors:*

$$\sigma(T_1T_2)=\sigma(T_2T_1).$$

PROOF. Basée sur le fait que, si I- $\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2$ est inversible d'inverse U, alors:

$$(I+T_2UT_1)(I-T_2T_1)=$$

$$I-T_2T_1-T_2UT_1T_2T_1+T_2UT_1=$$

$$I-T_2T_1+T_2U(I-T_1T_2)T_1=I.$$

De même:

$$(I-T_2T_1)(I+T_2UT_1)=I,$$

et donc I - $\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1$ est inversible. □

REMARK 19. *Si T est une isométrie partielle de H sur un sous-espace propre de H, alors*

$$\sigma(T^*T)=\{1\}\neq\sigma(TT^*)=\{0,1\}.$$

EXAMPLE 34. *On se place dans $H=L^2([0,1];\mathbb{C})$. On considére alors l'opérateur T_{-2} défini par:*

$$D_{-2}=\left\{\varphi\in C^0([0,1],\mathbb{C})/\exists\psi\in H,\forall x\in[0,1]:\varphi(x)-\varphi(0)=\int_0^x\psi(y)\,dy\right\}$$

et $T_{-2\varphi}:=i\psi$. Tout d'abord, T_{-2} est bien défini par le théorème de densité de Lebesgue, de plus, il est clair que $C^1([0,1];\mathbb{C})\subset D_{-2}$ et que si: $\varphi\in C^1([0,1],\mathbb{C})$; alors $T_{-2\varphi}=i\frac{d}{dx}\varphi$.

On définit alors d'autres opérateurs T_{-1},T_1,T_0 et T_2 en posant:

$D_{-1:=}\ \{\varphi\in D_{-2}\ /\varphi(0)=0\}$

$D_1:=\{\varphi\in D_{-2}\ /\varphi(1)=0\}$

$D_0:=\{\varphi\in D_{-2}\ /\varphi(0)=\varphi(1)\}$

$D_2:=\{\varphi\in D_{-2}\ /\varphi(0)=\varphi(1)=0\}$

et $T_k:=T_{-2|_{Dk}}$.

On a: $T_2 \subset \left\{ \begin{array}{c} T_{-1} \\ T_0 \\ T_1 \end{array} \right\} \subset T_{-2}$
et $KerT_{-2} = KerT_0 = \mathbb{C}$.
$KerT_{-1} = KerT_1 = KerT_2 = \{0\}$
$ImT_{-2} = ImT_{-1} = ImT1 = H$
$ImT_0 = ImT_2 = \left\{ \psi \in H : \int_0^1 \psi(y)\,dy = 0 \right\} = 1^{\perp}$.
Donc, $\sigma(T_{-2}) = \sigma_P(T_{-2}) = \mathbb{C}$
$\sigma(T_1) = \sigma(T_{-1}) = \varnothing$
$\sigma(T_0) = \sigma_P(T_0) = 2\pi\mathbb{Z}$
$\sigma(T_2) = \sigma_{res}(T_2) = \mathbb{C}$.

PROOF. • Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, on pose $\varphi_\lambda(x) := e^{-i\lambda x}$. Alors $\varphi_\lambda \in D_{-2}$ et

$$T_{-2\varphi_\lambda} = \lambda\varphi_\lambda,$$

donc $\lambda \in \sigma_P(T_{-2})$.

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $(T_{-1} - \lambda I)$ est clairement injectif (car les seules fonctions propres éventuelles sont les multiples de φ_λ, qui n'appartient pas à D_{-1}). En outre, si, pour $\lambda \in H$, on pose:

$$(S_\lambda\psi)(x) := -i\int_0^x e^{i\lambda(y-x)}\psi(y)\,dy$$

on a $(S_\lambda\psi)(0) = 0$, $S_\lambda\psi$ est continue (donc L_2) en tant que produit d'une exponentielle par une fonction $\frac{1}{2}$-hölderienne et, d'aprés le théoréme de Fubini,

$$-i\int_0^x [\lambda(S_\lambda\psi)(y) + \psi(y)]\,dy$$

$= -i\int_0^x(\int_0^y \left[-i\lambda e^{i\lambda(z-y)}\psi(z)\,dz\right] dy\ -i\int_0^x \psi(y)\,dy$
$= -i\int_0^x(\int_z^x - i\lambda e^{i\lambda(z-y)}\ dy)\psi(z)\,dz\ -i\int_0^x \psi(y)\,dy$
$= -i\int_0^x (\lambda e^{i\lambda(z-y)}\ - 1)\psi(z)\,dz\ -i\int_0^x \psi(y)\,dyt = (S_\lambda\psi)(x)$

donc $S_\lambda\psi \in D_{-1}$ et $T^{-1}S_\lambda\psi = \lambda S_\lambda\psi + \psi$. Autrement dit $(T_{-1} - \lambda I)$ est surjectif. Enfin

$|S_\lambda\psi(x)|^2 \leq \int_0^x (e^{-2\beta\lambda(y-x)}\ dy \int_0^x |\psi(y)|^2\,dy \leq e^{2|\beta\lambda|}\ \|\psi\|^2$,

donc

$$(T_{-1} - \lambda I)^{-1} = S_\lambda$$

est borné.

• Si $\lambda \in 2\pi\mathbb{Z}$, $\varphi_\lambda \in D_0$ donc $2\pi\mathbb{Z} \subset \sigma_P(T_0)$, Par ailleurs, soit $\lambda \in (\mathbb{C} - 2\mathbb{Z})$.

$(T_0 - \lambda I)$ est clairement injectif. De plus, si $\psi \in H$ et $C \in \mathbb{C}$, on a

$$(S_\lambda \psi + C\varphi_\lambda) \in D_{\text{-}2}$$

et;

$$(T_{-2} - \lambda I)(S_\lambda \psi + C\varphi_\lambda) = (T_{-2} - \lambda I)S_\lambda \psi + C(T_{-2} - \lambda I)\varphi_\lambda = \psi.$$

Il suffit donc de voir qu'on peut choisir $C(\psi)$ de façon à avoir $(S_\lambda \psi + C\varphi_\lambda) \in D_0$ pour obtenir que $(T_0 - \lambda I)$ est surjectif. Or, on a:

$$[S_\lambda \psi + C(\psi)\varphi_\lambda](0) = [S_\lambda \psi + C(\psi)\varphi_\lambda](1) \Leftrightarrow$$

$$C(\psi) = -i\int_0^1 e^{i\lambda(y-1)}\, \psi(y)\, dy + C(\psi)\, e^{-i\lambda} \;\Leftrightarrow$$

$$\left(1 - e^{-i\lambda}\right) C(\psi) = ie^{-i\lambda} \int_0^1 e^{i\lambda y}\, \psi(y)\, dy \Leftrightarrow$$

$$C(\psi) = \frac{i}{1 - e^{-i\lambda}} \int_0^1 e^{i\lambda(y-1)}\, \psi(y)\, dy.$$

Enfin,

$$\left\| \left(1 - e^{-i\lambda}\right) C(\psi) \right\| \leq e^{|\beta\lambda|} \left(\frac{\|\varphi_\lambda\|}{1 - e^{-i\lambda}} \right) \|\psi\|,$$

donc $(T_0 - \lambda I)^{-1}$ est borné.

• Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $(T_2 - \lambda I)$ est clairement injectif.

Soit $\varphi \in D_2$, on a:

$$\left\langle (T_2 - \lambda I)\varphi, \varphi_{\overline{\lambda}} \right\rangle = \left\langle \varphi, (T_{-2} - \overline{\lambda} I)\varphi_{\overline{\lambda}} \right\rangle = 0,$$

ainsi $Im(T_2 - \lambda I) \subset \varphi_{\overline{\lambda}}^{\perp}$ et $\sigma_{res}(T_2) = \mathbb{C}$. □

LEMMA 15. *Soit T un opérateur linéaire fermé, alors $\sigma_{res}(T) = \emptyset$.*

PROOF. C'est une conséquence du théorème * □

LEMMA 16. *Soit T un opérateur linéaire. Si T n'est pas fermé; alors $\sigma(T) = \mathbb{C}$ (ou, de maniére equivalente, si $\rho(T) \neq \emptyset$; alors T est fermé*

PROOF. Supposons que $\rho(T) \neq \emptyset$; et soit $z \in \rho(T)$. $(T - zI)^{-1}$ est borné donc fermé et il en va de même pour $(T - zI)$ et T. □

REMARK 20. *Si E est de dimension finie, alors, (λI_E-A) est inversible si et seulement si Ker(λI_E- A) = {0}. En particulier, on d´eduit $\sigma_p(A) = \sigma(A)$.En effet, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors, tout opérateur lin´eaire A sur E peut être représenté par une matrice carée A, et que l'opérateur linéaire (λI_E- A) est inversible quand la matrice (λI_E- A) est inversible. Il est clair que pour tout $\lambda \in \Bbbk$, l'un des cas suivants doit apparaître :*

(i) λ *est une valeur propre de* A,

(ii) la matrice $(\lambda I_E\text{- } A)$ *est inversible, i.e. la matrice* $(\lambda I_E\text{- } A)^{-1}$ *existe. Il en résulte que le spectre* $\sigma(A) = \sigma_p(A)$ *est l'ensemble des valeurs propres de la matrice* A, *et la dimension de l'espace vectoriel propre correspondant à toute valeur propre est finie. Le spectre d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie a une structure simple, mais pour un opérateur général dans un espace de dimension infinie, le spectre peut être différent et plus complexe.*

Example 35. *Soit* I_H *l'opérateur identité de l'espace de Hilbert* H. *Il est clair que* $\sigma(I_H) = \{1\}$, *car* λI_H - I_H = $(\lambda$ - $1)I_H$ *est inversible si* λ - $1 \neq 0$. *De même, si* $\mu \in \mathbb{k}$, *alors,* $\sigma(\mu I_H) = \{\mu\}$.

Example 36. *Soit* $H = L_2([0, 1],\mathbb{R})$. *On considére l'opérateur de multiplication* $A : H \to H$ *défini par:*

$$Af(t) = tf(t), t \in [0, 1]$$

Alors, on a $\sigma(A) = [0,\ 1]$. *De plus, l'opérateur* A *n'a pas de valeurs propres. En effet, soient* $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in H$, $t \in [0,\ 1]$, *on a:*

$$(\lambda I_H - A)f(t) \ = \ (\lambda - t)f(t).$$

On distingue deux cas:

Si $\lambda \notin [0,\ 1]$, *alors, la fonction* $t \mapsto \frac{1}{\lambda\ -\ t}$ *est borne, et l/opérateur* $(\lambda I_H$ - $A)^{-1}$ *défini par:*

$$(\lambda I_H - A)^{-1} g(t) \ = \frac{1}{\lambda \ - \ t} g(t), \ g \ \in \ H.$$

est un opérateur borné.

Si $\lambda \in [0,\ 1]$, *alors, la fonction* $t \mapsto \frac{1}{\lambda - t}$
n'est pas dans H, *car il y a la singularité non*
intégrable en $t = \lambda$. *Il résulte que* $(\lambda I_H\text{- } A)$ *n'est pas inversible et tous les* λ *sont des points singuliers. D'où, on déduit que* $\sigma(A) = [0,\ 1]$.

On suppose maintenant que λ *soit une valeur propre de* A *et* f *le vecteur propre associé*
dans H. *Alors, on a:*

$$(\lambda - t)f(t) = 0, t \in [0,\ 1].$$

Il s'en suit que $f \equiv 0$ *dans* H. *D'où,* A *n'a pas de valeurs propres et* $\sigma_p(A) = \emptyset$.

Lemma 17. *Soit* $T \in L(E)$; *on a:*

1- $r(T) = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$.

la valeur $r(T)$ *est appellée rayon spectral de* T.

2- Le spectre $\sigma(T)$ *est une partie compacte de* $\mathbb{k}$ *et* $\sigma(T) \subset B(0; r(T)) \subset B(0; \|T\|)$

PROOF. 1- On a:

$$r(T) \prec \lim_{n\to\infty} inf \, \|T^n\|^{\frac{1}{n}},$$

soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}^*$, tel que:

$$\|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \leq r(T) + \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ecrit $n = p_n n_0 + q_n$ avec $q_n \in [0, n_0 - 1]$ de sorte que $\|T^{n_0}\|^{p_n} \times \|T\|^{q_n}$.

Du moment que: $\frac{q_n}{n} = 0$ et $\frac{p_n}{n} = n_0$ il en resulte que:

$$\limsup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \leq r(T) + \varepsilon.$$

2- L'application $\varphi(\lambda) = \lambda I - T$ est continue de K dans E, donc $\rho(T) = \varphi^{-1}(U)$ est un ouvert et, par conséquent, $\rho(T)$ est un fermé.

Soit $\lambda \in K$ tel que $|\lambda| \succ r(T)$ et soit $r \in \,]r(T), |\lambda|[$. Il existe n_0 tel que: $\forall$ $n \geq n_0$ on ait $\|T^n\| \leq r^n$ (puisque $r > r(T)$).

La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} T^n$ converge donc normalement. Donc $\lambda \in \rho\,(T)$ et

$$B(0; r(T))^c \subset \rho\,(T).$$

Ainsi

$$\sigma(T) \subset B(0; r(T))$$

est borné. □

COROLLARY 8. *L'equation;*

$$T_1T_2 - T_2T_1 = I$$

n'a pas de solution parmi les opérateurs bornés.

PROOF. On a:

$$1 + T_2T_1 = T_1T_2,$$

donc:

$$1 + \sigma(T_2T_1) = \sigma(T_1T_2),$$

ou encore:

$$(1 + \sigma(T_2T_1)) \cup \{0\} = \sigma(T_2T_1) \cup \{0\},$$

mais il n'y a pas de compact non-vide $\sigma(\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1)$ vérifiant cette équation. En fait il y a des solutions, mais avec des opérateurs non bornés, $\sigma(\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1)$ n'est plus forcément compact, par exemple $\sigma(\mathrm{T}_2\mathrm{T}_1) = \mathbb{Z}$. □

À présent nous allons etablir le théorème spectral suivant:

THEOREM 34. *Soit $T \in L(H)$.*

1. *Si T est inversible, alors:*

$$\sigma(T^{-1}) = \left\{\frac{1}{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\right\}.$$

2. *$\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$ pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[X]$.*

PROOF. 1. Soit $\lambda \in \sigma(T^{-1})$. Comme T^{-1} est inversible, alors on a nécessairement $\lambda \neq 0$. Comme $T^{-1} - \lambda I$ est non inversible et comme

$$T^{-1} - \lambda I = \lambda T^{-1} \left(\frac{1}{\lambda} I - T \right)^{-1},$$

l'opérateur $\left(\frac{1}{\lambda} I - T\right)^{-1}$ est non inversible, i.e. $\frac{1}{\lambda} \in \sigma(T)$.

On a donc montré que:

$$\sigma(T^{-1}) \subset \sigma(T)^{-1} := \left\{ \frac{1}{\lambda}; \lambda \in \sigma(T) \right\}.$$

En echangeant le rôle de T et T^{-1} on obtient l'inclusion réciproque $\sigma(T)^{-1} \subset \sigma(T^{-1})$, ce qui achéve la preuve de la premiére assertion.

2. Montrons tout d'abord que:

$$p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T)).$$

Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Comme le polynôme $p(X) - p(\lambda)$ s'annule en λ, il existe un polynôme q tel que:

$$p(X) - p(\lambda) = (X - \lambda)q(X),$$

ce qui donne

$$p(T) - p(\lambda)I = (T - \lambda I)q(I).$$

Si $p(T) - p(\lambda)I$ etait inversible, $(T - \lambda I)$ serait aussi inversible, d'inverse $(p(T) - p(\lambda)I)^{-1}q(T)$, ce qui est contraire aux hypothéses.

On obtient donc que $p(\lambda) \in \sigma(p(T))$, montrant que $p(\sigma(T)) \subset \sigma(p(T))$.

Montrons ensuite que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. Si p est constant, l'inclusion est vérifiée.

On suppose donc dans la suite que p n'est pas un polynôme constant. Soit $\lambda \in \sigma(p(T))$. On factorise dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $p(X) - \lambda$ sous la forme:

$$p(X) - \lambda = \alpha(X - \alpha_1)...(X - \alpha_n);$$

où les $i, i = 1, ..., n$ désignent les racines de $p(X) - \lambda$, tel que $\lambda \neq 0$, car p n'est pas constant. Si pour tout $i = 1, ..., n$ l'opérateur $T - \alpha_i I$ est inversible, $p(T) - \lambda I$ est aussi inversible, ce qui est absurde.

Par conséquent il existe un indice $i \in \{1, ..., n\}$ tel que $(T - \alpha_i I)$ est non inversible, i.e. $\alpha_i \in \sigma\ (T)$. On en déduit que

$$\lambda = p(\alpha_i) \in p((T)),$$

prouvant que $\sigma(p(T)) \subset p(\sigma(T))$. □

LEMMA 18. *Soit T un opérateur linéaire. Si T n'est pas fermé; alors $\sigma(T) = C$ (ou, de maniére equivalente, si $\sigma(T) \neq \emptyset$); alors T est fermé.*

PROOF. Supposons que σ(T) ≠ ∅; et soit z ∈ ρ(T). (T - zI)$^{-1}$ est borné donc fermé et il en va de même pour (T - zI) et T. □

PROPOSITION 38. *Soient E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$;on a;*

$$\sigma_r(T) = \sigma_p({}^tT) \setminus \sigma_p(T) \text{ et } \sigma_c({}^tT)\sigma_c(T).$$

Si E est ré‡exif, on a l'égalité $\sigma_c({}^tT) = \sigma_c(T)$.

PROOF. On a: $\lambda \in \sigma_r$(T) si et seulement si λ est une valeur propre de ^{t}T, mais n'est pas une valeur propre de T, d'où la premiére assertion.

Si $\lambda \in \sigma_c(^t\mathrm{T})$, on sait que ^{t}T - λI$_E$ est injectif à image dense, donc T -λI$_E$ est injectif à image dense, et puisque

$$\sigma_c(^tT) \subset \sigma(^tT) = \sigma(T)),$$

on a $\lambda \in \sigma$ (T), par conséquent $\lambda \in \sigma_c$(T). Dans le cas où E est ré‡exif, T s'identifie à: ^{t}T, et il en résulte que σ_c(T) $\subset \sigma_c(^t\mathrm{T})$. Plus précisément, on vérifie que

$$T = J_E^{-1} \circ^t (^tT) \circ J_E,$$

où J$_E$ désigne l'isomorphisme de E sur E (on devra remarquer que si U est un isomorphisme de E sur F et si T $\in$ L(F), toutes les notions de spectre introduites sont les mêmes pour les deux opérateurs T et U^{-1}TU $\in$ L(E)). □

REMARK 21. *On peut généraliser la notion d'opérateur adjoint au cas d'espaces de Banach E. Pour f $\in$ E' et x $\in$ E, on note $\langle f, x\rangle_{E\prime,E}$ au lieu de f(x) et on appelle $\langle .,. \rangle_{E\prime,E}$ le crochet de dualité de E',E. Le crochet $\langle .,. \rangle_{E\prime,E}$ est similaire au produit scalaire d'espace de Hilbert. En particulier, si A $\in$ L(E, F), alors, il existe A* $\in$ L(F',E') tel que $\forall x \in$ E, $\forall f \in$ F' :*

$$\langle A^* f, x\rangle_{E\prime,E} = \langle f, Ax\rangle_{F\prime,F} .$$

Il s'agit d'une généralisation car si E est un espace de Hilbert alors, E' peut être identifié avec E d'aprés le théorème de représentation de Riesz. Le crochet de dualité $\langle .,. \rangle_{E\prime,E}$ est alors le produit scalaire de E.

LEMMA 19. *Soient E un espace de Banach complexe, T $\in$ L(E) et soit $\lambda \in$ $\partial\sigma$(T) (la frontiére du spectre de T). Il existe une suite (x_n) $\subset$ E de vecteurs de norme 1 telle que (T - λ I$_E$)(x_n) tende vers 0.*

PROOF. En posant S = T - λI$_E$, on se raméne à montrer que si 0 $\in \partial\sigma$(S), il existe une suite (x$_n$) $\subset$ E de vecteurs de norme 1 telle que S(x$_n$) tende vers 0. Puisque σ(S) est fermé, sa frontiére est contenue dans σ(S), donc 0 $\in \sigma$(S) et S n'est pas inversible. Si on ne pouvait pas trouver la suite (x$_n$), on aurait $\|S(x)\| \geq$ c $\|x\|$ pour un c$\succ$ 0 et tout x $\in$ E , donc S(E) serait fermé, et S(E) $\neq$ E puisque S n'est pas inversible. On pourrait alors trouver y $\notin$ S(E) ; puisque 0 est à la frontiére du spectre de S, il existe une suite (μ_n) hors du spectre et qui tend vers 0 ; alors S - μ_nI$_E$ est inversible pour tout n. Il existe donc un vecteur z$_n$ $\in$ E tel que

$$(S - \mu_n I_E)(z_n) = y.$$

Si (z$_n$) était bornée, on aurait μ_nz$_n$ $\to$ 0 et y serait limite de la suite (S(z$_n$)) $\subset$ S(E), ce qui est impossible puisque S(E) est supposé fermé et y $\notin$ S(E). Il existe donc une sous-suite (z$_n^{'}$) telle que $\left\|z_n^{'}\right\|$ tende vers +1; en posant

$$x_n = \left\|z_n^{'}\right\| - z_n^{'},$$

on voit que

$$S(x_n) - \mu_n x_n = \left\|z_n^{'}\right\|^{-1} y \to 0$$

donc S(x$_n$) $\to$ 0. □

EXAMPLE 37. *Exemple de valeurs propres approchées: soit S le shift à droite sur $l_2(\mathbb{N})$; on sait que le spectre de S est ´égal au disque unité fermé, sa frontiére est donc le cercle unité T. Soit ¸ de module 1 un point quelconque de $\partial\sigma(S)$; on considére pour tout $n \geq 1$ le vecteur de norme 1 de l_2*

$$x_n = n^{\frac{-1}{2}}(1, \lambda^{-1}, \lambda^{-2}, ...\blacksquare\lambda^{-n+1}, 0, ...)$$

et on note que

$$\|S(x_n) - \lambda x_n\| \leq 2n^{\frac{-1}{2}} \ \ \to 0$$

ce qui donne des presque vecteurs propres pour la valeur $\lambda \in$ T.

PROPOSITION 39. *Soient T_1; $T_2 \in L(E)$; alors:*

$$\sigma(T_1T_2) = \sigma(T_2T_1)$$

PROOF. Basée sur le fait que, si I- T_1T_2 est inversible d'inverse U, alors:

$$(I + T_2UT_1)(I - T_2T_1) =$$

$$I - T_2T_1 - T_2UT_1T_2T_1 + T_2UT_1 =$$

$$I - T_2T_1 + T_2U(I - T_1T_2)T_1 = I.$$

De même

$$(I - T_2T_1)(I + T_2UT_1) = I,$$

et donc I - T_2T_1 est inversible. □

REMARK 22. *Si T est une isométrie partielle de H sur un sous-espace propre de H, alors:*

$$\sigma(T^*T) = \{1\} \neq \sigma(TT^*) = \{0; 1\}.$$

LEMMA 20. *Soit T un opérateur linéaire fermé, alors $\sigma_{res}(T) = \emptyset$.*

PROOF. C'est une conséquence du théorème * □

PROPOSITION 40. *Soit T un opérateur linéaire. Si T n'est pas fermé; alors $\sigma(T) = \mathbb{C}$ (ou, de maniére equivalente, si $\rho(T) \neq \emptyset$); alors T est fermé.*

PROOF. Supposons que ρ(T) $\neq \emptyset$; et soit z $\in \rho$(T). (T - zI)$^{-1}$ est borné donc fermé et il en va de même pour (T - zI) et T. □

THEOREM 35. *Soit $T \in L(E)$; on a:*

$$r(T) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

la valeur r(T) est appellée rayon spectral de T.

PROOF. On a:

$$r(T) \prec \lim_{n\to+\infty} \inf \|T^n\|^{\frac{1}{n}}$$

soient $\varepsilon \succ 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$;tel que:

$$\|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \leq r(T) + \varepsilon.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on ecrit $n = p_n n_0 + q_n$ avec $q_n \in [0; n_0 - 1]$ de sorte que:

$$\|T^{n_0}\|^{p_n} \times \|T\|^{q_n}$$

Du moment que: $\frac{q_n}{n} = 0$ et $\frac{p_n}{n} = n_0$
il en resulte que:

$$\lim_{n\to+\infty} \sup \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T^{n_0}\|^{\frac{1}{n_0}} \leq r(T) + \varepsilon.$$

□

PROPOSITION 41. *Soient E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$; on a:*

$$\sigma_r(T) = \sigma_p({}^tT) \diagdown \sigma_p(T) \textit{ et } \sigma_c({}^tT) \subset \sigma_c(T).$$

Si E est ré‡exif, on a l'égalité $\sigma_c({}^tT) = \sigma_c(T)$.

PROOF. On a: $\lambda \in \sigma_r$(T) si et seulement si est une valeur propre de ^{t}T, mais n'est pas une valeur propre de T, d'où la premiére assertion. Si $\lambda \in \sigma_c({}^t$T), on sait que ^{t}T - I_E est injectif à image dense, donc T - I_E est injectif à image dense, et puisque

$$\sigma_c({}^tT) \subset \sigma({}^tT) = \sigma(T)$$

on a: $\lambda \in \sigma$(T), par conséquent $\lambda \in \sigma_c$(T). Dans le cas où E est ré‡exif, T s'identifie à: ^{t}T, et il en résulte que $\sigma_c({}^tT) \subset \sigma({}^tT)$. Plus précisément, on vérifie que

$$T = J_E^{-1} \circ^t ({}^tT) J_E,$$

où J_E désigne l'isomorphisme de E sur E (on devra remarquer que si U est un isomorphisme de E sur F et si T $\in$ L(F), toutes les notions de spectre introduites sont les mêmes pour les deux opérateurs T et $U^{-1}TU \in$ L(E)). □

0.1. Décomposition du spectre d'un opérateur borné.

PROPOSITION 42. *Soient E et F deux espaces de Banach et soit $T \in L(E; F)$; les conditions suivantes sont équivalentes: (i) l'application T est injective d'image fermée; (ii) il existe un nombre $c > 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $\|T(x)\| \leq c \ \|x\|$; (iii) il n'existe pas de suite (x_n) dans E telle que $\|x_n\| = 1$ et $\lim_n \|T(x_n)\| = 0$.*

PROOF. Si (i) est satisfaite, T détermine une application continue bijective T_1 de E sur l'espace de Banach im(T). Par le théorème des isomorphismes, T_1 est un isomorphisme: on obtient (ii) avec

$$c = \left\|T_1^{-1}\right\|^{-1}.$$

Il est évident que (ii) implique (iii) ; montrons que (iii) $\Rightarrow$ (ii) : si (ii) n'est pas satisfaite, il existe pour tout entier n ≥ 1 un vecteur $y_n \in$ E tel que

$$n^{-1}\|y_n\| \succ \|T(y_n)\|;$$

si on pose

$$x_n = \|y_n\|^{-1} y_n,$$

on a $\|x_n\| = 1$ et

$$\|T(x_n)\| \prec \frac{1}{n},$$

donc (iii) n'est pas satisfaite. Si (ii) est satisfaite, il est clair que T est injective ; si (y_n) est une suite dans im(T) qui converge vers y $\in$ F, écrivons $y_n = T(x_n)$ avec $x_n \in$ E ; on a:

$$\|x_n - x_m\| \leq c^{-1}\|y_n - y_m\|,$$

donc la suite (x_n) est de Cauchy, donc convergente vers x $\in$ E puisque E est complet ; alors la suite $y_n = T(x_n)$ converge vers T(x), donc y = T(x) est dans im(T), qui est donc fermée dans l'espace F. □

Si un opérateur borné T de E dans F est inversible, il posséde les deux propriétés suivantes :

(1) *Il existe une constante $c \succ 0$ telle que $\|Tx\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in E$.*
(2) *On a $\overline{T(E)} = F$.*

La deuxiéme propriété est une forme faible de surjectivité: l'image de T est dense dans

F ; c'est évidemment vrai quand T est inversible, puisqu'alors T est surjectif.

De plus, lorsque T est inversible, la propriété (1) *est vraie avec $c = \left\|T^{-1}\right\|^{-1} \succ 0$; en effet, on a*

pour tout $x \in E$, lorsque T^{-1} existe dans L(F; E)

$$\|x\| = \left\|T^{-1}(Tx)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| . \|Tx\|.$$

LEMMA 21. *Soient E et F deux espaces de Banach ; un opérateur $T \in$ L(E; F) est inversible si et seulement s'il vérifie 1 et 2.*

PROOF. On a déjà vu une des directions : si T est inversible, il vérifie les deux conditions. Inversement, supposons que 1 et 2 soient vraies ; on sait alors que T(E) est fermé par la proposition 1, et dense d'aprés 2, donc T(E) = F. Si T(x) = T(x_0) on aura x = x_0 puisque $0 = \|T(x\text{-}x_0)\| \leq c\|x - x_0\|$: d'aprés 1. Cela permet de définir une application (linéaire) S de F = T(E) sur E en posant S(y) = x $\in$ E si et seulement si y $\in$ F et T(x) = y. En traduisant A, on obtient $\|S(y)\| \leq$ c^{-1} $\|y\|$ pour tout y $\in$ F, ce qui montre que S est continue. Pour finir il est clair que S est l'inverse de T. □

0.2. Spectre et transposition dans L(E). *On va maintenant s'intéresser au rapport entre le spectre d'un opérateur borné $T \in L(E)$ et celui de son transposé ${}^tT \in L(E^*)$. Ce rapport sera trés simple : les deux spectres sont égaux.*

PROPOSITION 43. *Soient E, F deux espaces de Banach et soit T 2 L(E; F); l'opérateur transposé ${}^tT \in L(F^*;E^*)$ est inversible si et seulement T est inversible.*

PROOF. Si T est inversible, comme $T^{-1}T = I_E$ et $TT^{-1} = I_F$, on trouve

$$^tT^t(T^{-1}) = I_E^* \text{ et } {}^t(T^{-1})^tT = I_F^*,$$

donc ^{t}T est inversible et $({}^tT^{-1}) = {}^t(T^{-1})$. Supposons inversement que T ne soit pas inversible. On sait que, ou bien T ne vérifie pas la condition 2, ou bien il ne vérifie pas 1. Si T ne vérifie pas 2, l'image T(E) n'est pas dense, donc ^{t}T n'est pas injective par le lemme 2.11, ce qui implique que ^{t}T n'est pas inversible. Si T ne vérifie pas A, il existe d'aprés la proposition 1 une suite $(x_n) \subset$ E de vecteurs de norme un telle que $T(x_n) \to 0$. Considérons pour tout entier n l'opérateur R_n de K dans E, défini par $R_n(\lambda) = \lambda x_n$. Sa norme est égale à $\|x_n\| = 1$, et T$\pm$ R_n tend vers 0. En transposant, ${}^tR_n \pm {}^tT$ tend vers 0, alors que $\|{}^tR_n\| = \|R_n\| = 1$ pour tout n, ce qui entraine encore que ^{t}T ne peut être inversible. □

On en déduit immédiatement de la proposition précédente le corollaire suivant:

COROLLARY 9. *Soient E un espace de Banach complexe et $T \in L(E)$; on a: $\sigma({}^tT) = \sigma(T)$.*

PROOF. Il suffit de remarquer que ${}^t(T - \lambda I_E) = {}^tT - \lambda I_{E^*}$ pour tout nombre complexe λ. □

Dans le cas hilbertien, on préfére le plus souvent exprimer le résultat précédent en utilisant

l'adjoint $T^* \in L(H)$ plutot que la transposée ${}^tT \in L(H^*)$. Le seul petit piége à éviter est que

$$(T - \lambda I_E)^* = T^* - \overline{\lambda} I_H.$$

COROLLARY 10. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in L(H)$; le spectre de l'adjoint T^* est formé des complexes conjugués des éléments du spectre de T,*

$$\sigma(T^*) = \left\{\overline{\lambda} \in \mathbb{C}/\lambda \in \sigma(T)\right\}$$

1.

Spectre de l'adjoint d'un opérateur

PROPOSITION 44. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $A \in L(H)$.*

1. Le spectre de l'adjoint A^* de A est l'ensemble des conjugués des éléments du spectre de A: $\sigma(A^* \ ) = \overline{\sigma(A)} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \sigma(A)\}$; et
$\rho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \rho(A)\}$.
2. Pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$; on a:

$$R_\lambda(A^*) = (R_{\overline{\lambda}}(A))^*$$

PROOF. 1. On a: $(A^* - \lambda I)^* = A - \overline{\lambda} I$ donc;
$\rho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A^* - \lambda I) \text{ est inversible}\}$
$= \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \overline{\lambda} I) \text{ est inversible}\}$
$= \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\lambda} \in \rho(A)\}$
De plus,

$$\sigma(A^*) = \mathbb{C} \diagdown \rho(A^*),$$

ce qui donne le résultat.
2. Si $\lambda \in \rho(A^*)$, alors:
$R_\lambda(A^*) = (A^* - \lambda I)^{-1} = ((A - \overline{\lambda} I)^*)^{-1}$
$= ((A - \overline{\lambda} I)^{-1})^* = (R_{\overline{\lambda}}(A))^*$ □

EXAMPLE 38. *Soit* $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$; $A - \lambda I = \begin{pmatrix} i-\lambda & 0 \\ 0 & i-\lambda \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda - i}$

$\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (i-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = i$
alors, $\sigma(A) = \{i\} \Rightarrow \sigma(A^*) = \{-i\}$

$\rho(A) = \mathbb{C} \diagdown \{i\} \Rightarrow \rho(A^*) = \mathbb{C} \diagdown \{-i\}$.
Si $\lambda \in \mathbb{C} \diagdown \{-i\}$; alors:
$R_\lambda\ (A^*) = \begin{pmatrix} \frac{1}{i+\lambda} & 0 \\ 0 & \frac{1}{i+\lambda} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda - i} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda - i} \end{pmatrix}$

Commençons par énoncer un résultat général, dont nous ne démontrerons qu'un corollaire.

THEOREM 36. ***(théorème de Phillips)*** *Soient E un espace de Banach complexe, $T \in L(E)$*

et $T^* \in L(E^*)$ l'adjoint de T, alors;

$$\sigma(T^*) = \sigma(T) \quad et \quad \forall \lambda \in \rho(T), \quad R_\lambda(T^*) = R_\lambda(T)^*.$$

Ce résultat a comme conséquence immédiate, dans le cas particulier où $E = H$ est un espace de Hilbert complexe.

PROPOSITION 45. *Soit H un espace de Hilbert complexe, $T \in L(H)$ et $T^* \in L(H)$ l'adjoint hilbertien de T . Alors:*

$$\sigma(T^*) = \sigma(T)^* = \{\overline{\lambda} \backslash \lambda \in \sigma(T)\} \text{ et } \forall \lambda \in \rho(T), R_{\overline{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*.$$

1. $\rho(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \overline{\lambda} \in \rho(A)\}$ *et* $\sigma(A^*) = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \overline{\lambda} \in \sigma(A)\}$.

77

2. Pour tout $\lambda \in \rho(A^*)$, $R_\lambda(A^*) = \left(R_{\overline{\lambda}}(A)\right)^*$.

Proof. 1. On a: $(A^* - \lambda I)^* = A - \overline{\lambda} I$ donc;

$$\begin{aligned} \rho(A^*) &= \{\lambda \in \mathbb{C},\ (A^* - \lambda I) \text{ est inversible}\} = \\ & \quad \{\lambda \in \mathbb{C},\ A - \overline{\lambda} I \text{ est inversible}\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C},\ \overline{\lambda} \in \rho(A)\}. \end{aligned}$$

De plus, $\sigma(A^*) = \mathbb{C} \backslash \rho(A^*)$, ce qui donne le résultat.
2. Si $\lambda \in \rho(A^*)$ alors;

$$\begin{aligned} R_\lambda(A^*) &= (A^* - \lambda I)^{-1} = \left(\left(A - \overline{\lambda} I\right)^*\right)^{-1} \\ &= \left(\left(A - \overline{\lambda} I\right)^{-1}\right)^* = \left(R_{\overline{\lambda}}(A)\right)^*. \end{aligned}$$

□

2. Spectre des opérateurs auto-adjoints

Les propriétés élémentaires principales des opérateurs auto-adjoints sont résumées dans les propositions suivantes.

Proposition 48. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in L(H)$.*

(1) *Si T est auto-adjoint, et si F est un sous-espace vectoriel de H invariant par T (c'est-à-dire tel que $T(F) \subset F$), alors $F^\perp$ est aussi invariant par T.*

(2) Supposons que H $\neq \{0\}$. Si T est auto-adjoint, le spectre d'un hermitien est réel si

$$M = \underset{\|x\|=1}{sup} \langle T(x); x\rangle \, et \; m = \underset{\|x\|=1}{inf} \langle T(x); x\rangle,$$

alors m et M sont les bornes extrêmes de son spectre $\sigma(T) \subset [m, M]$.

Et

$$r(T) = \|x\| = \underset{\|x\|=1}{sup} \langle T(x); x\rangle = \max\{M, -m\}$$

En particulier, le rayon spectral de T est égal à sa norme, et si σ(T) $= \{0\}$, alors T $= 0$.

(3) Si T est auto-adjoint, alors son spectre résiduel est vide: σ_r(T) $=\emptyset$.

(4) (Critère de Weyl) L'ensemble σ(T) des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe une suite (x$_n$)$_{n\in N}$ dans H telle que $\|x_n\| = 1$ et

$$\underset{n\to+\infty}{lim} \|T(x_n) - x_n\| = 0,$$

est contenu dans le spectre de T.

Si T est auto-adjoint, alors cette inclusion est une égalité, la propriété que:

$$\sigma(T) = \|T\|$$

implique en particulier qu'un opérateur auto-adjoint est nul si et seulement si son rayon spectral est nul, donc si et seulement si son

spectre est égal à $\{0\}$. Mais il existe des opérateurs continus non nuls de spectre réduit à 0 (qui ne sont pas auto-adjoint, donc), comme l'opérateur de matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de l'espace de Hilbert C^2.

Proof. (i) L'opérateur continu T -λI est inversible si et seulement si son adjoint, qui est T* -λI, est inversible. Si T est inversible, alors 0 n'appartient ni au spectre de T ni à celui de T^{-1}; de plus, pour tout nombre complexe non nul λ, l'opérateur continu T^{-1} -λI est inversible si et seulement si:

$$T - \frac{1}{\lambda} I = \frac{1}{\lambda} T \left(T^{-1} - \lambda I \right)$$

est inversible.

(ii) Nous avons x $\in$ T(H)$^\perp$ si et seulement si $\langle T(y); x \rangle = 0$ pour tout y dans H , si et seulement si

$$\langle y, T^*(x) \rangle = 0$$

pour tout y dans H , donc si et seulement si $x \in$ Ker(T*). La seconde égalité de (ii) découle de la première en remplaçant T par T* et en utilisant la propriété d'involution de T*. $\square$

On s'intéresse dans la proposition suivante aux valeurs propres des opérateurs auto-adjoints.

Proposition 49. *Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors, on a:*

1. $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$.
2. $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I_H - A)} \neq H$.
3. Si $\lambda, \mu \in \sigma_p(A)$, $\lambda \neq \mu$, alors, $\mathrm{Ker}\,(\lambda I_H - A) \perp \mathrm{Ker}\,(\mu I_H - A)$, i.e., les sous-espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.

Proof. 1. Si $\lambda \in \sigma_p(A)$; alors il existe $x \in H \backslash \{0\}$, tel que $Ax = \lambda x$. D'où:

$$\lambda = \frac{\langle \lambda x, x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}.$$

2. Soit $\lambda \in \sigma_p(A)$. D'aprés la proposition (3.4), on a:

$$\begin{aligned} \overline{\mathrm{Im}(\lambda I_H - A)} &= \left[\mathrm{Ker}\,(\lambda I_H - A)^*\right]^\perp = \\ & \left[\mathrm{Ker}\,\left(\overline{\lambda} I_H - A\right)\right]^\perp. \end{aligned}$$

Comme $\sigma_p(A) \subset \mathbb{R}$, $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\lambda} \in \sigma_p(A)$, ce qui équivaut à

$$\mathrm{Ker}\,\left(\overline{\lambda} I_H - A\right) \neq \{0\},$$

soit encore

$$\left[\mathrm{Ker}\,\left(\overline{\lambda} I_H - A\right)\right]^\perp \neq H.$$

On déduit que $\lambda \in \sigma_p(A)$ si et seulement si $\overline{\mathrm{Im}(\lambda I_H - A)} \neq H$.

3. Si $x \in \operatorname{Ker}(\lambda I_H - A)$ et $y \in \operatorname{Ker}(\mu I_H - A)$, alors, $Ax = \lambda x$ et $Ay = \mu y$. Comme $A = A^*$ et $\mu \in \mathbb{R}$, on obtient

$$(\lambda - \mu)\langle x, y\rangle = \langle \lambda x, y\rangle - \langle x, \mu y\rangle = \langle Ax, y\rangle - \langle x, Ay\rangle = 0.$$

Il résulte : $\langle x, y\rangle = 0$ car $\lambda \neq \mu$. D'où,

$$\operatorname{Ker}(\lambda I_H - A) \perp \operatorname{Ker}(\mu I_H - A).$$

La démonstration de la proposition est ainsi terminée. □

Les propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints sont réunies dans le théorème suivant:

Theorem 37. *Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$l = \inf_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \ \text{ et } L = \operatorname{Sup}_{\|x\|=1} \langle Ax, x\rangle \ .$$

Alors, on a:
1. $l, L \in [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.
2. $l, L \in \sigma(A)$.
3. $\sigma(A) \subset [l, L]$.

4. $\| A \| = sup\{|\langle Ax, x\rangle| : x \in H \text{ et } \| x \| = 1\}$. En particulier, $\|A\| = \max(|l|, |L|)$.

Les points 2., 3. et 4. entraînent le corollaire suivant:

Corollary 11. *1. Soit $A \in L(H)$ un opérateur auto-adjoint, alors, $\|A\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$.*

2. *Soit A un opérateur auto-adjoint sur H. Si $\sigma(A) = \{0\}$; alors $A = 0$.*

Proposition 50. *Soit $T \in L(H)$, un opérateur auto adjoint alors:*

1. Le rayon spectral de T est égale à la norme de $T : r(t) = \|T\|$.
2. Le spectre de T est réel. et on a la majoration:

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}, \|R_\lambda(T)\| \leq I / |\operatorname{Im} \lambda|$$

3. Le spectre résiduel de T est vide.
4. Si $\lambda \in \sigma(T) \backslash \sigma_a(T)$, alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de T^*.
5. Si T est un opérateur auto-adjoint alors; $\sigma(T) = \sigma_a(T)$.

Proof. Puisque T est un opérateur auto-adjoint donc

$$\|TT^*\| = \|T\|^2,$$

implique que:

$$\left\|T^2\right\| = \|T\|^2.$$

D'où par récurrence:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left\|T^{2n}\right\| = \|T\|^{2n}$$

D'où

$$r(t) = \lim \left\|T^{2^n}\right\|^{2^{-n}} = \|T\|.$$

Puisque

$$T = T^*, \langle Tx, x\rangle = \langle x, Tx\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle},$$

on a: $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$, et donc:

$$\operatorname{Im}\left(\left(T-\lambda\right)x,x\right) = -\operatorname{Im}\lambda \left\|x\right\|^2$$

Il en résulte:

$$\forall x \in H, \left|\operatorname{Im}\lambda\right| \left|x\right|^2 \leq \left|\left\langle \left(T-\lambda\right)x,x\right\rangle\right| \leq \left\|\left(T-\lambda\right)x\right\| \left\|x\right\|$$

En divisant par $\|x\|$, on en déduit que $(T-\lambda I)$ est injectif d'image fermée si λ n'est pas réel.

2. Mais l'image de $T-\lambda I$ est dense. Sinon, soit $y \neq 0$ orthogonal à cette image:

$$\forall x \in H, \left\langle \left(T-\lambda\right)x,y\right\rangle = \left\langle x, \left(T-\overline{\lambda}\right)y\right\rangle = 0$$

Donc $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de T, avec pour tout vecteur propre y, et

$$\langle Ty, y\rangle = \overline{\lambda}\left\|y\right\|^2,$$

ce qui est absurde (le premier membre est réel, et pas le seconde).

$T-\lambda I$ est donc inversible, ce qui prouve le point 2.

3. Si λ est dans le spectre résiduel, prouve que $\overline{\lambda}$ est valeur propre de T , et puisque λ est réelle (car dans le spectre de T), λ serait valeur propre de T, et donc n'appartiendrait pas au spectre résiduel.

4. Si λ n'appartient pas à $\sigma_a(T)$, alors il existe $C>0$ avec :

$$\forall u \in H, \quad \|u\| \leq C\left\|\left(\lambda I - T\right)u\right\|$$

Si un tel C n'existait pas on trouverait en effet une suite u_n de norme 1 avec

$$1 \geq n\left\|\left(T-\lambda\right)u_n\right\|.$$

ce qui fournirait $\lambda \in \sigma_a(T)$.

On en déduit comme dans la preuve de la proposition (4.7) que soit λ est dans l'ensemble résolvant de T, soit $\overline{\lambda}$ une valeur propre de T^*.

Le point 5. en découle immédiatement puisque le spectre de $T=T^*$ est réel. □

EXAMPLE 41. *Soit $f \in H$; $T(f)(x) = xf(x)$, $x \in [a,b]$.*

T est un opérateur auto-adjoint de H, calculons $\sigma(T)$.

On a:

$$T^*(f)(x) = xf(x).$$

Donc $T^* = T$. D'où T est auto-adjoint.

Si $\lambda \notin [a,b]$, l'opérateur R_λ défini par:

$$R_\lambda(f)(x) = (x-\lambda)^{-1}f(x)$$

est un opérateur linéaire continu sur H et on a:

$$R_\lambda T = TR_\lambda = I.$$

Par conséquent $\sigma(T) \subseteq [a,b]$.

Supposons qu'il existe $\lambda \in]a,b[$ telle que $(T-\lambda I)$ soit un isomorphisme bicontinu de H dans H.

Il existerait alors $C>0$, tel que $\forall f \in L^2(a,b)$, on ait:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq C\int_a^b \left|x-\lambda\right|^2 \left|f(x)\right|^2 dx$$

Soit $\delta > 0$; tel que $\delta < \lambda - a$. Testons l'inégalité précédente avec

$$f(x) = \frac{I_{[a,\lambda-\delta]}(x)}{|x-\lambda|^{1/2}}.$$

On obtient alors:

$$\int_a^{\delta-\lambda} \frac{dx}{\lambda - x} \leq C(b-a)^2; \forall \delta > 0.$$

On obtient une contradiction en faisant tendre δ vers 0.

Le spectre étant fermé on en déduit que $\sigma(T) = [a, b]$.

3. Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints

PROPOSITION 51. ***(Valeurs propres des opérateurs auto-adjoints).*** *Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint; Alors:*

1. $Vp(A) \subset \mathbb{R}$.

2. $\lambda \in Vp(A)$ *si et seulement si* $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} \neq H$.

3. Si $\lambda, \mu \in Vp(A), \lambda \neq \mu$, *alors* $\ker(A - \lambda I) \perp \ker(A - \mu I)$, *i.e. les sous-espaces propres de A sont orthogonaux deux à deux.*

THEOREM 38. ***(Propriétés spectrales des opérateurs auto-adjoints).*** *On suppose $H \neq 0$. Soit $A \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. On pose*

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x) \text{ et } M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x).$$

Alors,

1. $m, M \in [-\|A\|, \|A\|] \subset \mathbb{R}$.

2. $m, M \in \sigma(A)$.

3. $\sigma(A) \subset [m, M]$.

4. $\|A\| = \sup\{|(Ax, x)|, x \in H \text{ et } \|x\| = 1\}$. *En particulier,* $\|A\| = \max(|m|, |M|)$.

COROLLARY 12. *1) Si $A \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, alors*

$$\|A\| = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

2) Un opérateur auto-adjoint A sur H est positif si et seulement si: $\sigma(A) \subset \mathbb{R}^+$.

COROLLARY 13. *Soit A un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{L}(H)$ telle que $\sigma(A) = \{0\}$. Alors $A = 0$.*

THEOREM 39. *Soient H un espace de Hilbert complexe et $T \in L(H)$ hermitien ; posons $K = \sigma(T)$. Il existe un et un seul homomorphisme d'algébres de Banach unitaires complexes φ_T : $C(K) \rightarrow L(H)$ tel que $\varphi_T(iK) = T$. L'homomorphisme φ_T est isométrique. Si on note*

$$f(T) = \varphi_T(f),$$

on a:

$$f(T)^* = f(T)$$

et $f(T)$ commute avec tout opérateur S qui commute avec T (donc $f(T)$ est normal), pour toute fonction f continue sur K. On a de plus

$$\sigma(f(T)) = \sigma(f) = f(\sigma(T))$$

Si f est réelle continue sur K et g continue sur $f(K)$, on a $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

PROOF. On a vu que K = σ(T) est contenu dans $\mathbb{R}$. Désignons par A l'ensemble des fonctions continues f sur K de la forme f : s $\rightarrow$ P(s) pour un P $\in$ C$[X]$ (fonctions polynomiales). D'aprés le théorème de Weierstrass, les fonctions polynomiales à coefficients complexes sont uniformément denses dans l'espace C($[-a;a]$) des fonctions complexes continues sur $[-a;a]$, pour tout a $\succ$ 0 ; il en résulte que l'ensemble A est dense dans C(K), puisque K $\subset$ $[-a;a]$ lorsque par exemple a = $|T|$.

Montrons d'abord l'unicité de φ_T. Si φ est un homomorphisme d'algébres unitaires de C(K) dans L(H) tel que φ(i$_K$) = T, on aura nécessairement par les propriétés d'homomorphisme que l'image de la fonction t $\in$ K $\rightarrow$ P(t) est égale à P(T) : par définition, on a

$$\varphi(i_K^0) = \varphi(1) = I_H = T_0, et \varphi(i_K^k) = T_k$$

pour tout k $\geq$1(la fonction i$_K^k$ est la fonction monome s $\rightarrow$s^k) ; il en résulte puisque φ est deplus linéaire que pour toute fonction polynomiale f : s $\rightarrow$ P(s), l'image φ(f) est

$$P(T) = \varphi T(f).$$

Par conséquent, φ est uniquement déterminé sur A. Comme un homomorphisme d'algébres de Banach est continu par définition, et que A est dense dans C(K), il en résulte que φ, s'il existe, est uniquement défini sur C(K) : si (P$_n$) tend uniformément vers f sur K, on aura

$$\varphi(f) = lim_n \varphi(P_n) = lim_n P_n(T).$$

Montrons maintenant l'existence, en commencant par la définition d'un homomorphisme Ã sur A : pour toute f $\in$ A l'élément Ã(f) peut etre défini de facon unique puisque si

$$f = P_1 = P_2 sur\ K,$$

$$\|P_1(T)\text{-}P_2(T)\| = \|P_1\text{-}P_2\|_{C(K)} = 0$$

d'aprés le lemme 1 (si le spectre K est un ensemble infini, la vérification précédente est inutile, puisque le polynome formel P$_1$ - P$_2$ sera nul s'il a une infinité de racines ; mais le spectre de T pourrait etre fini). On posera donc ψ(f) = P(T), où P est n'importe quel polynome qui représente la fonction f sur K. De plus, on a $\|\psi(f)\| = \|f\|_1$. L'ensemble A est dense dans C(K), et on a un homomorphisme isom´etrique ψ de A dans L(H) ; d'aprés le lemme 1.4.1, il existe un prolongement unique φ_T de ψ en application linéaire continue de C(K) dans L(H). Posons f(T) = φ_T(f) pour toute f $\in$C(K). Pour toute suite (P$_n$) de polynomes qui converge uniformément sur K vers la fonction f, la suite (P$_n$(T)) tend en forme dans L(H) vers f(T), puisque φ_T est continu. Il en résulte par continuité de la norme que:

$\|f\,(T)\| = \lim_n \|P_n(T)\| = \lim_n \|P_n\|_{C(K)} = \|f\|_{C(K)}$

ce qui montre que l'application

$$\varphi T : f \in C(K) \rightarrow f(T) \in L(H)$$

est isométrique. Par construction on a φ_T(i^K) = T puisque la fonction i^K correspond au monome X dont l'image est T en calcul polynomial. Il reste à voir que φ_T est un homomorphisme. Si (P_n) converge uniformément vers f sur K et (Q_n) converge uniformément vers g sur K, alors

$$f(T)g(T) = lim(P_nQ_n)(T) = (fg)(T)$$

(utiliser la continuité du produit par rapport au couple de variables), donc φ_T est un homomorphisme d'algébres de Banach unitaires complexes, isométrique. Il en résulte que

$$\sigma f(T) = f(K),$$

d'aprés un principe général sur C(K) Si

$$ST = TS,$$

on en déduit que

$$SP_n(T) = P_n(T)S$$

pour tout n, donc

$$Sf(T) = f(T)S$$

par continuit´e du produit par S, à droite et à gauche. Ainsi f(T) commute avec tout opérateur borné S qui commute avec T. Posons $\varphi_1(f) = f(T)^*$ pour toute f $\in$ C(K). On vérifie que φ_1 est un homomorphisme d'algébres de Banach unitaires de C(K) dans L(H), et $\varphi_1(i^K) = i^K(T)$ (parce que $K \subset \mathbb{R}$, on a $\overline{i^K} = i^K$) donc

$$\varphi_1(i^K) = T^* = T$$

parce que T est hermitien. D'aprés l'unicité, on déduit $\varphi_1 = \varphi_T$, ce qui signifie que

$$\overline{f}(T) = f(T)^*$$

pour toute f $\in$C(K). Il en r´esulte que

$$f(T)^*f(T) = (\overline{f}f)(T) = (f\overline{f})(T) = f(T)f(T)^*$$

donc $f(T)$ est normal. Supposons que $f$soit une fonction r´eelle continue sur

$$K = \sigma(T).$$

Alors f(T) est hermitien puisque

$$f(T)^* = \overline{f}(T) = f(T),$$

ce qui permet d'appliquer φ a f(T) le calcul fonctionnel défini précédemment. L'ensemble

$$L = f(K) \subset \mathbb{R}$$

est compact, et c'est le spectre de f(T). L'application

$$g \in C(L) \to g \circ f \in C(K)$$

est un homomorphisme χ d'algébres de C(L) dans C(K), qui transforme i^L en f(T) ; d'aprés l'unicité, la composition $\varphi_T \circ \chi$ est égale à l'homomorphisme $\varphi_{f(T)}$ associé à l'opérateur hermitien f(T). On a donc (g $\circ$ f)(T) = g(f(T)) pour toute fonction continue g sur L. □

Corollary 14. *Soient H un espace de Hilbert complexe, $T \in L(H)$ hermitien*

et f une fonction continue sur $K = \sigma(T)$; si f est réelle sur K, alors f(T) est hermitien ; si f est réelle et positive sur K, alors f(T) est hermitien positif. Si $|f|=$ 1 sur K, f(T) est unitaire.

PROOF. On a déjà vu le premier point : quand f est réelle, on peut écrire

$$f(T)^* = \overline{f}(T) = f(T).$$

Si de plus f $\geq$ 0 sur K, on peut considérer

$$g(s) = \sqrt{f(s)}$$

qui est une fonction réelle continue sur K. Alors g(T) est hermitien et f(T) = (g(T))^2 est hermitien positif. Pour finir, supposons que

$$|f| = 1$$

sur K et posons $U = f(T)$; on a

$$U^*U = \overline{f}(T)f(T) = (\overline{f}f)(T) = \varphi_T(1) = I_H,$$

et le méme calcul donne UU* = I$_H$, donc U est unitaire. □

EXAMPLE 42. *1. Supposons que T soit diagonal dans une base orthonormée, avec coefficients diagonaux (λ_n) réels ; l'opérateur T est alors hermitien. Pour toute fonction continue f définie sur $\mathbb{R}$, l'opérateur f(T) est l'opérateur diagonal de coefficients (f(λ_n)) ; d ´emonstration : passer à la limite à partir du cas polynomial. 2. Supposons que T soit l'opérateur*

$$M_\varphi : L_2(0;1) \to L_2(0;1)$$

de multiplication par une fonction φ réelle continue. On voit que pour tout polynome P l'opérateur P(M_φ) est l'opérateur de multiplication par la fonction

$$s \in [0;1] \to P(\varphi(t)),$$

donc à la limite f(M_φ) est l'opérateur de multiplication par $s \to f(\varphi(s))$, c'est à dire que f(M_φ) = $M_{f\circ\varphi}$. On peut aussi raisonner en disant que $f \to M_{f\circ\varphi}$ est bien l'unique homomorphisme décrit dans le théorème 4. Le cas hermitien sur un espace réel. Soit H un espace de Hilbert réel, dont le produit scalaire sera noté x . y pour éviter les confusions avec le produit scalaire dans le complexifié ; le complexifié de H est l'espace $H_C = H + iH$ de tous les vecteurs $z = x + iy$ où x; y $\in$ H ; cette écriture est simplement une écriture symbolique commode pour un couple (x; y) $\in$ H $\times$ H. Si $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, on pose

$$\lambda z = (ax - by) + i(by + ax).$$

On vérifiera les axiomes d'espace vectoriel complexe. On définit le produit scalaire (complexe) sur H_C en posant

$$\left\langle x + iy; x' + iy' \right\rangle = (x + iy) \cdot (x' - iy') = (x \cdot x' + y \cdot y') + i(y \cdot x' - x \cdot y')$$

Lorsque z = x+iy, on voit que

$$\langle z; z \rangle = x \cdot x + y \cdot y = \|x\|^2 + \|y\|^2 ,$$

ce qui donne un produit scalaire sur H_C dont la norme associée est

$$\|z\| = \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Si z = x + i0, on a:$\|z\|$ =$\|x\|$. A tout opérateur T $\in$ L(H) on associe l'application T_C de H_C dans lui-m■eme définie par

$$T_C(x + iy) = T(x) + iT(y);$$

on vérifie facilement que T_C est C-linéaire. On peut montrer que : l'application $T \to T_C$ est un homomorphisme isométrique de $\mathbb{R}$-algébres de Banach unitaires. De plus, $(T^*)_C = (T_C)^*$ et T_C est inversible si et seulement si T est inversible. Il est clair que l'application $T \to TC$ est $\mathbb{R}$-linéaire, que

$$(ST)_C = S_C T_C, (I_H)_C = I_{H_C};$$

si $z = x + iy$,

$$\|T_C(z)\|^2 = \|T(x)\|^2 + \|T(y)\|^2 \leq \ \|T\|^2 \ \left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right) = \|T\|^2 \ \|z\|^2 \, ;$$

donc $\|T_C\| \cdot \ \|T\|$; l'inégalit ´e inverse est claire en regardant les vecteurs $z = x+i0$. Pour l'adjoint,

$$\langle T(x) + iT(y); x' + iy\prime\rangle = (T(x) + iT(y)) \cdot (x' - \ iy^{'});$$

En développant, chaque produit scalaire $T(u) \cdot v^{'}$, avec $u = x,y$ et $v^{'} = x^{'},y^{'}$ sera transformé en $u \cdot T^*(v^{'})$ et il n'y a plus qu'à remonter les morceaux. Vérifions que le complexifié T_C est inversible dans $L(H_C)$ si et seulement si T est inversible dans L(H). S'il existe $S \in L(H)$ tel que $ST = TS = I_H$ il en résulte que $S_C T_C = T_C S_C = I_{H_C}$, donc T_C est inversible. Inversement, supposons T_C inversible ; alors T est injectif : si $T(x) = 0_H$, alors $T_C(x + i0_H) = 0_{H_C}$, donc $x + i0 = 0$, donc $x = 0_H$; de plus T est surjectif ; pour tout $x \in H$ il existe $z = x^{'} + iy^{'}$ tel que $T_C(z^{'}) = x+i0$, ce qui donne $T(x') = x$; on en déduit que l'inverse est continu, soit par le théorème des isomorphismes, soit en utilisant la norme de $(T_C)^{-1}$. Si $P \in \mathbb{R}[X]$, il résulte de la propriété d'homomorphisme unitaire que $(P(T))_C = P(T_C)$. Il en résulte aussi que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opérateur T- I_H est inversible si et seulement si T_C - λ I_{H_C} est inversible. Si on introduit le spectre réel de T en posant

$$\sigma_R(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T\text{- } \lambda I_H \textit{ non inversible}\}$$

on voit que $\sigma_{\mathbb{R}}(T) = \mathbb{R} \diagdown \sigma(T_C)$. Cette notion de spectre réel n'est pas trés intéressante en général, car il est possible que $\sigma_{\mathbb{R}}(T)$ soit vide et ne donne aucune information. Mais dans le cas où T est hermitien, on sait que T_C est hermitien aussi, donc son spectre est réel et $\sigma_{\mathbb{R}}(T) = \sigma(T_C)$ dans ce cas. Passons au calcul fonctionnel continu pour les hermitiens réels. Si P est un polynome réel et si $T \in L(H)$ est hermitien, on a T_C hermitien, $P(T_C)$ hermitien, donc

$$\|P(T)\| = \|(P(T))_C\| = \|P(T_C)\| = \|P\|_{C(\sigma(T_C))} \, .$$

Si on pose $K = \sigma(T_C) = \sigma_{\mathbb{R}}(T)$ et si f est une fonction réelle continue sur K, on a dit qu'il existe un polynome $P \in C[X]$ tel que $|f(s) - \ P(s)| \prec \varepsilon$; pour tout $s \in K$. Comme s est réel, il est clair que si $Q \in R[X]$ est le polynome obtenu à partir de P en prenant comme coefficients les parties réelles des coefficients de P, alors $Q(s) = \operatorname{Re} P(s)$, donc;

$$|f(s) - \ Q(s)| = |\text{Re}(f(s) - \ P(s))| \leq \ |(f(s) - \ P(s))| \prec \varepsilon.$$

On voit donc que l'algébre $\mathcal{A}_{\mathbb{R}}$ des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans $C_{\mathbb{R}}(K)$. On continue la démonstration comme avant. On obtient donc le resultat.

Corollary 15. *Soient H un espace de Hilbert réel et $T \in L(H)$ hermitien ; désignons par K le spectre de T. Il existe un et un seul homomorphisme d'algébres de Banach unitaires réelles φ_T : $C_{\mathbb{R}}(K) \to L(H)$ tel que $\varphi_T(iK) = T$. L'homomorphisme*

φ_T est isométrique. Si on note $f(T) = \varphi_T(f)$, on a que $f(T)^* = f(T)$ est hermitien pour toute f (forcément réelle dans ce contexte) continue sur K et $f(T)$ commute avec tout opérateur S qui commute avec T. On a $\sigma_{\mathbb{R}}(f(T)) = f(\sigma_{\mathbb{R}}(T))$: Si f est continue sur K et g continue sur $f(K)$, on a $(g \circ f)(T) = g(f(T))$.

4. Spectre des opérateurs isométriques

Le spectre d'un opérateur isométrique est inclus dans $\{-1, +1\}$ et de ce fait on peut diagonaliser A comme la différence des projecteurs $\frac{(I+A)}{2}$ (espace propre de $+1$) et $\frac{(I-A)}{2}$ (espace propre de -1).

PROPOSITION 52. *Si A est une isométrie et $\lambda \in \sigma_p(A)$, alors $|\lambda| = 1$.*

PROOF. Si A est une isométrie; alors $\|Ax\| = \|x\|$, et si $\lambda \in \sigma_p(A)$; alors: $\exists$ $x \in H$ tel que:

$$Ax = \lambda x$$

donc

$$\|Ax\| = \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| = \|x\|,$$

i.e. $|\lambda| = 1$. □

PROPOSITION 53. *Si E est de dimension finis, alors, $(\lambda I_E - A)$ est inversible si et seulement si*

$\mathrm{Ker}(\lambda I_E - A) = \{0\}$. On déduit que $\sigma_p(A) = \sigma(A)$.

PROOF. En effet, si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors, tout opérateur linéaire A sur E peut être représenté par une matrice carée A, et que l'opérateur linéaire $(\lambda I_E - A)$ est inversible quand la matrice $(\lambda I_E - A)$ est inversible. Il est clair que pour tout $\lambda \in \mathbb{k}$, l'un des cas suivants doit apparaître:

(i) λ est une valeur propre de A,

(ii) la matrice $(\lambda I_E - A)$ est inversible, i.e., la matrice $(\lambda I_E - A)^{-1}$ existe.

Il en résulte que le spectre

$$\sigma(A) = \sigma_p(A)$$

est l'ensemble des valeurs propres de la matrice A, et la dimension de l'espace vectoriel propre correspondant à toute valeur propre est finie. □

5. Spectre des opérateurs unitaires

Le spectre d'un opérateur linéaire dans un espace de dimension finie a une structure simple, mais pour un opérateur général dans un espace de dimension infinie, le spectre peut être différent

et plus complexe.

LEMMA 22. *Soit U un opérateur unitaire de $L(H)$. Alors $\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$*

PROOF. On a: $\|U\| = 1$. Il en résulte que: si $|z| > 1$; alors $z \in \rho(U)$. On applique cela à U^{-1}. Si $|z| > 1$; alors $z \in \rho(U^{-1})$ donc $z^{-1} \in \rho(U)$. On en déduit que

$$\sigma(U) \subseteq \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$$

. □

PROPOSITION 54. *Soient H un espace de Hilbert complexe, T est un opérateur positif, son spectre est contenu dans* $[0, +\infty[$.

6. Spectre des opérateurs normaux

THEOREM 40. *Soit A un opérateur normal de $L(H)$; alors:*

1. *En dimension finie* $\sigma(A) = \sigma_p(A)$.
2. *Si* $\lambda \in \sigma(A)$ *; alors* $|\lambda| \leq \|A\|$.
3. $r(A) = \|A\|$.

PROPOSITION 55. *Le spectre résiduel d'un opérateur normal est vide.*

PROOF. Soit $T \in L(H)$ un opérateur normal, pour tout scalaire

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, T_\lambda = T - \lambda I_H$$

est normal, si λ est dans le spectre, ou bien T_λ n'est pas injectif et $\lambda \in \sigma_p(T)$, ou bien T_λ est injectif, donc à image dense et $\lambda \in \sigma_p(T)$.

- Soit d'abord A un élément hermitien; on a:

$$\left\|A^2\right\| = \|A^* A\| = \|A\|^2$$

on en déduit par récurrence que;

$$\left\|A^{2n}\right\| = \|A\|^{2n}; \forall n \geq 0,$$

donc r(A) = $\|A\|$. Soit maintenant T un élément normal de L(H) ; par récurrence sur n, on a:

$$(T^* T)^n = (T^*)^n T^n$$

donc

$$\|(T^* T)^n\| = \|T^n\|^2 \textit{ et } r(T^* T) = r(T)^2.$$

Or A = T*T est hermitien, donc;

$$r(T)^2 = r(T^* T) = \|T^* T\| = \|T\|^2.$$

□

PROPOSITION 56. *Soit H un espace de Hilbert complexe, le rayon spectral de tout élément normal T de $L(H)$ est égal à sa norme,* $r(T) = \|T\|$.

PROOF. Soit A un élément hermitien, on a $\left\|A^2\right\| =$

$$\|A^* A\| = \|A\|^2,$$

on en déduit par récurrence que

$$\left\|A^{2^n}\right\| = \|A\|^{2^n}; \forall n \geq 0,$$

donc $r(A) = \|A\|$. Soit maintenant T un élément normal de $L(H)$, par récurrence pour n, on a:

$$(T^* T)^n = (T^*)^n T^n$$

donc

$$\|(T^* T)^n\| = \|T^n\|^2 \textit{ et } r(T^* T) = r(T)^2.$$

Or $A = T^* T$ est hermitien, donc

$$r(T)^2 = r(T^* T) = \|T^* T\| = \|T\|^2.$$

□

PROPOSITION 57. *Le spectre d'un opérateur normal est l'ensemble de ses valeurs propres approchées.*

EXAMPLE 43. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ *;tel que A est normal* $\Rightarrow (A - \lambda I) = \begin{pmatrix} 2i - \lambda & 0 \\ 0 & -i - \lambda \end{pmatrix}$

$$\det (A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow (2i - \lambda)(-i - \lambda) = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda = -i, \lambda = 2i$$

alors;

$$\begin{aligned} \sigma (A) &= \{-i, 2i\} = \sigma_p (A) \\ \rho (A) &= \mathbb{C} \backslash \{-i, 2i\} \end{aligned}$$

Si $\lambda \in \mathbb{C} \backslash \{-i, 2i\}$, alors

$$R_\lambda (A^*) = \sup \{|\lambda| , \lambda \in \sigma (A)\} = \{2\}$$

DEFINITION 40. *Un homomorphisme d'algébres de Banach unitaires est une application linéaire continue* $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *entre deux algébres de Banach unitaires* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$*, telle que* $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ *pour tous a; b* $\in \mathcal{A}$ *et que* $\varphi(1_\mathcal{A}) = 1_\mathcal{B}$*. Si a est inversible dans* $\mathcal{A}$*, son image est inversible dans* $\mathcal{B}$ *et l'inverse de l'image est l'image de l'inverse. De plus* $\varphi(a - \lambda 1_\mathcal{A}) = \varphi(a) - \lambda 1_\mathcal{B}$*. Il en résulte que* $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$*.*

On dira qu'on a un plongement isométrique de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ si φ est de plus isométrique. On écrira parfois $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$ dans ce cas. Même dans ce cas de plongement, il est possible qu'un élément non inversible dans $\mathcal{A}$ devienne inversible dans $\mathcal{B}$.

EXAMPLE 44. *exercice. Soit* $\mathcal{A}$ *la sous-algébre de* $\mathcal{B} = C(T)$ *engendrée par les fonctions* $(z_n)_{n \geq 0}$*; montrer que la fonction z n'est pas inversible dans* $\mathcal{A}$ *(alors qu'elle le devient dans B; indication: utiliser la norme* L_2 *est la base de Fourier).*

Il y a cependant un cas où un élément a non inversible dans $\mathcal{A}$ ne peut jamais avoir une

image inversible φ(a), par un plongement isométrique φ de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$, disons que a est

un diviseur de zéro approché (à gauche) dans $\mathcal{A}$ s'il existe une suite (u$_n$) dans A telle que

$\|u_n\| = 1$ pour tout n, mais $au_n \to 0$ (on peut aussi considérer la propriété analogue à droite).

Il est clair qu'un d.z.a. ne peut pas être inversible, et que l'image d'un d.z.a. par une isométrie est encore un d.z.a. Dans l'algébre C(K), il est facile de voir que les non-inversibles sont exactement les d.z.a.

Il en résulte que pour tout homomorphisme isométrique φ de C(K) dans une algébre de

Banach $\mathcal{B}$, on a $\sigma(\varphi(\text{f})) = \sigma(\text{f})$.

EXAMPLE 45. *Posons* $H = L_2([0; 1])$ *; pour toute fonction* $f \in H$ *et* $s \in [0; 1]$*, on pose*

$$V(f)(s) = \int_0^s f(t)dt.$$

Puisque

$$L_2([0;1]) \subset L_1([0;1]),$$

la fonction f est intégrable et on en d´eduit que V(f) est continue (appliquer par exemple le théoréme de Lebesgue à une suite de la forme ($1_{[0;s_n]}$ f) pour une suite (s_n) tendant vers s). En appliquant Cauchy-Schwarz au produit ($1_{[0;s_n]}$ f) on voit que

$$|V(f)(s)| \leq \sqrt{s}\, \|f\|_2\,,$$

ce qui implique que

$$\|V(f)(s)\|_2^2 \leq \|f\|_2^2 \int_0^1 sds = \frac{1}{2}\, \|f\|_2^2\,;$$

donc V définit une application linéaire continue notée V_2 de $L_2([0;1])$ dans lui-même. Soit $f \in H$ telle que $\|f\|_2 \leq 1$; on a montré que

$$|V(f)(s)| \leq \sqrt{s}\, \|f\|_2 \leq 1$$

pour tout réel $s \in [0;1]$; on en déduit que

$$|V\left(V(f)\right)(s)| = \left|\int_0^s V\left(f(t)\right) dt\right| \leq s$$

puis, par récurrence sur n, que

$$\left|V^{n+1}(f)(s)\right| \leq \frac{s_n}{n!}$$

donc

$$\left\|V^{n+1}(f)(s)\right\|_2^2 \leq \frac{1}{(n!)^2} \int_0^1 s^{2n} ds \leq \frac{1}{(n!)^2},$$

ce qui donne;

$$\left\|V_2^{n+1}\right\| \leq (n!)^{-1}.$$

Comme

$$\lim_n (n!)^{\frac{-1}{n}} = 0,$$

il s'ensuit que le rayon spectral de V_2 est nul, donc

$$\sigma(V_2) = \{0\}\,.$$

LEMMA 23. *Si un opérateur normal $T \in L(H)$ est injectif, il est à image dense. Si l'opérateur normal T vérifie (Il existe une constante $c \succ 0$ telle que $\|Tx\| \geq c\|x\|$ pour tout $x \in E$.), alors il est inversible.*

PROOF. Si T est normal et injectif, on a T(H) = H d'aprés la proposition1.6, c'est à dire que l'image est dense. Si T vérifie la propriété 1, il est injectif, donc on a 1 et 2, par conséquent T est inversible. □

EXAMPLE 46. *a. Soient K un espace compact métrique, E = C(K) et soit f ∈ E ; on a vu dans l'exemple 2.2 que l'application T = Mf de multiplication par f vérifie σ(T) = f(K) ; on a vu aussi que s'il existe s ∈ K tel que f(s) = λ, l'image de T-λI_E n'est pas dense, donc*

$$\lambda \in \sigma_p(T) \cap \sigma_r(T).$$

Remarquons que est une valeur propre de T si et seulement s'il existe $g \in E$ non nulle telle que $T(g) = \lambda g$, c'est à dire (f -λ)g = 0. L'ensemble des s$\in$ K tels que g(s) $\neq$ 0 est alors un ouvert non vide U de K et f est ´égale à λ sur U. Supposons inversement qu'il existe un ouvert non vide U de K tel que f soit égale à λ sur U ; notons $g \in E$ la fonction qui à $s \in K$ associe sa distance au complémentaire de U. On a

$$(T - \lambda I_E)(g) = 0.$$

En résumé, le spectre de T est l'ensemble

$$\sigma(T) = \{ f(s) : s \in K \} ,$$

le spectre ponctuel de T est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que l'intérieur de $f^{-1}(\{\lambda\})$ soit non vide, le spectre continu de T est vide et le spectre résiduel de T est $\sigma(T) \setminus \sigma_p(T)$. b. Soit $S \in L(l_2)$ l'application de décalage à droite ; on a vu que $\sigma(S)$ est le disque unité fermé

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\} .$$

Soient $\xi = (x_n)_{n\geq 0} \in l_2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $S(\xi) = \lambda\xi$;on trouve alors $\lambda x_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 1$, $\lambda x_n = x_{n-1}$; si $\lambda \neq 0$, on trouve alors par récurrence sur n que $x_n = 0$ pour tout $n \geq 0$; si $\lambda = 0$, on trouve, pour tout $n \geq 1$, $x_{n-1} = 0$. Dans les deux cas, $\xi = 0$. Donc $\sigma_p(S) = \emptyset$. On a vu que tout λ tel que $|\lambda| \prec 1$ est une valeur propre de ${}^tS$. Supposons que $|\lambda| = 1$ et soit $\eta = (x_n)_{n\geq 0} \in l_2$ tel que ${}^tS(\eta) = \lambda\eta$; alors, pour tout $n \geq 0$, on a $x_{n+1} = \lambda x_n$; il s'ensuit alors que $x_n = \lambda^n x_0$; comme la suite $(\lambda^n)_{n\geq 0}$ n'est pas dans l_2 (vu que $|\lambda| = 1$), on a nécessairement $x_0 = 0$, et enfin, $\eta = 0$; donc

$$\sigma_p({}^tS) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \prec 1\}$$

Il résulte alors de la proposition 7 que

$$\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \prec 1\}$$

on a alors pour terminer

$$\sigma_c(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$$

c. Posons H = $L_2([0;1])$ et l'opérateur V = V_2 défini par:
V(f)(s) $=\int_0^s$ f(t) dt, pour f $\in$ H et s $\in [0;1]$.
On a montré que le rayon spectral de V est
nul, donc σ(V) = $\{0\}$. Remarquons que l'application qui à une fonction continue associe
sa classe dans $L_2([0;1])$ est injective ; donc si V(f) = 0, alors V(f)(s) = 0 pour tout
s $\in [0;1]$, ce qui signifie que f est orthogonale à toutes les fonctions $1_{[0;s]}$, donc à toutes
les fonctions en escalier. Comme celles-ci forment un sous-espace dense dans $L_2([0;1])$ il
s'ensuit que V est injective. Il est clair que l'image de V contient l'ensemble des fonctions
continues, linéaires par morceaux nulles en 0. Or celles-ci forment un sous-espace dense
de $L_2([0;1])$. On a montré que

$$\sigma_p(V) = \sigma_r(V) = \emptyset;$$

et

$$\sigma_c(V) = \sigma(V) = \{0\}\,.$$

Valeurs propres approchées.

7. Spectre des opérateurs compacts

La théorie spectrale des opérateurs compacts

est pour l'essentiel la création du mathématicien hongrois F. Riesz, aux alentours de 1910. Le théorème 4.4.2 (avec son corollaire) est l'un des points-clés de cette théorie.

LEMMA 24. *Soit K ∈ L(E) un opérateur compact, et posons T =* I_E *-K ; si F est un sous-espace fermé de E tel que T soit injectif de F dans E, il existe une constante c ≻ 0 telle que* $\|T(x)\| \geq c\,\|x\|$ *pour tout x ∈F ; il en résulte que l'image T(F) est fermée.*

PROOF. En cas contraire, on pourrait trouver une suite (x_n) ⊂ F de vecteurs de norme 1 telle que T(x_n) → 0. Puisque K est compact, on peut trouver une soussuite (x_{n_k}) telle que K(xn_k) converge ; mais

$$T(x_{n_k}) = x_{n_k} - K(x_{n_k}) \to 0,$$

donc x_{n_k} converge vers un vecteur x ∈F (puisque F est fermé) tel que $\|x\|$= 1, et à la limite T(x) = 0, ce qui contredit l'hypothése T injectif sur F. Désignons par T_1 la restriction de T à F ; on a vu dans que la minoration

$$\|T_1(x)\| \geq c\,\|x\|$$

(pour tout x ∈ F, et avec c ≻ 0) implique que im(T_1) = T(F) est fermée. □

PROPOSITION 58. *Soit K ∈ L(E) un opérateur compact, et posons T = I -K ; le noyau de T est de dimension finie et l'image T(E) est fermée.*

On remarquera, en utilisant la formule du binôme et la propriété d'idéal de K(E),

que T_n = (I-K)$_n$ est de la forme I-K_n, avec K_n compact, donc les images de T_n sont fermées pour tout n ≥ 0 (et leurs noyaux sont de dimension finie).

PROOF. Le noyau de T est le sous-espace propre de l'opérateur compact K pour la valeur propre 1, il est donc de dimension finie d'aprés le théorème de Riesz . Soit F un sous-espace fermé de E tel que

$$E = ker(T) \oplus F;$$

alors T est injectif sur F, donc T(E) = T(F) est fermé. □

LEMMA 25. *Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E, avec F fermé et F ≠ G, F ⊂ G, on peut trouver pour tout ε ≻ 0 un vecteur y ∈ G tel que* $\|y\|$ *= 1 et d(y; F) ≻ 1 -ε.*

PROOF. Puisque F $\neq$ G, on peut trouver un premier vecteur $y_0 \in G \setminus F$. Puisque F est fermé et $y_0 \in F$, on a

$$\delta = d(y_0; F) \succ 0.$$

On peut trouver $x_0 \in F$ tel que

$$\alpha = \|y_0\text{-}x_0\| \prec \frac{\delta}{1-\varepsilon}.$$

Alors y = $\alpha^{-1}(y_0$ - $x_0) \in$ G convient. $\square$

LEMMA 26. *Soit $K \in L(E)$ un op´erateur compact, et posons T = I-K ; il n'existe pas de chaine infinie $(F_n)_{n\geq 0}$(resp : $(F_n)_{n\leq 0}$) de sous-espaces vectoriels fermés de E telle que:*

$$F_n \subset F_{n+1},\ F_n \neq F_{n+1} \text{ et } \mathrm{T}\,(F_{n+1}) \subset F_n$$

pour tout n $\succ$ 0 (resp : n $\prec$ 0).

PROOF. Traitons le cas n $\succ$ 0, le cas n $\prec$ 0 est identique. Supposons au contraire que $F_n \subset F_{n+1}$ pour tout n $\succ$ 0 ; d'aprés le lemme précédent, on peut trouver pour tout n $\succ$ 0 un vecteur $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que x_{n+1} = 1 et

$$dist(x_{n+1}; F_n) \succ 1 - \varepsilon.$$

Puisque

$$T\,(F_{n+1}) \subset F_n \subset F_{n+1}$$

et K = I-T, on a

$$K(F_{n+1}) \subset F_{n+1}.$$

Soient alors k; l deux entiers tels que 0 $\prec$ k $\prec$ l ; le vecteur T(x_l) est dans F_{l-1} et

$$K(x_k) \in F_k \subset F_{l-1},$$

donc

$$T(x_l) + K(x_k) \in F_{l-1},$$

donc

$$\|x_l\text{-}(T(x_l) + K(x_k))\| \geq dist(x_l; F_{l-1}) \succ 1 - \varepsilon$$

Mais cette quantité est égale à

$$\|K(x_l) - K(x_k)\|\,.$$

L'image K(B_E) contiendrait donc une suite infinie de points dont les distances mutuelles seraient $\succ 1 - \varepsilon$, ce qui contredirait la compacité de K. $\square$

COROLLARY 16. *Soit $K \in L(E)$ un opérateur compact, et posons T = I-K ; la suite croissante des noyaux $(ker(T_n))_{n\geq 0}$ est stationnaire. La suite d´ecroissante des images $(im(T_n))_{n\geq 0}$ est stationnaire.*

PROOF. Posons
$$F_n = ker(T_n).$$
On a bien F_n fermé,
$$F_n \subset F_{n+1}$$
et de plus
$$T(F_{n+1}) \subset F_n$$
pour tout n≥0 ; si la suite n'´etait pas stationnaire, elle contredirait le lemme précédent. Pour le cas des images on posera
$$F_{l_n} = im(T_n) \; pour \; n \geq 0;$$
on a vu que toutes ces images sont fermées. □

COROLLARY 17. *Soit $K \in L(E)$ un op´erateur compact, et posons T = I-K ; si T est surjectif, alors ker(T) = $\{0\}$; si T est injectif, alors im(T) = E.*

PROOF. Si l'opérateur T est surjectif et si ker(T) $\neq \{0\}$, on montre par récurrence que
$$ker(T_n) \subset ker(T_{n+1})$$
pour tout n ≥1; si
$$x \in ker(T^{n+1}) \diagdown ker(T^n),$$
on a:
$$T^{n+1}(x) = 0 \; et \; T^n(x) \subset 0.$$
Puisque T est surjectif, il existe y tel que
$$T(y) = x.$$
Il en r´esulte que
$$T^{n+2}(y) = T^{n+1}(x) = 0$$
mais
$$T^{n+1}(y) = T^n(x) \neq 0.$$
Ceci est impossible quand T = I-K, avec K compact, par le corollaire précédent. Si T est injectif et T(E) $\neq$ E, on vérifie que
$$im(T^{n+1}) \neq im(T^n)$$
pour tout n ≥0, ce qui est à nouveau impossible quand T = I-K, avec K compact. □

THEOREM 41. *Alternative de Fredholm. Soient E un espace de Banach et $T \in$ L(E) un opérateur borné de la forme T = I-K, avec K compact ; l'image de T est fermée et de codimension finie et l'on a*
$$co\dim \; im(T) = \dim \ker(T)$$

Pour un opérateur T à image fermée et à noyau de dimension finie, la différence
$$co\dim im(T) - \dim \ker(T)$$
s'appelle l'indice de l'opérateur T et se note ind(T). Le théorème dit que I-K est d'indice nul pour tout opérateur compact K.

Proof. On a vu que ker(T) est de dimension finie et im(T) fermée. On doit montrer de plus que

$$co\dim im(T) - \dim\ker T(E),$$

c'est à dire que l'indice de T est nul. On va procéder par récurrence sur la dimension de ker(T). Si dim ker(T) = 0, on sait que T est surjectif d'apr'es le corollaire 7, donc l'indice est nul dans ce cas ; on suppose donc que n est un entier $\succ 0$ et que ind(T_0) = 0 pour tout opérateur T_0 = I-K_0, où K_0 est compact et dim ker(T_0) $\prec$ n. Soit T = I-K avec K compact et

$$\dim\ker(T) = n \succ 0;$$

d'aprés le corollaire 7, on a im(T) $\neq$ E ; soit donc $y_0 \notin$ im(T) ; on note que

$$Ky_0 \oplus T(E)$$

est une somme directe. On va construire T_0 de la forme I-K_0 tel que

$$ind(T_0) = ind(T)$$

et

$$\dim\ker(T_0) \prec \dim\ker(T);$$

d'aprés l'hypothése de récurrence, on aura

$$0 = ind(T_0) = ind(T),$$

ce qui donnera le résultat. On écrit

$$E = ker(T) \oplus E_1$$

en utilisant le lemme 1 ; soit x_1; .... ; x_n une base de ker(T). On définit un opérateur $T_0 \in$ L(E) en posant pour tout x $\in$ E, représenté sous la forme

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n + y,$$

avec y $\in$ E_1

$$T^{'}\left(\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n + y\right) = \lambda_1 y_0 + T\left(y\right)$$

Si $T^{'}$(x) = 0, il en résulte que

$$T(y) = 0_E \ et \ \lambda_1 y_0 = 0_E,$$

donc

$$y \in ker(T) \cap E_1$$

entraıne y = 0_E ; d'autre part λ_1 y_0 = 0_E entraıne $\lambda_1 = 0$ puisque le vecteur y_0 est non nul. Il en résulte que

$$ker(T') = Vect(x_2; ....; x_n)$$

est de dimension n- 1. Par ailleurs, l'opérateur R = $T^{'}$-T est de rang un : en effet ($T^{'}$-T)(x) = $\lambda_1 y_0$ pour tout x, donc l'image de R est contenue dans Ky_0 ; on peut écrire par conséquent $T^{'}$ = I-K_0 avec K_0 = K-R compact, et on a alors ind(T_0) = 0 d'aprés l'hypothése de récurrence, ce qui montre déjà que codim im($T^{'}$) est finie. Il est clair que

$$im(T^{'}) = Ky_0 \oplus T(E)$$

a exactement une dimension de plus que T(E), donc

$$co\dim im(T) = co\dim im(T^{'}) + 1$$

, et

$$ind(T) = ind(T^{'}) = 0.$$

□

Formulation classique de l'alternative de Fredholm. A l'époque de l'article de Fredholm

(1903), il n'y avait pas plus d'espaces de Banach que de théorie de Riesz des opérateurs

compacts. Cependant, quelques années aprés, sous l'influence de F. Riesz, on est arrivé

à peu de chose prés à la formulation "classique" suivante : soit K un opérateur compact

de E. On rappelle que ${}^tK$ est compacte de E* dans E*. On a l'alternative suivante :

– ou bien les deux équations

$$x - K(x) = y, x^* -^t K(x^*) = y^*$$

admettent pour tous seconds membres y ∈ E, y* ∈ E* une solution unique x ∈ E, x* ∈ E*.

– ou bien les équations homogénes

$$x - \ K(x) = 0, x^* -^t K(x^*) = 0$$

admettent un même nombre fini k ≻ 0 de solutions indépendantes, $x_1; .....; x_k$ et $x_1^*; .....; x_k^*$. Dans ce

cas, pour que l'´equation x-K(x) = y admette une solution x ∈ E, il faut et il suffit que

$$x_1^*(y) = x_2^*(y) = ... \ = x_k^*(y) = 0,$$

et pour que l'équation

$$x^* \ - \ tK(x^*) = y^*$$

admette une solution x* ∈ E*, il faut et il suffit que

$$y^*(x_1) = y^*(x_2) = ... \ = y^*(x_k) = 0.$$

Pour ce point de vue classique, on pourra consulter le livre de F. Riesz (Leçons d'Analyse Fonctionnelle).

LEMMA 27. *Soient A un opérateur compact et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $(A - \lambda I)$ n'est pas inferieurement borné. Alors $\lambda \in \sigma_p(A)$.*

PROPOSITION 59. *Le spectre d'un opérateur compact est constitué du* 0 *et des valeurs propres de l'opérateur*

EXAMPLE 47. *Soit* $T = \mathrm{diag}(c_n)$; *où* $c_1 = 1$ *et* $c_n = 0$ *pour* $n \geq 2$, *alors* T *est compact*

et $\sigma(T) = \{0, 1\}$.

EXAMPLE 48. *On Consider l'opérateur de Volterra* V *sur* $C[0,1]$ *comme suit:*

$$Vf(x) = \int_0^x f(t)dt, 0 \leq x \leq 1.$$

Cet opérateur est inversible et son spectre est $\{0\}$, V est injectif et son image n'est pas fermé.

THEOREM 42. *Soit* $A \in K(E)$.

1. Si E est de dimension infinie alors; $0 \in \sigma(A)$.
2. $\sigma_p(A)\backslash\{0\} = \sigma(A)\backslash\{0\}$ et pour tout $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$, le sous-espace vectoriel propre associé $\mathrm{Ker}(\lambda I_E - A)$ est de dimension finie.
3. $\sigma(A)$ est dénombrable. De plus, s'il est infini, les éléments de $\sigma(A)\backslash\{0\}$ forment une suite $(\lambda_n)_n$ de $\mathbb{k}$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : |\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n| \text{ et } \lim_{n \longrightarrow +\infty} \lambda_n = 0.$$

PROOF. 1. Si $0 \notin \sigma(A)$, alors, A est inversible dans $L(E)$ et $I_E = A^{-1}A \in \mathcal{K}(E)$, d'après la Proposition (3.12), l'opérateur identité de E est compact si et seulement si E est de dimension finie.

2. On a $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda I_E - A$ est non inversible dans $L(E)$, ce qui est équivalent à, $\lambda \neq 0$ et $I_E - \lambda^{-1}A$ est non inversible dans $L(E)$. appliqué à $\lambda^{-1}A$, $I_E - \lambda^{-1}A$ n'est pas inversible dans $L(E)$ si et seulement si $I_E - \lambda^{-1}A$ n'est pas injectif. D'où, $\lambda \in \sigma(A)\backslash\{0\}$ si et seulement si $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in \sigma_p(A)$. De plus, $\mathrm{Ker}(I_E - \lambda^{-1}A)$ est de dimension finie, donc $\mathrm{Ker}(\lambda I_E - A)$ est de dimension finie.

3. D'après (2), pour tout $\varepsilon > 0$ l'ensemble

$$\{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| \geq \varepsilon\}$$

est fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Alors, l'ensemble

$$\left\{\lambda \in \sigma(A) : |\lambda| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

est fini. Soient $\lambda_0, ..., \lambda_{n_0}$ ses éléments classés de la façon suivante

$$|\lambda_0| \geq ... \geq |\lambda_{n_0}| \geq \frac{1}{n}$$

De même, l'ensemble

$$L_n = \left\{\lambda \in \sigma(A) : \frac{1}{n+1} \leq |\lambda| < \frac{1}{n}\right\}$$

est fini. On pose

$$L_n = \{\lambda_{n_0+1}, ..., \lambda_{n_1}\}$$

où les λ_i sont classés de la façon suivante

$$\frac{1}{n+1} \leq |\lambda_{n_1}| \leq ... \leq |\lambda_{n_0+1}| < \frac{1}{n} \leq |\lambda_{n_0}| \leq ... \leq |\lambda_0|.$$

En procédant ainsi par récurrence, on peut ranger les éléments de $\sigma(A)\backslash\{0\}$ en une suite $(\lambda_n)_n$ qui décroît en module vers 0.

Ce qui achève la démonstration du théorème. $\square$

REMARK 23. *Etant donnée une suite réelle $(\lambda_n)_n$, telle que: $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. On peut construire un opérateur compact A tel que*

$$\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{0\}\,.$$

Soit $H = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, il suffit de considérer l'opérateur A sur H défini par

$$A((x_n)_n) = (\lambda_n x_n)_n.$$

Cet opérateur est compact car il existe une suite $(A_n)_n$ d'opérateurs de rangs finis telle que $\|A_n - A\|$ tend vers 0. On remarque ici que 0 peut appartenir, ou ne pas appartenir à $\sigma_p(A)$. Si $0 \in \sigma_p(A)$, l'espace propre associé $\mathrm{Ker}(A)$ peut être de dimension infinie.

8. Exercices

EXERCISE 35. *Soit* $(e_n)_{n\geq 0}$ *la base orthonormale canonique de* $l_2(\mathbb{N})$. *Soit* S *l'opérateur défini sur* $l_2(\mathbb{N})$ *par:* $S(e_n) = e_{n+1}$; $n \in \mathbb{N}$. *On appelle* S *le shift unilatéral.* *1. Déterminer le spectre de* S *.* *2. Montrer que le spectre de* S *est le disque unité fermé.* *3. Est-ce que* S *posséde des valeurs propres?*

EXERCISE 36. *Montrer que le spectre ponctuel de l'opérateur de Volterra est vide.*

EXERCISE 37. *Soit* T *un opérateur compact sur un espace de dimension infinie. Montrer que* $0 \in \sigma(T)$. *A-t-on forcément* $0 \in \sigma_p(T)$*?*

EXERCISE 38. *Soit* T *un opérateur compact normal. Montrer que* $T \succ 0$ *si et seulement si toutes les valeurs propres de* T *sont réelles positives.*

EXERCISE 39. *Soit* $H = l_2(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *l'espace des suites réelles* $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2 \prec +\infty$ *muni de la norme* $\|u\|_2 = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ *.Soit* $(\lambda_n)_n$ *une suite réelle bornée quelconque. On définit l'application* A *de* H *dans* H *par:* $A((u_n)_n) = (\blacksquare_n u_n)_n$. *1. Montrer que* A *est bien définie et continue. Calculer sa norme.* *2. Déterminer le spectre de* A. *3. Donner un exemple de suite* $(\lambda_n)_n$ *pour laquelle* $\sigma(A) = [0, 2]$.

EXERCISE 40. *Soit l'espace de Hilbert* $H = l_2(\mathbb{Z},\mathbb{C})$ *des suites complexes (indexées par les entiers relatifs) de carré sommable. Soit* $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *la base hilbertienne canonique de* H, *i.e., la suite* $(e_n)_n$ *a tous ses termes nuls, sauf le n-i'eme qui vaut 1. Soit* S *l'opérateur de décalage sur* H *d´efini par*

$$S(e_n) = e_n + 1 \textit{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

1. Quel est l'adjoint de S *?*

2. Quel est le spectre ponctuel de S *?*
3. Quel est le spectre de S *?*

EXERCISE 41. *Soit* H *un espace de Hilbert complexe.* *1. Soient* B *et* C *deux opérateurs sur* H. *Montrer que les opérateurs* BC *et* CB *ont le même rayon spectral.*

2. Soit A $\in$ L(H) un opérateur inversible tel que $\|A\| \leq 1$ et $\left\|A^{-1}\right\| \leq 1$. On définit l'ensemble M par M $= \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Montrer que σ(A) $\subset$ M, et que A est unitaire.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

EXERCISE 42. *Soient* E *un espace de Banach et* $A \in L(E)$. *Le but de cet exercice est de montrer l'´equivalence des deux assertions suivantes: (i) Il existe un opérateur* $B \in L(E)$ *tel que* I_E*-*AB *et* I_E*-* BA *sont compacts.* *(ii)* $Ker(A)$ *est de dimension finie et* $Im(A)$ *est un sous-espace fermé de codimension finie.* *1. En supposant (i), montrer que* $Ker(BA)$ *est de dimension finie,* $Im(AB)$ *de codimension finie, et en d´eduire (ii).2. Soit* $F \blacksquare E$ *un sous-espace ferm´e. Montrer que* F *admet un compl´ementaire si et seulement s'il existe* $P \in L(E)$ *vérifiant* $P^2 = P$ *et* $Im(P) = F$. *3. Démontrer l'implication (ii)* $\Rightarrow$ *(i).*

EXERCISE 43. *Soit* $H = L_2(]0,1[,\mathbb{R})$. *On d´efinit l'opérateur* A *sur* H *par:* $\forall f \in H$, $\forall x \in]0,1[$, $Af(x) = \int_0^1 e^{x+t} f(t)dt$. *1. Montrer que* A *est un opérateur borné de rang fini.* *2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres associés. En déduire* $\sigma(A)$.

Bibliography

[1] G. Aubrun,Théorie des opérateurs M1 Mathématiques, Université de la Réunion

[2] J.P. Aubin, Analyse fonctionnelle appliquée, Tome 2, Presses Universitaires de France, 1987.

[3] H. Brezis. Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. Dunod, 1983.

[4] N. Bourbaki, Élément de mathématique, Théories spectrales. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2007,Réimpression inchangée de l'édition originale de 1967.

[5] F. Bayen, C. Margaria, Espaces de Hilbert et opérateurs Problémes de mathématiques appliquées, Tome 2, Ellipses, 1986.

[6] J. B. Conway. Functions of one complex variable, volume 11 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, second edition, 1978.

[7] J. Charles, M. Mbekhta, H. Queffélec, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs, Dunod, Paris, 2010.

[8] J. B. Conway. A course in operator theory, volume 21 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[9] R. G. Douglas. Banach algebra techniques in operator theory. Academic Press, New York, 1972. Pure and Applied Mathematics, Vol. 49.

[10] J. Dieudonné, Éléments d'analyse t. 1 : fondements de l'analyse moderne, Gauthier-Villars, 1971

[11] J. Dieudonné, Éléments d'analyse t. 2 , Gauthier-Villars, 1974.

[12] E. Fricain, Analyse fonctionelle et théorie des opérateurs cours et exercices.

[13] P. R. Halmos, A Hilbert space problem book, Grad. Texts Math. 19, 2nd ed., Springer-Verlag, 1982.

[14] W.Hengartner, M.Lambert, C.Reischter, Introduction à l'analyse fonctionnelle, Les Presses de l'Université du Québec 1981.

[15] R. V. Kadison and J. R. Ringrose. Fundamentals of the theory of operator algebras, vol. I. Pure and applied mathematics. Academic Press, 1983. (vol. III)

[16] A. Kolmogorov, S. Fomine, ´Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle, Mir Moscou, 1977.

[17] J. Lelong-Ferrand et J.M. Arnaudiés. Cours de Mathématiques, tome 2 analyse. Dunod Université, 1972.

[18] P. Lévy-Bruhl, Introduction à la théorie spectrale, Dunod, 2003.

[19] M. Mbekhta, Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs exercices corrigés, cours master 1, théorie spectrale.

[20] W. Rudin. Analyse réelle et complexe. Masson, Paris, 1980. Translated from the first English edition by N. Dhombres and F. Homan,Thirdprinting.

[21] W. Rudin. Functional analysis. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill Inc., New York, second edition, 1991.

[22] L. Schwartz. Analyse. I. Collection Enseignement des Sciences, Vol.42.
Hermann, Paris, 1991.

Bibliography

[1] M. Takesaki, Theory of operator algebras, Encyc. Math. Sciences Springer Verlag, 2001-2002 .

[2] A.Yger. Analyse complexe et distributions. Collection Mathématiques 2eme édition. Ellipses, 2001.

[3] K. Yosida, Functional analysis, 6th Ed., Springer Verlag, 1980.