



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de *MASTER*
Domaine: Mathématiques et Informatique
Option: Equations aux dérivées partielles et applications
Filière: Mathématiques

Synchronisation du chaos dans les systèmes dynamiques discrets non linéaires

Thème

Présenté Par:
Abdellaoui Fatma Zahra
Zerfaoui Zineb
Devant le jury :

Mr, Elhadj Zeraoulia	PROF Université Larbi Tébessi	Président
Mr, Abdelatif Toualbia	MCB Université Larbi Tébessi	Examineur
Mr, Boukhalifa El-Hafsi	MCB Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 12 /06/2022

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

شكر و عرفان



مصداقا لقوله تعالى بعد بسم الله الرحمن الرحيم:

﴿ وَإِذْ تَأَذَّنَ رَبُّكُمْ لَئِن شَكَرْتُمْ لَأَزِيدَنَّكُمْ وَلَئِن كَفَرْتُمْ إِنَّ عَذَابِي لَشَدِيدٌ ﴾

{ سورة ابراهيم الاية 7 }

وعملا بقوله ﷺ: " من لا يشكر الناس لا يشكر الله " رواه الترميذي وأحمد،

نحمد الله عز وجل الذي أنار لنا درب العلم والمعرفة وأعاننا على أداء هذا الواجب و
وفقنا على إنجاز هذا العمل المتواضع.

نتوجه بجزيل الشكر والإمتنان إلى أستاذنا الفاضل

"بوخالفة الحفصي"

الذي كان عوننا لنا في إتمام هذه المذكرة، فجزاه الله عنا خير الجزاء،

وكما لا يفوتنا أن نشكر أعضاء اللجنة الأستاذين الكريمين

"زراولية الحاج" و "طوالبية عبد اللطيف"

لقبولهما مناقشة هذا العمل المتواضع، فمنكم النصح ومنا الاستفادة.

نتقدم بجزيل الشكر إلى كل طاقم الجامعة و بالخصوص أساتذة و رئيس قسم الرياضيات

"منسل رفيق"

الذين ساهموا في تكويننا أثناء دراستنا،

كما نتقدم بالشكر إلى كل من ساعدنا وساهم في إنجاز هذا العمل من قريب أو من بعيد.

إهداء



إلى:

نبض قلبي، إلى سندي في هذه الحياة إلى ملجئي وسعادتي وراحتي، لمن تهبني
الحب بكل صدق بلا توقف ودون مقابل، إلى مصدر الأمان الوحيد في حياتي
"أمي **مريم**" أطال الله في عمرك وأدامك تاجا فوق رؤوسنا.

إلى والدي " **علي** " السراج الذي انار دربي وبذل كل الجهد في سبيل وصولي
إلى ما أنا عليه اليوم.

إلى اختاي الحبيبتان " **هاجر و ريان** "

إلى محبتي القلب ونجمتي المنزل الرائعتان صغيرتي " **آلاء الرحمان وآمنة** "

إلى زميلة المذكرة صاحبة الوجه البشوش " **زينب** "

إلى كل صديقاتي اللاتي جمعتنا المحبة وفرقنا القدر،

إلى كل الأصدقاء في الدفعة وفقكم الله وأنار دروبكم.

" **فاطمة الزهراء عبد اللاوي** "

إهداء



إلى:

والدي العزيز "عبد الله" كنت رفيقا وصاحبا ملجئا وامتكا حصنا وقدوة
قبل أن تكون أباً.

والدتي الحبيبة "العالية" أنت عنوان محبة يرتسم على وجهي حين أتذكرك
ولحظة أراك وعندما أسمعك لن أنسى فضلك علي ماحييت يا أمي.

لمن أتقاسم معهم الدم الواحد والكيان الواحد ولمن أستأنس بهم حين أفقد
شيئا من الشغف إلى سندي "أسامة" و إلى أجمل أختين "رقية و أمينة"
كنتم خير سلوى وخير مدد أدامكم الله وحفظكم وجعلكم ذخرا لهاته الامة.

إلى من شئت الأقدار أن نلتقي على رسم مذكرتنا فنعم الرفقة زميلتي
"عبد اللاوي فاطمة الزهراء"

إلى كل زملاء وزميلات الدفعة الذين تقاسموا معي حلو الدراسة ومرها دتمم
في رعاية الله وحفظه

"زينب زرقاوي"

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو دراسة الأنظمة الديناميكية اللاخطية دراسة شاملة وذلك بتقديم نظرة عامة حول المفاهيم الأساسية، النقاط الثابتة واستقرارها، ثم أنواع المفارقات ويؤدي بنا هذا الى اكتشاف السلوك الفوضوي وخصائصه كالحساسية للشروط الابتدائية، ثوابت ليابونوف، الجاذب و الفوضى، بعد ذلك نثبت ان العديد من الأنظمة لديها تقلبات طويلة المدى لا يمكن التنبؤ بها كتطبيق الدعم، نظام Lozi و نموذج . Hénon

تطرقنا ايضا في مذكرتنا هذه الى الأنواع المختلفة من التزامات وطرق التزامنة وتعد التزامنة الفوضى جزءا من هذا الخط البحثي لأسباب تتعلق بأمن المعلومات مثلا، حيث يكون وصول نظامين فوضويين في نفس الوقت امرا محما وكلمة "وقت" هنا نعني بها "الملاحظة" او "التكرار" لأن النظام متقطع...

الكلمات المفتاحية :

الأنظمة الديناميكية، المفارقات، الفوضى، الجاذب، ثابت ليابونوف، التزامنة.

Résumé

L'objectif principal de cette mémoire est la mise en oeuvre des systèmes dynamiques non linéaires discrets. Précisément, leur présentation, leurs points fixes, leur stabilité, puis des types des bifurcations, et cela nous amène à découvrir le comportement chaotique et ses propriétés telles que la sensibilité aux conditions initiales, les exposants de Lyapunov et les attracteurs étranges. Ensuite, nous démontrons que beaucoup ont des fluctuations imprévisibles à long terme comme modèle de Hennon et système de Lozi.

Nous avons également abordé les différents types de synchronisation et les méthodes de synchronisation. La synchronisation du chaos fait partie de cet axe de recherche pour des raisons de sécurité de l'information, où l'arrivée de deux systèmes chaotiques en même temps a importance, et le mot "temps" ici désigne "l'observation ou l'itération" car nos systèmes sont discrets...

Les mots clés :

systèmes dynamiques, bifurcation, chaos, attracteur, les exposants de Lyapunov, synchronisation.

Abstract

The objective of this thesis is the implementation of nonlinear discrete dynamical systems. Precisely, their presentation, their fixed points, their stability, then types of bifurcations, which leads us to the discovery of the chaotic phenomenon, where we demonstrate that several systems have unpredictable long-term fluctuations. We have also discussed the different types of synchronization and synchronization methods.

The synchronization of chaos is part of this line of research for information security reasons, where the arrival of two chaotic systems at the same time is important, and "the word time" here designates "the observation or iteration" because our systems are discrete...

Keywords :

Dynamical system, bifurcation, chaos, Lyapunov exponents, synchronization

Table des matières

Introduction générale	2
1 Préliminaire sur la représentation mathématique des systèmes dynamiques discrets.	3
1.1 Espace des phases, l'espaces d'états	3
1.2 Systèmes dynamiques discrets :	3
1.3 Orbites ou trajectoires :	4
1.4 Points fixes :	4
1.5 Orbites périodiques et p-cycles :	4
1.6 Etude de stabilité des points fixes :	5
1.6.1 Méthode de linéarisation :	5
1.6.2 Nature d'un point d'équilibre :	6
1.7 Bifurcations :	8
1.7.1 Types de bifurcations :	8
2 Route vers le chaos	12
2.1 Bref historique sur le chaos	12
2.1.1 Définition du chaos	14
2.2 Caractéristique du chaos	14
2.2.1 Sensibilité aux conditions initiales	14
2.2.2 Exposants de Lyapunov	15
2.2.3 Dimension fractale	16
2.2.4 Attracteurs étranges	17
3 Exemples de systèmes dynamiques discrets chaotiques	18
3.1 Application logistique	18

3.1.1	Historique de l'application logistique	18
3.1.2	Définition de l'application logistique	20
3.1.3	Propriétés de l'application logistique	20
3.1.4	Etude de l'application logistique	25
3.1.5	Diagramme de bifurcations	35
3.1.6	Le chaos dans l'application logistique	36
3.2	Le model de Hénon	36
3.2.1	Historique du système de Hénon	36
3.2.2	Définition du système de Hénon	37
3.2.3	Sensibilité aux conditions initiales	42
3.2.4	Points fixes et stabilité des premières et deuxième itérations	43
3.2.5	Analyse de bifurcation	45
3.2.6	Diagramme de bifurcation	47
3.2.7	Bassin d'attraction de Hénon	47
3.2.8	Le chaos dans le système de Hénon	48
3.3	Système de Lozi	49
3.3.1	Historique du système de Lozi	49
3.3.2	Définition du système de Lozi	50
3.3.3	Etude du systeme de Lozi	50
3.3.4	Attracteur de Lozi	52
3.3.5	Le chaos dans le système de Lozi	53
4	Synchronisation du chaos	55
4.1	Types de synchronisation	55
4.1.1	Synchronisation complète	55
4.1.2	Anti-Synchronisation	56
4.1.3	Synchronisation décalée	56
4.1.4	Synchronisation projective	56
4.1.5	Synchronisation FSHP	57
4.1.6	Synchronisation généralisée	57
4.1.7	Synchronisation Q-S	58
4.2	Méthodes de synchronisation	58
4.2.1	Méthode du contrôleur actif	58
4.2.2	Méthode du Backstepping	59
4.2.3	Méthode du mode glissant.	61

4.3 Exemples	63
4.3.1 Exemple 01	63
4.3.2 Exemple 02	66
Conclusion générale	69
Bibliographie	70

Liste des tableaux

Tableau N°	Titre	Page
<i>TAB.1.1</i>	Tableau de variation de l'application g_a	27

Liste des figures

Figure N°	Titre	Page
<i>Fig1.1</i>	Diagramme de bifurcation nœud-col.	8
<i>Fig1.2</i>	Diagramme de bifurcation transcritique.	9
<i>Fig1.3</i>	Diagramme de bifurcation fourche.	10
<i>Fig3.1</i>	Population dont le taux de croissance $a = 1$ avec $x_0 = 0, 1$.	21
<i>Fig3.2</i>	Population dont le taux de croissance $a = 2$ avec $x_0 = 0, 1$.	22
<i>Fig3.3</i>	Population dont le taux de croissance $a = 3$ avec $x_0 = 0, 1$.	23
<i>Fig3.4</i>	Population dont le taux de croissance $a = 4$ avec $x_0 = 0, 1$.	24
<i>Fig3.5</i>	Graphes de $g_a(x)$.	26
<i>Fig3.6</i>	Graphes de $g_a^2(x)$.	26
<i>Fig3.7</i>	Point fixe super attractif de l'application logistique.	28
<i>Fig3.8</i>	Convergence de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = g_{1,5}(x_n)$ et $x_0 = 0, 1$.	29
<i>Fig3.9</i>	Convergence de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = g_{3,2}(x_n)$ et $x_0 = 0, 1$.	30
<i>Fig3.10</i>	Convergence en escalier.	30
<i>Fig3.11</i>	Convergence en spirale.	31
<i>Fig3.12</i>	Diagramme de bifurcation de l'application logistique.	34
<i>Fig3.13</i>	Évolution de l'exposant de Lyapunov λ de l'application logistique en fonction de a .	35
<i>Fig3.14</i>	Attracteur de Hénon $H_{a,b}$ pour $a = 1, 4$ et $b = 0, 3$.	37
<i>Fig3.15</i>	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1, 4$ et $b = 0, 3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.	38
<i>Fig3.16</i>	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1, 4$ et $b = 0, 3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.	38
<i>Fig3.17</i>	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 0, 1$ et $b = 0, 3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.	39
<i>Fig3.18</i>	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 0, 1$ et $b = 0, 3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.	39
<i>Fig3.19</i>	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 0, 4$ et $b = 0, 3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.	40
<i>Fig3.20</i>	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 0, 4$ et $b = 0, 3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.	40

<i>Fig3.21</i>	Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ avec $(x_0, y_0) = (0,001; 0,001)$.	41
<i>Fig3.22</i>	Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ avec $(x_0, y_0) = (0,001; 0,001)$.	42
<i>Fig3.23</i>	Diagramme de bifurcation pour le système original de Hénon pour $-0,15 \leq a \leq 0,4$ et $b = 0,3$	45
<i>Fig3.24</i>	Diagramme de bifurcation de Hénon.	47
<i>Fig3.25</i>	Bassin d'attraction de l'attracteur de Hénon pour $a = 1,4$ et $b = 0,3$.	48
<i>Fig3.26</i>	L'évolution de l'exposant de Lyapunov λ de système de Hénon en fonction de a .	49
<i>Fig3.27</i>	Attracteur de Lozi $a = 1,7$ et $b = 0,5$.	52
<i>Fig3.28</i>	les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,7$ et $b = 0,5$.	53
<i>Fig3.29</i>	les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,7$ et $b = 0,5$.	53
<i>Fig3.30</i>	L'évolution de l'exposant de Lyapunov de système de Lozi en fonction a .	54
<i>Fig4.1</i>	Erreur de synchronisation e_1 .	65
<i>Fig4.2</i>	Erreur de synchronisation e_2 .	66
<i>Fig4.3</i>	Les erreurs de synchronisation $e_i, i = 1, 2, 3$.	68

Notations

x^*	point fixe
A	matrice constante
λ	valeur propre
$O(x_0)$	orbite
J	la matrice Jacobienne
λ	exposant de Lyapunov
d	la distance
A	attracteur
μ	paramètre
D_L	dimension de Lyapunov
V	fonction de Lyapunov

Introduction générale

Les systèmes dynamiques se sont développés à la fin du XIXe siècle. Le mathématicien et physicien français Henri Poincaré a en effet mis en lumière le phénomène de sensibilité aux conditions initiales, et il a montré dans son étude du système solaire qu'il existe des orbites stables et instables et que parfois une très petite perturbation peut conduire à le système modifie l'état de l'orbite. Il s'est rendu que des causes assez similaires pouvaient ne pas avoir les mêmes effets.

Edward Lorenz a conclu que de petites différences dans les conditions initiales des systèmes non linéaires reproduisent des systèmes complètement différents à long terme. Ce fut la première étape dans la compréhension du chaos.

Parallèlement à la recherche du chaos dans les systèmes dynamiques discrets, le champ de recherche s'est élargi en mathématiques en parallèle, il s'intéresse à la synchronisation des mouvements chaotiques, un sujet qui attire l'attention de nombreux de chercheurs, dont Yamada et Fujisaka, qui ont utilisé une approche locale de la synchronisation chaotique. Par la suite, Efrainovich et ses collègues ont développé des concepts importants liés à la synchronie chaotique et plus tard Pekora et Carol. Vous avez identifié une synchronie chaotique dite synchronie identique, qui il est développé sur la base de cercles chaotiques appariés, l'un appelé maître et l'autre esclave. Une autre approche plus récente est la méthode de synchronisation généralisée, dont Rolcoff et des autres ont posé les bases. En raison de ses applications dans les télécommunications, la transmission sécurisée d'informations et le cryptage.

Les systèmes dynamiques chaotiques discrets jouent un rôle plus important, car de nombreux modèles mathématiques de processus physiques, de phénomènes biologiques, de réactions chimiques et de systèmes économique en utilisant des systèmes dynamiques discrets. Par conséquent, il est devenu important de considérer la synchronisation du systèmes dynamiques chaotiques discrets. Par la suite, notre mémoire est divisée en quatre chapitres importants et pertinents, dont le premier est consacré aux systèmes dynamiques discrets dans leur généralité (Preliminaire sur la

représentation mathématique des systèmes dynamiques discrets.), tels que, par exemple l'espace des phases, l'espace d'états, systèmes dynamiques discrets, orbites ou trajectoires, points fixes, points périodiques et bifurcation.

Le deuxième chapitre, nous avons discuté les outils de mesure et d'estimation du chaos dans un tel système, en décrivant par exemple caractéristiques du chaos, outils de quantification et de mesure du chaos et Exposants de Lyapunov. Le troisième chapitre, quelques exemples universels de systèmes dynamiques discrets et le dernier chapitre traite des types de synchronisation et de ses méthodes.

Chapitre 1

Préliminaire sur la représentation mathématique des systèmes dynamiques discrets.

1.1 L'espace des phases, l'espaces d'états

Définition 1.1 *L'espace des phases est une structure correspondant à l'ensemble de tous les états possibles du système considéré. Ce peut être un espace vectoriel, ou un espace mesurable.*

Définition 1.2 *L'espace d'état est l'ensemble des coordonnées nécessaire à la description complète d'un système. Cet espace peut être discret, il peut aussi être continue.*

1.2 Systèmes dynamiques discrets :

Définition 1.3 *Le système d'équations algébriques récurrentes [5] :*

$$x_{n+1} = f(x_n, c), n \in \mathbb{N} \quad (1.1)$$

défini un système dynamique discret où :

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ la fonction non linéaire de récurrence qui définit la dynamique du système,

- $c \in \mathbb{R}$ le vecteur des paramètres,

- $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est une valeur initiale,

- $x_n \in \mathbb{R}^n$ un vecteur des états du système.

Pour une valeur initiale x_0 de 1.1 on obtient :

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f \cdot f(x_0) = f^2(x_0)$$

En générale : $x_n = f^n(x_0)$ ou $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}$

1.3 Orbites ou trajectoires :

Définition 1.4 L'orbite de x par le système dynamique f est définie par [29] :

$$O = \{f^n(x), n \in \mathbb{N}\}. \tag{1.2}$$

1.4 Points fixes :

Définition 1.5 On appelle "point fixe" d'un système dynamique discret f tout point x tel que :

$$f(x^*) = x^*. \tag{1.3}$$

1.5 Orbites périodiques et p-cycles :

Définition 1.6 On dit que x est un point périodique, s'il existe un entier $p \geq 1$ telle que :

$$f^p(x) = x \tag{1.4}$$

La période d'un point périodique est le petit entier vérifiant 1.4

Définition 1.7 Un cycle d'ordre p (ou orbite périodique d'ordre p ou encore un $(p$ -cycle) est un ensemble p points $\{x_0^*, \dots, x_{p-1}^*\}$ vérifiant :

$$x_{i+1}^* = f(x_i^*), \quad i = 0, \dots, p-1. \tag{1.5}$$

$$x_p^* = f(x_{p-1}^*) = x_0.$$

$$x_i^* \neq f^h(x_i^*), \quad i = 0, \dots, p-1; 1 \leq h < p.$$

c-à-d chaque point du cycle d'ordre p est un point fixe pour l'application f_p , i.e

$$x_i^* = f^p(x_i^*), \quad i = 0, \dots, p-1.$$

1.6 Etude de stabilité des points fixes :

Trouver des solutions pour des systèmes non linéaires n'est pas facile. Habituellement, ces solutions ne pas fournir suffisamment d'informations pour contrôler la stabilité systématique. Par conséquent, nous avons besoin de méthodes analytiques pour promouvoir l'approximation linéaire du système de recherche du comportement du système non linéaire. La non-linéarité est l'une des méthodes les plus efficaces pour étudier la stabilité des systèmes non linéaires.

Définition 1.8 Un point fixe x^* de $f : I \rightarrow I$, $I \subset \mathbb{R}^n$ est dit attractif, s'il existe un voisinage de x^* tel que pour tout v_0 dans ce voisinage la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par v_0 et $v_{n+1} = f(v_n)$, converge vers x^* . i.e.

$$\forall x_0 \in I, \exists \delta > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \implies \|x^* - f(x_0)\| < 0$$

de plus si

$$\forall x_0 \in I, \exists \delta > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \implies \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = x^*$$

le point x^* dit asymptotiquement stable.

Définition 1.9 Un point fixe x^* de $f : I \rightarrow I$, $I \subset \mathbb{R}^n$, est répulsif (ou instable) si :

$$\forall x \in I, \exists \varepsilon > 0, \|x^* - x_0\| < \delta \implies \|x^* - f(x_0)\| > 0$$

Définition 1.10 Considérons une application non-linéaire $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; on définit le multiplicateur m de f au point fixe x_0 comme suit :

$$m = f'(x^*)$$

1.6.1 Méthode de linéarisation :

Définition 1.11 Supposons que le système non-linéaire décrit par 1.1 admet un développement limité au voisinage de point fixe x^* alors :

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x^*) + (x - x^*) Df(x^*) + O(x_n - x^*)^2 \\ &= Ax_n + O(x_n - x^*)^2 \end{aligned} \quad (1.6)$$

tel que $A = Df(x^*)$

puisque au voisinage de x^* , $\|x - x^*\| \rightarrow 0$ en négligeant les termes du second ordre, et le système 1.1 est bien linéariser.

L'application $X \rightarrow AX$ s'appelle l'application linéarisée de f au voisinage du point fixe x^* .

On dit que le système 1.1 est approximé au voisinage du point d'équilibre x .

1.6.2 Nature d'un point d'équilibre :

Il est clair que m est la pente de la tangente au point fixe x^* de f qui détermine le type (ou la nature) de point fixe.

Théorème 1.1 *Supposons que x^* est un point fixe de $x_{n+1} = f(x_n)$, alors le point fixe x^* est :*

1. *Attractif si $|m| < 1$.*
2. *Répulsif si $|m| > 1$.*
3. *Indiffrent si $|m| = 1$ on ne peut pas conclure.*
4. *Super stable si $m = 0$*

Preuve. *On utilise la formule de Taylor au voisinage de x^* avec $f(x^*) = x^*$ et $f'(x^*) = m$*

$$f(x) = f(x^*) + f'(x^*)(x - x^*) + O((x - x^*)^2) = x^* + m(x - x^*) + O(x - x^*)^2$$

$$f^2(x) = f(f(x)) = f(f(x^*)) + m(m(x - x^*)) + O(x - x^*)^2 = x^* + m^2(x - x^*) + O(x - x^*)^2$$

⋮

$$f^p(x) = x^* + m^p(x - x^*) + O(x - x^*)^2$$

1. *Attractif si $|m| < 1$*

$$f^p(x) = x^* + m^p(x - x^*) + O(x - x^*)^2$$

$$p \rightarrow \infty \implies f^p(x) \rightarrow x^*$$

2. *Répulsif si $|m| > 1$*

$$f^p(x) \text{ éloigne par rapport à } x^* \text{ i.e } |f^p(x) - x^*| \rightarrow \infty$$

3. *Indiffrent si $m = \pm 1$*

la nature de x^ dépend des termes d'ordre supérieur à 1 un du developpement de Taylor.*

4. *Super stable si $m = 0$*

l'attraction est la plus forte car le terme du premier ordre en $(x - x^)$ disparaît complètement.*

Théorème 1.2 (Méthode directe de Lyapunov). *En dimension n , si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, pour décider si le point fixe x^* est attractif ou non, il faut calculer les valeurs propres de la matrice jacobienne $J(x^*) = Df(x^*)$.*

Le point fixe x^ est :*

1. *Stable si toutes les valeurs propres de $J(x^*)$ sont à l'intérieur du disque unité (leurs modules sont inférieur à 1).*
2. *Instable si l'une de ces valeurs propres de $J(x^*)$ à un module plus grand que 1 (à l'extérieur du disque unité).*

Preuve. *La preuve peut être faite en utilisant le critère de Routh-Hurwitz [37].*

Comme les points fixes peuvent être attractifs ou répulsifs, de même, une orbite périodique est soit attractive soit répulsive et le théorème suivant décrit la stabilité d'une orbite périodique.

En dimension 1, le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de chaîne. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$(f^p)'(x_p) = f'(x_{p-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0).$$

Mais $x_0 = x_p$, on en déduit que la valeur $(f^p)'(x_p)$ est la même pour toutes les dérivées et notée m_p . On définit le multiplicateur du cycle m_p par :

$$m_p = (f_p)'(x_0).$$

■

Définition 1.12 Un point fixe x^* de $x_{n+1} = f(x_n)$ est appelée hyperbolique si $|\frac{df}{dx}(x^*)| \neq 1$.

Plus généralement, en dimension n , x est un point hyperbolique si aucune des valeurs propres de $Df(x)$ a un module égal à 1.

Théorème 1.3 Soit le point périodique x d'un cycle d'ordre p .

1. Si le spectre de la matrice jacobienne $Df^p(x^*)$ est contenu à l'intérieur cercle unité, le cycle est stable.

2. Si une des valeurs propres a un module plus grand que 1, le cycle est instable.

On le voit plus facilement en dimension 1. Le critère pour qu'un cycle soit attractif ou répulsif vient de la règle de la chaîne. En effet, la dérivée de f^p au point x_0 s'écrit :

$$(f^p)'(x_0) = f'(x_{p-1}) \dots f'(x_1) f'(x_0).$$

mais $x_0 = x_p$, on déduit que cette valeur $(f^p)'(x_0)$ est la même pour toutes les dérivées et notée m_p . On définit le multiplicateur du cycle m_p par :

$$m_p = (f^p)'(x_0).$$

Théorème 1.4 Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le cycle $\{x_0^*, x_1^*, x_2^*, \dots, x_{p-1}^*\}$ est :

1. Attractif si $|m_p| < 1$.

2. Répulsif si $|m_p| > 1$.

3. Indifférent si $|m_p| = 1$.

4. Super stable si $|m_p| = 0$.

En général, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ on calcule les valeurs propres λ_i , $1 < i < n$ de la matrice jacobienne de f^p

Si λ_i sont réelles :

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| < 1$, il s'agit d'un noeud attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| > 1$, il s'agit d'un noeud répulsif.

$\exists i, j, 1 < i < n, 1 < j < n$, telque $|\lambda_i| < 1$ et $|\lambda_j| < 1$, il s'agit d'un noeud col.

Si λ_i sont complexes :

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| < 1$, il s'agit d'un foyer attractif.

$\forall i = 1, 2, \dots, n, |\lambda_i| > 1$, il s'agit d'un foyer répulsif.

■

Preuve. La preuve peut être faite en utilisant le critère de Routh-Hurwitz [37]. ■

1.7 Bifurcations :

Soit le système dynamique non-linéaire suivant :

$$x_{n+1} = f_c(x_n). \quad (1.7)$$

où $x_n \in \mathbb{R}^n$ est la variable d'état et $c \in \mathbb{R}^m$ est un paramètre de contrôle.

Définition 1.13 Une bifurcation est un changement quantitatif ou qualitatif de la solution x^* du système 1.7 lors de la modification des paramètres aux quels il dépend, et d'une manière plus précise la disparition ou le changement de stabilité ou l'apparition de nouvelles solutions [35].

Définition 1.14 Un diagramme de bifurcation est une portion de l'espace des paramètres sur laquelle sont représentés tous les points de bifurcation [11].

1.7.1 Types de bifurcations :

Il existe plusieurs types de bifurcation selon les propriétés des secondes dérivées de la famille des fonctions $f_\mu(x_n)$. Chaque bifurcation est caractérisée par son équation générale typique [13, 15, 7]. Les différents types de bifurcations [20], pour les systèmes dynamiques discrets sont les bifurcations : noeud-col (ou tangente, ou pli), transcritique, et la bifurcation Pitchfork.

Considérons l'application

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n).$$

Où les dérivées partielles de la fonction f sont continues par rapport aux variables x et μ .

Bifurcation de type noeud-col (ou tangente, ou pli)

Définition 1.15 On dit qu'une bifurcation noeud-col s'est produite à μ_0 si :

$$1 - f_{\mu_0}(x^*) = x^*,$$

- 2- $\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x}(x^*) = 1,$
- 3- $\frac{\partial^2 f_{\mu_0}}{\partial x^2}(x^*) \neq 0,$
- 4- $\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial \mu}(x^*) \neq 0.$

Cette bifurcation associée à l'équation

$$f(x, \mu) = \mu - x^2. \quad (1.8)$$

*Pour $\mu < 0$, $f(x, \mu) = 0$ n'admet pas une solution. Donc il n'ya aucun point d'équilibre ;

*Pour $\mu = 0$, $f(x, \mu) = 0$ admet une seule solution $x = 0$, qui est semi-stable (Stable pour $x > 0$ et instable pour $x < 0$) ;

*Pour $\mu > 0$, $f(x, \mu) = 0$ admet deux solution $x_1 = \sqrt{\mu}$ et $x_2 = -\sqrt{\mu}$. Donc il existe deux point d'équilibre : x_1 est stable et x_2 est instable.

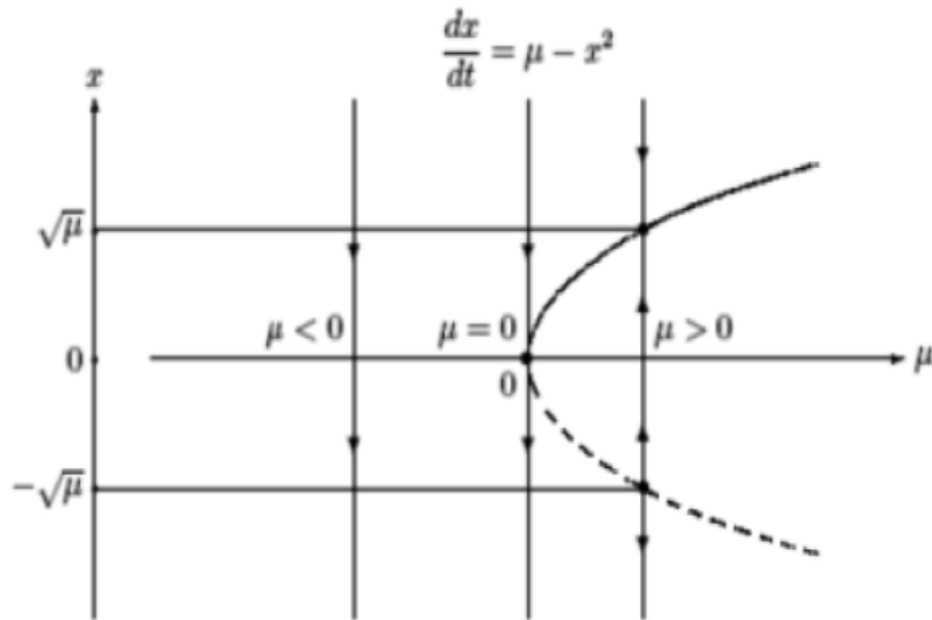


Fig 1.1-Diagramme de bifurcation nœud-col.

Bifurcation Pitchfork

Définition 1.16 Nous disons qu'une bifurcation Pitchfork s'est produite à μ_0 si :

- 1- $f_{\mu_0}(x^*) = x^*,$
- 2- $\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x}(x^*) = 1,$

$$3-\frac{\partial f_{\mu_0}^2}{\partial x^2}(x^*) = 0,$$

$$4-\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial \mu}(x^*) = 0$$

Cette bifurcation associée à l'équation

$$f(x, \mu) = x^3 - \mu x. \quad (1.9)$$

*Pour $\mu < 0$, $f(x, \mu) = 0$ admet une seule solution $x = 0$, qui est point d'équilibre instable ;

*Pour $\mu = 0$, $f(x, \mu) = 0$ admet une seule solution $x = 0$, qui est point d'équilibre stable ;

*Pour $\mu > 0$, $f(x, \mu) = 0$ admet trois solutions $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{\mu}$ et $x_3 = -\sqrt{\mu}$, donc il existe 3 points d'équilibre : x_1 est semi-stable et x_2 et x_3 sont instables.

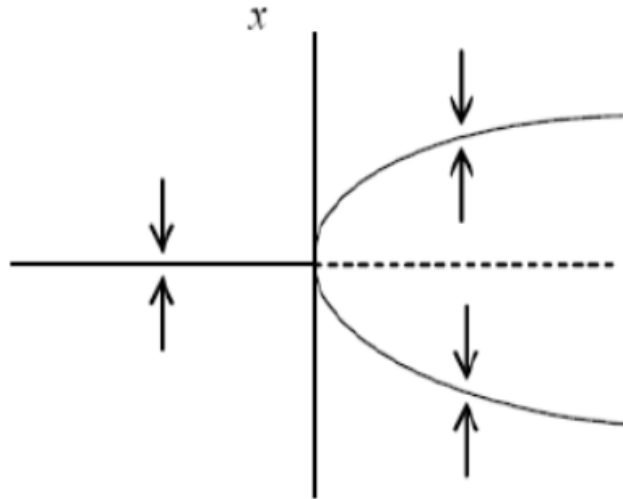


Fig 1.2-Diagramme de bifurcation Pitchfork.

Bifurcation transcritique :

Définition 1.17 Nous disons qu'une bifurcation transcritique s'est produite à μ_0 si :

$$1-f_{c_0}(x^*) = x^*,$$

$$2-\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial x}(x^*) = 1,$$

$$3-\frac{\partial f_{\mu_0}^2}{\partial x^2}(x^*) \neq 0,$$

$$4-\frac{\partial f_{\mu_0}}{\partial \mu}(x^*) = 0.$$

Cette bifurcation associée à l'équation

$$f(x, \mu) = \mu x - x^2 \quad (1.10)$$

*Pour $\mu < 0$, $f(x, \mu) = 0$ admet deux solution $x_1 = 0$ et $x_2 = c$. Donc il existe deux point d'équilibre : x_1 est stable et x_2 est instable ;

*Pour $\mu > 0$, $f(x, \mu) = 0$ admet deux solution $x_1 = 0$ et $x_2 = c$. Donc il existe deux point d'équilibre : x_1 est instable et x_2 est stable ;

*Pour $\mu = 0$, $f(x, \mu) = 0$ admet une seule solution $x = 0$. Alors x est un point d'équilibre semi-stable (Stable pour $x > 0$ et instable pour $x < 0$).

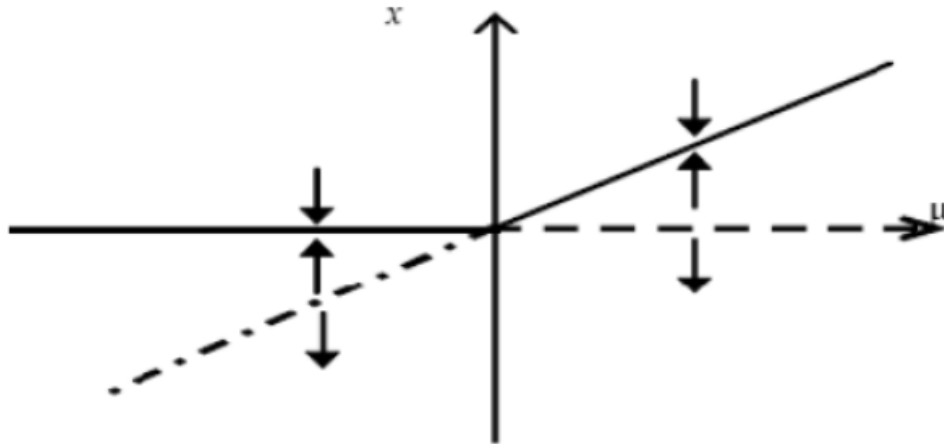


Fig 1.3-Diagramme de bifurcation transcritique.

Chapitre 2

Route vers le chaos

2.1 Bref historique sur le chaos

Il n'existe pas une définition du chaos adoptée de façon universelle dans la littérature, et plusieurs interprétations sont données au phénomènes chaotiques, comme un indésirable aspect du désordre, et aussi confusion, agitation, abime essentiel et aléatoire indésirable.

Nous citons plusieurs travaux qui prédispose l'invention de cette branche de mathématiques dans sa façon moderne, nous commençons par Henri Poincaré en 1889, dans le problème des trois corps, puis en 1908, l'idée de "chance" a été publié par Poincaré. En 1898, la divergence globale des trajectoires dans l'espace de courbure négative a été inscrite par Jacques Hadamard, puis en 1908, la signification générale de son théorème a été discuté par Pierre Duhem qui a déclaré que les premières conditions aléatoires introduites dans le théorème d'Hadamard ne permettent pas de prédire le système chaotique d'une façon complète.

À la fin du XIX^{ième} siècle, Jacques Hadamard a réussi à prouver un théorème sur la dépendance sensible aux conditions initiales concernant le courant géodésique sur une surface de courbure négative et le mouvement sans friction d'un point sur une surface.

Le comportement indécis "occasionnel" d'un circuit oscillatoire du tube électronique géré par une équation différentielle non linéaire simpliste a été constaté par Bathazar Van Del Pol en 1927

Environ treizeans après, selon Mary Cartwright Tôt et John Littlewood cette équation avait le potentiel de démontrer des solutions sensibles à tous les chires dans ces conditions initiales.

En suivant la tradition de Poincaré, l'étude des systèmes hamiltoniens non linéaires a été poursuivi par des nombreux mathématiciens comme Kolmogorov, Arnold et Moser entre les années 1920 et 1960.

Au début des années 1960, la désignation laborieuse des entrées et des productions de processeurs de données mentales constituait un facteur essentiel facilitant la révolution cognitive. Considé-

rer l'esprit comme un système cybernétique dynamique avait été l'approche la plus rapide selon Miller, Gallanter et Pribram. En 1972, Newell et Simon ont proposé une nouvelle approche qui a dénoncé la précédente en considérant l'esprit comme une règle basée sur un processeur de symbole.

En 1960, Steve Smale a fourni des preuves mathématiques permettant d'établir des équations différentielles avec une sensibilité générique. La fin des années 1960 a marqué le commencement des simulations numériques des équations différentielles avec un comportement complexe sur les calculatrices analogiques ensuite sur les calculatrices numériques.

Dans les années 1962, Edward Lorenz a remarqué un comportement complexe sensiblement dépendable des conditions initiales après avoir mené une simulation en ordinateur d'un ensemble d'équations différentielles simplifiées pour une convection d'un fluide.

Une large série de champs a incorporé la théorie des systèmes dynamiques dans le comportement prédateur-proie, parole et langue, développement de l'enfant, et l'intelligence artificielle.

En 1977, Ilya Prigogine a remporté le Prix Nobel en chimie. Il a focalisé sur l'entropie des systèmes ouverts. En d'autres mots, l'accumulation et l'écoulement de la matière, l'énergie, ou l'information entre le système et son environnement. Prigogine a dévoilé à travers un système dissipatif que l'évolution des structures complexes peut être simple et organisée.

C'est en 1984 que T. Matsumoto et L.O. Chua avaient leur première observation d'un attracteur chaotique dans un circuit électronique très simple, construit avec seulement une résistance non linéaire caractérisée par une fonction linéaire par morceaux à cinq segments. Le développement de la théorie des circuits non linéaires a commencé à partir de cette observation, suivi par les circuits électroniques chaotiques. Matsumoto a vérifié la nature chaotique de ce circuit avec des expériences numériques.

Avec ses étudiants ils étaient parvenus à modifier les circuits de Rosenthal afin d'obtenir deux résistances non linéaires terminales avec une fonction linéaire par morceaux qui devraient être précocement désignés. L'adaptation du circuit de Rosenthal a été réussie par Takumasa deux ans après dans le but d'en arriver à la non-linéarité requise.

La caractéristique principale du chaos est la sensibilité aux conditions initiales, si le système est chaotique, alors il n'est pas possible de calculer avec précision l'évolution d'un cas particulier, car une erreur négligeable est survenue aux observations de départ résulte des fluctuations énormes. La théorie du chaos étudie le comportement des systèmes dynamiques qui sont très sensibles aux conditions initiales, ce qui rend la prévision à long terme impossible en général. Cela se produit même si ces systèmes sont déterministes, ce qui signifie que leur comportement futur est entièrement déterminé par leurs conditions initiales. Ce comportement est connu sous le nom de chaos déterministe, ou tout simplement le chaos.

2.1.1 Définition du chaos

Définition Larousse : n.m. (gr. Khaos). Confusion générale des éléments, de la matière, avant la création du monde. Fig. Désordre. [40].

Définition de E .Lorenz : Un système agité par des forces où seules existent trois fréquences indépendantes, peut se déstabiliser, ses mouvements devenant alors totalement irréguliers et erratiques.

R. L. Devaney [8] : Soit (I, d) un espace métrique compact (d est une distance) et f une fonction $f : I \rightarrow I$

Définition 2.1 Le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (2.1)$$

est dit chaotique si les conditions suivantes sont vérifiées :

1-Sensibilité aux conditions initiales : Il existe un nombre réel $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $\rho > 0$, il existe un point $y_0 \in I$ et un entier $n > 0$, vérifiant

$$d(x_0, y_0) < \rho \implies d(x_n, y_n) > \varepsilon \quad (2.2)$$

2-Transitivité topologique : f est topologiquement transitive, s'il existe $x_n \in I$ tel que l'orbite $O = \{f^n(x_n), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans I .

3-Densité des orbites périodiques : $\{x_0 \in I; \exists n > 0, x_n = x_0\}$ est dense dans I .

2.2 Caractéristique du chaos

2.2.1 Sensibilité aux conditions initiales

La sensibilité aux conditions initiales est un phénomène découvert pour la première fois, dès la fin du XIX^e siècle par Poincaré, puis a été redécouvert en 1963 par Lorenz lors de ses travaux en météorologie. Cette découverte a entraîné un grand nombre de travaux importants, principalement dans le domaine des mathématiques. Cette sensibilité explique le fait que, pour un système chaotique, une modification infime des conditions initiales peut entraîner des résultats imprévisibles sur le long terme. Le degré de sensibilité aux conditions initiales quantifie le caractère chaotique du système [28].

2.2.2 Exposants de Lyapunov

Les exposants de Lyapunov sont un outil qui permet de mesurer la divergence possible entre deux orbites issues de conditions initiales voisines. Les exposants de Lyapunov permettent de confirmer la sensibilité des conditions initiales d'un système chaotique. Dans le cas d'un système dynamique discret à n dimensions, il existe n exposants de Lyapunov [31]. Soit le système dynamique non-linéaire discret suivant :

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (2.3)$$

Théorème 2.1 [36] *Les exposants du Lyapunov du système 2.3 sont représentés par la formule suivante :*

$$\lambda_L^{(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_i(J_n \dots J_1)|, i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.4)$$

avec $J_n = Df(x_{n-1}) \dots Df(x_0)$, et $Df(x_i)$ est la matrice jacobienne de f évaluée en x_i suivante :

$$Df(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_{ni}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_{ni}} \end{pmatrix}$$

Preuve. : Choisissons deux conditions initiales voisines x_0 et x'_0 , supposons que les deux trajectoires x_n et x'_n s'éloignent de manière exponentielle, alors après k itérations on aura :

$$|x_n - x'_n| = |x_0 - x'_0| e^{\lambda n}, \quad (2.5)$$

désigne le taux de divergence des deux trajectoires, et avec un calcul simple on trouve :

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{x_n - x'_n}{x_0 - x'_0} \right|, \quad (2.6)$$

Prenant $\lambda_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \lambda$, on obtient :

$$\lambda_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \ln \left| \frac{x_n - x'_n}{x_0 - x'_0} \right|, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \lambda_L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{x_n - x'_n}{x_{n-1} - x'_{n-1}} * \frac{x_{n-1} - x'_{n-1}}{x_{n-2} - x'_{n-2}} * \dots * \frac{x_1 - x'_1}{x_0 - x'_0} \right|, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{x_{i+1} - x'_{i+1}}{x_i - x'_i} \right|, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{f(x_i) - f(x'_i)}{x_i - x'_i} \right|. \end{aligned}$$

Finalement on obtient :

$$\lambda_L = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(x_i)}{dx_i} \right|. \quad (2.8)$$

En remplaçant la dérivée partielle $\frac{df(x_i)}{dx_i}$ par la matrice jacobienne $Df(x)$ calculée à x_i et prenant $J_n = Df(x_{n-1}) \dots Df(x_0)$ avec $J_0 = Df(x_0)$, on obtient la formule générale des exposants de Lyapunov :

$$\lambda_L^{(i)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln |\lambda_i(J_n \dots J_1)|, i = 1, 2, \dots, k.$$

■

Théorème 2.2 [30] En analysant les exposants de Lyapunov du système 2.3 nous pouvons conclure de sa stabilité comme suit :

- Si $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_1 < 0$, il existe des point fixes asymptotiquement stables.
- Si $\lambda_1 = 0$, $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_2 < 0$, l'attracteur est un cycle limite asymptotiquement stable.
- Si $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, $\lambda_n \leq \dots \leq \lambda_{k+1} < 0$, l'attracteur est un tore de dimension k , c'est-à-dire quasi-periodique.
- Si $\lambda_1 > 0$, $\sum_i \lambda_i < 0$, l'attracteur est chaotique.
- Si $\lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0$, $\sum_i \lambda_i < 0$, l'attracteur est hyperchaotique.

2.2.3 Dimension fractale

Plusieurs dimensions ont été proposées, on peut citer la dimension de Kolmogorov, dimension de Corrélation et dimension de Lyapunov. Toute ses dimensions sont très proches l'une de l'autres et satisfont les propriétés suivantes [35].

$$A \subset B \implies d(A) \leq d(B)$$

$$A = B \implies d(A) = d(B)$$

$$d(A * B) = d(A) + d(B).$$

Dimension de Lyapunov

La dimension de Lyapunov D_L est définie par [21] :

$$D_L = j + \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} \quad (2.9)$$

d'où $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ sont les exposants de Lyapunov d'un attracteur d'un système dynamique et j est le plus grand entier qui satisfait :

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \dots + \lambda_j \geq 0$$

Dimension de capacité (Kolmogorov)

Soit un ensemble des points metté dans l'espace de dimension n , on cherchons un recouvrement pour cet ensemble (chaque boule à diamètre ε).

Soit $E(\varepsilon)$ le plus petits nombre des boules nécessaire pour cette dimension de capacité

La dimension de Kolmogorov ou de capacité [3] est définie par :

$$d_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log(E(\varepsilon))}{\log(\frac{1}{\varepsilon})} \quad (2.10)$$

2.2.4 Attracteurs étranges

L'attracteur étrange est une caractéristique géométrique du chaos. Il n'existe pas une définition rigoureuse d'un attracteur étrange ou chaotique.

Définition 2.2 [14] *Un sous-ensemble borné A de l'espace des phases est un attracteur étrange pour une transformation T de l'espace s'il existe un voisinage U de A , c'est à dire que pour tout point de A il existe une boule contenant ce point et contenue dans \mathbb{R} vérifiant les propriétés suivantes :*

1- U est une zone de capture, ce qui signifie que toute orbite par T dont le point initial est dans U est entièrement contenue dans U . De plus, toute orbite de ce type devient et reste aussi proche de A que l'on veut.

2- Les orbites dont le point initial est dans \mathbb{R} sont extrêmement sensibles aux conditions initiales.

3- A est un objet fractal.

4- Pour tout point de A , il existe des orbites démarrées dans \mathbb{R} qui passent aussi près que l'on veut de ce point.

Chapitre 3

Exemples de systèmes dynamiques discrets chaotiques

3.1 L'application logistique

3.1.1 Historique de l'application logistique

L'application logistique $g_a = ax(1 - x)$ s'intéresse beaucoup à la modélisation de l'évolution des populations. En 1838, Pierre François Verhulst¹ a avancé ce point de vue, il a affirmé la croissance non exponentielle de la population. Ce nouveau modèle a raison Thomas Malthus². Devrait connaître une croissance exponentielle. Bien sûr, pour Malthus, chaque année, la population croît à un rythme fixe : $U_{n+1} = rU_n$ courant, dont certains précisent taux de croissance de la population au cours des années n et r . Caractéristiques liées à cela la séquence est : $f(x) = rx$. Par conséquent, le modèle d'indice envisage le développement infini de la population, emplacement, et donc ne correspond pas à la réalité.

En fait, aucune barrière évolutive n'est considérée. Cependant, compte tenu de ces obstacles, il est nécessaire de corriger le modèle Malthus, qui est le même que le modèle de Verhulst basé sur la nourriture disponible. Ceci détermine la population maximale P qui sera atteinte une fois

¹Pierre-François Verhulst (1804-1849) est un mathématicien belge. Inspiré par l'« Essai sur le principe de population » de Thomas Malthus, il proposa en 1838 le modèle de Verhulst, décrivant l'évolution des populations animales grâce à un modèle qui ne soit pas exponentiel. C'est dans la publication de 1845 qu'il nomme cette courbe « logistique » sans donner l'explication de ce terme

²Thomas Malthus (1766 - 1834), économiste britannique contemporain du décollage industriel anglais, il est surtout connu pour ses travaux sur les rapports entre les dynamiques de croissance de la population et la production, analysés dans une perspective pessimiste, totalement opposée à l'idée smithienne d'un équilibre harmonieux et stable

que tous les aliments seront épuisés. Si la population en un an est égale à P , la population de la deuxième année sera nulle. Dans ce cas, on peut l'écrire comme ceci : $U_{n+1} = rU_n(P - U_n)$ où la fonction de corrélation est $g(x) = rx(P - x)$. facteur de réception signifie que tant que $(P - x)$ correspond à facteurs externes. Puis écris la dernière expression $g(x) = rxP(1 - \frac{x}{P})$. En posant $y = \frac{x}{P}$, on obtient

$$g(y) = ryP^2(1 - y) = ay(1 - y),$$

avec $a = rP^2$. La population doit être ainsi assimilée à un rapport compris entre 0 et 1, où 0 correspond à son extinction et 1 à son maximum. De plus, la population maximale est égale à $g(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4}$. Ainsi, $0 \leq \frac{a}{4} \leq 1$; soit $0 \leq a \leq 4$, l'application g définie par

$$\begin{aligned} g & : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \\ y & \longmapsto ay(1 - y), a \in [0, 4] \end{aligned}$$

s'appelle l'application logistique.

Après sa découverte par Pierre François Verhulst, l'application logistique a été oubliée jusqu'au début du $XX^{\text{ème}}$ siècle. Deux mathématiciens biologistes, dans les années 1920, travaillent sur l'évolution des différentes populations animales et constatent que les populations évoluent différemment d'une espèce à une autre : certaines se stabilisent tandis que d'autres suivent des cycles réguliers et enfin d'autres fluctuent aléatoirement. De quoi dépend cette évolution ?

L'application logistique réapparaît alors pour tenter de répondre à cette question. Toujours dans le même but, dans les années 1970, James Yorke ³ et Robert May ⁴, tous deux écologistes, auront trouvé la réponse. Pour eux, l'évolution de chaque population animale se calcule à l'aide de l'application logistique $g(y) = ay(1 - y)$ et dépend de la valeur de a .

En effet, pour certaines valeurs de a , le comportement de l'application se change significativement. Plus tard, ces paramètres sont appelés bifurcations. Pour plus de clarté, May a compilé ses résultats dans un graphique, c'est l'apparition du diagramme de bifurcation. Il remarque que jusqu'à un certain point, la population converge vers une valeur, puis deux, puis quatre, etc.

Au delà de ce point, ce comportement prévisible s'arrête, c'est le chaos. Par ailleurs, à la même période, Mitchell Feigenbaum ⁵, physicien, s'intéresse à son tour à l'application logistique dans le

³James Yorke (né en 1941), mathématicien américain, il a le sens de la formule : "le terme de chaos", qu'il a choisi en 1975 pour décrire des phénomènes très irréguliers, a été unanimement repris par les scientifiques. Mais James Yorke a fait bien plus, en mettant au point des méthodes pour étudier ces phénomènes, et aussi pour les utiliser dans des applications pratiques.

⁴Robert McCredie May, (né en 1938), physicien australien, au début de sa carrière, il s'intéresse à la dynamique des populations animales ainsi qu'à la relation entre la complexité et la stabilité en synécologie. Ses travaux jouent un rôle clé dans le développement de l'écologie théorique (en) lors des années 1970 et 1980.

⁵Mitchell Jay Feigenbaum (né en 1944), est un physicien théoricien américain, il a découvert un scénario de

cadre de recherche sur la turbulence. Dans un premier temps, il fait les mêmes constatations que Robert May : il existe des valeurs de a pour lesquelles le comportement de l'application logistique se change. Puis durant l'été 1975, il assiste à une conférence sur la transition entre la périodicité et le chaos qui lui pousse à étudier l'application logistique sous un angle différent. Il admet les bifurcations et il se concentre sur la distance entre deux bifurcations successives. Il remarque alors que le rapport entre deux distances successives converge. Il a repris son étude sur d'autres applications dépendant d'un paramètre et constate que le rapport entre deux périodes converge toujours vers le même nombre. C'est la découverte de la constante de Feigenbaum.

3.1.2 Définition de l'application logistique

Définition 3.1 *Le système dynamique associé est : Partant d'une condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}$, on pose*

$$x_1 = g_a(x_0), x_2 = g_a(x_1), \dots, x_{n+1} = g_a(x_n).$$

Où

$$x_1 = g_a(x_0), x_2 = g_a(x_1) = g_a(g_a(x_0)) = g_a^2(x_0), \dots, x_n = g_a^n(x_0).$$

On dit que c'est un système dynamique de dimension 1 car $x \in \mathbb{R}$, et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment, la loi de mouvement est simplement $x_{n+1} = g_a(x_n)$

Définition 3.2 *L'application logistique [32] est l'application notée usuellement g_a définie par :*

$$\begin{aligned} g_a & : [0, 1] \longrightarrow [0, 1] \\ x & \mapsto ax(1-x) \end{aligned}$$

avec $a \in [0, 4]$.

Cette application peut être appliquée plusieurs fois de suite, ce qui permet de définir par récurrence une suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = g_a(u_n)$.

3.1.3 Propriétés de l'application logistique

Nous prendrons un exemple vu en mathématiques et en écologie pour étudier la croissance des populations c'est le modèle logistique. La population de la période $t + 1$ sera x_{t+1} en fonction de la population qui la précède de la période t et donnée par l'équation

$$x_{t+1} = ax_t(1-x_t).$$

transition vers le chaos par doublement de période, lors d'un séjour à Los Alamos. Cette transition est caractérisée par deux constantes universelles, baptisées depuis « nombres de Feigenbaum » en son honneur.

avec $(1 - x_t)$ représente la diminution de la population due à des facteurs extérieurs. ax_t représente le rapport de croissance.

On verra, selon la valeur de taux de croissance effectif a , une population se stabilise à une certaine valeur ou oscille entre deux ou plusieurs valeurs ou fluctue aléatoirement. Donc l'évolution de chaque population se calcule à l'aide de l'application logistique : $x_{t+1} = ax_t(1 - x_t)$

Dans ce but, on va étudier l'évolution des populations animales pour un taux de croissance effectif compris entre 0 et 4. On va étudier numériquement et graphiquement cette évolution grâce à la fonction logistique.

Pour $a = 1$:

Si nous prenons $x_0 = 0,1$ comme donnée initiale, nous pouvons voir le comportement de l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique dans la Fig

(3.1)

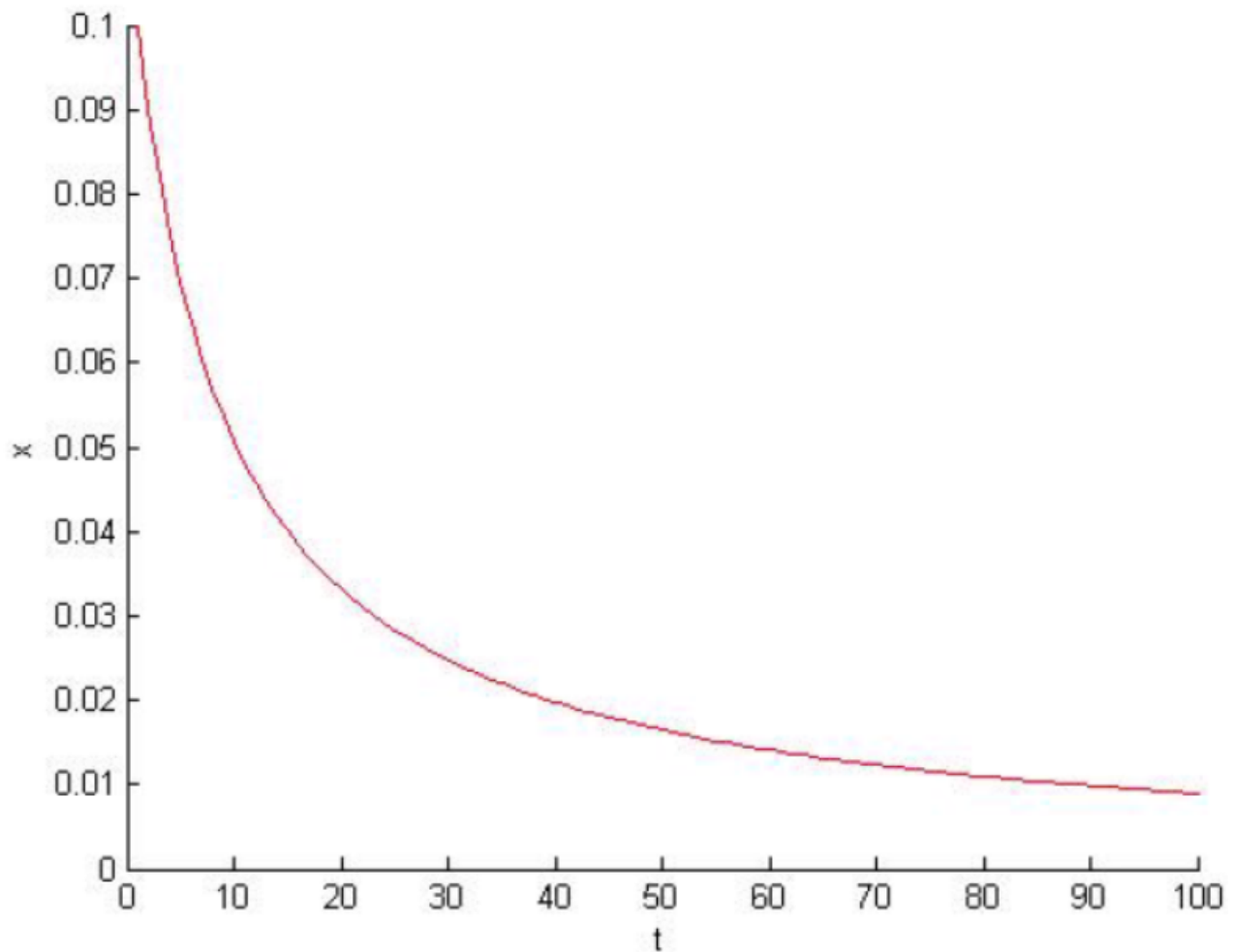


Fig 3.1-Population dont le taux de croissance $a = 1$ avec $x_0 = 0,1$.

On prévoit pour cette valeur de a une diminution de la population et une convergence vers zéro.

Pour $a = 2$:

Pour une population initiale $x_0 = 0,1$ l'évolution de la population pour les 100 premières itéra-

tions de l'application logistique est représentée dans la Fig (3.2)

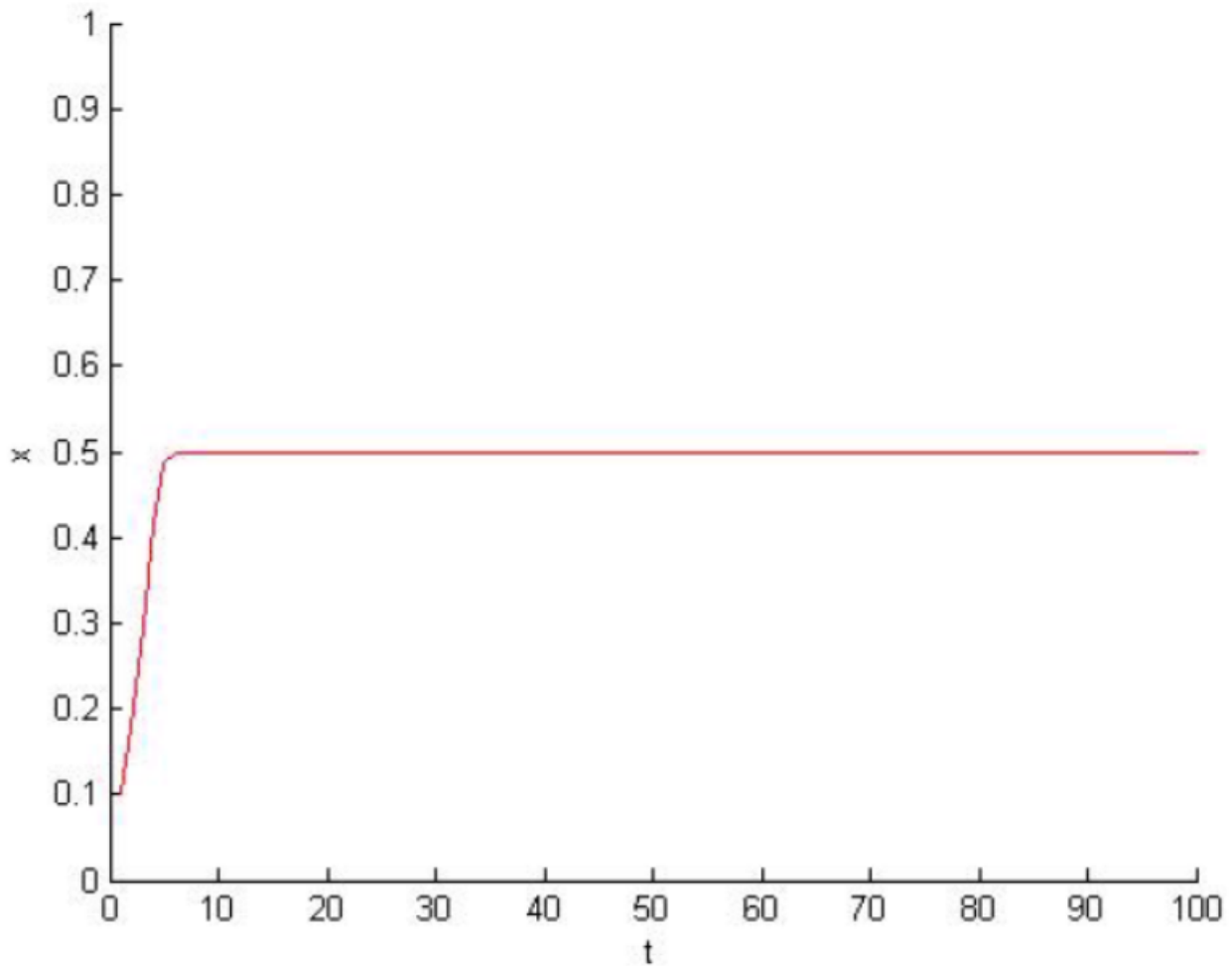


Fig 3.2-Population dont le taux de croissance $a = 2$ avec $x_0 = 0,1$.

On peut voir la population se stabilise vers une certaine valeur correspond à 0,5.

Pour $a = 3$:

Maintenant pour la même valeur prise de la population initiale $x_0 = 0,1$ l'évolution de la population pour les 100 premières itérations de l'application logistique est représentée dans la Fig

(3.3)

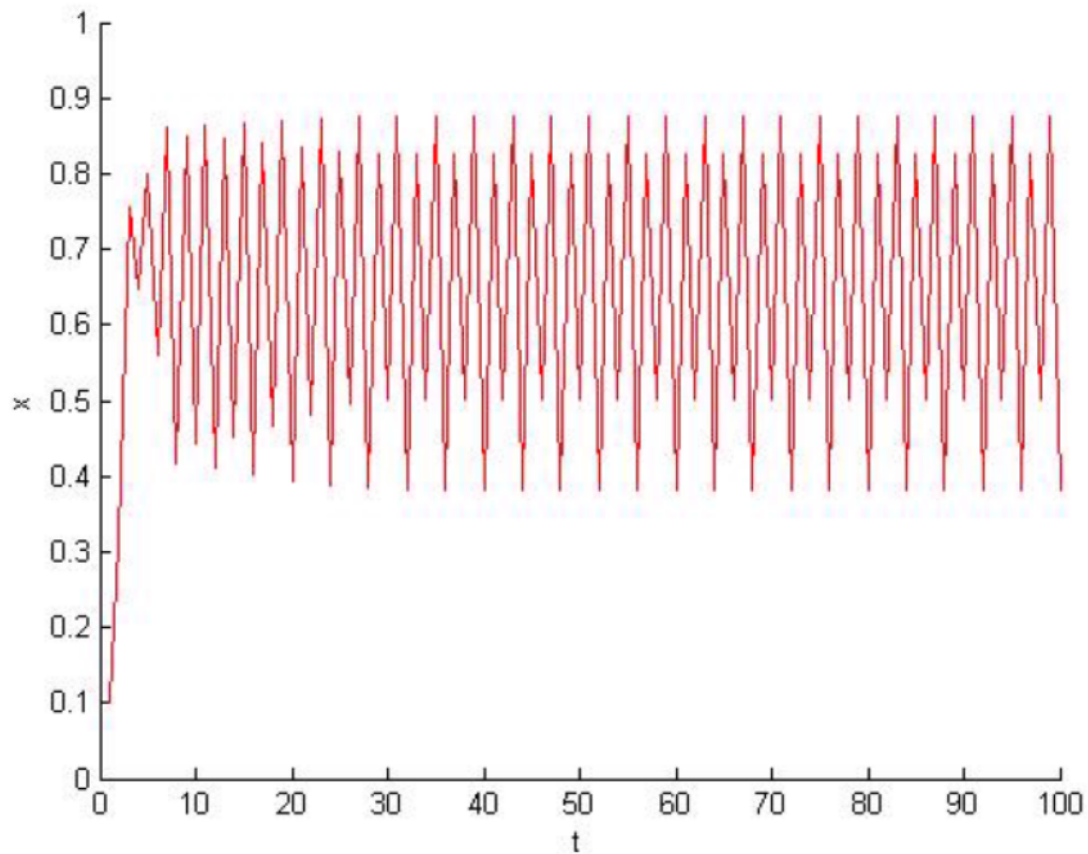


Fig 3.3-Population dont le taux de croissance $a = 3$ avec $x_0 = 0,1$.

On peut voir que la population pour ce taux de croissance oscille entre deux valeurs que l'on peut calculer à l'aide du Matlab 0,64 et 0,68.

Pour $a = 4$:

Pour une population initiale $x_0 = 0,1$ l'évolution de la population pour les 100 premières itéra-

tions de l'application logistique est représentée dans la Fig (3.4)

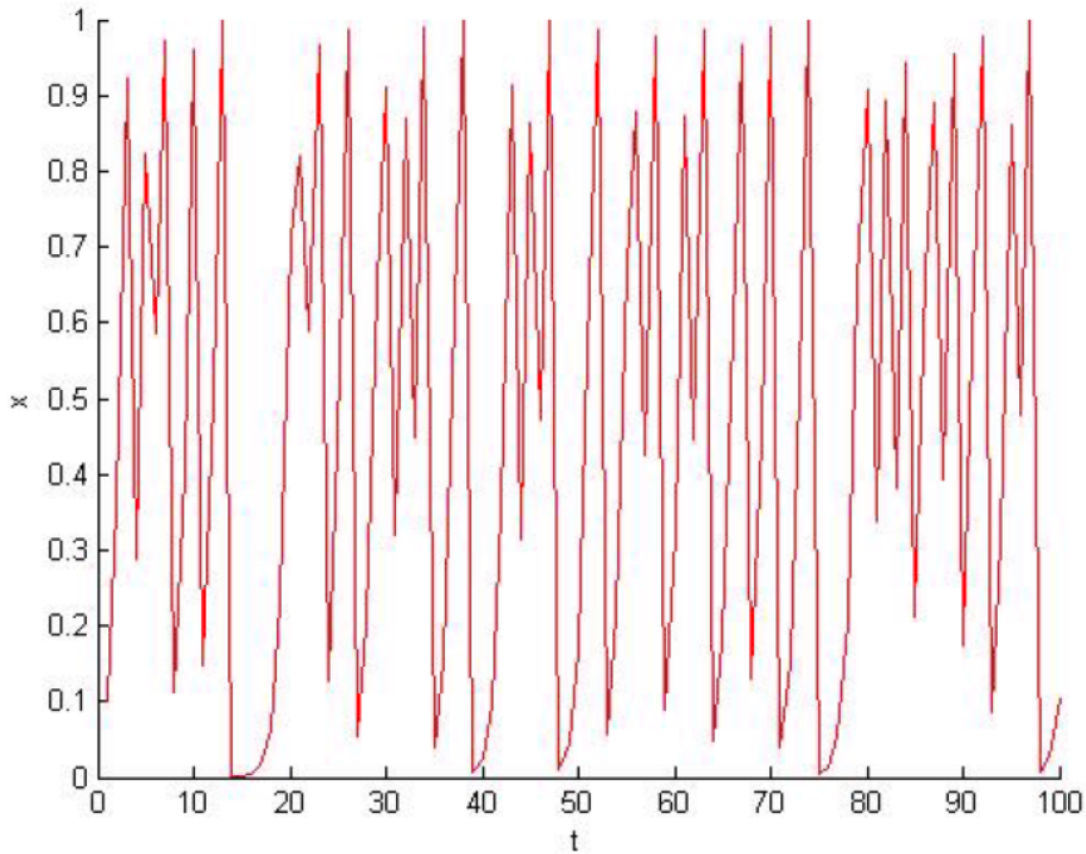


Fig 3.4-Population dont le taux de croissance $a = 4$ avec $x_0 = 0, 1$.

On remarque dans la figure précédente que le nombre de la population oscille irrégulièrement donc devient imprévisible, et donc la poursuite de l'évolution des points résultats de récurrence devient non atteinte.

3.1.4 Etude de l'application logistique

On considère l'application logistique :

$$g_a(x) = ax(1-x), \quad x \in [0,1], \quad a \in [0,4].$$

$$\begin{aligned} g_a(x) = x &\iff ax(1-x) = x \iff x(a-ax-1) = 0, \\ &\iff \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = \frac{a-1}{a}. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors les points fixes de cette application sont : $x_1 = 0$ et $x_2 = \frac{a-1}{a}$.

Stabilité des points fixes

On a :

$$g'_a(x) = a - 2ax,$$

Pour $x_1 = 0$ on a :

$$m_1 = g'_a(0) = a > 0,$$

Donc x_1 est point fixe :

$$\begin{cases} \text{attractif ssi } a < 1, \\ \text{répulsif pour } a > 1, \\ \text{on peut rien conclure pour } a = 1. \end{cases}$$

Pour $x_2 = \frac{a-1}{a}$ on a :

$$m_2 = g'_a\left(\frac{a-1}{a}\right) = 2 - a,$$

x_2 est attractif si :

$$\begin{aligned} |g'_a(x_2)| &= |2 - a| < 1 \\ -1 < 2 - a < 1 \\ 1 < a < 3 \end{aligned}$$

Alors x_2 est point fixe :

$$\begin{cases} \text{attractif pour } 1 < a < 3, \\ \text{répulsif pour } a < 1 \text{ et } a > 3, \\ \text{douteux pour } a = 1 \text{ et } a = 3. \end{cases}$$

Les points fixes de g_a^2 On a :

$$g_a^2(x) = ag_a(x)(1 - g_a(x)) = (a^2x - a^2x^2)(1 - ax + ax^2) = a^2x(1 - x)(1 - ax + ax^2).$$

On a deux points fixes répulsifs :

$$\begin{cases} x_1(a) = 0, \\ x_2(a) = \frac{a-1}{a} \quad (a > 3), \end{cases}$$

Et on a deux nouveaux points fixes :

$$\begin{aligned} x_3(a) &= \frac{a+1 + \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}, \\ x_4(a) &= \frac{a+1 - \sqrt{(a+1)(a-3)}}{2a}. \end{aligned}$$

On a donc une orbite périodique de période 2. On peut conclure sa stabilité sachant qu'elle est stable si $|g'(x_4)g'(x_3)| < 1$, on a :

$$g'(x_4)g'(x_3) < -a^2 + 2a - 4,$$

Donc l'orbite est stable si $a \in]3, 1 + \sqrt{6}[$

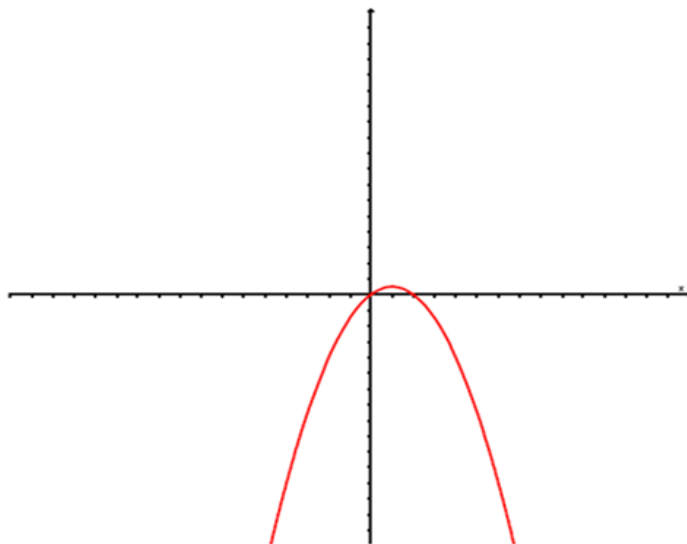


Fig 3.5- Graphe de $g_a(x)$

3.pdf

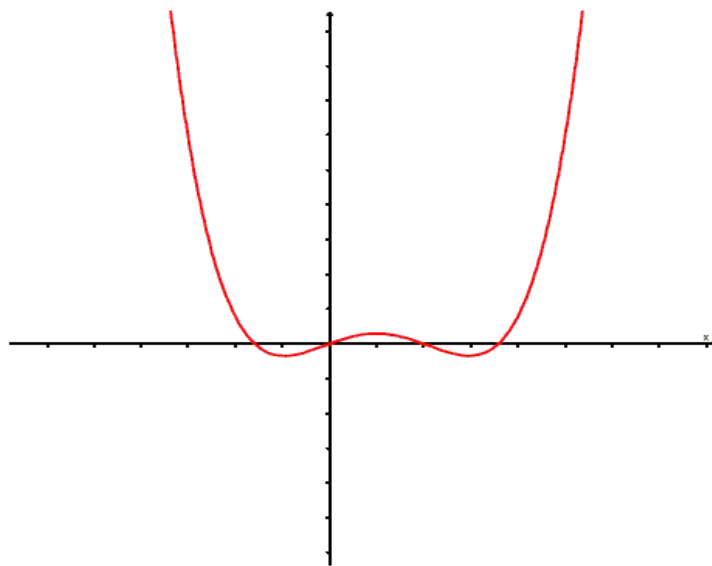


Fig 3.6-Graphe de $g_a^2(x)$

Points fixes super attractifs

Proposition 3.1 Pour $a = 2$ l'application g_a a un point fixe super attractif.

Preuve. On commence par chercher le sommet de la parabole $g_a(x) = ax(1 - x)$. On a :
 $g'_a(x) = a(1 - 2x)$, $g'_a(x) > 0$ pour $x < \frac{1}{2}$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'_a(x)$	+	0	-
$g_a(x)$	0	$\frac{a}{4}$	0

Tableau de variation de l'application g_a

Le sommet de la parabole est :

$$g_a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a}{4} = \frac{1}{2}$$

ce qui implique que $a = 2$.

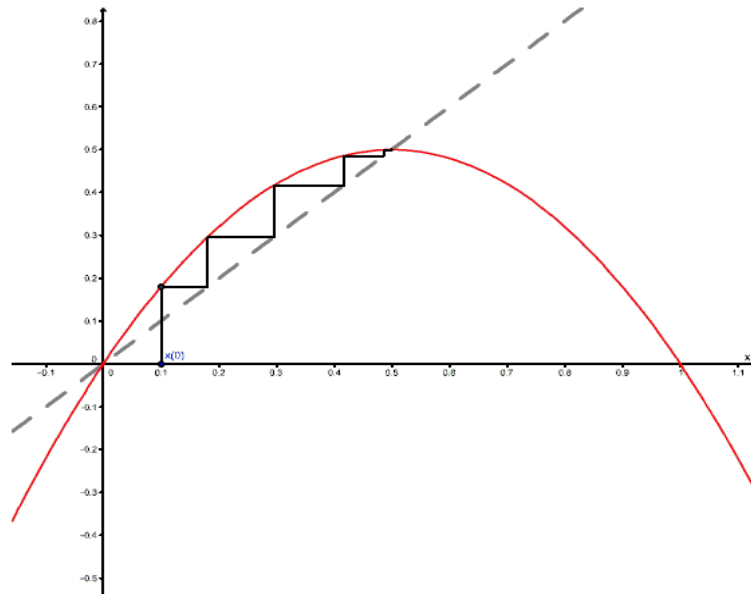


Fig 3.7-Point fixe super attractif de l'application logistique

■

Convergence de l'application logistique

Théorème 3.1 Pour $0 < a < 3$, et pour toute valeur initiale $x_0 \in I$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Pour $3 < a < 3,44$, la suite $(g_a^n(x))$, x dans le voisinage de $[0, 1]$, oscille entre deux valeurs, g_a a une orbite périodique de période 2.

Preuve. Regardons graphiquement le comportement de g_a . Tout d'abord, pour $a = 1,5$, c'est-à-dire $0 < a < 3$, la suite $(g_a^n(x))$, dans le voisinage de $[0, 1]$, converge vers le point fixe,

voir Fig (3.8).

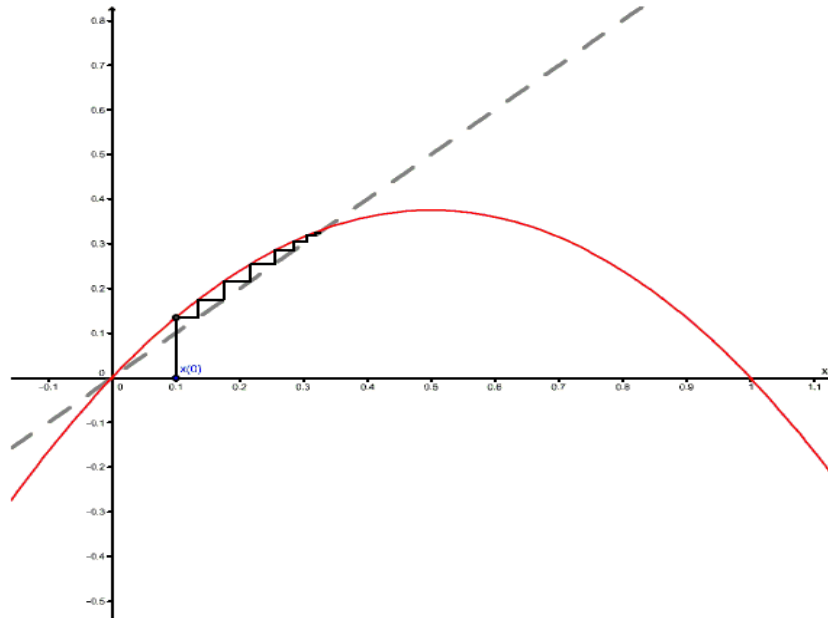


Fig 3.8-Convergence de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_{n+1} = g_{1,5}(x_n)$ et $x_0 = 0, 1$.

Le cas $0 < a < 1$

Il y a un unique point fixe dans I , le point 0, qui attractif.

Soit $x_0 \in I$:

1. Pour $x_0 = 0$, la suite est constante. Pour $x_0 = 1$ la suite est constante et égale à 0.
2. On suppose $x_0 \in]0, 1[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît et converge géométriquement vers 0.

Le cas $a = 2$

On a $p_2 = \frac{1}{2}$ et $f'(p_2) = 0$ donc p_2 est un point super attractif.

Pour $a = 3, 2$ c'est-à-dire $3 < a < 3, 44$, la suite $(g_a^n(x))$, x dans le voisinage de $[0, 1]$, oscille entre

deux valeurs, g_a a une orbite périodique de période 2. voir Fig (3.9).

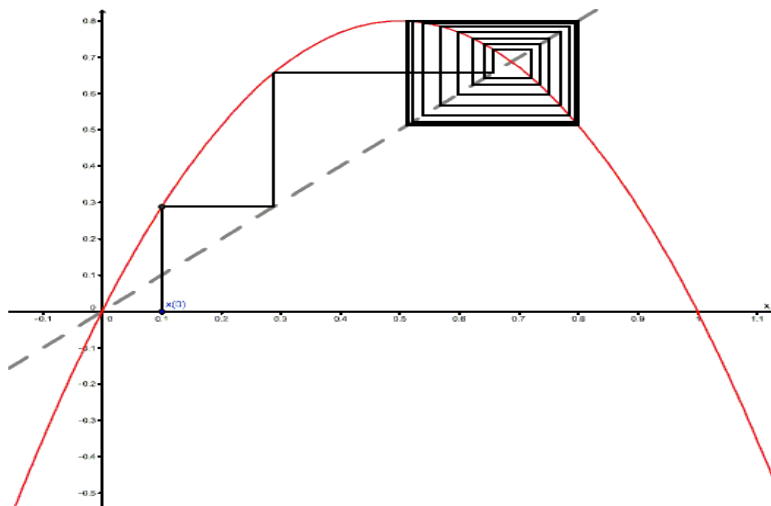


Fig 3.9-Convergence de la suite $(x_n)_{\mathbb{N}}$, $x_{n+1} = g_{3,2}(x_n)$ pour $x_0 = 0, 1$

Il y a deux manières de converger vers le point fixe. Plaçons nous dans le cas $1 < a < 3$. Tout d'abord, les points fixes sont 0 (répulsif) et $p_a = \frac{a-1}{a}$ (attractif). On distingue alors deux comportements. Si la bissectrice $y = x$ coupe la parabole g_a avant son sommet, les itérations convergent en escalier vers p_a , voir Fig (3.10). En revanche si elle coupe la parabole après son sommet, les itérations convergent en spirale vers p_a , voir Fig (3.11).

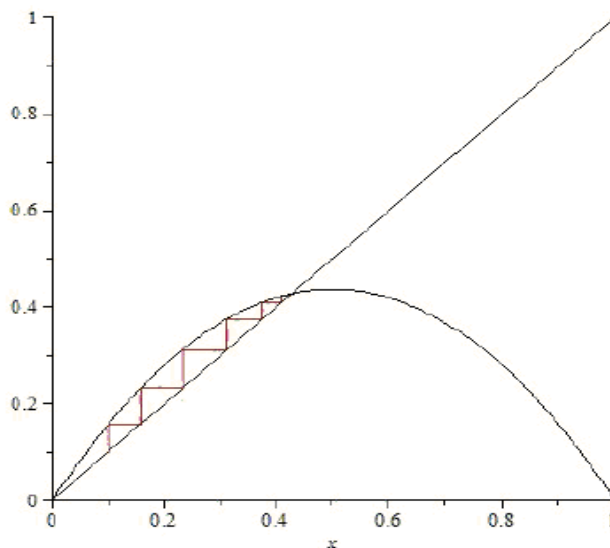


Fig 3.10-Convergence en escalier

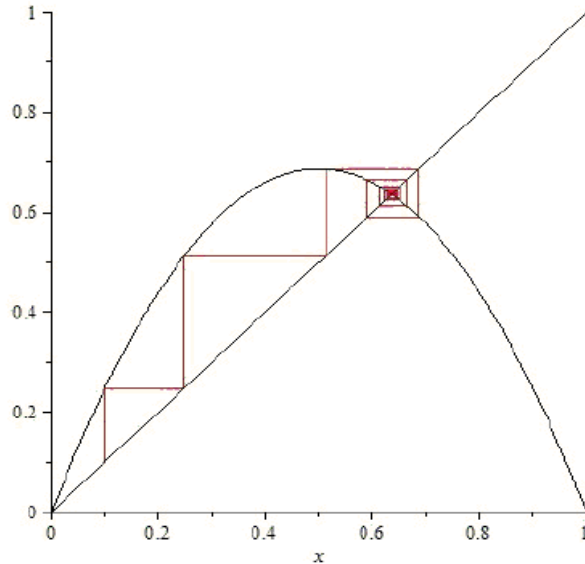


Fig 3.11-Convergence en spirale

■

Divergence grossière vers $\pm\infty$ de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Nous étudions les variations de l'application g_a on constate que s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $U_p \in]-\infty, 0[$ ou $U_p \in]1, +\infty[$ donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tends vers $-\infty$. Une application directe du théorème des valeurs intermédiaires montre que $g_a([0, 1]) = [0, \frac{a}{4}]$. Alors pour $u_0 \in [0, 1]$ si $a \leq 4$ donc $[0, 1]$ est stable par g_a alors la divergence grossière vers l'infinie n'a pas lieu. Si dans ce cas $a > 4$ donc on sort de cet intervalle et la suite diverge vers l'infinie.

Les bifurcations de l'application logistique

Proposition 3.2 L'application g_a a une première bifurcation en 1 et une deuxième en 3.

Proposition 3.3 L'application g_a a une troisième bifurcation pour $a = 3, 44$.

Classification des bifurcations Bifurcations selle-noeud

Proposition 3.4 L'application g_a a une bifurcation selle-noeud en $a = 1$. C'est l'unique bifurcation de ce type.

Preuve. On a :

$$g'_a(x) = a - 2ax,$$

alors

$$g'_1(x) = 1 - 2x,$$

De plus, pour $a = 1$ le point fixe est 0. D'où, $g'_1(0) = 1$. Donc, $a = 1$ est une bifurcation selle-noeud.

■

Bifurcation par doublement de la période

Proposition 3.5 L'application g_a a une bifurcation par doublement de la période en 3.

Preuve. Nous avons :

$$g'_3(x) = 3 - 6x,$$

pour $a = 3$ le seul point fixe dans I est

$$x_3^* = \frac{3 + 1 + \sqrt{(3 + 1)(3 - 3)}}{6} = \frac{2}{3},$$

de plus,

$$g'_3\left(\frac{2}{3}\right) = -1,$$

donc, $a = 3$ est une bifurcation par doublement de la période. ■

Proposition 3.6 L'application g_a^2 a une bifurcation fourche en 3, 44. Par généralisation c'est une bifurcation par doublement de la période de g_a .

Preuve. Les points x_3 et x_4 sont fixes pour g_a^2 . Pour $a = 3, 44$, nous avons :

$$x_3 = \frac{a + 1 + \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a},$$

et

$$x_4 = \frac{a + 1 - \sqrt{(a + 1)(a - 3)}}{2a},$$

$$g_a^2 = ax(1 - x)(1 - ax(1 - x)).$$

Donc, 3, 44 est une bifurcation par doublement de la période de g^2 . ■

De plus, cette démonstration montre de que les points x_3 et x_4 subissent la même bifurcation. Ainsi lorsque x_3 change de stabilité, il donne naissance à deux points fixes de g_a^4 . Le point x_4 se comporte exactement de la même façon, créant lui aussi deux points fixes de g_a^4 . Il y a création de 4 points fixes pour g_a^4 , et par conséquent d'une orbite périodique de période 4 pour g_a . Les bifurcations jouent un rôle important dans le diagramme de bifurcation puisqu'elles indiquent un changement de comportement. Nous définissons alors la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, suite des bifurcations par doublement de la période de l'application logistique. Les premiers termes de cette suite sont

$a_1 = 3$ et $a_2 = 3,44$. Une deuxième suite de paramètre est également fondamentale dans l'étude du diagramme, c'est la suite $(s_n)_{\mathbb{N}}$ définie de telle sorte que pour $a = s_n$, l'application g_a^{2n-1} a un point fixe super attractif. Les termes de cette suite sont appelés paramètres super attractifs et ses premiers termes sont $s_1 = 2$ et $s_2 = 1 + \sqrt{5}$.

Proposition 3.7 *Il y a toujours un paramètre super attractif entre deux bifurcations successives.*

Preuve. *Regardons ce qui se passe pour les premières bifurcations. La première bifurcation $a_0 = 1$ est une bifurcation selle-noeud. Si p_0 est le point fixe de g_{a_0} ($p_0 = 0$), alors $g'_{a_0}(p_0) = 1$. Puis, il y a création de deux points fixes $p_1(a)$ et $p_2(a)$ ($p_1(a) = \frac{a-1}{a}$ et $p_2(a) = 0$) tel que*

$$|g'_{a_0+\varepsilon}(p_2(a_0 + \varepsilon))| = a_0 + \varepsilon > 1,$$

et

$$|g'_{a_0+\varepsilon}(p_1(a_0 + \varepsilon))| = \frac{1}{a_0 + \varepsilon} < 1.$$

La deuxième bifurcation a_1 apparaît lorsque $g'_{a_1}(p_1(a_1)) = 1$. Comme $g'_{a_0}(p_1(a_0)) > 0$ et, $g'_{a_1}(p_1(a_1)) = -1$, il existe s_1 tel que $a_0 < s_1 < a_1$ et $g_{s_1}(p_1(s_1)) = 0$. Le point s_1 est donc un paramètre super attractif. Cette nouvelle bifurcation donne naissance à deux points fixes $q_1(a)$ et $q_2(a)$ de g_a^2 avec $0 < |(g_{a_1+\varepsilon}^2)'(q_i(a_1 + \varepsilon))| < 1$, ($i = 1, 2$). La troisième bifurcation apparaît lorsque $(g_{a_1+\varepsilon}^2)'(q_i(a_1 + \varepsilon)) = -1$, $i = 1, 2$. Il existe donc un paramètre super attractif s_2 tel que

$$a_1 < s_2 < a_2.$$

Ce raisonnement se généralise à toutes les bifurcations. Juste après une bifurcation, les points fixes ou les points de l'orbite périodique qui ont été créés, ont une dérivée inférieure à 1 et positive. La bifurcation suivante apparaît lorsque ces points ont une dérivée égale à -1 . Le changement de signe prouve que ces dérivées passent par 0 avant la nouvelle bifurcation, il y a donc un paramètre super attractif. ■

Proposition 3.8 Proposition 3.9 Proposition 3.10 *Si la suite $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine valeur, la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers cette même valeur.*

Preuve. *Nous connaissons les premiers termes des deux suites $a_1 = 3$ et $s_1 = 2$. Ainsi $s_1 < a_1$, de plus, nous avons :*

$$s_1 < a_1 < s_2 < a_2 < a_3 < s_3 < \dots$$

Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n < a_n < s_{n+1}.$$

Si $(s_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers une valeur l , alors d'après le théorème des gendarmes la suite $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers la même valeur l . En effet, elles convergent tous deux vers un point appelé point de Feigenbaum

noté s_1 et correspond à $3,5699456$. Ce point marque un changement radical dans la dynamique de l'application logistique g_a . ■

3.1.5 Diagramme de bifurcations

Le diagramme de bifurcation rend compte le comportement de l'application logistique en fonction du paramètre a . Sur ce diagramme, en abscisses, sont représentées les différentes valeurs du paramètre a et en ordonnées celles de g_a . Nous construisons le diagramme en repérant pour chaque valeur de a le ou les points de convergence de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0, 1]$ et $u_{n+1} = g_a(u_n)$. Nous obtenons ainsi Fig (3.12)

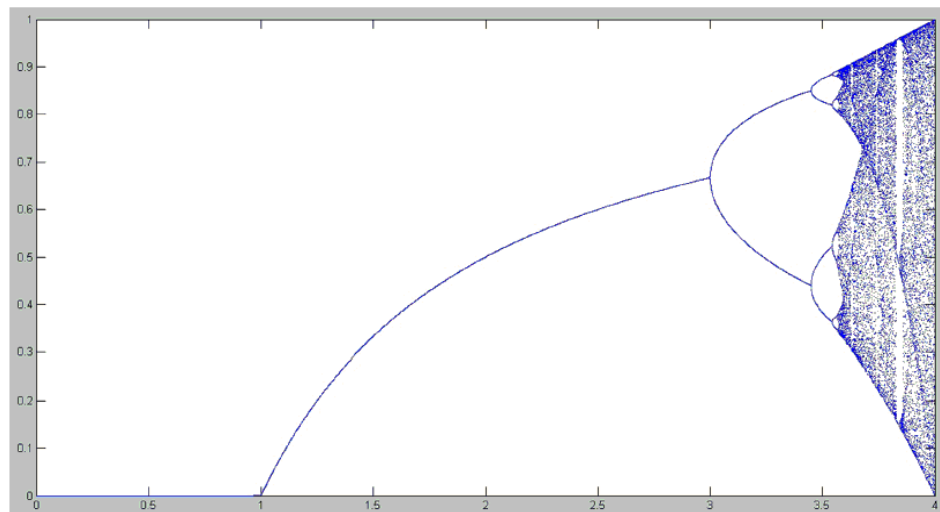


Fig 3.12-Diagramme de bifurcation de l'application logistique

On retrouve, bien évidemment, le comportement de l'application logistique décrit dans les parties précédentes.

Pour $1 < a < 3$, il n'y a qu'une seule branche. La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ précédemment définie converge vers le point fixe.

Pour $3 < a < 3,44$, il y a deux branches. Ceci correspond au comportement périodique, l'application g_a a une orbite périodique de période 2.

En effet l'orbite suivie par $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sera 4-périodique et que de même les orbites continuent de doubler cette période à 8, 16, 32 vers l'infini sur des intervalles de plus en plus petits tels que le rapport entre deux intervalles tendent à diminuer et ce comportement a lieu jusqu'à la constante de Feigenbaums $1 = 3,5699456$. Et $\forall n \in \mathbb{N}, \exists (a_n, a_{n+1}) \in [3, s_\infty[$ tel que l'orbite suivie par $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit périodique sur $]a_n, a_{n+1}[$. La démonstration de ce résultat et d'autres résultats beaucoup plus détaillés ont été réalisés par Feigenbaum.

Sur $[s_\infty, 4]$, le comportement est globalement chaotique, et nous ne pouvons plus prévoir le comportement de l'application logistique.

3.1.6 Le chaos dans l'application logistique

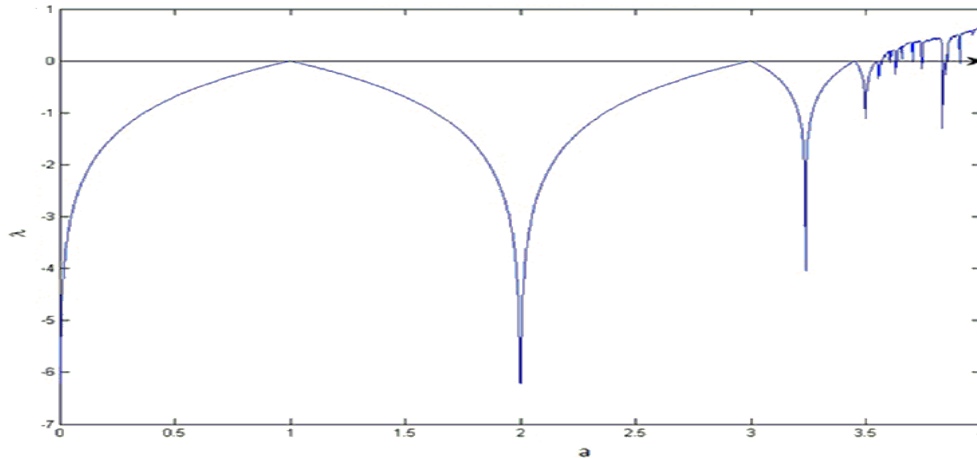


Fig 3.13-Évolution de l'exposant de Lyapunov λ de l'application logistique en fonction de a .

3.2 Le model de Hénon

3.2.1 Historique du système de Hénon

L'astronome Michel Hénon⁶ exploita la suggestion de Lorenz, pour obtenir un système très simple. Celui-ci est présent au séminaire de Nice (sur la turbulence), en Janvier 1976 lorsque Pomeau⁷ passe en revue adéquatement cette perspective de ses spéculations. La familiarité de Hénon avec les applications du plan dans lui-même, lui permet de réagir rapidement et de produire un système très simple donnant un attracteur étrange. Il est connu depuis sous le nom de système de

⁶Michel Hénon (1931-2013) un mathématicien et astronome français. Il est connu pour ses contributions dans le domaine de la dynamique stellaire, et pour l'étude de l'évolution des anneaux de Saturne. Il s'implique dans la dynamique des amas d'étoiles, en particulier des amas globulaires. Il développe une technique numérique pour suivre la dynamique d'un amas globulaire sphérique.

⁷Yves Pomeau (né en 1942) est un physicien français, il découvre par Paul Manneville en 1979, le phénomène de l'intermittence dans la théorie du chaos dans l'enquête numérique de l'attracteur de Lorenz.

Hénon et correspond à l'application suivante

$$\begin{cases} x_{n+1} = -ax_n^2 + y_n + 1, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases}$$

où a, b sont des constantes.

Il est intéressant de saisir que c'est le démontage du système de Lorenz par Pomeau qui emmène Hénon vers son système. L'étirement et le repliement sont des éléments qui guident Hénon. Le choix des valeurs des paramètres est plus approximatif et c'est par tâtonnements que des valeurs adéquates de a et b sont retenues. Tout l'intérêt du système de Hénon réside dans la facilité de programmer cette opération extrêmement simple, une itération à deux dimensions, simulant les comportements plus complexes des systèmes du type Lorenz. Il devient un système numérique de référence. Ainsi l'attracteur de Hénon est manipulé et les ensembles de Cantor⁸ sont visualisés avec leur structure auto-similaire.

D'autres comportements sont mis en évidence. Pour $b = 0,3$ par exemple, la forme de l'attracteur évolue de manière significative selon les valeurs de a : pour a petit, l'attracteur est un point, et lorsque a augmente il se transforme successivement en 2 points, puis 4, 8 et ainsi de suite par doublement. Hénon rapproche la situation de celle évoquée par May en 1976, et annonce l'existence d'une valeur critique $a_c = 1,06$ pour laquelle il affirme obtenir un attracteur étrange.

3.2.2 Définition du système de Hénon

Définition 3.3 *Le système dynamique de Hénon [16] est défini par :*

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n + 1, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases}$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$.

On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite. Inversement on peut reculer dans de temps aux itérations précédentes grâce à l'inversibilité de l'application de Hénon :

$$H^{-1} = \left(b^{-1}y, x - 1 + \frac{a}{b^2}y^2 \right),$$

⁸Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918) est un mathématicien allemand, connu pour être le créateur de la théorie des ensembles. Il établit l'importance de la bijection entre les ensembles, définit les ensembles infinis et les ensembles bien ordonnés.

Où a et b sont des paramètres réels, où la valeur de la constante a contrôle la non-linéarité de l'itération, et celle de b traduit le rôle de la dissipation.

En effet, la matrice Jacobienne $DH_{a,b}$ est

$$\begin{pmatrix} -2ax & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne $\det(DH_{a,b}) = -b$.

Les valeurs habituellement utilisées pour a et b sont $a = 1,4$ et $b = 0,3$.

Nous avons fait un programme sur Matlab avec une condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$ à travers lequel on peut voir la forme connue du croissant de cet attracteur, voir Fig (3.14).

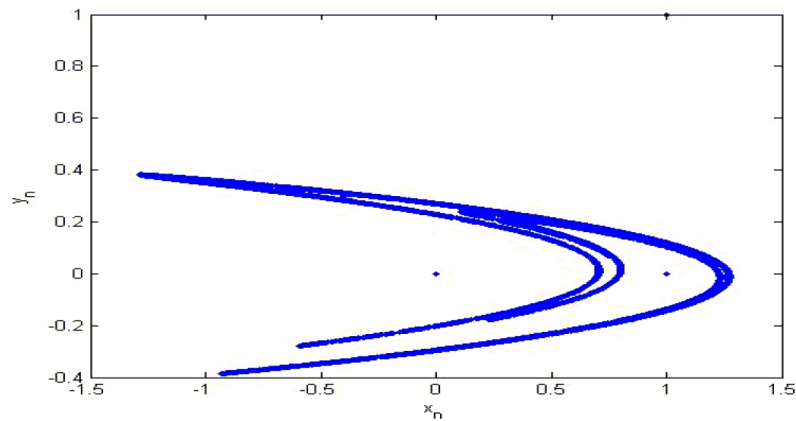


Fig 3.14-Attracteur de Hénon $H_{a,b}$ pour $a = 1,4$ et $b = 0,3$.

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange. On peut voir aussi comment évoluent les variables x et y pour une condition initiale

$(x_0, y_0) = (0, 0)$, voir Fig (3.15) et Fig (3.16) respectivement.

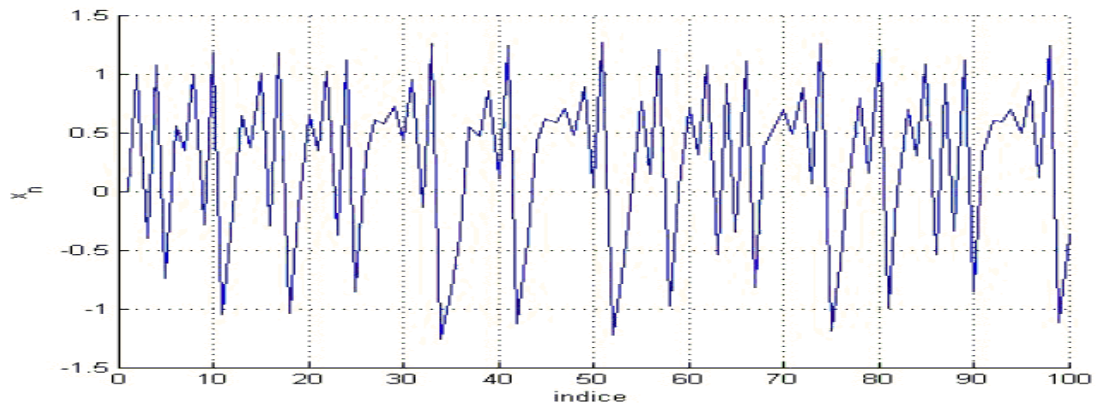


Fig 3.15-Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

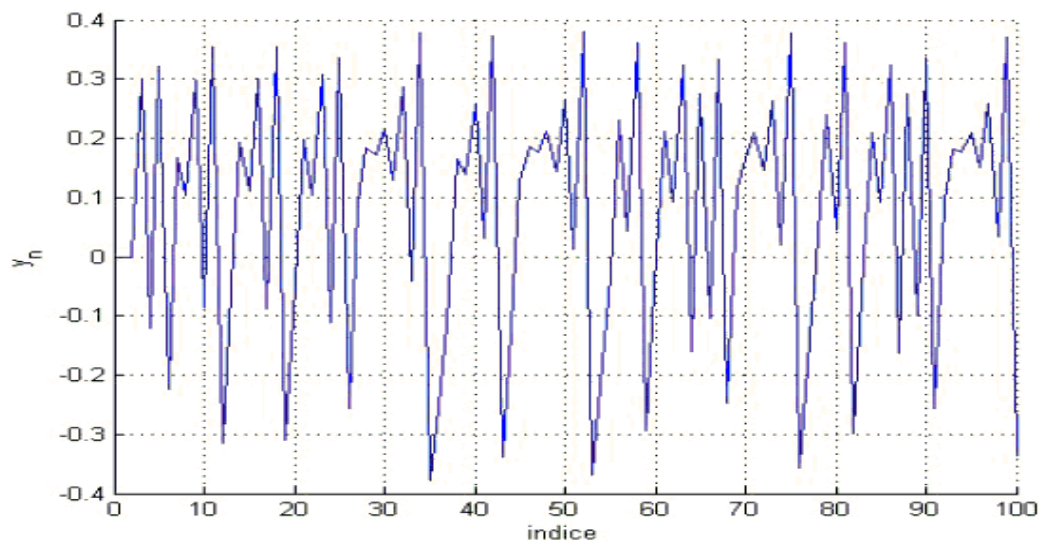


Fig 3.16-Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ avec $(x_0, y_0) = (0, 0)$

On peut voir que l'évolution est chaotique pour les deux variables.

*Pour $a = 0,1$, et $b = 0,3$

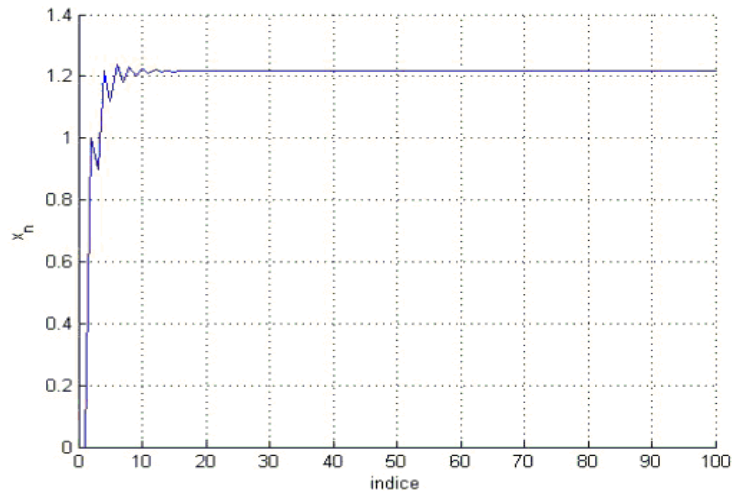


Fig 3.17-Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 0,1$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

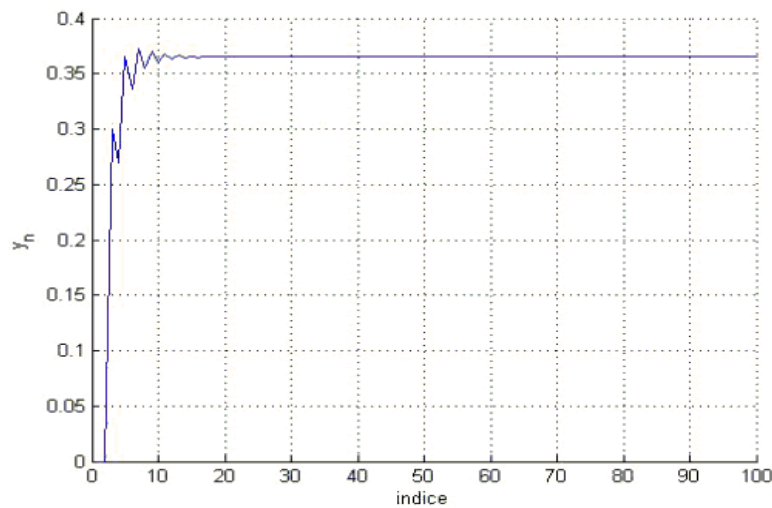


Fig 3.18-Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 0,1$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

On constate une stabilisation de l'évolution de x_n autour de la valeur 1,2 et de y_n autour de 0,36, voir Fig (3.17) et Fig (3.18).

*Prenons maintenant les valeurs des paramètres $a = 0,4$ et $b = 0,3$.

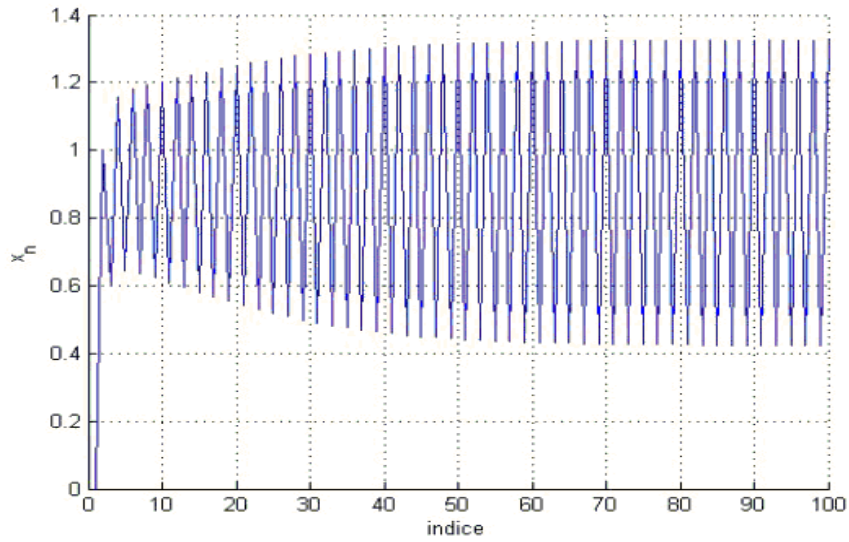


Fig 3.19-Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 0,4$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

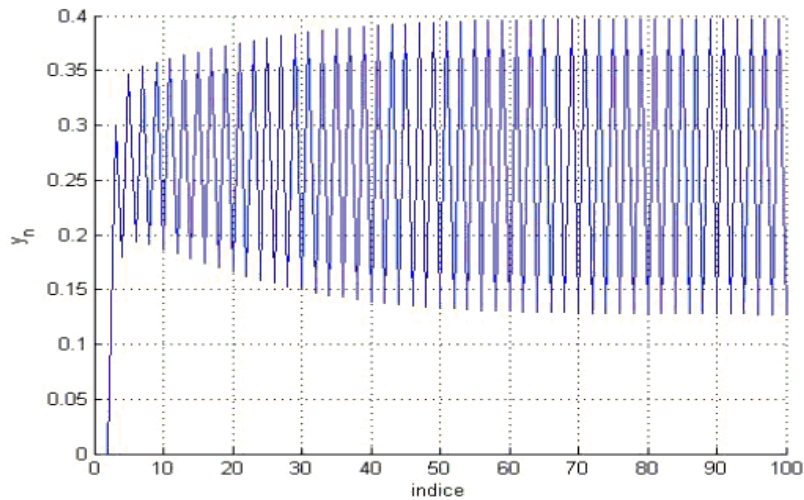


Fig 3.20-Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 0,4$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

On constate que l'évolution pour ces valeurs des paramètres est périodique et elle va se stabiliser

à un cycle périodique, voir Fig (3.19) et Fig (3.20).

3.2.3 Sensibilité aux conditions initiales

Que-ce passe-t-il quand on choisit des conditions initiales extrêmement voisines ? Prenons par exemple $(x_0, y_0) = (0, 001; 0, 001)$.

On constate que les courbes rendues sont différentes de celles quant à $(x_0, y_0) = (0, 0)$, voir Fig (3.21) et Fig (3.22).

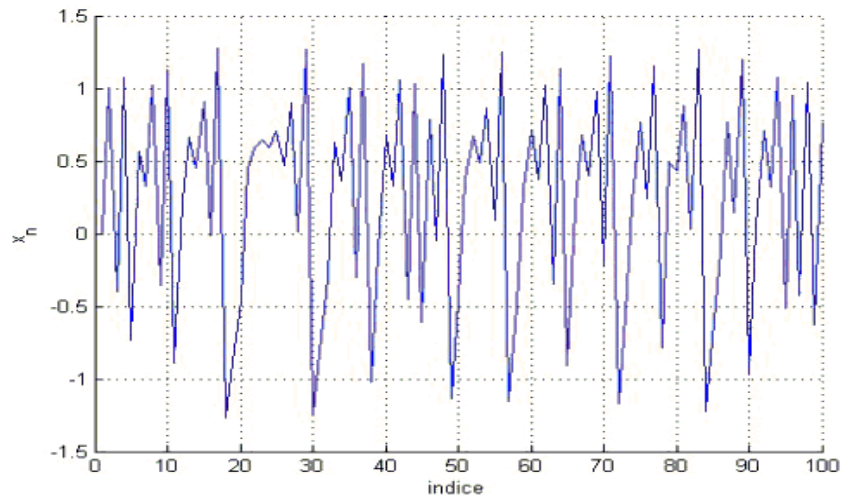


Fig 3.21-Les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0, 001; 0, 001)$.

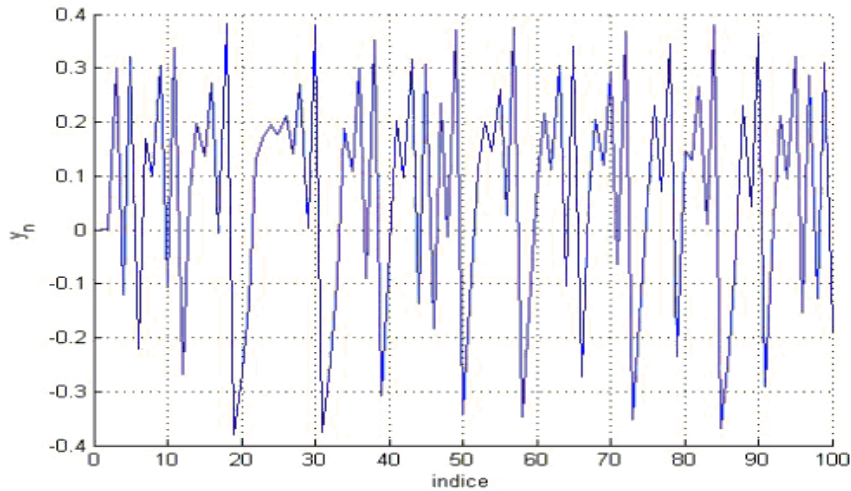


Fig 3.22—Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,4$ et $b = 0,3$ et $(x_0, y_0) = (0,001; 0,001)$.

3.2.4 Points fixes et stabilité des premières et deuxième itérations

Première itération

La première itération du système de Hénon introduit déjà dans la section précédente est considéré comme le système original de Hénon donné par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases}$$

On peut obtenir les points fixes du système de Hénon en résolvant l'équation $H_{a,b}(x, y) = (x, y)$

$$H_{a,b}(x, y) = (x, y) \iff -ax^2 + (b-1)x + 1 = 0 \quad (3.1)$$

Théorème 3.2 Pour $|b| < 1$, et $a_0(b) = -\frac{1}{4}(b-1)^2$ on a

1. Si $a < a_0(b)$, $H_{a,b}$ a un seul point fixe.
2. Si $a = a_0(b)$, $H_{a,b}$ n'a aucun point fixe.
3. Si $a > a_0(b)$, $H_{a,b}$ a deux points fixes.

Preuve. Nous obtenons du discriminant de l'équation 3.1 l'équation $(b-1)^2 + 4a = 0$, ce qui implique que : $a = -\frac{1}{4}(b-1)^2 = a_0(b)$

1. Pour $a < a_0(b)$, $x_{\pm}(a, b) \notin \mathbb{R}^2$, donc dans ce cas il n'y a aucun point fixe pour $H_{a,b}$.

2. Pour $a = a_0(b)$, nous obtenons $x_+(a, b) = x_-(a, b) = \frac{b-1}{a}$. Donc dans ce cas le système $H_{a,b}$ admet exactement un seul point fixe $(x_1, y_1) = \left(\frac{b-1}{2a}, b \left(\frac{b-1}{2a} \right) \right)$.

3. Pour $a > a_0(b)$, nous avons $x_+(a, b)$ et $x_-(a, b)$ dans \mathbb{R}^2 et $x_+(a, b) \neq x_-(a, b)$. Dans ce cas nous avons deux points fixes de la forme

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{\frac{b-1-\beta}{2a}}{b \left(\frac{b-1-\beta}{2a} \right)} \right) \text{ et } (x_2, y_2) = \left(\frac{\frac{b-1+\beta}{2a}}{b \left(\frac{b-1+\beta}{2a} \right)} \right), \quad (3.2)$$

Et les valeurs propres en ces points d'équilibre sont :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2}\beta \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}(\beta - b + 1)^2} - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right),$$

et

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{a} \left(\pm \sqrt{b + \frac{1}{4}(b + \beta - 1)^2} - \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}b + \frac{1}{2} \right).$$

Où $\beta = \sqrt{4a + (b-1)^2}$,

il peut être également démontré que l'un de ces deux points est stable à la signe positive devant le radical, l'autre est toujours instable.

En effet, les valeurs des paramètres connues pour présenter un comportement chaotique sont $a = 1, 4$ et $b = 0, 3$ et les deux points d'équilibre du système pour ces paramètres sont

$(-1, 1314; -0, 3394)$ et $(0, 6314; 0, 1894)$, les valeurs propres au premier point d'équilibre sont $(2, 3284; -0, 0657)$ et les valeurs propres au deuxième point sont $(0, 5657; -1, 8284)$. D'où le premier est un point selle et le deuxième est clairement un point stable. ■

Deuxième itération

La deuxième itération du système original de Hénon est d'intérêt depuis qu'une bifurcation par doublement de la période est un mécanisme éminent comme révélé dans le diagramme de bifurcation.

Selon la variation de Jacobi la deuxième itération du système de Hénon est donnée par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a^3 x_n^4 + 2a^2 x_n^2 y_n + 2a^2 x_n^2 - a y_n^2 - 2a y_n - a + b x_n + 1, \\ y_{n+1} = b(-a x_n^2 + y_n + 1). \end{cases}$$

Ce système dispose de quatre points d'équilibre dont deux sont hérités du système original de Hénon et les deux autres points d'équilibre sont :

$$(x_3, y_3) = \left(-\left(\frac{b-1}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3 \left(\frac{b-1}{2a} \right)^2}; -b \left(\frac{b-1}{2a} \right) + \sqrt{\frac{1}{a} - 3 \left(\frac{b-1}{2a} \right)^2} \right),$$

et

$$(x_4, y_4) = \left(-\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2}; -b\left(\frac{b-1}{2a}\right) - \sqrt{\frac{1}{a} - 3\left(\frac{b-1}{2a}\right)^2} \right).$$

La matrice jacobienne s'écrit

$$DH_{a,b}^2 = \begin{pmatrix} -4a^3x^3 + 4a^2xy + 4a^2x + b & 2a^2x^2 - 2ay - 2a \\ -2abx & b \end{pmatrix}.$$

3.2.5 Analyse de bifurcation

Nous procédons en donnant les résultats de stabilité pour le système original de Hénon. Nous rappelons que le système de Hénon a deux points d'équilibre réels pour $a > -\frac{1}{4}(b-1)^2$.

Proposition 3.11 Pour $b = 0,3$ et $a = -0,1225$, on a une bifurcation selle-noeud.

Preuve. Pour $b = 0,3$ et $a = -0,1225$, le point d'équilibre du système est $(2,8571; 0,8571)$ indiquent une bifurcation selle-noeud avec une branche stable et une branche instable montrées dans la Fig (3.23). La région de a de la branche stable est comprise entre $-0,1225 \leq a \leq 0,3675$.

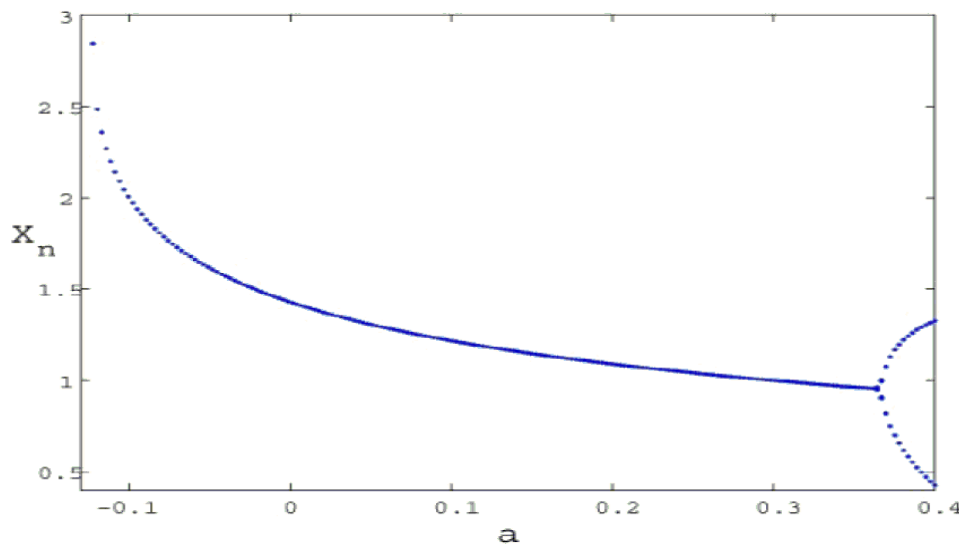


Fig 3.23-Diagramme de bifurcation pour le système original de Hénon pour $-0,15 \leq a \leq 0,4$ et $b = 0,3$.

■

Proposition 3.12 Pour le cas particulier de $a = 0,3675$ une bifurcation par doublement de la période est observée.

Preuve. Pour $a = \frac{3}{4}(b-1)^2$; le système original de Hénon et la deuxième itération du système original de Hénon a deux points d'équilibre complètement imbriqués en $(0, 9524; 0, 2857)$. Les valeurs propres pour le système original de Hénon sont $\{-1; 0, 3\}$ et $\{2, 2343; -0, 1343\}$ et les valeurs propres pour la deuxième itération du système original de Hénon sont $\{1; 0, 09\}$ et $\{4, 9920; 0, 0180\}$. En effet, quand a s'approche de 0,3675, une orbite périodique de période 2 est constatée.

De plus, l'analyse de stabilité pour la valeur du paramètre $a = 0, 2$ donne les deux points d'équilibre $(1, 08945; 0, 326836)$ et $(-4, 58945; -1, 376836)$ et les valeurs propres $\{0, 371580; -0, 80736213\}$ et $\{1, 986779; -0, 1509981\}$ respectivement. Le premier point d'équilibre est un point stable et le deuxième est un point selle.

Pour les mêmes valeurs des paramètres la deuxième itération du système de Hénon a quatre points d'équilibre, dont deux sont complexes conjugués i.e. $(1, 75 \pm 2, 046338i; 0, 525 \pm 0, 6139i)$ et les deux autres sont hérités du système original de Hénon respectivement. Les valeurs propres pour les points d'équilibre complexes conjugués sont $\{1, 7072; 0, 05271\}$ et les valeurs propres pour le troisième point d'équilibre sont $\{0, 138072; 0, 6518336\}$ et pour le quatrième point d'équilibre $\{0, 0228; 3, 9472\}$. Les points d'équilibres complexes conjugués sont des point selles, le troisième est stable et le quatrième est un point selle comme prévu.

Les points d'équilibre en $a = 0, 3675$ sont $(0, 95238; 0, 285714)$ et $(-2, 857142; -0, 857142)$ et leurs valeurs propres associées sont $\{0, 3; -1\}$ et $\{2, 234271; -0, 134271\}$. Par conséquent, le premier point d'équilibre donne naissance à une bifurcation par doublement de la période et le deuxième point d'équilibre est un point selle.

En $a = 0, 9125$ un attracteur de période 4.

Pour $a = 1$, les points d'équilibre sont $(0, 70948; 0, 21284)$ et $(-1, 40948; -0, 42284)$ et les valeurs propres sont $\{0, 186824; -1, 60578\}$ et $\{2, 921643; -0, 102681\}$ respectivement. Les deux points d'équilibre sont des points selles.

Pour $a = 1, 2$ et $b = -0, 1$ les points d'équilibre sont $(0, 563137; -0, 0563137)$ et $(-1, 4798; 0, 14798)$ et les valeurs propres sont $\{-0, 0785562; -1, 2729739\}$ et $\{0, 0283838; 3, 523146\}$ respectivement. Les deux points d'équilibre sont des points selles. Autour du premier point d'équilibre une orbite périodique de période 2 est observée. Considérons la deuxième itération du système original de Hénon avec les mêmes conditions, y en a quatre points d'équilibre dont deux sont les mêmes qu'on avait de la première itération. Les valeurs propres sont $\{1, 620462; 0, 0061710\}$ et $\{12, 41256; 0, 000805\}$. Encore les deux points d'équilibre sont des points selles. Le système fait disparaître son comportement périodique observé pour la première itération et l'incrémentatiode l'itération du système fait de ce système plus chaotique et compliqué qu'un multipériodique. ■

3.2.6 Diagramme de bifurcation

La construction de diagramme de bifurcation est faite en faisant varier le paramètre a de 0 à 1,4 avec un pas de 0,001, b est égale à 0,3. On obtient le diagramme suivant :

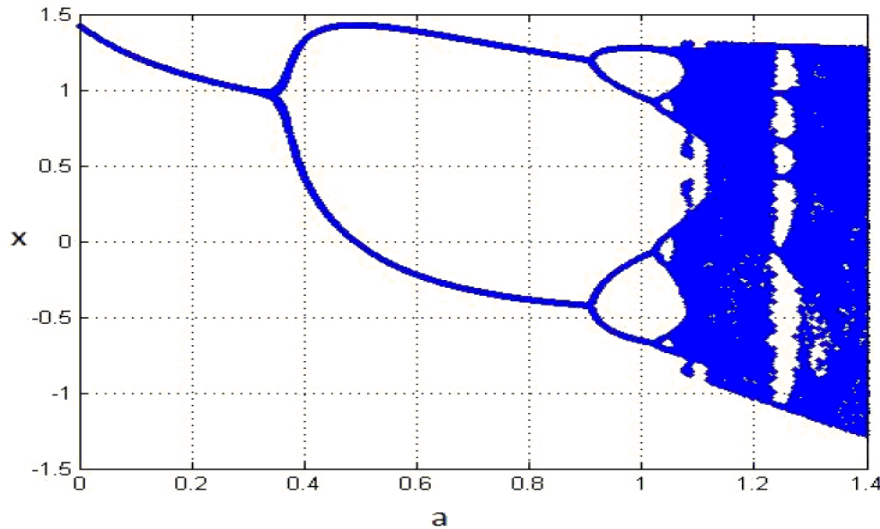


Fig 3.24-Diagramme de bifurcation de Hénon.

- Si $0,1225 < a < 0,3675$, les itérations convergent vers un point du plan,
- Si $0,3675 < a < 0,9$, les itérations tendent à constituer une suite (x_n, y_n) telle que (x_{2n}, y_{2n}) converge vers un point et (x_{2n+1}, y_{2n+1}) converge vers un autre point. On a donc deux points limites : on observe un doublement de période.
- Si $0,9 < a < 1,02$, on assiste à un nouveau doublement de période.

La période continue de doubler jusqu'à une valeur déterminée où la trajectoire commence à prendre une forme particulière.

Pour $a \geq 1,02$, on ne distingue plus les cycles, et donc le système est chaotique.

3.2.7 Bassin d'attraction de Hénon

Les itérations ne convergent pas pour toutes les conditions initiales (x_0, y_0) . L'ensemble des conditions initiales pour lequel les itérations convergent est le bassin d'attraction de l'attracteur.

Un calcul numérique permet de construire une partie de ce bassin d'attraction, voir Fig (3.25).

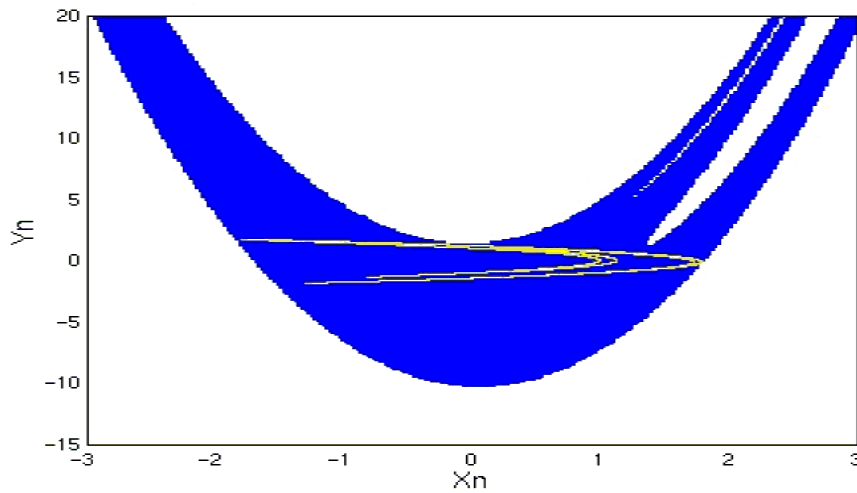


Fig 3.25-Bassin d'attraction de l'attracteur de Hénon pour $a = 1,4$
et $b = 0,3$.

3.2.8 Le chaos dans le système de Hénon

Dans l'étude de la stabilité du système de Hénon, on remarque que les valeurs propres sont en fonction des points fixes qui sont aussi en fonction des paramètres a et b . Donc, pour déterminer les différentes zones de stabilité, il suffit de calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre a ou b .

On fixe $b = 0,3$, et on laisse a varier entre 0 et 1,4.

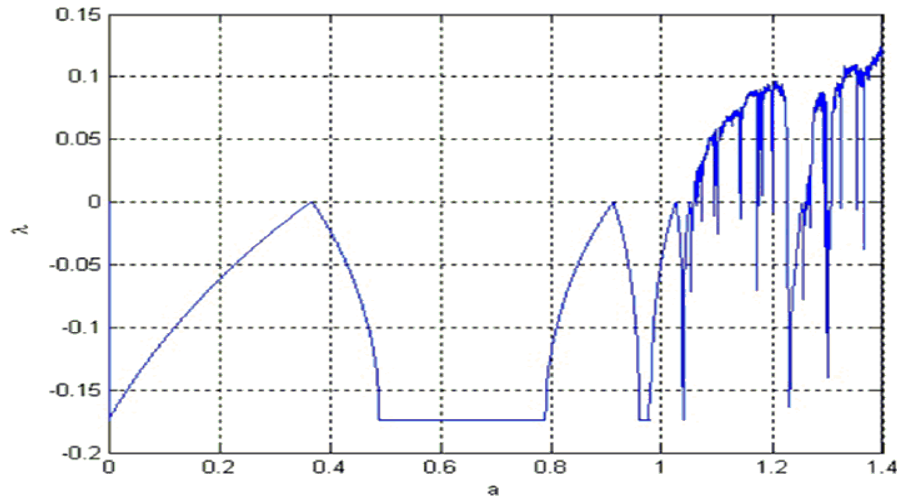


Fig 3.26-L'évolution de l'exposant de Lyapunov λ de système de Hénon en fonction de a .

A partir de la Fig (3.26) on obtient deux zones :

- une zone stable lorsque a varie dans l'intervalle $[0; 1,052]$.
- une zone chaotique lorsque a varie dans l'intervalle $]1,052; 1,4]$.

3.3 Système de Lozi

3.3.1 Historique du système de Lozi

En 1978, Lozi a introduit un système bidimensionnel ayant des équations et des attracteurs semblent pareils à ceux du système célèbre précité de Hénon. Simplement le terme quadratique du système de Hénon est remplacé par une contribution linéaire continue par morceau, ceci permet de prouver rigoureusement le caractère chaotique du système itéré de Lozi $L(x, y)$ suivant

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a|x_n| + y_n + 1, \\ y_{n+1} = bx_n. \end{cases}$$

Où a et b sont des paramètres non-nuls. Sur la région où les orbites restent bornées, le système de Lozi peut présenter un comportement régulier ou un comportement chaotique.

3.3.2 Définition du système de Lozi

Définition 3.4 Le système dynamique de Lozi [23] est défini par

$$\begin{cases} x_{n+1} = -a |x_n| + y_n + 1, \\ y_{n+1} = bx_n, \end{cases}.$$

Où $a, b \in \mathbb{R}$.

On dit que c'est un système dynamique de dimension 2 car $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et à temps discret car les points évoluent par étape et non continûment.

Pour le cas particulier de $a = 0$ cette application est linéaire donc on pose $a \neq 0$. Partant d'un point du plan de coordonnées (x_0, y_0) on peut calculer les coordonnées (x_1, y_1) du point suivant, et ainsi de suite. Inversement on peut reculer dans de temps aux itérations précédentes grâce à l'inversibilité de l'application de Lozi :

$$L^{-1}(x, y) = (b^{-1}y; x - 1 + ab^{-1} |y^{-1}|).$$

Où a et b sont des paramètres réels.

3.3.3 Etude du système de Lozi

Points fixes

Le système de Lozi possède deux points fixes hyperboliques définis par :

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{1+a-b}, \frac{b}{1+a-b} \right) \text{ si } b < a+1, \\ P_2 &= (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{1-a-b}, \frac{b}{1-a-b} \right) \text{ si } b < -a+1, \end{aligned}$$

On peut facilement déterminer la stabilité locale de ces deux points par l'évaluation des valeurs propres de la matrice jacobienne en ces points.

Stabilité des points fixes

Pour des considérations de stabilité on a besoin de la matrice jacobienne de $L(x, y)$ qui s'écrit

$$DJ(x, y) = \begin{pmatrix} -a \operatorname{sign}(x) & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice Jacobienne $\det(DJ(x, y)) = -b$.

Remarquons que $DJ(x, y)$ dépend au point de l'orbite seulement avec $\operatorname{sign}(x)$. Accordialement, on note ses valeurs par $J_+ = J(x > 0, y)$ et $J_- = J(x < 0, y)$. De plus, comme $\det J = -b$ on va

considérer le système de Lozi seulement pour $|b| \leq 1$. De plus $J(P_1) = J_+$ et $J(P_2) = J_-$.
Le polynôme caractéristique de J aux points fixes s'écrit

$$\begin{aligned} \lambda^2 + a\lambda - b &\text{ pour } P_1, \\ \lambda^2 - a\lambda - b &\text{ pour } P_2. \end{aligned}$$

Stabilité de P_1

Proposition 3.13 *Le point fixe P_1 peut être stable quand (b, a) se trouve dans le triangle de sommets $(1, 0)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$ sur l'espace des paramètres et instable si : $b < -1$, $b < a + 1$, $b < 1 - a$.*

Preuve. Le discriminant du polynôme caractéristique vaut $\Delta = a^2 + 4b$

Pour $b > \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des réelles. Elles sont de module inférieur à 1 si : $b - 1 < a < 1 - b$.

Pour $b < \frac{-a^2}{4}$, les valeurs propres sont des complexes. Elles sont de module inférieur à 1 si : $b > -1$.
D'où la stabilité de P_1 .

Pour $b < -1$, $b < a + 1$, $b < 1 - a$ les valeurs propres sont de module supérieur à 1 (i.e. le point P_1 est instable). ■

Proposition 3.14 *Le point P_1 est un point selle pour $b > a + 1$, $b > 1 - a$.*

Preuve. La preuve est immédiate en calculant les valeurs propres λ_1 et λ_2 on obtient $|\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si $b > a + 1$, $b > 1 - a$.

Et le point P_1 est un point selle. ■

Stabilité de P_2

Proposition 3.15 *Le point fixe P_2 est instable si : $b > -a + 1$, $b > a + 1$.*

Preuve. Le discriminant du polynôme caractéristique vaut $\Delta = a^2 + 4b$.

P_2 existe si $b > -a + 1$, alors $\Delta > 0$, et les valeurs propres sont toujours des réelles. Elles sont de module supérieur à 1 si $b > -a + 1$, $b > a + 1$. ■

Proposition 3.16 *Le point P_2 est un point selle si $b > -a + 1$, $b > a + 1$.*

Preuve. La preuve est immédiate aussi en calculant les valeurs propres λ_1 et λ_2 | $\lambda_1| < 1$ et $|\lambda_2| > 1$ si $b > a + 1$, $b > 1 - a$.

Et le point P_2 est un point selle. ■

3.3.4 Attracteur de Lozi

Nous avons fait un programme sur Matlab similaire au code source de Hénon avec une condition initiale $(x_0, y_0) = (0, 0)$ à travers lequel on peut voir la forme d'attracteur dans la Fig (3.27)

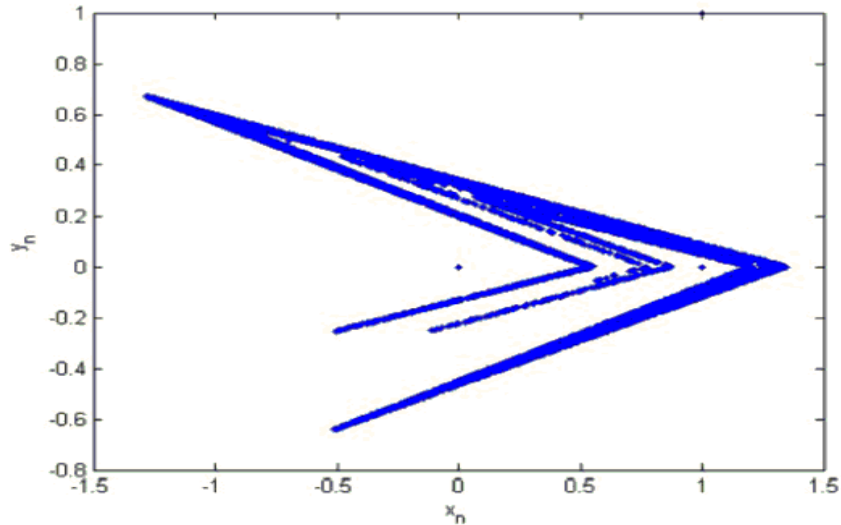


Fig 3.27-Attracteur de Lozi $a = 1,7$ et $b = 0,5$.

On remarque que les valeurs prises par l'application ne correspondent pas graphiquement à n'importe quelle position dans le plan, elles convergent toutes vers une courbe appelée attracteur étrange.

On peut voir aussi comment évoluent les variables x et y pour une condition initiale $(x_0, y_0) =$

(0, 0), voir Fig (3.28) et Fig (3.29).

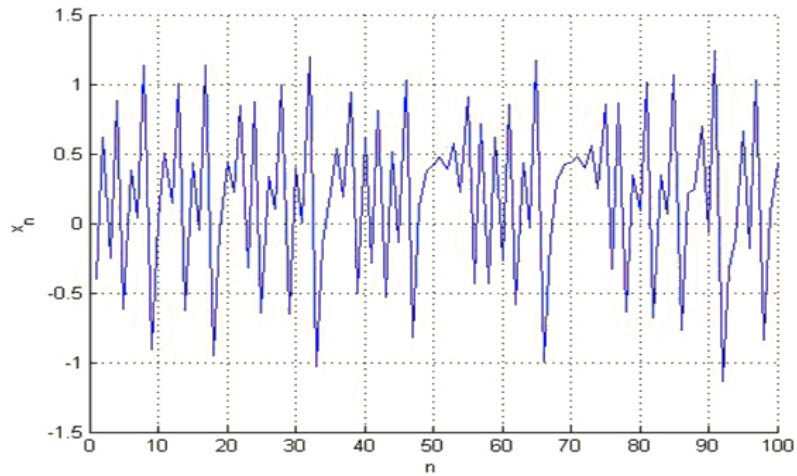


Fig 3.28- les 100 premières itérées de x_n avec $a = 1,7$ et $b = 0,5$.

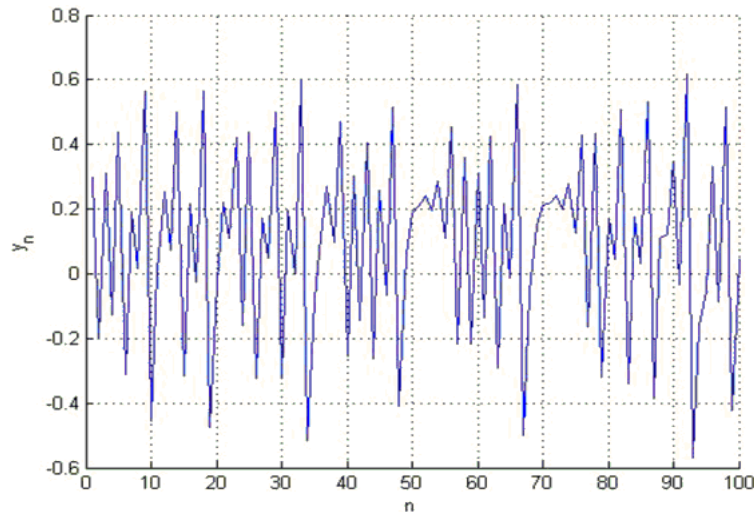


Fig 3.29- Les 100 premières itérées de y_n avec $a = 1,7$ et $b = 0,5$.

3.3.5 Le chaos dans le système de Lozi

De même on peut calculer l'exposant de Lyapunov en fonction du paramètre a ou b pour le système de Lozi.

On fixe $b = 0,3$, et on laisse a varier entre 0 et 1,8.

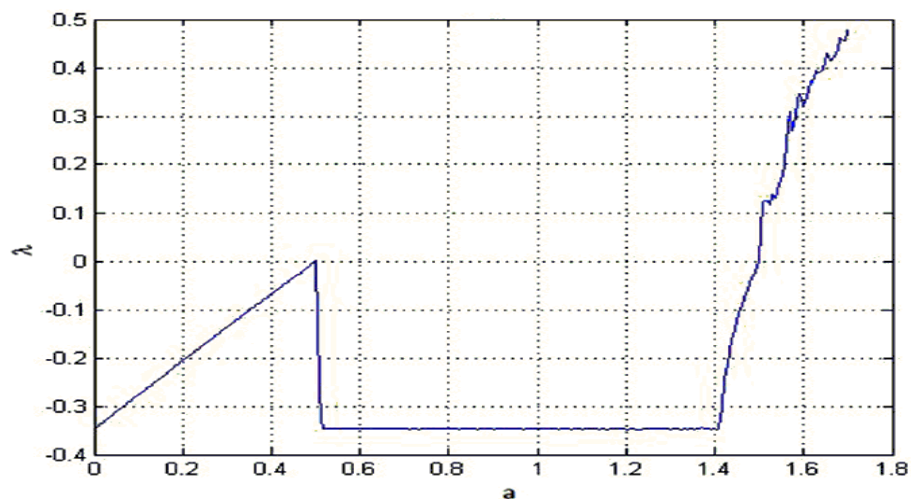


Fig 3.30-Évolution de l'exposant de Lyapunov λ de système de Lozi en fonction a .

Chapitre 4

Synchronisation du chaos

4.1 Types de synchronisation

Dans cette section, nous introduisons différents types de synchronisation à savoir la synchronisation complète, l'anti-synchronisation, la synchronisation décalée, la synchronisation FSHP, la synchronisation généralisée, et la synchronisation Q-S.

4.1.1 Synchronisation complète

On considère un système chaotique maître représenté par :

$$X(k+1) = F(X(k)). \quad (4.1)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système 4.1 et $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Et un système chaotique esclave donné par :

$$Y(k+1) = G(Y(k)) + U. \quad (4.2)$$

d'où $Y(k) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système 4.2, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un vecteur de contrôle à déterminer. On définit l'erreur de la synchronisation complète en tant que

$$e(k) = Y(k) - X(k). \quad (4.3)$$

Ainsi, le problème de synchronisation complète est de déterminer le contrôleur U de sorte que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0. \quad (4.4)$$

d'où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

Si $F = G$, la relation devient une synchronisation complète identique.

Si $F \neq G$; c'est une synchronisation complète non identique.

La synchronisation complète est donc une coïncidence complète entre les variables d'état des deux systèmes synchronisés. [24]

4.1.2 Anti-Synchronisation

Théoriquement, deux systèmes sont anti-synchronisés si d'une part, le système maître et le système esclave ont des vecteurs d'état identiques en valeur absolue mais avec des signes opposés et que d'autre part, la somme des vecteurs d'état des deux systèmes tend vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini [1]. L'erreur d'anti-synchronisation peut donc être définie comme suit :

$$e(k) = Y(k) + X(k). \quad (4.5)$$

4.1.3 Synchronisation décalée

Les chercheurs ont découvert que deux systèmes dynamiques chaotiques non identiques peuvent exposer un phénomène de synchronisation dans lequel les variables dynamiques des deux systèmes deviennent synchronisées, mais avec un décalage en temps[9]. On dit qu'on a une synchronisation retardée (ou anticipée) si les variables d'état $Y(k)$ du système chaotique esclave converge vers les variables d'état $X(k)$ décalée dans le temps du système chaotique maître comme l'indique la relation ci-dessous :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k - \tau)\| = 0, (\text{où } \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k + \tau)\|), \forall x(0), \quad (4.6)$$

avec τ est un nombre positif très petit.

4.1.4 Synchronisation projective

On dit qu'on a **une synchronisation projective** si les variables d'état $y_i(k)$ du système chaotique esclave $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq n}$ se synchronisent avec une constante multiple de l'état $x_i(k)$ du système chaotique maître $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq n}$, tels que [38] :

$$\exists \alpha_i \neq 0, \lim_{k \rightarrow \infty} |y_i(k) - \alpha_i x_i(k)| = 0, \forall (x(0), y(0)); i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

Le cas où tous les α_i sont égaux à 1 représente un cas de synchronisation complète. Le cas où tous les α_i sont égaux à -1 représente un cas d'anti-synchronisation complète.

4.1.5 Synchronisation FSHP

On dit qu'on a une **synchronisation FSHP** (en anglais full state hybrid projective synchronization), si chaque variable d'état $y_i(k)$; $1 \leq i \leq n$, du système chaotique esclave se synchronise avec une combinaison linéaire des variables de l'état $x_i(k)$; $1 \leq i \leq n$, du système chaotique maître, tels que

$$\exists(\beta)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \lim_{k \rightarrow \infty} \left| y_i(k) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j(k) \right| = 0, \forall(x(0), y(0)); i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.8)$$

La synchronisation FSHP est une généralisation de la synchronisation projective [17].

4.1.6 Synchronisation généralisée

La synchronisation généralisée est considérée comme une généralisation de la synchronisation complète, l'anti-synchronisation et la synchronisation projective dans le cas des systèmes chaotiques de dimensions et de modèles différents[25]. Elle se manifeste par une relation fonctionnelle entre les deux systèmes chaotiques couplés. On considère un couple de systèmes maître-esclave représenté par :

$$\begin{cases} X(k+1) = F(X(k)) \\ Y(k+1) = G(Y(k)) + U \end{cases} \quad (4.9)$$

d'où $X(k) \in \mathbb{R}^n$, $Y(k) \in \mathbb{R}^m$ sont les état des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ est un contrôleur.

S'il existe un contrôleur U et une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telles que toutes les trajectoires des systèmes maître et esclave, avec les conditions initiales $x(0)$ et $y(0)$, vérifient :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - \phi(X(k))\| = 0, \forall x(0), \forall y(0), \quad (4.10)$$

alors, les systèmes maître-esclave 4.9 se synchronisent au sens généralisé par rapport à la fonction ϕ . Si la fonction est définie par $\phi(X(k)) = \Lambda X(k)$ tel que $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{m \times n}$, on dit qu'on a une synchronisation **full-state hybrid projective** [25].

4.1.7 Synchronisation Q-S

La synchronisation Q-S est considérée comme une généralisation de tous les types de synchronisations précédentes [12]. Nous disons qu'un système maître, n -dimensionnelle, $X(k)$ et un système esclave, m -dimensionnelle, $Y(k)$ sont en synchronisation $Q - S$ dans la dimension d , s'il existe un contrôleur $U = (u_i)_{1 \leq i \leq m}$ et deux fonctions $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d$, $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ telle que l'erreur de synchronisation :

$$e(k) = Q(X(k)) - S(Y(k)). \quad (4.11)$$

vérifie

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0.$$

4.2 Méthodes de synchronisation

Cette section est consacrée à la présentation de diverses méthodes de synchronisation les plus performantes et les plus rencontrées.

4.2.1 Méthode du contrôleur actif

L'application du contrôle actif pour la synchronisation des systèmes chaotiques, a été proposée par Bai et Lonngren [26], c'est une technique efficace qui a montré sa puissance non seulement pour la synchronisation des systèmes identiques, mais aussi pour la synchronisation des systèmes non identiques. De plus, cette méthode offre une simplicité remarquable pour l'implémentation de l'algorithme [4]. Soit deux systèmes chaotiques à synchroniser, maître et esclave, définis par :

$$x(k+1) = F(x(k)), \quad (4.12)$$

et

$$y(k+1) = G(y(k)) + U, \quad (4.13)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$, $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les état des systèmes maître et esclave, respectivement, $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un contrôleur à déterminer. Pour que les deux systèmes se synchronisent, il faut que l'erreur entre les trajectoires des deux systèmes converge vers zéro lorsque le temps tend vers l'infini. Cette erreur est obtenue comme suit :

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y(k+1) - x(k+1) \\ &= G(y(k)) - F(x(k)) + U. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si on peut écrire la quantité $G(y(k)) - F(x(k))$ de la façon suivante :

$$G(y(k)) - F(x(k)) = Ae(k) + N(x(k), y(k)), \quad (4.15)$$

l'erreur peut être exprimée comme suit :

$$e(k+1) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) + U, \quad (4.16)$$

d'où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice constante et N une fonction non linéaire. Le contrôleur U est proposé comme suit :

$$U = V - N(x(k), y(k)), \quad (4.17)$$

d'où V est le contrôleur actif, défini par :

$$V = -Le(k), \quad (4.18)$$

d'où L est une matrice de contrôle inconnue. On obtient donc, la formule finale de l'erreur :

$$e(k+1) = (A - L)e(k) \quad (4.19)$$

Donc le problème de la synchronisation entre le système maître 4.12 et le système esclave 4.13 est transformé en problème de zero-stabilité du système 4.19. Maintenant, le Théorème qui suit est un résultat immédiat de la théorie de la stabilité des systèmes dynamiques linéaires discrets.

Théorème 4.1 : *Le système maître 4.12 et le système esclave 4.13 sont globalement synchronisés sous la loi du contrôle 4.17, si et seulement si la matrice de contrôle L est choisie telles que les valeurs propres de $A - L$ se trouvent à l'intérieur du disque de l'unité.*

4.2.2 Méthode du Backstepping

La méthode du backstepping est une méthode récursive qui se base sur le choix d'une fonction de Lyapunov avec la conception du contrôleur nécessaire [34]. En considère que le système maître et le système esclave sont définis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = f_1(x_1, x_2) \\ x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \vdots \\ x_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (4.20)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = f_1(y_1, y_2) \\ y_2 = f_2(y_1, y_2, y_3) \\ \vdots \\ y_n = f_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \end{array} \right. \quad (4.21)$$

d'où f_1 est une fonction linéaire, f_i , ($i = 2, 3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaires et u est un contrôleur qui doit être choisi convenablement pour obtenir la synchronisation entre les systèmes 4.20 et 4.21. L'erreur de synchronisation est définie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = y_1 - x_1, \\ e_2 = y_2 - x_2, \\ \vdots \\ e_n = y_n - x_n. \end{array} \right. \quad (4.22)$$

alors, la dynamique du système d'erreur s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} e_1 = g_1(e_1, e_2), \\ e_2 = g_2(e_1, e_2, e_3), \\ \vdots \\ e_n = g_n(e_1, e_2, \dots, e_n) + u, \end{array} \right. \quad (4.23)$$

d'où g_1 est une fonction linéaire, et g_i , ($i = 2, 3, \dots, n$), sont des fonctions non-linéaires. L'objectif est de calculer une loi de contrôle u qui assure la convergence du système e_i , ($i = 1, 2, \dots, n$), vers l'origine en utilisant l'algorithme backstepping. Pour cela, le système d'erreur 4.23 doit être décomposé en sous système :

$$e_1, (e_1, e_2), (e_1, e_2, e_3), \dots, (e_1, e_2, e_3, \dots, e_n),$$

et pour chaque sous système on définit une fonction de Lyapunov V positive :

$$V_j(e_j, u_j, \alpha_j) \quad (4.24)$$

d'où j est l'ordre du sous-système, u_j, α_j représentent, respectivement, la loi de contrôle et le contrôleur virtuel du sous système d'ordre j , u_j et α_j sont calculés à chaque fois de tel sorte que $V_j < 0$.

Remarque 4.1 : *Il existe plusieurs avantages dans cette méthode :*

- Elle présente une procédure systématique pour la sélection du contrôleur.
- Elle peut être appliquée à différents systèmes chaotiques.
- Elle offre la possibilité de réaliser la synchronisation avec un seul contrôleur.
- Le contrôleur calculé offre une simplicité dans l'implémentation de l'algorithme.

4.2.3 Méthode du mode glissant.

Dans la théorie du contrôle robuste, la méthode du mode glissant est souvent pratiquée en raison de ses avantages inhérents, telles que la réalisation facile, la réponse rapide et une bonne performance transitoire ainsi que sa sensibilité aux incertitudes des paramètres et des perturbations externes [22, 33]. Soit les systèmes chaotiques maître et esclave donnés par les formes suivantes :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + f(x(t)), \quad (4.25)$$

et

$$\dot{y}(t) = Ay(t) + f(y(t)) + u, \quad (4.26)$$

d'où $x(k) \in \mathbb{R}^n$; $y(k) \in \mathbb{R}^n$ sont les états des systèmes maître et esclave, respectivement, $A \in \mathbb{R}^n$ une matrice constante, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction non-linéaire et $u \in \mathbb{R}^n$ est un contrôleur à déterminer. L'erreur entre le système maître ?? et le système esclave 4.26 est définie par : $e = y - x$. La dynamique de l'erreur peut s'écrire comme suit :

$$\dot{e} = Ae + \eta(x, y) + u, \quad (4.27)$$

d'où $\eta(y; x) = f(y(t)) - f(x(t))$. Si on se base sur le principe du contrôle actif pour éliminer la partie non-linéaire du système d'erreur 4.27, la loi de contrôle u est choisie comme suit :

$$u = Bv - \eta(x; y), \quad (4.28)$$

d'où v c'est le contrôleur actif et B un vecteur constant de gain qui doit être calculé de telle sorte que le couple (A, B) soit contrôlable. En substituant 4.28 dans 4.27, la dynamique de l'erreur est simplifiée comme suit :

$$\dot{e} = Ae + Bv \quad (4.29)$$

Ainsi, le problème de synchronisation peut être remplacé par un équivalent problème de la stabilisation de la solution $e = 0$ du système 4.29 par un choix approprié du contrôleur en mode glissant. Dans la méthode du mode glissant [32], nous définissons la surface de glissement s , comme suit :

$$s(e) = Ce = \sum_{j=1}^n c_j e_j, \quad (4.30)$$

d'où C : est un vecteur constant à déterminer, et le système contrôlé doit satisfaire : $s(e) = 0$, $\dot{s}(e) = 0$. Alors, on peut écrire :

$$\dot{s}(e) = C(Ae + Bv) = 0, \quad (4.31)$$

donc le contrôleur v est donné par

$$v = -(CB)^{-1}CAe, \quad (4.32)$$

d'où C est choisi de telle sorte que $CB \neq 0$. L'existence de $(CB)^{-1}$ est une condition nécessaire. La nouvelle forme de l'erreur de synchronisation est donnée par

$$\dot{e} = [I - B(CB)^{-1}C]Ae. \quad (4.33)$$

Pour assurer la stabilité asymptotique du système contrôlé, le vecteur C doit être choisi de telle sorte que les parties réelles des valeurs propres de la matrice $[I - B(CB)^{-1}C]A$ soient toutes négatives. Dans [39], le contrôleur en mode glissant est proposé de la forme

$$\dot{s} = -q \operatorname{sgn}(s) - ks, \quad (4.34)$$

d'où $\operatorname{sgn}(\cdot)$ est la fonction signe, et $q, k > 0$, sont des constantes. Dans ce cas, Le contrôleur v est donné par :

$$v = -(CB)^{-1}[C(kI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], \quad (4.35)$$

ce qui est équivalent à

$$v = \begin{cases} -(CB)^{-1}[C(KI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], & \text{si } s(e) > 0 \\ -(CB)^{-1}[C(KI + A)e + q \operatorname{sgn}(s)], & \text{si } s(e) < 0 \end{cases} \quad (4.36)$$

Théorème 4.2 *Le système maître 4.25 et le système esclave 4.26 sont globalement synchronisés par le contrôleur*

$$u = Bv - \eta(x, y), \quad (4.37)$$

d'où v est défini par 4.35, (A, B) soit contrôlable et $q, k > 0$.

Preuve. Pour observer la zéro-stabilité de la dynamique de l'erreur de synchronisation, on considère la fonction de Lyapunov suivante :

$$V = \frac{s^2}{2}. \quad (4.38)$$

d'où

$$\dot{V} = -ks - q \operatorname{sgn}(s) s, \quad (4.39)$$

puisque $\operatorname{sgn}(s)$ est toujours positive tant que $e \neq 0$ et $k, q > 0$, alors $\dot{V} < 0$. Ainsi, par la théorie de la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que la dynamique d'erreur 4.26 est globalement asymptotiquement zéro-stable. Par conséquent, il en résulte que le système maître 4.25 et le système esclave 4.26 sont globalement synchronisés. ■

4.3 Exemples

Dans cette partie, nous montrons deux exemples simples de synchronisation.

4.3.1 Exemple 01

Tout d'abord, nous essayons de synchroniser le système maître de la carte générique Hénon 3D [16], décrite dans \mathbb{R}^3 par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 1.76 \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) \end{cases} \quad (4.40)$$

Avec le système esclave qui est la carte Hénon [16], décrite dans \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = y_2(k) - ay_1^2(k) + 1 + u_1, \\ y_2(k+1) = by_1(k) + u_2, \end{cases} \quad (4.41)$$

Où $(a, b) = (1.4, 0.3)$ et (u_1, u_2) est le vecteur contrôleur 4.13.

Comme nous le remarquons, le premier système joue dans l'espace avec trois composants et la deuxième lecture dans l'avion. Nous définissons les erreurs de quasi-synchronisation par :

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - x_1(k) \\ e_2(k) = y_2(k) - x_2(k) \end{cases} \quad (4.42)$$

Les erreurs de synchronisation entre le système maître 4.40 et le système esclave 4.41 peuvent être dérivées comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = y_2(k) - ay_1^2(k) + 0.1x_3(k) + x_2^2(k) - 0.76 + u_1 \\ e_2(k+1) = by_1(k) - x_1(k) + u_2 \end{cases} \quad (4.43)$$

Pour obtenir une synchronisation entre les systèmes 4.40 et 4.41, on peut choisir le contrôleur vectoriel U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}y_2(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + ay_1^2(k) - 0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 0.76 \\ u_2 = (1 - b)x_1(k) \end{cases} \quad (4.44)$$

Ensuite, les erreurs de synchronisation entre les systèmes 4.40 et 4.41, simplifiées comme suit. Nous considérons le candidat Lyapunov fonction pour étudier la stabilité des erreurs de synchronisation :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_2(k) \\ e_2(k+1) = be_1(k) \end{cases} \quad (4.45)$$

$$V(e(k)) = \sum_{i=1}^3 e_i^2(k), \quad (4.46)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= \sum_{i=1}^3 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^3 e_i^2(k) \\ &= \frac{1}{4}e_2^2(k) + b^2e_1^2(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) \\ &= (b^2 - 1)e_1^2(k) - \frac{1}{4}e_2^2(k) < 0. \end{aligned}$$

Alors, par la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (4.47)$$

Nous concluons que les systèmes 4.40 et 4.41 sont quasi synchronisés.

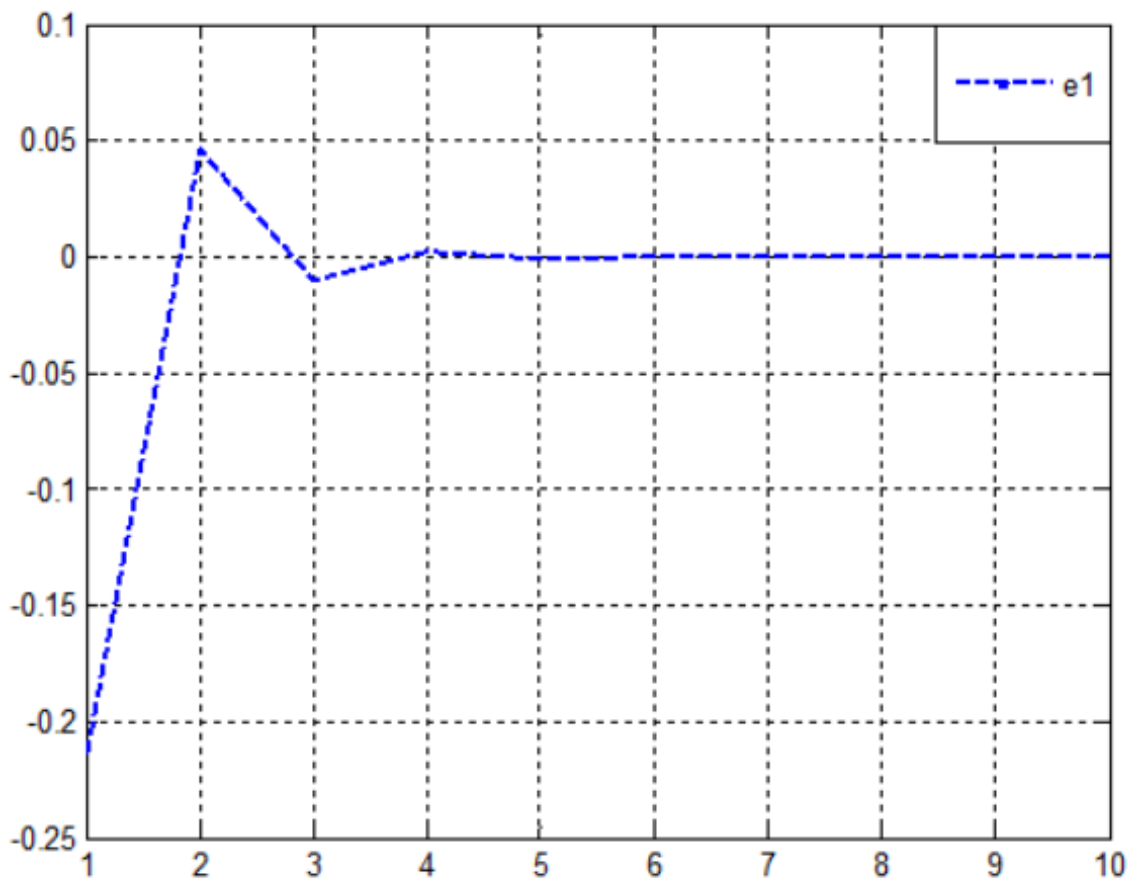
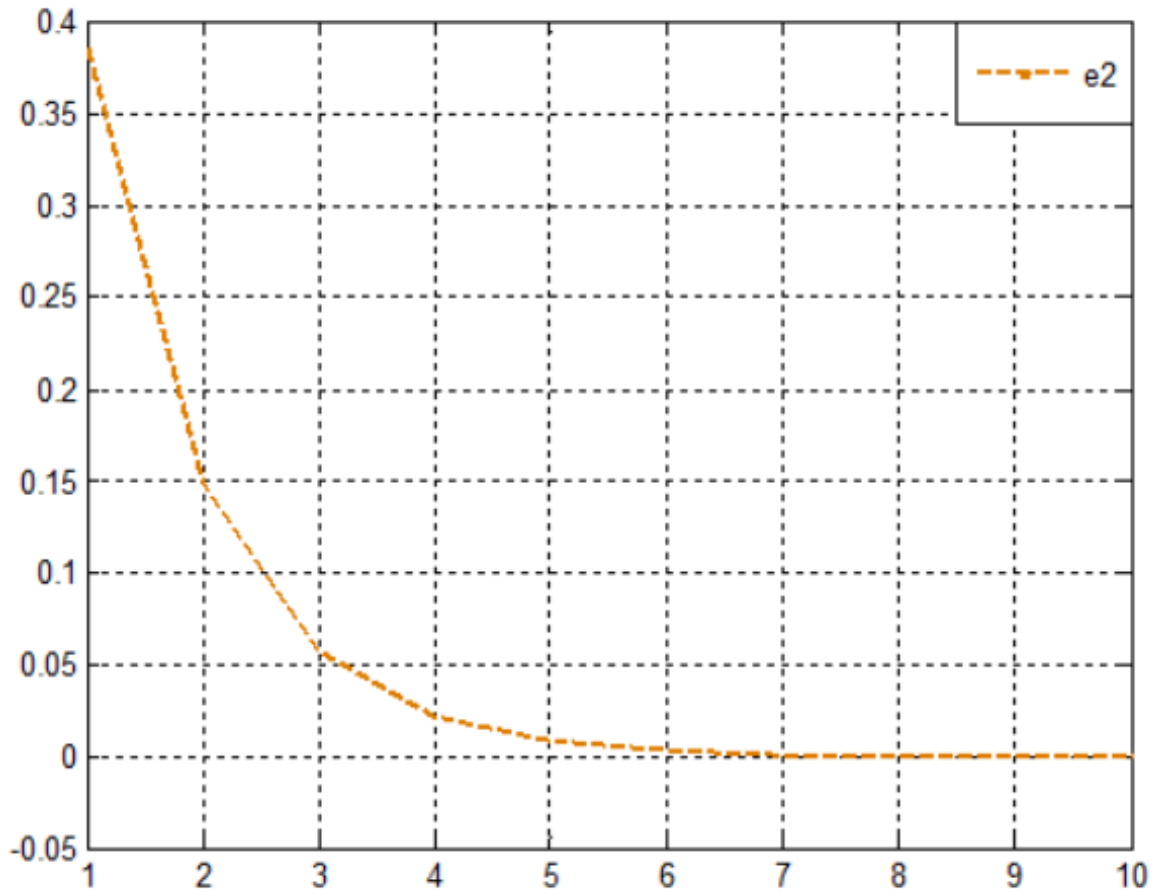


Fig 4.1-Erreur de synchronisation e_1 .

Fig 4.2-Erreur de synchronisation e_2 .

4.3.2 Exemple 02

Deuxièmement, nous considérons le système maître qui est l'application de Lozi [23], décrit dans \mathbb{R}^2 par :

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = 1 + x_1(k) - a|x_2(k)| \end{cases} \quad (4.48)$$

Et le système esclave qui est celui en forme de Hénon généralisée en 3D, décrit dans \mathbb{R}^3 par :

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 1 + y_3(k) - \alpha y_2^2(k) + u \\ y_2(k+1) = 1 + \beta y_2(k) - \alpha y_1^2(k) + u_2 \\ y_3(k+1) = \beta y_1(k) + u_3 \end{cases} \quad (4.49)$$

Ou $(\alpha, \beta) = (1, 4; 0, 2)$ et (u_1, u_2) est le vecteur contrôleur.

Les erreurs de synchronisation sont définies par :

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - x_1(k) \\ e_2(k) = y_2(k) - x_2(k) \\ e_3(k) = y_3(k) - x_1(k) \end{cases} \quad (4.50)$$

Comme nous le remarquons, la troisième erreur est arbitraire, puis les erreurs de synchronisation entre le système maître 4.48 et le système esclave 4.49 peuvent être dérivées comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = 1 + y_3(k) - \alpha y_2^2(k) - x_2(k) + u_1 \\ e_2(k+1) = \beta y_2(k) - \alpha y_1^2(k) - x_1(k) + a|x_2(k)| + u_2 \\ e_3(k+1) = \beta y_1(k) - x_2(k) + u_3 \end{cases} \quad (4.51)$$

Pour assurer la synchronisation entre les systèmes 4.48 et 4.49, on peut choisir le contrôleur vectoriel U comme suit :

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}y_3(k) + x_2(k) - \frac{1}{2}x_3(k) + \alpha y_2^2(k) - 1 \\ u_2 = -\beta x_2(k) + \alpha y_1^2(k) + x_1(k) - a|x_2(k)| \\ u_3 = -\beta x_1(k) + x_2(k) \end{cases} \quad (4.52)$$

Les erreurs de synchronisation entre les systèmes 4.48 et 4.49 peuvent être écrites comme suit :

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_3(k) \\ e_2(k+1) = \beta e_2(k) \\ e_3(k+1) = \beta e_1(k) \end{cases} \quad (4.53)$$

Pour étudier la stabilité des erreurs de synchronisation, on considère la fonction candidate de Lyapunov :

$$V(e(k)) = \sum_{i=1}^3 e_i^2(k), \quad (4.54)$$

On obtient :

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= \sum_{i=1}^3 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^3 e_i^2(k) \\ &= \frac{1}{4}e_3^2(k) + \beta^2 e_2^2(k) + \beta^2 e_1^2(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) - e_3^2(k) \\ &= (\beta^2 - 1) e_1^2(k) + (\beta^2 - 1) e_1^2(k) - \frac{3}{4}e_3^2(k) < 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Ainsi, par la stabilité de Lyapunov, il est immédiat que les erreurs aient tendance à zéro à l'infini

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (4.56)$$

Nous concluons que les systèmes 4.48 et 4.49 sont quasi-synchronisés.

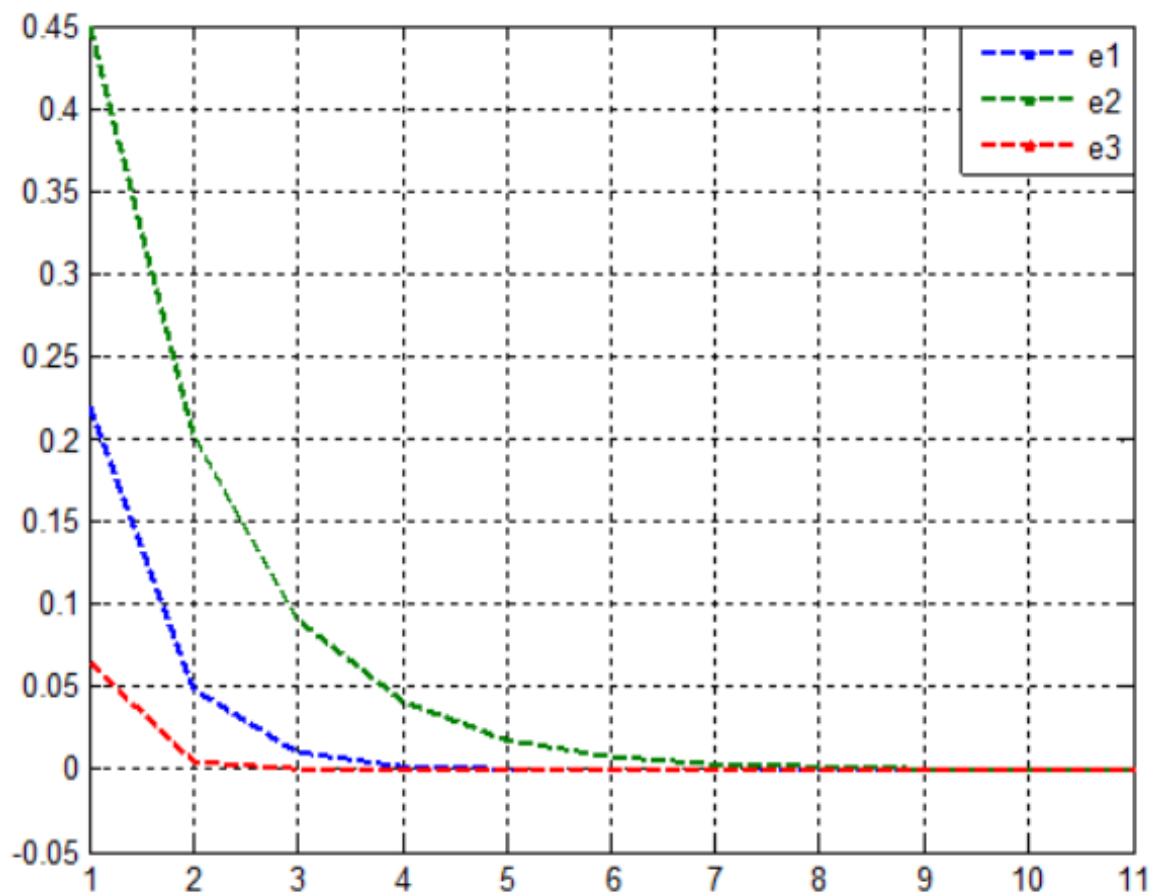


Fig 4.3-Les erreurs de synchronisation $e_i, i = 1, 2, 3$.

Conclusion générale

L'idée de chaos est très utile dans plusieurs domaines. En réalité, en physique, en météorologie atmosphérique clairement, mais aussi en biologie et en chimie, en économie dans l'estimation des coefficients distributions, ainsi que l'étude de leur comportement à long terme, et dans les sciences sociales. Dans la science le cryptage, la détection de signaux désordonnés peuvent rendre les opérations de suivi difficiles, et aussi il a été détruit en cas d'infiltration et a également provoqué une grande révolution dans le monde des communications. Les signaux, qui sont de nature imprévisible et difficiles à contrôler, mais très sensibles des conditions initiales et présente un aspect quasi-aléatoire, ce qui fait du chaos un phénomène très important à cacher des signaux d'information afin de les transmettre de manière sécurisée.

Bibliographie

- [1] Adeli, M., Zarabadipoor, H. (2011), "Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms," *International Journal of Electronic Signals and Systems*, pp 143-147.
- [2] Alligood, K.T., Sauer, T.D. et Yorke, J.A. *Chaos : an Introduction to Dynamical Systems*, Springer-Verlag édition, 1996.
- [3] B.B.Mandelbrot. *Les Objects Fractals forme Hasard dimension*, Paris : Flammarion, coll.(1984),no.(1989),pp.29, 1975.
- [4] Bai, E., Lonngren, K.E. (2008), "Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 11, pp. 1041-1044.
- [5] Boukhafla El-Hafsi, *Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets*, Thèse de Doctorat, Université de Annaba, 2017
- [6] D. Ruelle, F. Takens. "On the nature of turbulence", *communication in Mathematica physics*, vol. 20, pp .167-192, 1971.
- [7] Dang-Vu, H., Delcarte, C. *Bifurcations et Chaos*. Paris, Ellipses, 2000.
- [8] Devaney, R.L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. In Addison-wisley, Redwood City, CA 37.
- [9] Diao, M., Yu, Y-G., Wang, S., Yu, J-Z. (2010), "Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders," *Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu.*, Vol. 11 (7), pp. 503–508
- [10] Eckmann, J.P. , "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems," *Rev. Mod. Phys.* Vol. 53, pp. 643-5, 1981.
- [11] Gasri, Ahlem. *Chaos et synchronisation (généralisé) dans les systèmes dynamiques*. Doctorat en sciences de Mathématiques Université Freres Mentouri Constantine-1, 2018.

- [12] Grassi, G., Miller, D.A. (2012), "Dead-beat full state hybrid projective synchronization for chaotic maps using a scalar synchronizing signal," *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, Vol. 17 (4), pp. 1824–1830
- [13] Guckenheimer, J. Holmes, P. *Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Applied Mathematical Sciences. Springer verlag édition, 1983.
- [14] Guckenheimer, J., Holmes, P., *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, New York Springer-Verlag, 1986.
- [15] Hale, J.K., Kocak, H. *Dynamics and Bifurcations*. Applied Mathematics, Publisher Springer-Verlag New York, 1991.
- [16] Hénon, M., "A Two Dimensional Mapping with a Strange Attractor," *Comm. Math. Phys.* Vol. 50, pp.69-76,1976.
- [17] Hua M, Xua Z, Zhang R, Hua, A. (2007), "Parameters identification and adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyperchaotic) systems," *Phys. Lett. A.*,Vol. 361 (3), pp. 231–237.
- [18] J. Hung, J., Gao, W., "Variable structure control," *IEEE. Trans. Indust. Elect.*, Vol. 40, pp. 2-22, 1993.
- [19] Kaplan, D., Glass, L. *Finite-difference equations. Understanding nonlinear dynamics*. New-York : Springer-Verlag, 1995.
- [20] Kuznetsov, Y. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York, 2004.
- [21] Li, T-Y., York, J.A., "Period three implies chaos," *Amer. Math. Mon.*, Vol. 82, pp. 985-992, 1975.
- [22] Li, X., Zhao, L., Zhao, G., "Sliding mode control for synchronization of chaotic systems with structure or parameters mismatching," *J. Zhejiang University Science*, Vol. 6 (6), pp 571-576, 2005.
- [23] Lozi, R., "Un Attracteur étrange du Type Attracteur de Hénon," *Journal de Physique*, Vol. 39, pp.9-10,1978.
- [24] Lu, J. (2008), "Generalized (complete, lag, anticipated) synchronization of discrete-time chaotic systems," *Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 13 (9), pp. 1851-1859
- [25] Ma, Z., Liu, Z., Zhang, G. (2007), "Generalized synchronization of discrete systems," *Appl. Math. Mech.*, Vol. 28 (5), pp. 609-614

- [26] Manfeng Hu., Xu, Z.A. (2008), "General scheme for Q-S synchronization of chaotic systems," *Nonlinear Analysis*, Vol. 69 (4), pp. 1091-1099
- [27] Menacer, Tidjani. Synchronisation des Systèmes Dynamiques Chaotiques à Dérivées Fractionnaires. Doctorat en Sciences en Mathématiques Université Constantine-1, 2014.
- [28] Mira, C., Gardini, L., Bugola, A., Cathala, J-C. Chaotic dynamics in two-dimensional noninvertible maps. World Scientific, 1996
- [29] Ouannas, Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets, Thèse de Doctorat, Université de Constantine, 2015
- [30] Parker, T.S., Chua, L.O. , Practical Numerical Algorithms For Chaotic Systems. Edition Springer-Verlag, 1989.
- [31] Rosenstein, M., Collins, J., DeLuca, C., "A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets," *Physica*, Vol. 65, pp. 117-134, 1993.
- [32] Seigneur Agathe sous la direction de Rechtman Ana, Les bifurcations de l'application logistique, Septembre 2012.
- [33] Sundarapandian, V, "Sliding controller design for the global chaos synchronization of identical hyperchaotic Yujun systems," *Intern. J. Adv. Info. Tech.*, Vol. 2 (4), pp. 13-22, 2012.
- [34] Tan, X., Zhang, J., Yang, Y. (2003), "Synchronizing chaotic systems using backstepping design," *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 16, pp. 37-45.
- [35] Tidjani Menacer, Synchronisation des systèmes dynamiques chaotiques à dérivées fractionnaires, Université Constantine 1, (Mai 2014).
- [36] Wolf, A., Swift, J., Swinney, H., Vastano, J., Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica*, Vol. 16(3), pp. 285-317, 1985.
- [37] www.jdotec.net, Critère de ROUTH.doc.doc, v1.3 -24.03.2004
- [38] Xin, B., Wu, Z. (2015), "Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control," *Entropy*, Vol. 17, pp. 2677-2687
- [39] Young, K. D., Utkin, V., Ozgunr, U., "A control engineer's guide to sliding mode control," *IEEE. Trans. Contr. Syst.*, Vol. 7, pp. 328-342, 1999.
- [40] Zeraoulia Elhadj, Etude de quelques types de systèmes chaotiques : généralisation d'un modèle issu du modèle de Chen, Thèse de 3ème cycle, Université Mentouri de Constantine, 2006.