



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université Larbi Tebessi -Tebessa-
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la
Nature et de la Vie*
Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....

Série :.....

MÉMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de

MASTER

Option : *Physique de la Matière Condensée*

THÈME

Les solutions propres de l'oscillateur de Klein-Gordon dans un champ électrique à une dimension

par :

Allouani Riheme

Devant le jury

DR. CHAOUCHE YASSINE	PRÉSIDENT	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>
PR. ABDELMALEK BOUMALI	RAPPORTEUR	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>
DR. AOUNALLAH HOCINE	EXAMINATEUR	<i>Université Larbi-Tebessi, Tebessa</i>

Date de Soutenance : 20/Juin/2022

© *Mémoire effectué au*
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique



*Les solutions propres de l'oscillateur de
Klein-Gordon dans un champ électrique à une
dimension*

ALLOUANI RIHEME

20 Juin 2022

ملخص

في العمل الحالي، درسنا الهزاز التوافقي النسبي (هزازا ديراك وكلين جوردون) في وجود مجال كهربائي خارجي ثابت. الحلول التي تم الحصول عليها دقيقة. من خلال هذه الحلول، ركزنا على دراسة تأثير المجال الكهربائي الخارجي على الخصائص الحرارية للهزاز التوافقي النسبي. طريقة حساب هذه الخصائص تمت باستخدام الطريقة القائمة على تقريب أولير-ماكلورين. أيضا تم بناء بعض الأرقام لإظهار هذا التأثير.

Abstract

In the present work, we have studied the relativistic harmonic oscillator (Dirac and Klein-Gordon oscillators) in the presence of an eternal constant electric field. The solutions obtained are exact. Through these solutions, we have focused on the effect of the external electrical field on the thermal properties of the relativistic harmonic oscillator. These properties have been calculated using the method based on the Euler-Maclaurin method. Some figures have been constructed in order to show this effect.

RÉSUMÉ

Dans ce présent travail, nous avons étudié l'oscillateur harmonique relativiste (oscillateurs Dirac et Klein-Gordon) en présence d'un éternel champ électrique constant. Les solutions obtenues sont exactes. Grâce à ces solutions, nous nous sommes concentrés sur l'effet du champ électrique externe sur les propriétés thermiques de l'oscillateur harmonique relativiste. Ces propriétés ont été calculées à l'aide de la méthode basée sur la méthode d'Euler-Maclaurin. Certaines figures ont été construites afin de montrer cet effet.

Dédicace

*À mes parents,
À mes frères,
À ma grand-mère,
À ma chère tante, bouchoucha abla,
À ma famille,
À : Ghadir et Hanane,
À tout mes collègues,*

Je dédie cet humble travail.

Remerciements

Ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet de fin d'études, pour obtenir le diplôme de master en Physique de la Matière Condensée à l'université de Larbi Tébessi-Tébessa-. Avant tout, je remercie ALLAH le tout-puissant de nous avoir donné la volonté et le courage de mener à bien ce travail. Et d'une façon toute particulière, j'adresse mes sincères remerciements à mes parents qui m'ont soutenu dans toutes les parties de ma vie et m'ont donné la force et le courage d'atteindre tout cela moi-même.

Je tiens à remercier mon encadreur le Professeur Abdelmalek Boumali pour m'avoir proposé ce sujet aussi intéressant et riche. Je suis très reconnaissant tout particulièrement pour la confiance qu'il m'a témoignée et la liberté qui m'a laissé. J'exprime mes remerciements à M. Chaouche Yassine, Maître de Conférences A à l'Université de Larbi-Tébessi-Tébessa-, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire. Je remercie vivement M. Aounallah Hocine, Maître de Conférences A à l'Université de Larbi-Tébessi-Tébessa-, qui a accepté d'être examinateurs de ce mémoire. Je tiens également à exprimer ma gratitude aux personnes qui m'ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse. En particulier, je tiens à remercier vivement mon collègue Bouzenada Abdelmalek qui m'a aidé le long de ce travail. Qu'il trouve ici mes sentiments les plus sincères.

Je remercie aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observés, aidés, conseillés et même supportés. Enfin, je souhaite exprimer toute ma gratitude à l'ensemble des personnes, qui bien en marche de ce travail, ont contribué largement à son aboutissement. Que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelques mois seulement, nombreux sont celles et ceux qui ont participé à notre épanouissement. On les remercie sincèrement.

TABLE DES MATIÈRES

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Dédicace	iv
Remerciements	v
Liste des Tableaux	vii
Liste des Figures	viii
Introduction générale	1
1 Rappel sur les équations relativistes	4
1.1 L'équation de Klein-Gordon	4
1.2 L'équation de Dirac	6
2 Les oscillateurs relativistes en présence d'un champ électrique à 1D	13
2.1 La supersymétrie et l'équation de Klein-Gordon	13

2.2	Cas de l'oscillateur de Klein-Gordon en présence d'un champ électrique	14
2.3	Les solutions propres de l'oscillateur de Dirac en présence d'un champ électrique à 1D	16
2.4	Discussion des résultats	20
3	Les propriétés thermodynamiques de ces oscillateurs relativistes	25
3.1	Détermination de la fonction de partition de l'oscillateur de Klein-Gordon Z_{KGO}	25
3.2	Détermination de la fonction de partition de l'oscillateur de Dirac Z_{DO}	30
3.3	Résultats et discussions	30
	Conclusion générale	35
	A L'oscillateur de Dirac : rappel	38
	B La supersymétrie dans la mécanique quantique	40
	B.1 Introduction	40
	B.2 La supersymétrie en mécanique Quantique	42
	C Programme de calcul	48
	Bibliographie	53

LISTE DES TABLEAUX

LISTE DES FIGURES

2.1	Spectre d'énergie de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un champ électrique constant ζ	22
2.2	Spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac à une dimension	22
2.3	Position d'équilibre de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un champ électrique constant ζ	23
2.4	Position d'équilibre de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un champ électrique constant ζ	24
2.5	Réalisation expérimentale de l'oscillateur de Dirac à une dimension (figure d'après la Ref. [1])	25
2.6	Spectre d'énergie expérimental de l'oscillateur de Dirac à 1D sans (à gauche) et avec (à droite) masse (figure d'après la Réf. [1])	25
3.1	Propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D en présence d'un champ électrique constant	33
3.2	Propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Dirac à 1D en présence d'un champ électrique constant	34
3.3	Chaleur spécifique C_v en fonction de $\frac{1}{\beta}$ et κ à trois dimensions	35

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'oscillateur harmonique est un outil de base en physique depuis de nombreux siècles. On dit, par exemple, que Galilée vérifiait la constance de la période des petites oscillations d'un pendule en les comparant à son battement de cœur ; il ne serait pas surprenant que même Archimède soit conscient de certaines propriétés de ces types de mouvements. Toute l'importance de l'oscillateur harmonique comme outil de base pour le développement de la physique théorique est probablement apparu avec la naissance de la mécanique quantique. C'était le premier exemple auquel les règles de quantification ont été appliquées, et depuis lors, ses spectres, fonctions d'onde, symétries, etc., ont eu d'innombrables applications non seulement dans les calculs directs, mais aussi comme modèle pour augmenter notre compréhension de problèmes plus complexes [2].

L'oscillateur de Dirac (DO) a été étudié pour la première fois étudié par Ito et al [3]. Ces auteurs ont estimé une équation de Dirac dans lequel le moment p est remplacé par $p - im\omega\gamma^0 r$, dont r étant le vecteur de position, m la masse de la particule, et ω la fréquence de l'oscillateur. L'intérêt pour le problème a été revivé par Moshinsky et Szczepaniak [4,5], qui leur donna le nom de l'oscillateur de Dirac (DO) parce que, dans la limite non-relativiste, il devient un oscillateur harmonique avec un terme de couplage spin-orbite très fort. Physiquement, l'interaction (DO) est un système physique, qui peut être interprété comme l'interaction du moment

magnétique anormal avec un champ électrique constant.

L'oscillateur de Dirac a attiré beaucoup d'intérêt parce qu'il constitue l'un des exemples rares qui ont des solutions exactes, et aussi en raison de ses nombreuses applications en physiques. En mécanique quantique relativiste, le (DO) a été étudiée à partir de nombreux points de vue, on cite parmi-eux : (i) les études sur les propriétés de la covariance de l'équation de Dirac en présence de l'interaction de l'oscillateur de Dirac, (ii) la détermination du spectre d'énergie et les fonctions d'onde correspondantes, (iii) l'étude des propriétés algébrique du groupe de Lie , (iv) la supersymétrie, (v) et bien sure d'autres existant dans la littérature [5–28].

Il est à noter que ce type d'oscillateur peut être considéré comme un paradigme pour les systèmes relativistes exactement résolubles. Il a été bien mis en évidence expérimentalement par Franco-Villafane et al [1] : dans leur études, les auteurs présentent pour la première fois la réalisation expérimentale de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel. Cette expérience repose sur une relation entre l'oscillateur de Dirac et un système de liaisons fortes. Ce système de liaison serrée est mis en ouvre comme un système hyperfréquence par une chaîne de disques diélectriques couplés, ou le couplage est évanescent et peut être ajusté de manière appropriée. Les résonances du système micro-ondes fini donnent le spectre de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel avec et sans terme de masse. La flexibilité du montage expérimental permet la mise en ouvre d'autres équations unidimensionnelles de type Dirac. Dans la même voix, les travaux de Fujiwara et al [29] sont aussi concentré sur la réalisation expérimentale concernant l'oscillateur Harmonique relativiste. Ces auteurs ont réalisé expérimentalement et étudié quantitativement un oscillateur harmonique dans le régime relativiste en utilisant des atomes de lithium ultra-froid d'un réseau optique. Bien que le mouvement harmonique relativiste ait été étudié théoriquement pendant des décennies, celle-ci représente la première observation expérimentale de la dynamique d'un oscillateur harmonique relativiste. Tous le résultats trouvés par ces auteurs étaient sont en bon accord quantitatif avec les prédictions relativistes.

Notre contribution s'insère à l'étude des propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un champ électrique constant : pour cela, en premier lieu, nous devons trouver la forme du spectre de cet oscillateur. Ensuite, à travers de spectre, les propriétés thermodynamiques de notre problème en question sont déterminées via l'approche d'Euler-Maclaurin [6, 16, 30].

Ce mémoire comporte trois chapitre composés de la façon suivante : dans le premier, on fait un rappel sur quelques généralités des équations relativistes bien connues tels que l'équation de Klein-Gordon pour les particules scalaires et l'équation de Dirac pour les particules fermioniques.

Le deuxième chapitre est consacré aux solutions de l'oscillateur de Klein-Gordon dimensionnel en présence d'un champ électrique constant. Le troisième chapitre donne les résultats concernant les propriétés thermiques de notre système en utilisant l'approche d'Euler-Maclaurin. Enfin, nous terminons par une conclusion globale résumant les résultats marquantes de cette étude.

CHAPITRE 1

RAPPEL SUR LES ÉQUATIONS RELATIVISTES

1.1 L'équation de Klein-Gordon

En mécanique quantique un état stationnaire ψ d'énergie E est la solution de l'équation de Schrödinger ci-dessous [31, 32]

$$(1.1) \quad H\psi = E\psi.$$

Le principe de correspondance permis de poser l'énergie et l'impulsion sous la forme suivante

$$(1.2) \quad E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t},$$

$$(1.3) \quad P^i \mapsto -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i},$$

L'énergie d'une particule de la masse m est décrite par

$$(1.4) \quad E = \frac{P^2}{2m} + V(\mathbf{x}).$$

On obtient alors l'équation de Schrödinger dépendant du temps suivante

$$(1.5) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x^\mu) = \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\mathbf{x}) \right\} \psi(x^\mu),$$

avec $\Delta = \nabla^2$ est le laplacien. De la même façon, il est suggéré d'appliquer le principe de correspondance à l'expression de l'énergie d'une particule relativiste libre, $E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4$, ce qui conduit à l'équation de Klein-Gordon :

$$(1.6) \quad \left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \Delta + m^2 c^2 \right) \psi(x^\mu) = 0.$$

Pour simplifier les notation nous choisirons le système d'unité naturelle ($\hbar = c = 1$) : alors, l'équation (1.6) s'écrit dans une forme covariante en fonction de $g^{\mu\nu}$ par

$$(1.7) \quad \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu + m^2 \right) \psi(x^\mu) = 0.$$

En présence d'un champ électromagnétique, par application des substitutions suivantes,

$$(1.8) \quad \partial^\nu \mapsto \partial^\nu - ieA^\nu, \text{ avec } A^\nu = (\varphi, \mathbf{A}),$$

l'équation (1.7) devient

$$(1.9) \quad \{ g_{\mu\nu} (\partial - ieA)^\mu (\partial - ieA)^\nu + m^2 \} \psi(x^\mu) = 0.$$

Le complexe conjugué de l'équation (1.6) est donné par l'expression

$$(1.10) \quad \left(\frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \nabla^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \psi^*(x^\mu) = 0.$$

Afin de trouver l'équation de continuité, en multiplié les équations (1.6) et (1.10) respectivement par ψ^* et ψ , puis en les soustrayant, on trouve

$$(1.11) \quad \frac{1}{c^2} \left(\psi^* \partial_t^2 \psi - \psi \partial_t^2 \psi^* \right) = \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*,$$

$$(1.12) \quad \frac{1}{c^2} \partial_t (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*) = \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*).$$

l'équation de continuité obtenue est la suivante

$$(1.13) \quad \partial_t \rho + \nabla \mathbf{J} = 0,$$

dont

$$(1.14) \quad \rho = \frac{i}{c^2} (\psi^* \partial_t \psi - \psi \partial_t \psi^*),$$

$$(1.15) \quad \mathbf{J} = \frac{\hbar}{2im} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*).$$

Passons maintenant à l'équation de Dirac pour les fermions de spin $-\frac{1}{2}$.

1.2 L'équation de Dirac

Selon Dirac, L'équation de Klein-Gordon peut être écrite semblablement à l'équation de Schrödinger par

$$(1.16) \quad i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \gamma^0 m \right) \psi (x^\mu) = H_D \psi (x^\mu),$$

dont

$$(1.17) \quad H_D = -i \boldsymbol{\alpha} \cdot \nabla + \gamma^0 m,$$

est l'hamiltonien de Dirac. Il est évident que les composantes de $\vec{\alpha}$ ne peuvent pas être scalaires, et si on cherche que H_D soit invariant sous les trois rotations, α^i et γ^0 doivent être des matrices [32–35].

Soit $\psi(x^\mu)$ un vecteur à 4 composantes que l'on appelle un spineur de rang 4

de la forme suivante

$$(1.18) \quad \psi(x^\mu) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T.$$

Projetons l'équation(1.18) dans (1.16), on trouve

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -\sum_{i=1}^3 \alpha_i^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} - \sum_{i \neq j} (\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}. \\ -im \sum_{i=1}^3 (\alpha_i \gamma^0 + \gamma^0 \alpha_i) \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + (\gamma^0)^2 m^2 \psi &= -\Delta + m^2. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons les relations suivantes

$$(1.19) \quad \alpha_i^2 = (\gamma^0)^2 = I,$$

$$(1.20) \quad \{\alpha_i, \gamma^0\} = 0, \{\alpha_i, \alpha_j\} = 0, \text{ avec } (i \neq j).$$

Dans la représentation de Dirac-Pauli, ces matrices prennent la forme suivante

$$(1.21) \quad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, (i = 1, 2, 3).$$

1.2.1 Les solutions pour le cas libre sans interaction

Soit

$$(1.22) \quad \psi(x) = \psi \exp\left(-\frac{i}{\hbar} P^\mu x_\mu\right),$$

dont

$$(1.23) \quad P^\mu = (E, P), \text{ et } x_\mu = (t, -x).$$

Dans le but de chercher les solutions d'une particule libre, on procède premièrement à séparer ψ en deux composantes

$$(1.24) \quad \psi = (\theta, \chi)^T,$$

avec θ et χ sont deux spineurs à deux composantes. Dans ce cas, l'équation de Dirac est exprimé par

$$(1.25) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} P^\mu x_\mu\right) = \begin{pmatrix} m & -i\sigma\nabla \\ -i\sigma\nabla & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} P^\mu x_\mu\right),$$

où

$$(1.26) \quad E \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & \sigma P \\ \sigma P & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix},$$

soit

$$(1.27) \quad (E - m)\theta = \sigma P \chi, (E + m)\chi = \sigma P \theta.$$

A partir de ces équations, on est alors mené à résoudre le système suivant

$$(1.28) \quad \chi = \frac{\sigma P}{(E + m)} \theta,$$

$$(1.29) \quad \theta = \frac{\sigma P}{(E - m)} \chi,$$

avec θ et χ sont

$$(1.30) \quad \theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{pmatrix}.$$

En utilisant l'identité

$$(\sigma \cdot a)(\sigma \cdot b) = a \cdot b + i\sigma(a \times b),$$

on trouve

$$(1.31) \quad (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P})(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{P}) = \mathbf{P}^2.$$

Ainsi l'équation par rapport à la composante χ devient

$$(1.32) \quad \chi = \frac{P^2}{E^2 - m^2} \chi,$$

ce qui montre qu'il faut imposer

$$(1.33) \quad E^2 - m^2 = P^2.$$

A partir de cette dernière équation, comme dans le cas de Klein-Gordon, il existe deux solutions pour l'énergie

$$(1.34) \quad E_{\pm} = \pm\sqrt{P^2 + m^2}.$$

Considérons, en premier lieu, les solutions à énergies positives $E = E_+$, et passons au référentiel où la particule est au repos ($\mathbf{P} = 0$), alors, l'énergie prend la forme

$$(1.35) \quad E = m.$$

Dans ce cas, l'équation (1.26) devient

$$(1.36) \quad m \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Comme résultat, nous avons $\chi = 0$, par contre θ a une forme quelconque : il existe deux solutions linéairement indépendantes correspondant aux deux possibilités d'orientations du spin décrite par la relation suivante

$$(1.37) \quad \theta_1 = (1, 0), \theta_2 = (0, 1).$$

Considérons maintenant les deux solutions linéairement indépendantes à énergies négatives $E = E_-$: Dans les mêmes considérations, nous avons

$$(1.38) \quad E_- = -m,$$

et l'équation (1.26) prend la forme

$$(1.39) \quad -m \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas $\theta = 0$, mais χ a une forme quelconque dont on peut choisir la forme suivante

$$(1.40) \quad \chi_1 = (1, 0), \text{ et } \chi_2 = (0, 1).$$

En général, dans le référentiel où la particule est au repos, nous avons quatre états distincts donnés par les expressions suivantes

$$(1.41) \quad \psi(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\exp(-imt) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E=+m, \uparrow}, \underbrace{\exp(-imt) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E=+m, \downarrow}, \underbrace{\exp(+imt) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E=-m, \uparrow}, \underbrace{\exp(+imt) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{E=-m, \downarrow}.$$

Les deux états d'énergie positive correspondent à deux orientations de spin positive, correspondent à deux orientations de spin possible d'une particule de spin- $\frac{1}{2}$ tels que l'électron. Par contre, les deux états d'énergie négative représentent les deux orientations de spin de l'antiparticule associée, dans notre cas c'est un positron. Donc, les solutions de l'équation de Dirac contiennent non seulement des particules, mais aussi leurs antiparticules.

A partir des équations (1.18) et (1.22), nous pouvons exprimer les quatre états

distincts dans un référentiel quelconque, où la particule a une impulsion \mathbf{P} par

$$(1.42) \quad w(E, \mathbf{P}) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{P_z}{E+m} \\ \frac{P_+}{E+m} \end{pmatrix}}_{E=+\sqrt{P^2+m^2}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{P_-}{E+m} \\ \frac{-P_z}{E+m} \end{pmatrix}}_{E=-\sqrt{P^2+m^2}}, \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{P_z}{E-m} \\ \frac{P_+}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{E=+\sqrt{P^2+m^2}} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{P_-}{E-m} \\ \frac{-P_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{E=-\sqrt{P^2+m^2}},$$

avec

$$(1.43) \quad P_{\pm} = P_x \pm iP_y.$$

1.2.2 La densité de probabilité

Dans le cas de l'équation de Schrödinger, et de manière tentative, nous définissons la densité de probabilité par :

$$(1.44) \quad P = \psi^+ \psi = \psi_1^+ \psi_1 + \psi_2^+ \psi_2 + \psi_3^+ \psi_3 + \psi_4^+ \psi_4 \geq 0,$$

Pour chercher la densité demandée, l'équation de continuité doit être satisfaite. Pour cela, soit le complexe conjugué de l'équation de Dirac (1.16) est

$$(1.45) \quad -i \frac{\partial}{\partial t} \psi^+ = \psi^+ (i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \gamma m).$$

En tenant compte du fait que $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^{\dagger}$ et $\gamma^+ = \gamma$, et en multipliant cette dernière équation à droite par ψ , et à gauche l'équation (1.16) par ψ^+ , on obtient

$$(1.46) \quad i\psi^+ \frac{\partial \psi}{\partial t} = \psi^+ (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} + \gamma m) \psi,$$

$$(1.47) \quad i \frac{\partial \psi^+}{\partial t} \psi = \psi^+ (-i\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\nabla} - \gamma m) \psi.$$

Additionnant ces deux équations nous trouvons l'équation de continuité

$$(1.48) \quad \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\psi^+ \psi}_{\rho} = -\operatorname{div} \underbrace{\psi^+ i \alpha \psi}_{\mathbf{J}}.$$

La densité de courant de probabilité est donné par

$$(1.49) \quad \mathbf{J} = \psi^+ \alpha \psi,$$

le quadrivecteur courant sera

$$(1.50) \quad J^\mu = (\rho, \mathbf{J}) = (\psi^+ \psi, \psi^+ \alpha \psi),$$

ou

$$(1.51) \quad J^\mu = \psi^+ (\gamma^0, \gamma^0 \alpha) \psi = \bar{\psi} (\gamma^0, \boldsymbol{\gamma}) \psi,$$

Alors

$$(1.52) \quad J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

Multipliant par la charge portée par la particule nous obtenons le quadri-courant de charge de la particule : par exemple, pour un électron, nous avons

$$(1.53) \quad J_{em}^\mu = (-e) (\psi^+ \psi, \psi^+ \alpha \psi) = (-e) \bar{\psi} \gamma^\mu \psi.$$

CHAPITRE 2

LES OSCILLATEURS RELATIVISTES EN PRÉSENCE D'UN CHAMP ÉLECTRIQUE À 1D

2.1 La supersymétrie et l'équation de Klein-Gordon

En mécanique relativiste, la solution de L'équation de Klein-Gordon joue un rôle très important de la physique à hautes énergies. Dans un espace plat en présence d'un potentiel externe, cette équation s'écrit par

$$(2.1) \quad \left[\frac{d^2}{dx^2} + (E - V)^2 - m^2 \right] \psi(x) = 0.$$

Cette équation devient une équation de Schrödinger bien connue comme suit

$$(2.2) \quad \left[\frac{d^2}{dx^2} - 2EV + E^2 - m^2 + V^2 \right] \psi(x) = 0,$$

où

$$(2.3) \quad \left[\frac{d^2}{dx^2} + V_{\text{eff}} \right] \psi(x) = \lambda \psi(x),$$

avec

$$(2.4) \quad \lambda = m^2 - E^2, V_{\text{eff}} = V^2 - 2EV,$$

Dans le cadre de la supersymétrie en mécanique quantique, la fonction d'onde réduite de l'état fondamental est définie par :

$$(2.5) \quad \psi_0(x) = N e^{\int W(x) dx},$$

où N est une constante de normalisation et $W(x)$ est le super-potentiel défini par :

$$(2.6) \quad W^2 + W' = V_{\text{eff}} - \lambda.$$

Cette dernière équation est une équation de Riccati non-linéaire qui donne les fonctions d'onde du système.

2.2 Cas de l'oscillateur de Klein-Gordon en présence d'un champ électrique

L'équation générale de l'oscillateur Klein-Gordon à une dimension s'écrit par la relation suivante

$$(2.7) \quad [c^2(p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x) - E^2 + m^2c^4] \psi = 0,$$

où m est la masse de la particule et ω est la fréquence de l'oscillateur.

En présence d'un champ électrique, (2.7) devient

$$(2.8) \quad [c^2(p_x + im\omega x)(p_x - im\omega x) - (E - \kappa x)^2 + m^2c^4] \psi = 0,$$

Ici $V = q\zeta x = \kappa x$ est le potentiel associé au champ électrique ζ . Dans ce qui suit, nous posons que $m = \hbar = c = \omega = 1$.

Alors, Eq. (2.8) se transforme à l'équation suivante

$$(2.9) \quad \left[p_x^2 + i \left(\underbrace{xp_x - p_x x}_{[x,p]} \right) + x^2 - (E - \kappa x)^2 + 1 \right] \psi = 0.$$

dont

$$(2.10) \quad [x, p_x] = i.$$

En remplaçant (2.10) dans (2.9) on trouve

$$(2.11) \quad \left(p_x^2 + x^2 - E^2 + 2E\kappa x - \kappa^2 x^2 \right) \psi = 0.$$

En ré-organisant l'équation précédente, on obtient

$$(2.12) \quad \left[p_x^2 + (1 - \kappa^2) \left(x^2 + 2 \frac{E\kappa}{1 - \kappa^2} x \right) - E^2 \right] \psi = 0,$$

où

$$(2.13) \quad \left[p_x^2 + (1 - \kappa^2) \left(x + \frac{E\kappa}{1 - \kappa^2} \right)^2 - \frac{E^2 \kappa^2}{1 - \kappa^2} - E^2 \right] \psi = 0$$

Cette équation peut être réduite à la forme d'équation de la mécanique quantique SUSY

$$\left(p_x^2 + W^2 + 1 + \kappa^2 \right) \psi = \left[\frac{E^2}{1 - \kappa^2} + (1 + \kappa^2) \right] \psi,$$

dont le super-potential est donné par

$$W(x) = \sqrt{1 - \kappa^2} \left(x + \frac{E\kappa}{1 - \kappa^2} \right).$$

Faisons le changement de variable suivant

$$(2.14) \quad y = x + \frac{E\kappa}{1 - \kappa^2},$$

avec

$$(2.15) \quad x_0 = -\frac{E\kappa}{1 - \kappa^2},$$

est la position d'équilibre.

Dans ce cas, (2.13) prend la forme suivante :

$$(2.16) \quad \left[\frac{p_y^2}{2} + \frac{1}{2} (1 - \kappa^2) y^2 \right] \psi(y) = \tilde{E} \psi(y),$$

avec

$$(2.17) \quad \tilde{E} = \frac{E^2}{2(1 - \kappa^2)}.$$

L'équation (2.16) se montre comme une équation différentielle d'un oscillateur Harmonique à une dimension dont les solutions sont bien connues. Ainsi les solutions sont les suivants : Pour les valeurs propres, on a

$$(2.18) \quad \tilde{E} = \frac{E^2}{2(1 - \kappa^2)} = \omega' \left(n + \frac{1}{2} \right),$$

dont

$$\omega' = \sqrt{1 - \kappa^2}.$$

On trouve alors

$$(2.19) \quad \frac{E^2}{1 - \kappa^2} = \sqrt{1 - \kappa^2} (2n + 1),$$

Enfin, la forme finale du spectre d'énergie est donc

$$(2.20) \quad E_n = \pm (1 - \kappa^2)^{3/2} \sqrt{2n + 1}.$$

L'équation (2.20) décrit le spectre d'énergie de l'oscillateur de Klein-Gordon a 1D en présence d'un champ électrique constant. Ce spectre, en l'absence du champ $\kappa = 0$, tends vers la forme habituelle de l'oscillateur [16].

2.3 Les solutions propres de l'oscillateur de Dirac en présence d'un champ électrique à 1D

2.3.1 Les solutions propres via la méthode de SUSY-QM (Voir Annexe B)

L'équation de l'oscillateur de Dirac à une dimension est donnée par

$$(2.21) \quad (\sigma_x (p_x - im\omega x \sigma_z) + \sigma_z) \psi = E\psi.$$

L'opérateur de moment $p_x = -i\frac{d}{dx}$ et $\sigma_i (i = (x, y, z))$ sont les matrices de Pauli dont

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On peut obtenir l'oscillateur de Dirac généralisé à partir de l'oscillateur Dirac ordinaire à l'aide de la substitution suivante

$$(2.22) \quad m\omega x \rightarrow W(x)$$

Projetons (2.22) dans (2.21), on trouve

$$(2.23) \quad (\sigma_x (p_x - iW(x) \sigma_z) + \sigma_z) \psi = (E - U(x)) \psi,$$

où

$$(2.24) \quad [\sigma_x p_x - \sigma_y W(x) + \sigma_z - (E - U(x))] \psi = 0.$$

Posons maintenant ce qui suit

$$(2.25) \quad \psi = (\sigma_x p_x - \sigma_y W(x) + \sigma_z + (E - U(x))) \bar{\psi}.$$

La substitution de (2.25) dans (2.24); nous trouvons la nouvelle équation par rapport à la fonction d'onde $\bar{\psi}$ comme suit :

$$(2.26) \quad \left(p_x^2 + W^2 + 1 - (E - U)^2 - \sigma_z \frac{dW}{dx} + i\sigma_x \frac{dU}{dx} \right) \bar{\psi} = 0,$$

où

$$(2.27) \quad \left(p_x^2 + W^2 + 1 - (E - U)^2 - \sigma_z W' + i\sigma_x U' \right) \bar{\psi} = 0.$$

Soit

$$(2.28) \quad U = \kappa W,$$

alors

$$(2.29) \quad \left(p_x^2 + W^2 + 1 - (E - U)^2 - \sigma_z W' + i\kappa\sigma_x W' \right) \bar{\psi} = 0,$$

dont κ est une constante réelle. Dans ce cas, l'équation (2.27) devient :

$$(2.30) \quad \left(p_x^2 + W^2 + 1 - (E - \kappa W)^2 + (-\sigma_z + i\kappa\sigma_x) W' \right) \bar{\psi} = 0.$$

Il est important de noter que le spin est maintenant inclus dans un bloc $(-\sigma_z + i\kappa\sigma_x)$.

Posons que

$$(2.31) \quad \bar{\psi} = \chi\phi(x),$$

où χ est la partie spinorielle de la fonction d'onde satisfaisant l'équation :

$$(2.32) \quad (-\sigma_z + i\kappa\sigma_x) \chi = \lambda\chi,$$

avec des valeurs propres

$$(2.33) \quad \lambda = \sigma\sqrt{1 - \kappa^2}, \text{ avec } \sigma = \pm 1.$$

Ici σ est l'Hélicité de la particule.

Ainsi

$$(2.34) \quad \left(p_x^2 + W^2 + 1 - E^2 + 2E\kappa W - \kappa^2 W^2 + \sigma\sqrt{1 - \kappa^2} W' \right) \chi\phi(x) = 0,$$

où

$$(2.35) \quad \left[p_x^2 + (1 - \kappa^2)W^2 + 2E\kappa W + \sigma\sqrt{1 - \kappa^2}W' \right] \chi\phi = (E^2 - 1)\chi\phi.$$

Soit

$$(2.36) \quad \epsilon = \frac{E^2}{1 - \kappa^2} - 1,$$

$$(2.37) \quad \tilde{W} = \sqrt{1 - \kappa^2} \left(W + \frac{\kappa}{1 - \kappa^2} E \right),$$

alors (2.35) se transforme à

$$(2.38) \quad (p_x^2 + \tilde{W}^2 + \sigma\tilde{W}')\phi = \epsilon\phi,$$

En utilisant la méthode de la Super Symétrie (SUSY), la fonction \tilde{W} sera traitée comme un superpotentiel. La supersymétrie est liée au degré de liberté du spin de l'oscillateur de Dirac, le symbole $\sigma = +1$ correspond au premier partenaire (SUSY) de l'Hamiltonien H_- et le $\sigma = -1$ correspondant au second partenaire SUSY dont l'Hamiltonien est notée par H_+ .

2.3.2 Solution exacte de l'oscillateur de Dirac dans un champ électrique

Pour résoudre l'équation (2.38), considérons $W = x$. Dans ce cas, le terme d'interaction correspondant à la présence du champ électrique s'écrit par $U = \kappa W = \kappa x$.

Ainsi, l'équation (2.38) se transforme à

$$(2.39) \quad \left(p_x^2 + (1 - \kappa^2)(x - x_0)^2 + \sigma\sqrt{1 - \kappa^2} \right) \phi = \epsilon\phi,$$

où

$$(2.40) \quad x_0 = -\frac{\kappa E}{1 - \kappa^2},$$

est la position d'équilibre de notre oscillateur.

L'équation (2.39) a la forme de l'équation de l'oscillateur Harmonique à 1D dont les solutions sont bien connues. le spectre énergétique de cet oscillateur harmonique est bien connu

$$(2.41) \quad \epsilon = \sqrt{(1 + \kappa^2) (2n + 1 + \sigma)},$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

Enfin le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac est donné par la relation suivante

$$(2.42) \quad E_{\sigma}^{\pm} = \pm \sqrt{(1 - \kappa^2) \left(\sqrt{1 - \kappa^2} (2n + 1 + \sigma) + 1 \right)},$$

En introduisant

$$(2.43) \quad n_{\sigma} = n + (1 + \sigma) / 2$$

(2.42) devient

$$(2.44) \quad E_{\sigma}^{\pm} = \pm \sqrt{(1 - \kappa^2) \left(\sqrt{1 - \kappa^2} 2n_{\sigma} + 1 \right)}.$$

où $n_{-} = 0, 1, 2, \dots$ pour les états de spin $\sigma = +1$ et $n_{+} = 1, 2, \dots$ pour les états de spin $\sigma = -1$.

L'équation (2.44) donne le spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac a 1D en présence d'un champ électrique constant. Ce spectre, en l'absence du champ $\kappa = 0$, tends vers la forme habituelle de l'oscillateur [16].

2.4 Discussion des résultats

Les deux Figures. 2.1 et 2.2 montrent les deux spectres d'énergies des deux oscillateurs à une dimension en présence d'un champ électrique constant. Selon ces deux figures on aperçoit que

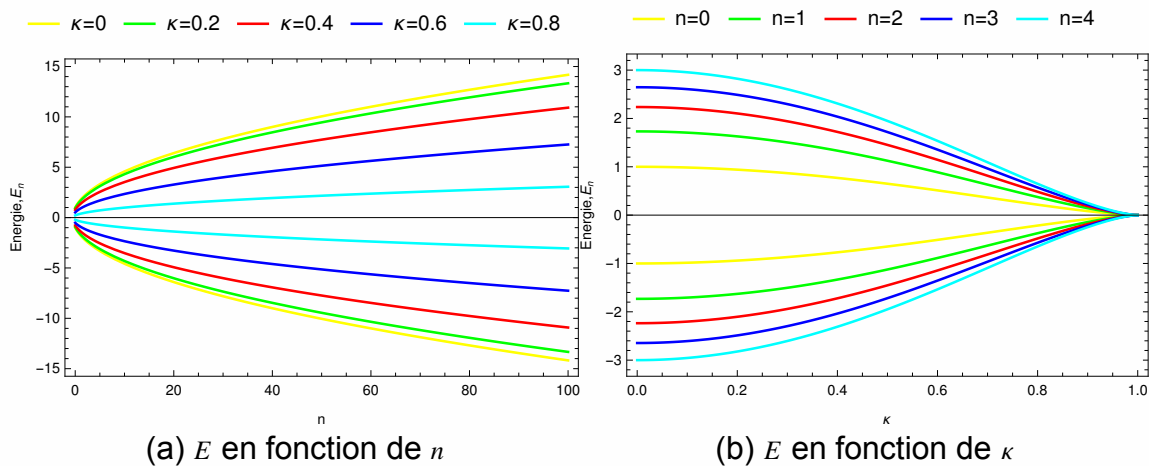


FIG. 2.1 : Spectre d'énergie de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un champ électrique constant ζ

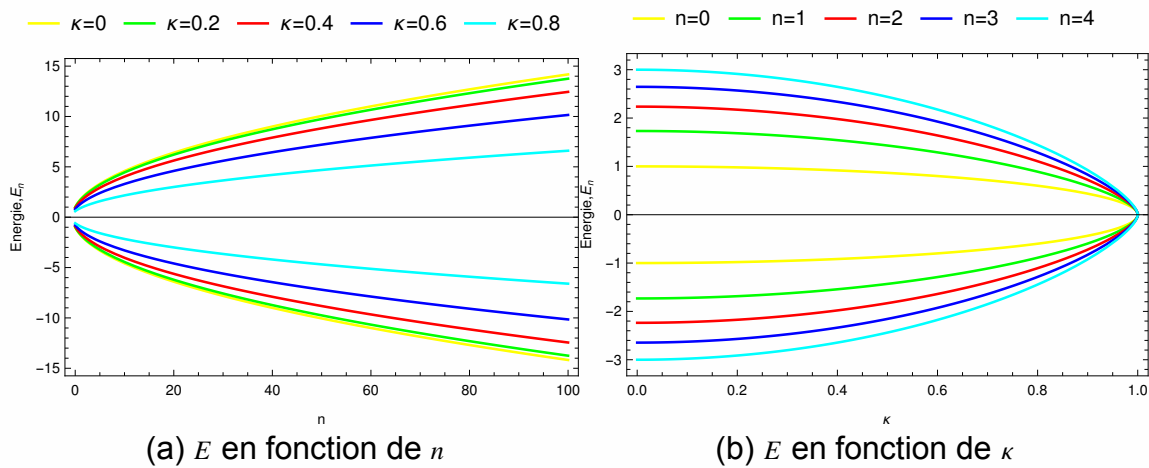


FIG. 2.2 : Spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac à une dimension

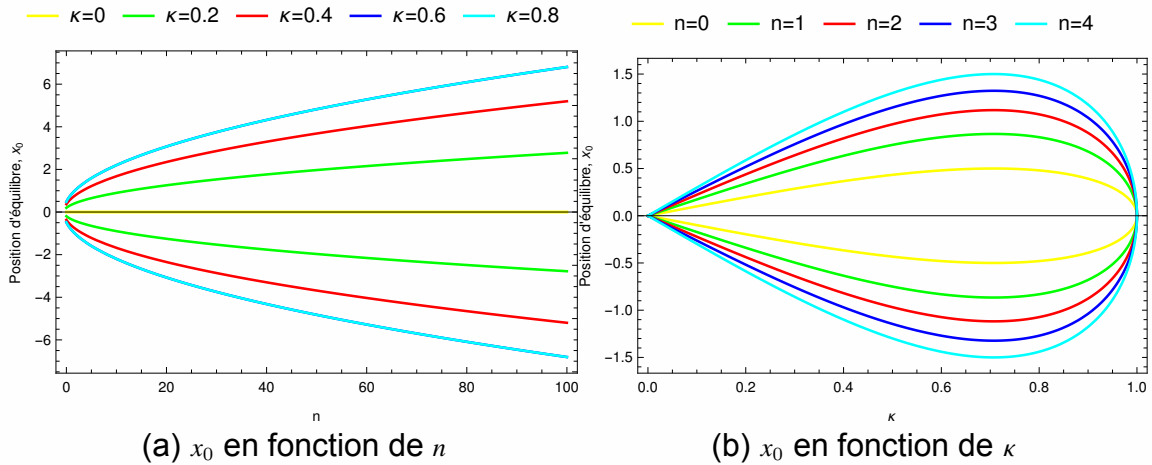


FIG. 2.3 : Position d'équilibre de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un champ électrique constant ζ

- Pour les courbes en fonction du nombre quantique n , toutes les courbes sont au-dessous de la limite lorsque le champ est nul ($\kappa = 0$).
- Pour les courbes en fonction du champ, Il est intéressant de noter que lorsque la valeur du champ électrique est supérieure à la valeur critique $\kappa = 1$, les états propres bornés sont absents pour les deux spectres. Ainsi, toutes les courbes se rencontrent au point $\kappa = 1$ et les états propres où $\kappa > 1$ sont non permis
- La diminution du gap énergétique en fonction du κ jusqu'à son annihilation au point $\kappa = 1$
- On peut voir que les niveaux d'énergie non nuls sont dégénérés deux fois lorsque $n_+ = n_- = 1, 2, \dots$. C'est le résultat de la supersymétrie.

Aussi, selon les figures. 2.3.2.4 concernant la position d'équilibre des deux oscillateurs, on peut constater que cette dernière est bien quantifiée et ça à cause de l'application du champ électrique. Ainsi,

- Les deux figures montrent le même comportement à l'exception la variation par rapport au paramètre κ

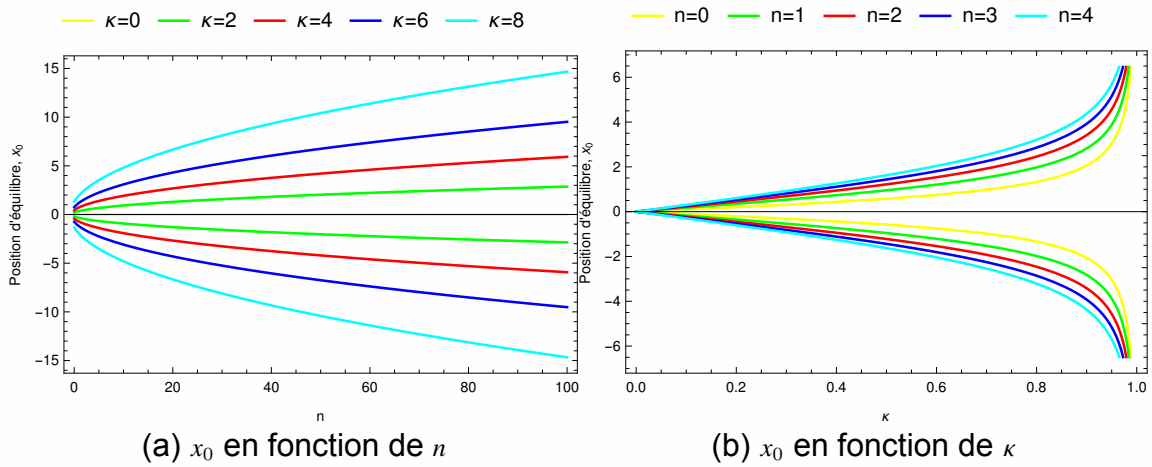


FIG. 2.4 : Position d'équilibre de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un champ électrique constant ζ

- La position d'équilibre est quantifiée : c'est l'effet du champ électrique : chaque niveau d'énergie oscille avec sa propre position d'équilibre
- Le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon montre pour chaque niveau a un maximum autour d'un champ $\kappa = 0.5$.
- Pour les deux cas asymptotiques $\kappa = 0$ et $\kappa = 1$ on a que : pour $\kappa = 0$ on retrouve le cas d'un oscillateur relativiste en l'absence d'un champ électrique. Ainsi, tous les niveaux ont le même point d'équilibre $x = 0$. Par contre, le cas $\kappa = 1$ le spectre d'énergie s'annule (cas non physique). Pour le cas de l'oscillateur de Dirac au même point, pour chaque niveau subit une divergence et on est aussi dans un cas non physique.

A ce stade, une importante remarque peut être faite : Nous savons aussi que l'oscillateur de Dirac est sorti de son champ de recherche purement théorique pour devenir une réalité comme il l'a été montré par Franco-Villafane et al [1]. Ces auteurs ont présenté pour la première fois la réalisation expérimentale de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel (Voir Figure. 2.5) qui peut être considéré comme un paradigme pour les systèmes relativistes exactement résolubles. L'expérience repose sur une relation entre l'oscillateur de Dirac et un système de

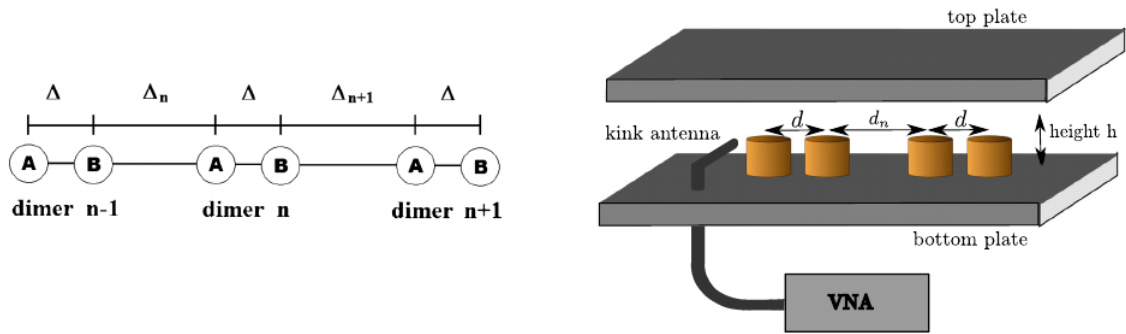


FIG. 2.5 : Réalisation expérimentale de l'oscillateur de Dirac à une dimension (figure d'après la Ref. [1])

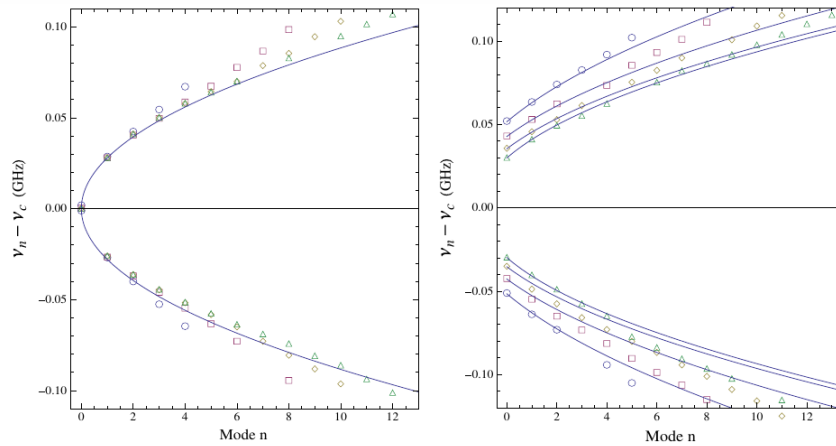


FIG. 2.6 : Spectre d'énergie expérimental de l'oscillateur de Dirac à 1D sans (à gauche) et avec (à droite) masse (figure d'après la Réf. [1])

liaisons fortes. Ce système de liaison serrée est mis en œuvre comme un système hyperfréquence par une chaîne de disques diélectriques couplés, ou le couplage est évanescent et peut être ajusté de manière appropriée. Les résonances du système micro-ondes fini donnent le spectre de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel avec et sans terme de masse (voir Figure. 2.6). La forme du spectre de la dernière figure est bien similaire à la forme du spectre trouvé théoriquement dans la littérature.

CHAPITRE 3

LES PROPRIÉTÉS THERMODYNAMIQUES DE CES OSCILLATEURS RELATIVISTES

3.1 Détermination de la fonction de partition de l'oscillateur de Klein-Gordon Z_{KGO}

L'importance majeure de la détermination du spectre d'énergie pour les deux types d'oscillateurs se résume dans la détermination des propriétés thermodynamiques de ces derniers par l'introduction de la fonction de partition.

Comme on le sait, toutes les grandeurs thermodynamiques peuvent être obtenues à partir de la fonction de partition Z . C'est la fonction de départ pour la dérivation de tous les propriétés thermiques du système en question. Elle se définit par la sommation directe de tous les niveaux d'énergies disponibles du système. Ainsi, étant donné le spectre d'énergie, la fonction de partition Z à une température finie T est obtenue à partir du facteur de Boltzmann est suit la relation suivante

$$(3.1) \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n},$$

où $\beta = \frac{1}{k_B T}$ est la température inverse et k_B est la constante de Boltzmann.

L'évaluation de la somme de la fonction Z se fait pratiquement par deux mé-

thodes : celle de Poisson et de l'autre d'Euler-Maclaurin. Les deux méthodes ont un point commun : la conversion de la somme en intégrale de telle façon la différence entre les deux tend vers zéro. Dans notre travail, nous nous concentrons sur la méthode basée sur l'approche d'Euler-Maclaurin [30, 36, 37].

Partons de la sommation ci-dessous

$$(3.2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \frac{f(0)}{2} + \int_0^{\infty} f(x)dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0) + R_k,$$

avec

$$(3.3) \quad R_k = \int_0^{\infty} \frac{B_k(1-2p)}{2p!} f^{(2p)} dx,$$

est le terme résidu tendant vers zéro pour certaines valeurs de p , B_{2p} sont les nombres de Bernoulli, $f^{(2p-1)}$ est la dérivée d'ordre $(2p-1)$ et enfin $B_k(x)$ sont les polynômes de Bernoulli.

En générale, ces polynômes sont définis comme suit

$$(3.4) \quad B_n(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} B_j t^{n-j}.$$

Ainsi

$$(3.5) \quad B_0(x) = 1,$$

$$(3.6) \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$(3.7) \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6},$$

$$(3.8) \quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$(3.9) \quad B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$(3.10) \quad B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^2.$$

En se limitant à l'ordre $p = 2$, la fonction de partition est donnée par :

$$(3.11) \quad Z = \frac{f(0)}{2} + \int_0^\infty f(x)dx - \left(\frac{1}{24}f^{(1)}(0) - \frac{1}{720}f^{(3)}(0) \right).$$

Ici, nous avons utilisés les valeurs suivantes : $p = 2$, $B_2 = \frac{1}{6}$ et $B_4 = -\frac{1}{30}$.

Dans notre cas, partons de la forme générale de notre spectre exprimé par :

$$(3.12) \quad E_n = \sqrt{an + b},$$

dont les paramètres a et b de l'oscillateur de Klein-Gordon sont

$$a = 2(1 - \kappa^2)^3,$$

$$b = (1 - \kappa^2)^3.$$

D'après l'équation (3.1), on peut écrire la fonction de partition par

$$(3.13) \quad Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(\sqrt{an+b}-\sqrt{b})}.$$

Posons que

$$(3.14) \quad f(x) = e^{-\beta(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b})},$$

alors

$$(3.15) \quad \begin{aligned} Z &= \sum_{x=0}^{\infty} f(x). \\ &= \frac{f(0)}{2} + \int_0^{\infty} f(x)dx - \left(\frac{1}{24}f^{(1)}(0) - \frac{1}{720}f^{(3)}(0) \right). \end{aligned}$$

L'évaluation de l'intégrale figurant dans (3.15) est déterminée en cheminant les étapes suivantes :

soit

$$(3.16) \quad \int_0^{\infty} f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-\beta(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b})} dx.$$

Posons que

$$(3.17) \quad t = \sqrt{ax+b} \Rightarrow x = \frac{1}{a}(t^2 - b),$$

alors

$$(3.18) \quad dx = \frac{2}{a}t dt,$$

dont les nouvelles bornes de l'intégrale sont

$$(3.19) \quad \begin{cases} x = 0, & t = \sqrt{b} \\ x = +\infty, & t = +\infty \end{cases}.$$

Ainsi (3.16) devient

$$(3.20) \quad \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{2e^{\beta\sqrt{b}}}{a} \int_{\sqrt{b}}^{\infty} te^{-\beta t} dt.$$

On peut voir que cette intégrale se transforme à

$$(3.21) \quad \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{2e^{\beta\sqrt{b}}}{a} \int_{\sqrt{b}}^{\infty} te^{-\beta t} dt = -\frac{2e^{\beta\sqrt{b}}}{a} \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{\sqrt{b}}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \beta} e^{-\beta t} dt,$$

où

$$(3.22) \quad \int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{2}{a\beta^2} (\beta\sqrt{b} + 1).$$

L'évaluation des dérivées figurant dans la formule **d'Euler-MacLaurin** au point $x = 0$ donne

$$(3.23) \quad f^{(1)}(x) = -a \left(\frac{\beta}{2\sqrt{ax+b}} \right) e^{-\beta(\sqrt{ax+b}-\sqrt{b})}, \Rightarrow f^{(1)}(0) = -a \frac{\beta}{2\sqrt{b}},$$

(3.24)

$$f^{(3)}(x) = -\frac{a^3}{8} \left(\frac{3\beta}{(ax+b)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\beta^2}{(ax+b)^2} + \frac{\beta^3}{(ax+b)^{\frac{3}{2}}} \right) \Rightarrow f^{(3)}(0) = -\frac{a^3}{8} \left(\frac{3\beta}{b^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\beta^2}{b^2} + \frac{\beta^3}{b^{\frac{3}{2}}} \right).$$

Substitution tous ces équations dans (3.11), la forme finale de notre fonction de partition est

$$(3.25) \quad Z = \frac{1}{2} + \frac{2}{a\beta^2} (\beta\sqrt{b} + 1) + \frac{\beta a}{24\sqrt{b}} - \frac{a^3}{720} \left[\left(\frac{3\beta}{8b^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\beta^2}{8b^2} + \frac{\beta^3}{8b^{\frac{3}{2}}} \right) \right],$$

où

$$(3.26) \quad Z_{KGO} = \frac{1}{2} + \frac{2}{(2(1-\kappa^2)^3)\beta^2} (\beta\sqrt{(1-\kappa^2)} + 1) + \frac{\beta(2(1-\kappa^2)^3)}{24(\sqrt{(1-\kappa^2)^3})} - \left(\frac{(2(1-\kappa^2)^3)^3}{720} \right) \times \left(\frac{3\beta}{8((1-\kappa^2)^3)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\beta^2}{8((1-\kappa^2)^3)^2} + \frac{\beta^3}{8((1-\kappa^2)^3)^{\frac{3}{2}}} \right).$$

3.2 Détermination de la fonction de partition de l'oscillateur de Dirac Z_{DO}

Partons de la forme du spectre suivant

$$(3.27) \quad E = \pm \sqrt{(1 - \kappa^2) \left(\sqrt{(1 - \kappa^2) 2n + 1} \right)}.$$

Ce dernier concerne l'oscillateur de Dirac en présence d'un champ électrique trouvé par l'utilisation de la méthode SUSY [38].

Posons que

$$(3.28) \quad a' = 2 \left(1 - \kappa^2 \right)^{\frac{3}{2}},$$

$$(3.29) \quad b' = 1 - \kappa^2,$$

alors la fonction de partition devient

$$(3.30) \quad Z_{DO} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \left(\sqrt{\left(2(1-\kappa^2)^{\frac{3}{2}} \right) n + (1-\kappa^2) - \sqrt{(1-\kappa^2)}} \right)}.$$

L'utilisation de l'approche d'Euler-MacLaurin donne

$$(3.31) \quad Z_{DO} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\left(2(1-\kappa^2)^{\frac{3}{2}} \right) \beta^2} \left(\beta \sqrt{1-\kappa^2} + 1 \right) + \frac{\beta \left(2(1-\kappa^2)^{\frac{3}{2}} \right)}{24 \sqrt{1-\kappa^2}} - \frac{\left(2(1-\kappa^2)^{\frac{3}{2}} \right)^3}{720} \left[\left(\frac{3\beta}{8(1-\kappa^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3\beta^2}{8(1-\kappa^2)^2} + \frac{\beta^3}{8(1-\kappa^2)^{\frac{3}{2}}} \right) \right].$$

3.3 Résultats et discussions

Avant de présenter les résultats pour l'oscillateur de Klein-Gordon, toutes les propriétés thermodynamiques de l'oscillateur, comme l'énergie libre, l'entropie,

l'énergie totale et la chaleur spécifique, sont obtenues à travers la fonction de partition Z_{KGO} . Les quantités thermodynamiques de toutes ces quantités en fonction de Z_{KGO} se calculent en utilisant les relations suivantes :

$$(3.32) \quad F = -\frac{1}{\beta} \ln Z_{\text{KGO}}, \quad U = -\frac{d \ln Z_{\text{KGO}}}{d\beta},$$

$$(3.33) \quad S = \ln Z_{\text{KGO}} - \beta \frac{d \ln Z_{\text{KGO}}}{d\beta}, \quad C_v = \beta^2 \frac{d^2 \ln Z_{\text{KGO}}}{d\beta^2}.$$

Maintenant, nous sommes prêts à présenter nos calculs concernant les propriétés thermodynamiques de ces oscillateurs. Toutes les quantités ont été calculées en fonction de l'inverse de température β

Les deux figures. 3.1 et 3.2 montrent tous les propriétés thermodynamiques pour les deux types d'oscillateurs en utilisant la méthode d'Euler-Maclaurin

A partir de ces figures on peut constater que les courbes sont pratiquement identiques. L'effet du champ électrique est clair et bien présent dans ces courbes. Les divergences existant dans ces courbes sont dues principalement à la négligence du terme restant R_k . On peut voir que l'exactitude de l'approximation de la fonction de partition(3.2) dépend du comportement asymptotique du terme R_k lorsque $k \rightarrow \infty$. Les courbes de la chaleur spécifique pour ces deux oscillateurs tendent vers la même limite $2k_B$ à hautes températures : c'est la loi de Dulong-Petit pour un gaz idéal relativiste [6, 39].

L'influence du champ électrique sur ces propriétés est bien claire pour les deux figures : alors que les courbes de la chaleur spécifique sont bien serrées pour le cas de l'oscillateur de Dirac, elles sont bien séparées pour l'oscillateur de Klein-Gordon. L'intervalle du paramètre κ est bien limité pour les deux oscillateurs. Les valeurs du champ sont des valeurs non permises des deux spectres. Par conséquent, la détermination de ces quantités est impossible.

Pour la bonne compréhension de l'influence du champ électrique pour une température donnée, nous avons tracé la variation de la chaleur spécifique en

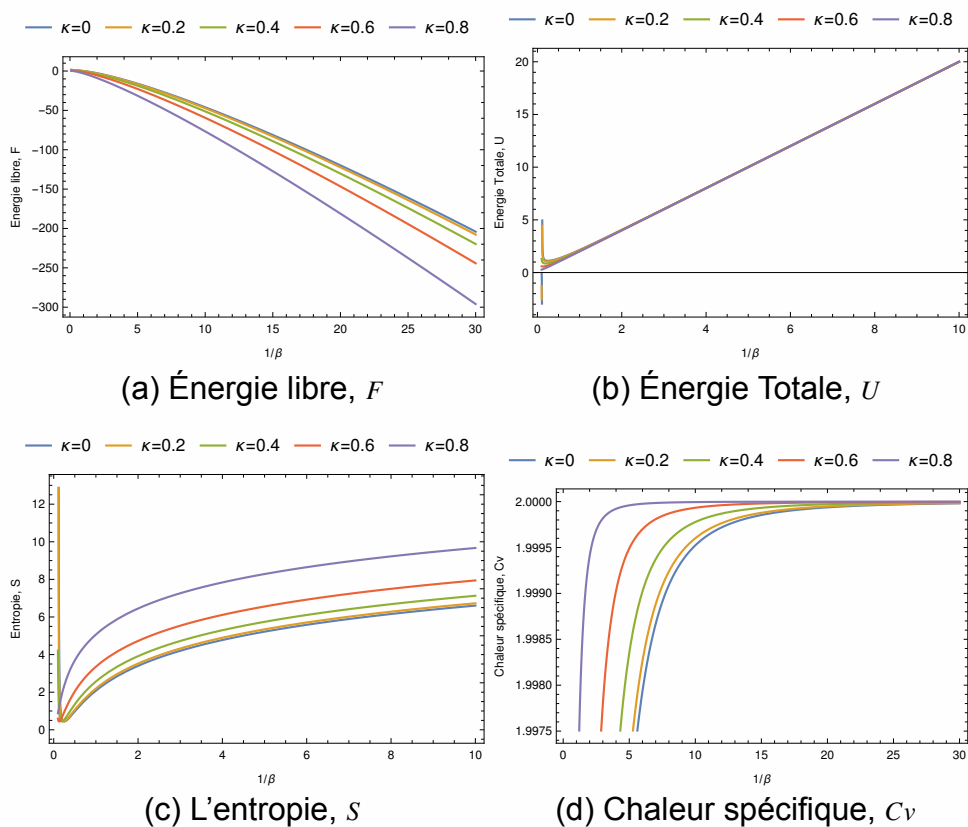


FIG. 3.1 : Propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D en présence d'un champ électrique constant

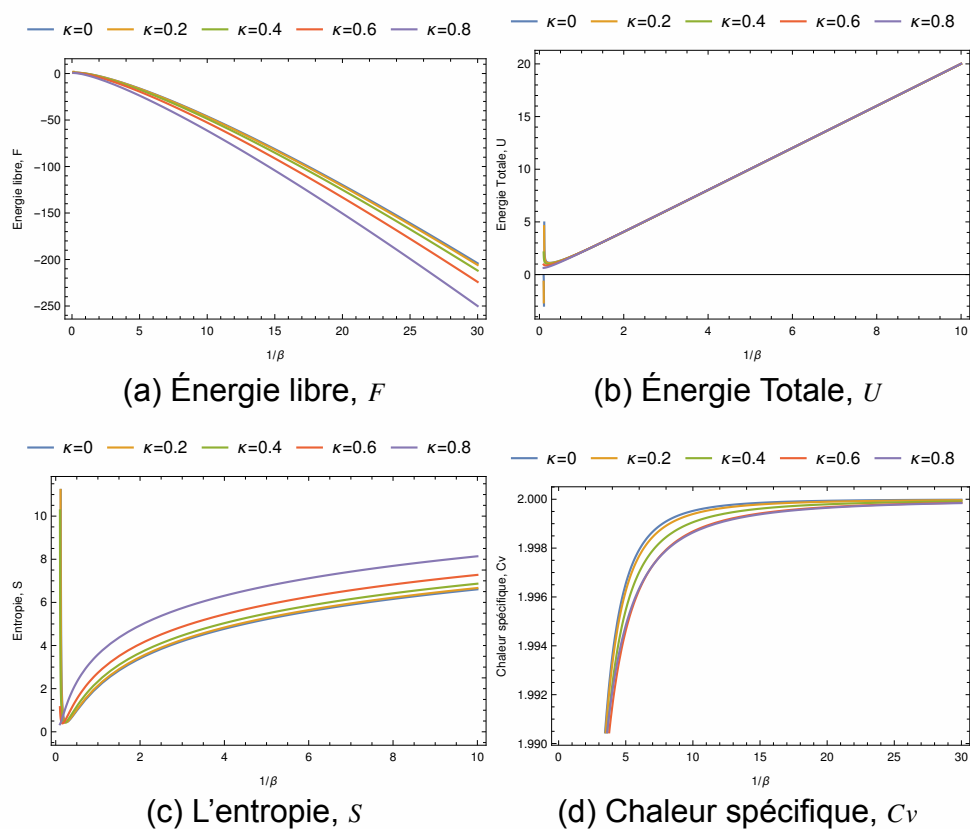


FIG. 3.2 : Propriétés thermodynamiques de l'oscillateur de Dirac à 1D en présence d'un champ électrique constant

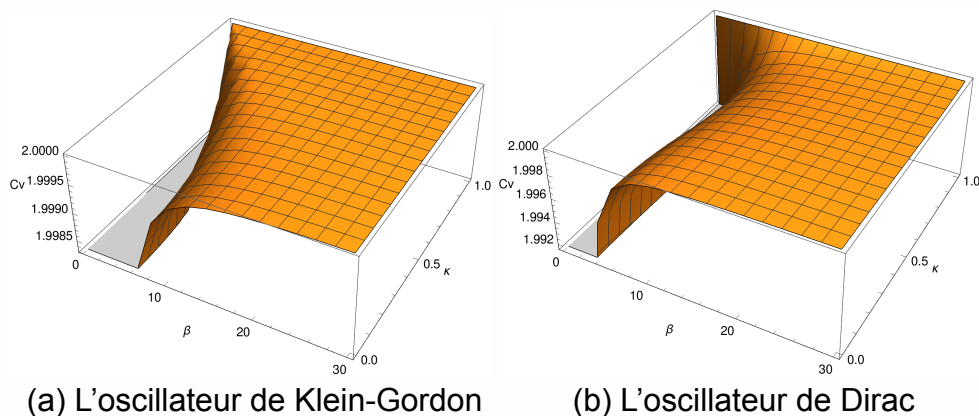


FIG. 3.3 : Chaleur spécifique C_v en fonction de $\frac{1}{\beta}$ et κ à trois dimensions

fonction des deux variables $\frac{1}{\beta}$ et κ en trois dimension .

Enfin, quelques remarques sur la précision et la convergence de nos calculs numériques peuvent être faites ici : les divergences aperçues dans les courbes de la chaleur spécifique peuvent être remédié si (i) on prend on considération le terme restant dans l'approche d'Euler-Maclaurin R_k [40, 41]où, (ii) en utilisant la méthode de la régularisation basée sur la fonction Zeta [16, 42–45]

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons essayé de déduire les propriétés thermodynamiques des deux oscillateurs de Klein-Gordon et de Dirac en présence d'un champ électrique constant. Ces deux oscillateurs ont montré leurs utilités dans différents modèles en physique moderne [5–7, 9, 12, 14–20, 23–25, 27, 46–51]. En premier lieu, nous avons fait un bref rappel sur les équations relativistes pour les particules bosoniques et les particules fermioniques. Ensuite, nous avons considéré le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon uni-dimensionnel en présence d'un champ électrique. Les solutions propres sont bien mises en évidence et la discussion sur l'influence du champ sur ce dernier a été bien établie. Cette discussion a été étendue au cas du spectre de l'oscillateur de Dirac. La différence de l'influence de ce champ sur les deux spectres est bien claire.

- Pour le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon qui présente l'objectif de ce mémoire on peut noter le suivant : le spectre d'énergie de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un champ électrique constant croît en augmentant le champ électrique ζ . Meme remarque pour le cas de l'oscillateur de Dirac
- On peut voir que les niveaux d'énergie non nuls pour les deux oscillateurs sont dégénérés deux fois lorsque $n_+ = n_- = 1, 2, \dots$. C'est le résultat de la supersymétrie.
- Il est intéressant de noter que lorsque la valeur du champ électrique est supérieure à la valeur critique $|\kappa| > 1$, les états propres bornés sont absents pour les deux oscillateurs.
- Enfin, la position d'équilibre est bien quantifiée. Cette quantification diffère d'un niveau à l'autre pour les deux oscillateurs. L'origine principale de ce phénomène vient essentiellement de l'application du champ électrique.

Après avoir discuté le rôle du champ sur les deux spectres, nous avons utilisé

tous les deux pour construire les courbes des fonctions thermiques via la méthode d'Euler-Maclaurin. L'influence du champ sur ses propriétés a été aussi l'objet principal de cette étude. L'influence du champ électrique constant est bien claire pour les deux oscillateurs.

En concluons, notre problème en question est très intéressant aux niveaux théorique et expérimental : au niveau théorique il sert comme un modèle réaliste pour des exemples qui ont des solutions exactes, par contre au niveau expérimental, notre oscillateur a été bien conçu et réalisé par le modèle d'un système *of trapped atomic ions*. L'oscillateur de Dirac, en utilisant le modèle *trapped atomic ions*, est bien réalisable expérimentalement comme le prévoit Bermudez [10] et Blatt [12].

Aussi, après la réalisation expérimentale de cet oscillateur à une dimension [1], Yang et al [46] ont proposé le suivant : l'oscillateur harmonique isotrope complété par une forte interaction spin-orbite est la pierre angulaire de la structure nucléaire depuis sa création il y a plus de sept décennies. Les auteurs ont proposé d'introduire *l'oscillateur de Dirac*, une base entièrement relativiste qui possède tous les attributs souhaités de l'oscillateur harmonique ordinaire tout en incorporant naturellement un fort couplage spin-orbite. Ce choix est dû à la puissance et la flexibilité de la base de l'oscillateur de Dirac dans la résolution de problèmes de structure nucléaire dans le cadre de la théorie de la fonctionnelle de densité covariante. La méthode de base des calculs auto-cohérents des énergies de liaison et des densités d'état fondamental pour un ensemble sélectionné de noyaux doublement magiques sont effectuées en utilisant la base de l'oscillateur de Dirac et sont ensuite comparées aux résultats obtenus avec la méthode de Runge-Kutta souvent utilisé. Les résultats obtenus à l'aide de la base de l'oscillateur de Dirac reproduisent avec une grande précision ceux obtenus à l'aide de la méthode de Runge-Kutta et suggèrent une voix claire pour une généralisation aux systèmes à symétrie axiale. Enfin, les auteurs concluent que bien que l'oscillateur harmonique avec corrections spin-orbite soit la base du modèle de couches nucléaires depuis le début, l'oscillateur de Dirac est pratiquement inconnu de la communauté des

physiciens nucléaires. Dans leur article, ils illustrent la puissance et la flexibilité de l'oscillateur de Dirac et suggèrent des extensions à l'étude des systèmes sans symétrie sphérique, comme requis dans les calculs contraints des excitations nucléaires.

ANNEXE A

L'OSCILLATEUR DE DIRAC : RAPPEL

L'équation de l'oscillateur de Dirac est donné par [2, 52–56]

$$(A.1) \quad \left\{ c\boldsymbol{\alpha} \left(\mathbf{p} - im\omega\boldsymbol{\gamma}^0 \mathbf{r} \right) + mc^2\boldsymbol{\gamma}^0 \right\} \psi = E\psi,$$

avec

$$(A.2) \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

sont les matrices de Dirac, et $\boldsymbol{\sigma}$ étant les matrice de Pauli. A partir de l'équation (A.1), l'Hamiltonien de Dirac est définie par :

$$(A.3) \quad H_D = c\boldsymbol{\alpha} \left(\mathbf{p} - im\omega\boldsymbol{\gamma}^0 \mathbf{r} \right) + mc^2\boldsymbol{\gamma}^0,$$

s'écrit aussi dans une forme covariante par :

$$(A.4) \quad \left\{ \boldsymbol{\gamma}^\mu p_\mu - m + \left(\frac{ge}{4m} \right) \boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \right\} \psi = 0,$$

dont

$$(A.5) \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \boldsymbol{\sigma}^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\boldsymbol{\gamma}^\mu, \boldsymbol{\gamma}^\nu], \boldsymbol{\gamma}^\mu = (\boldsymbol{\gamma}^0, \boldsymbol{\gamma}).$$

Ici, le tenseur électromagnétique s'écrit sous la forme

$$(A.6) \quad A_\mu = \frac{1}{4} \{2x_\mu(Ux) - x^2 U_\mu\}$$

où A_μ est le potentiel quadri-vecteur à l'oscillateur de Dirac dont $g=2m/e$ est le moment magnétique anormal. L'équation (A.4) est similaire à l'équation de Dirac pour des particules neutres ayant un moment magnétique anormal μ ce qui donne l'équation de Dirac-Pauli suivante :

$$(A.7) \quad \left(\gamma^\mu p_\mu + \left(\frac{\mu}{2m} \right) \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - m \right) \psi_D = 0,$$

où le terme $\frac{\mu}{2} \gamma^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$ s'écrit comme suit :

$$(A.8) \quad \frac{\mu}{2} \sigma^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + i\sigma E - \sum \mathbf{B},$$

avec

$$(A.9) \quad \alpha = \gamma^0 \boldsymbol{\gamma}, \Sigma^k = \frac{1}{2} \epsilon^{kij} \sigma^{ij},$$

et ϵ^{kij} le tenseur Levi-Civita. Maintenant l'expression :

$$(A.10) \quad \psi_D(\mathbf{r}, t) = \exp(-iEr) \Phi_D(\mathbf{r}),$$

conduit à

$$(A.11) \quad H_D = c\alpha p + ic\mu\gamma E - \mu c\gamma^0 \sum \mathbf{B} + mc^2\gamma^0.$$

Pour $\mathbf{B} = 0$, (A.11) devient

$$(A.12) \quad H_D = c\alpha p + ic\mu\gamma E + mc^2\gamma^0.$$

En comparant (A.12) avec A.3, on peut voir, que l'oscillateur de Dirac est simplement un cas particulier des particules fermioniques neutres dans un champ électrique extérieur dont $\mu E \mapsto m\omega r$ [57, 58].

ANNEXE B

LA SUPERSYMMÉTRIE DANS LA MÉCANIQUE QUANTIQUE

B.1 Introduction

Au cours des dix dernières années, les idées de supersymétrie ont été appliquées à de nombreuses applications quantiques non relativistes. Les potentiels exactement solubles peuvent être compris en termes de quelques idées de base qui incluent les potentiels de partenaires supersymétriques, l'invariance de forme et les transformations d'opérateurs. La famille des potentiels solubles ont tous la propriété d'invariance de forme.

L'obtention de solutions exactes à l'équation de Schrödinger (et à son homologue relativiste, l'équation de Dirac) a toujours été au centre des études de la mécanique quantique. Une caractéristique intéressante était la méthode de factorisation pour obtenir des solutions propres. Un hamiltonien peut être réécrit comme un produit de deux facteurs, généralement appelés « opérateurs d'augmentation et d'abaissement ». La méthode remplace la nécessité de résoudre directement l'équation de Schrödinger, une équation différentielle du second ordre, avec la capacité de résoudre une équation du premier ordre. Schrödinger lui-même l'a remarqué et a fourni un moyen de factoriser l'hamiltonien pour l'atome d'hydro-

gène et d'autres potentiels en 1941 [31]. Une décennie plus tard, Infeld et Hull [59] ont généralisé cela à de nombreux autres systèmes (un ensemble de systèmes maintenant connu sous le nom de "potentiels invariants de forme"). Toutes ces observations se sont avérées être des manifestations cachées d'une symétrie sous-jacente, expliquée par la suite par la mécanique quantique supersymétrique.

L'élan suivant est venue au début des années 1980, lorsque les physiciens des particules élémentaires tentant de trouver une structure sous-jacente aux forces fondamentales de la nature, ont proposé l'existence de particules partenaires "caché" aux diverses particules élémentaires connues (ou conjecturées). Ainsi, au photon est conjecturé le photino ; au gluon liant les quarks, le gluino ; au graviton encore inobservé, le gravitino ; et à la particule W, le wino (prononcé wee-no). Ces partenariats de particules et leurs interrelations constituent ce qu'on appelle la supersymétrie.

Ainsi, la supersymétrie avec son nouvel appareil mathématique conduisit à étudier d'autres partenariats dans d'autres domaines de la physique. L'un était la mécanique quantique ordinaire elle-même. La supersymétrie en mécanique quantique (SUSY-QM), basée sur la notion de « potentiels partenaires » dérivables d'un « super-potentiel » sous-jacent, est née. Il s'est rapidement avéré qu'il avait une valeur en soi, avec une application à la résolution de nombreuses questions de mécanique quantique et à la pose de diverses nouvelles intéressantes [60–66].

Enfin, la supersymétrie SUSY est une symétrie supposée de la physique des particules qui postule une relation profonde entre les particules de spin demi-entier (les fermions) qui constituent la matière et les particules de spin entier (les bosons) véhiculant les interactions. Dans le cadre de la SUSY, chaque fermion est associé à un superpartenaire de spin entier, alors que chaque boson est associé à un superpartenaire de spin demi-entier. Elle a été introduite dans la physique des hautes énergies dans le but d'obtenir une description unie de toutes les interactions fondamentales de la nature [63]. Un système supersymétrique est caractérisé par une décomposition de l'espace d'Hilbert en deux sous-espaces en

somme directe d'un espace bosonique et un espace fermionique et un opérateur A qui transforme les états bosoniques en états fermioniques et vice-versa.

B.2 La supersymétrie en mécanique Quantique

B.2.1 Formulation Hamiltonienne

L'Hamiltonien d'un oscillateur Harmonique est donnée par

$$(B.1) \quad H = -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{4}\omega^2 x^2.$$

Définissons maintenant les deux opérateurs

$$(B.2) \quad A^- = \frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\omega x, \quad A^+ = -\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\omega x,$$

qui sont les deux opérateurs d'annihilation et création respectivement. On peut voir que

$$(B.3) \quad A^- A^+ - A^+ A^- \equiv [A^-, A^+] = \omega.$$

L'opérateur

$$(B.4) \quad N = \frac{1}{\omega} A^+ A^-,$$

est Hermite. Soit $|n\rangle$ les vecteurs propres de N . Ainsi

$$(B.5) \quad N |n\rangle = n |n\rangle$$

D'autres part, on a que

$$(B.6) \quad \begin{aligned} N\psi &= \frac{1}{\omega} A^+ A^- \psi \\ &= \frac{1}{\omega} \left(-\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\omega x \right) \left(\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}\omega x \right) \psi \\ &= \frac{H}{\omega} \psi - \frac{1}{2} \psi. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$(B.7) \quad [N, H] = 0.$$

Les deux opérateurs ont une base commune $|n\rangle$, et on aboutit à l'équation suivante

$$(B.8) \quad H = \omega \left(N + \frac{1}{2} \right),$$

dont

$$(B.9) \quad \begin{aligned} H |n\rangle &= \omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \\ &= \omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \end{aligned}$$

Enfin le spectre d'énergie sera alors

$$(B.10) \quad E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Quelques propriétés concernant les deux opérateurs peuvent être récapitulées comme suit

$$(B.11) \quad [N, A^+] = A^+,$$

$$(B.12) \quad [N, A^-] = -A^-,$$

$$(B.13) \quad A^+ |n\rangle = \sqrt{\omega(n+1)} |n+1\rangle,$$

$$(B.14) \quad A^- |n\rangle = \sqrt{\omega n} |n-1\rangle.$$

B.2.2 Super-potentiel

Notre objectif est de résoudre l'équation de Schrödinger pour déterminer l'ensemble complet des valeurs propres E_n et des fonctions propres $\psi_n(x, a)$ pour un

hamiltonien H donné :

$$(B.15) \quad H\psi_n(x, a) \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x, a) \right] \psi_n(x, a) = E_n \psi_n(x, a),$$

Ici, le paramètre a décrit tous les quantités entrant dans notre système en question.

Nous avons considéré l'oscillateur harmonique, utilisant un schéma basé sur l'algèbre, plutôt que de résoudre une équation différentielle. Dans ce chapitre, nous montrerons que la méthode algébrique utilisée pour l'oscillateur harmonique peut être étendue à d'autres systèmes de mécanique quantique. Cependant, il convient de noter qu'il existe un avantage souvent négligé associé à la méthode traditionnelle. Généralement, les solutions propres des systèmes quantique sont déterminées après des calculs assez fastidieux. Par contre, **SUSY-QM** adopte une approche différente. Elle fournit une méthode plus simple pour dériver les valeurs propres de l'énergie. Cependant, il ne détermine les fonctions propres que récursivement.

Revenons maintenant au cas de l'oscillateur Harmonique. On peut factoriser l'Hamiltonien

$$(B.16) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

en produit de deux opérateurs A^\dagger et A^- comme suit

$$(B.17) \quad H = A^+ A^- + \frac{1}{2}\hbar\omega$$

dont

$$(B.18) \quad A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m}{2}}\omega x,$$

$$(B.19) \quad A^- = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\frac{m}{2}}\omega x.$$

Nous allons généraliser cette méthode pour factoriser un hamiltonien avec un potentiel arbitraire $V(x, a)$. Pour l'oscillateur harmonique, le terme $\sqrt{\frac{m}{2}}\omega$ génère $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$ pour le potentiel. D'une manière analogue, nous définissons une fonction réelle $W(x, a)$ donnant le potentiel $V(x, a)$.

Ce progéniteur $W(x, a)$ de la fonction potentielle est connu sous le nom de **super-potentiel**. En fait un super-potentiel $W(x, a)$ engendre deux potentiels $V_{\pm}(x, a)$ qui sont appelés **potentiels partenaires**. Dans le cas de l'oscillateur harmonique, nous introduisons deux opérateurs

$$(B.20) \quad A^+ = -\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a),$$

$$(B.21) \quad A^- = \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a).$$

Leur produit opérateur A^+A^- est équivalent à

$$(B.22) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \left[W^2(x, a) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx} \right].$$

D'où l'équation de Schrödinger pour un système mécanique quantique décrit par un potentiel

$$(B.23) \quad V(x, a) = W^2(x, a) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx},$$

peut être factorisé comme

$$(B.24) \quad \begin{aligned} & \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \left[W^2(x, a) - \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx} \right] \right) \psi(x, a) \\ &= \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \psi(x, a) \\ &\equiv A^+ A^- \psi(x, a). \end{aligned}$$

Si on intervertit les opérateurs A^+ et A^- , on obtient

$$(B.25) \quad \begin{aligned} A^- A^+ \psi(x, a) &\equiv \left(\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \left(-\frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \\ &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \left[W^2(x, a) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx} \right] \right) \psi(x, a), \end{aligned}$$

qui est aussi une équation de Schrödinger, mais pour un potentiel différent :

$$(B.26) \quad W^2(x, a) + \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx}.$$

Ainsi, un super-potentiel $W(x, a)$ nous aide à factoriser deux hamiltoniens, que nous noterons

$$(B.27) \quad H_{\pm} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_{\pm}(x, a),$$

associés à des potentiels

$$(B.28) \quad V_{\pm}(x, a) = W^2(x, a) \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2m}} \frac{dW(x, a)}{dx}.$$

Ceux-ci sont connus sous le nom de partenaires hamiltoniens. On notera les valeurs propres et les fonctions propres des H_{\pm} par E_n^{\pm} et $\psi_n^{\pm}(x, a)$. Fixons $\hbar = 2m = 1$, ce qui réduit A^{\pm} à

$$(B.29) \quad A^{\pm} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{d}{dx} + W(x, a),$$

respectivement. Nous pouvons faire ici quelques observations intéressantes.

- Supposons $\psi_0^-(x, a)$, la solution de $A^- \psi_0^-(x, a) = 0$ est une fonction normalisable. Alors $H_- \psi_0^-(x, a) \equiv A^+ A^- \psi_0^-(x, a) = 0$, c'est-à-dire $\psi_0^-(x, a)$ est un vecteur propre de H_- associé à la valeur propre $E_0 = 0$.
- Comme A^+ est un adjoint hermitique de A , alors à partir de l'équation suivante

$$(B.30) \quad H_- \psi_n^-(x, a) \equiv A^+ A^- \psi_n^-(x, a) = E_n^- \psi_n^-(x, a),$$

nous obtenons

$$(B.31) \quad E_n^- = \frac{\int \psi_n^{-*} A^+ A^- \psi_n^- dx}{\int \psi_n^{-*} \psi_n^- dx} = \frac{\int |A^- \psi_n^-|^2 dx}{\int |\psi_n^-|^2 dx} \geq 0$$

- De manière analogue, si nous avons la solution $A^+ \psi_0^+(x, a) = 0$, nous aurions obtenu $H_+ \psi_0^+(x, a) \equiv A^- A^+ \psi_0^+(x, a) = 0$, ainsi, la fonction propre de l'état fondamental à énergie nulle H_+ est donnée par la relation suivante

$$(B.32) \quad \left(-\frac{d}{dx} + W(x, a) \right) \psi_0^+(x, a) = 0,$$

ou

$$(B.33) \quad \psi_0^+(x, a) \sim e^{\int_{x_0}^x W(x, a) dx} = \frac{1}{\psi_0^-(x, a)}.$$

De cette relation réciproque entre $\psi_0^+(x, a)$ et $\psi_0^-(x, a)$, on voit qu'ils ne peuvent pas être normalisés simultanément. Cela conduit à trois possibilités différentes :

- $\psi_0^-(x, a)$ est normalisable et $\psi_0^+(x, a)$ ne l'est pas
- $\psi_0^+(x, a)$ est normalisable et $\psi_0^-(x, a)$ ne l'est pas
- Ni $\psi_0^-(x, a)$ ni $\psi_0^+(x, a)$ sont normalisable

ANNEXE C

PROGRAMME DE CALCUL

Mathematica est un logiciel d'algèbre informatique et de calcul numérique développé par Wolfram Research depuis 1988. Il permet essentiellement à la fois le calcul formel (manipulation symbolique d'expressions mathématiques, par exemple : calcul des dérivées, etc.) et le calcul numérique (évaluation numérique d'expressions mathématiques, par exemple : calcul de la première décimale d'un nombre π , etc...). Mathematica combine un langage de programmation sophistiqué et permet également de dessiner les graphes. C'est un logiciel largement utilisé dans l'éducation, la recherche et l'industrie [67].

Par le biais d'un programme écrit en langage Mathematica, tous les graphes figurant dans le mémoire ont été obtenus.

Clear["Global`*"]

[efface

$$AA[\kappa_] = (1 - \kappa^2)^{\frac{3}{2}};$$

$$EnD0[n_, \kappa_] = \sqrt{(1 - \kappa^2) * (2 \sqrt{1 - \kappa^2} * n + 1)};$$

(*Spectre d'énergie de l'oscillateur de Dirac D0*)

$$EnKGO[n_, \kappa_] = AA[\kappa] * \sqrt{2 n + 1};$$

(*Spectre d'énergie de l'oscillateur de Klein-Gordon KGO*)

$$fD0[n_, \kappa_] = Exp[-\beta * EnD0[n, \kappa]]; (*Facteur de Boltzmann de l'oscillateur de Dirac*)$$

[exponentielle

$$fKGO[n_, \kappa_] = Exp[-\beta * EnKGO[n, \kappa]];$$

[exponentielle

(*Facteur de Boltzmann de l'oscillateur de Klein-Gordon*)

$$RR[k_] =$$

$$\text{Integrate}\left[\frac{\text{BernoulliB}[k, 1 - x]}{k!} * D[\text{ff}[x, \beta, \kappa], \{x, k\}], \{x, 0, \infty\}, \text{Assumptions} \rightarrow \beta > 0\right];$$

[intégré

k!

[dérivée d

[suppositions

(*Reminder term de l'approche d'Euler-Maclaurin*)

$$ZD0[\beta_, \kappa_] = \frac{fD0[0, \kappa]}{2} + \frac{\text{Exp}[-\beta \sqrt{1 - \kappa^2}] (1 + \beta \sqrt{1 - \kappa^2})}{\beta^2 (1 - \kappa^2)^{3/2}} -$$

$$\text{Sum}\left[\frac{\text{BernoulliB}[2 * p]}{(2 * p)!} D[fD0[n, \kappa], \{n, 2 * p - 1\}] /. n \rightarrow 0, \{p, 1, 2\}\right];$$

(*Fonction de partition de l'oscillateur de Dirac*)

$$ZKGO[\beta_, \kappa_] = \frac{fKGO[0, \kappa]}{2} + \frac{\text{Exp}[-\beta * AA[\kappa]] * (1 + \beta * AA[\kappa])}{AA[\kappa]^2 \beta^2} -$$

$$\text{Sum}\left[\frac{\text{BernoulliB}[2 * p]}{(2 * p)!} D[fKGO[n, \kappa], \{n, 2 * p - 1\}] /. n \rightarrow 0, \{p, 1, 2\}\right];$$

[somme

(2 * p)!

[dérivée d

(*Fonction de partition de l'oscillateur de Klein-Gordon*)

(*Propriétés thermodynamique de l'oscillateur de Dirac*)

```

FDO[β_, κ_] =  $\frac{-1}{\beta}$  * Log[ZDO[β, κ]]; (*Energier libre*)
                [logarithme]

PFD = Plot[{FDO[1/β, 0], FDO[1/β, 0.2], FDO[1/β, 0.4], FDO[1/β, 0.6], FDO[1/β, 0.8]},
            [tracé de courbes]
            {β, 0.1, 30}, Frame → True, FrameLabel → {"1/β", "Energie libre, F"},
            [cadre] [vrai] [titre de cadre]
            PlotLegends → Placed[{"κ=0", "κ=0.2", "κ=0.4", "κ=0.6", "κ=0.8"}, Above]];
            [placé] [au-dessus]

Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022\FDO.eps", PFD];
[exporte]

UDO[β_, κ_] = -D[Log[ZDO[β, κ]], β]; (*Energier totale*)
                [logarithme]

PUD = Plot[{UDO[1/β, 0], UDO[1/β, 0.2], UDO[1/β, 0.4], UDO[1/β, 0.6], UDO[1/β, 0.8]},
            [tracé de courbes]
            {β, 0.1, 10}, Frame → True, FrameLabel → {"1/β", "Energie Totale, U"},
            [cadre] [vrai] [titre de cadre]
            PlotLegends → Placed[{"κ=0", "κ=0.2", "κ=0.4", "κ=0.6", "κ=0.8"}, Above]];
            [placé] [au-dessus]

Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022\UDO.eps", PUD];
[exporte]

SDO[β_, κ_] = Log[ZDO[β, κ]] - β * D[Log[ZDO[β, κ]], β]; (*Entropie*)
                [logarithme] [logarithme]

PSD = Plot[{SDO[1/β, 0], SDO[1/β, 0.2], SDO[1/β, 0.4], SDO[1/β, 0.6], SDO[1/β, 0.8]},
            [tracé de courbes]
            {β, 0.1, 10}, Frame → True, FrameLabel → {"1/β", "Entropie, S"},
            [cadre] [vrai] [titre de cadre]
            PlotLegends → Placed[{"κ=0", "κ=0.2", "κ=0.4", "κ=0.6", "κ=0.8"}, Above]];
            [légendes de tracé] [placé] [au-dessus]

Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022\SDO.eps", PSD];
[exporte]

CvDO[β_, κ_] = β2 * D[Log[ZDO[β, κ]], {β, 2}]; (*Chaleur spécifique*)
                [logarithme]

PCvD =
Plot[{CvDO[1/β, 0], CvDO[1/β, 0.2], CvDO[1/β, 0.4], CvDO[1/β, 0.6], CvDO[1/β, 0.8]},
    [tracé de courbes]
    {β, 0.1, 30}, Frame → True, FrameLabel → {"1/β", "Chaleur spécifique, Cv"},
    [cadre] [vrai] [titre de cadre]
    PlotLegends → Placed[{"κ=0", "κ=0.2", "κ=0.4", "κ=0.6", "κ=0.8"}, Above]];
    [légendes de tracé] [placé] [au-dessus]

Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022\CvDO.eps", PCvD];
[exporte]

(*Propriétés thermodynamique de l'oscillateur de Klein-Gordon*)

```

```

FKGO[β_, κ_] =  $\frac{-1}{\beta}$  * Log[ZKGO[β, κ]]; (*Energier libre*)
                | logaritmhe

PFK = Plot[{FKGO[1/β, 0], FKGO[1/β, 0.2], FKGO[1/β, 0.4], FKGO[1/β, 0.6], FKGO[1/β, 0.8]},
           | tracé de courbes
           {β, 0.1, 30}, Frame → True, FrameLabel → {"1/β", "Energie libre, F"},
           | cadre | vrai | titre de cadre
           PlotLegends → Placed[{"κ=0", "κ=0.2", "κ=0.4", "κ=0.6", "κ=0.8"}, Above]];
           | légendes de tracé | placé | au-dessus

Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022\FKGO.eps", PFK];
| exporte

UKGO[β_, κ_] = -D[Log[ZKGO[β, κ]], β]; (*Energier totale*)
                | · | logaritmhe

PUK = Plot[{UKGO[1/β, 0], UKGO[1/β, 0.2], UKGO[1/β, 0.4], UKGO[1/β, 0.6], UKGO[1/β, 0.8]},
           | tracé de courbes
           {β, 0.1, 10}, Frame → True, FrameLabel → {"1/β", "Energie Totale, U"},
           | cadre | vrai | titre de cadre
           PlotLegends → Placed[{"κ=0", "κ=0.2", "κ=0.4", "κ=0.6", "κ=0.8"}, Above]];
           | placé | au-dessus

Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022\UKGO.eps", PUK];
| exporte

SKGO[β_, κ_] = Log[ZKGO[β, κ]] - β * D[Log[ZKGO[β, κ]], β]; (*Entropie*)
                | logaritmhe | · | logaritmhe

PSK = Plot[{SKGO[1/β, 0], SKGO[1/β, 0.2], SKGO[1/β, 0.4], SKGO[1/β, 0.6], SKGO[1/β, 0.8]},
           | tracé de courbes
           {β, 0.1, 10}, Frame → True, FrameLabel → {"1/β", "Entropie, S"},
           | cadre | vrai | titre de cadre
           PlotLegends → Placed[{"κ=0", "κ=0.2", "κ=0.4", "κ=0.6", "κ=0.8"}, Above]];
           | légendes de tracé | placé | au-dessus

Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022\SKGO.eps", PSK];
| exporte

CvKGO[β_, κ_] = β2 * D[Log[ZKGO[β, κ]], {β, 2}]; (*Chaleur spécifique*)
                | · | logaritmhe

PCvK =
Plot[{CvKGO[1/β, 0], CvKGO[1/β, 0.2], CvKGO[1/β, 0.4], CvKGO[1/β, 0.6], CvKGO[1/β, 0.8]},
     | tracé de courbes
     {β, 0.1, 30}, Frame → True, FrameLabel → {"1/β", "Chaleur spécifique, Cv"},
     | cadre | vrai | titre de cadre
     PlotLegends → Placed[{"κ=0", "κ=0.2", "κ=0.4", "κ=0.6", "κ=0.8"}, Above]];
     | placé | au-dessus

Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022\CvKGO.eps", PCvK];
| exporte

(*Propriétés thermodynamique de l'oscillateur de Klein-Gordon en 3D*)
                | dérivée d

```

```
PKG3D = Plot3D[CvKG0[1 /  $\beta$ ,  $\kappa$ ], { $\beta$ , 0.1, 30}, { $\kappa$ , 0, 1}, AxesLabel  $\rightarrow$  {" $\beta$ ", " $\kappa$ ", "Cv"}];  
Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022/Cv3DKG0.eps", PKG3D];  
PD3D = Plot3D[CvD0[1 /  $\beta$ ,  $\kappa$ ], { $\beta$ , 0.1, 30}, { $\kappa$ , 0, 1}, AxesLabel  $\rightarrow$  {" $\beta$ ", " $\kappa$ ", "Cv"}];  
Export["/home/abdelmalek/Bureau/Riham_thesemaster2022/Cv3D0.eps", PD3D];
```

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, T. H. Selig-man, *Phys. Rev. Lett.* **2013**, *111*, 170405.
- [2] M. Moshinsky, Y. F. Smirnov, *The harmonic oscillator in modern physics*, Harwood academic publisher, **1996**.
- [3] D. Ito, K. Mori, E. Carriere, *Nuovo Cimento A* **1967**, *51*, 1119.
- [4] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, *22*, L817–L819.
- [5] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A : Math. Gen* **1990**, *23*, 2263–2272.
- [6] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, *128*, 124.
- [7] B. P. Mandal, S. Verma, *Phys. Lett A* **2010**, *374*, 1021–1023.
- [8] B. P. Mandal, S. Verma, *Phys. Lett. A* **2012**, *376*, 2467.
- [9] A. Bermudez, M. A. M. Delgado, E. Solano, *Phys. Rev A* **2007**, *76*, 041801(R).
- [10] A. Bermudez, M. A. Martin-Delgado, A. Luis, *Phys. Rev. A* **2008**, *77*, 063815.
- [11] O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. deArago, P. Castorina, D. Zappala, *Phys. Rev D* **2005**, *72*, 025010.

- [12] R. Blatt, C. F. Roos, *Nat Phys* **2012**, 8, 277–284.
- [13] A. Boumali, L. Chetouani, *Phys. Lett. A* **2005**, 346, 261–268.
- [14] A. Boumali, Doctorat, Université d'Annaba, **2006**.
- [15] A. Boumali, *Phys. Scr* **2007**, 76, 669–673.
- [16] A. Boumali, *EJTP* **2015**, 12, 1–10.
- [17] A. Boumali, F. Serdouk, S. Dilmi, *Physica. A* **2020**, 553, 124207.
- [18] H. Hassanabadi, S. S. Hosseini, A. Boumali, S. Zarrinkamar, *J. Math. Phys* **2014**, 55, 033502.
- [19] B. Mirza, M. Zarei, *Eur. Phys. J C* **2004**, 32, 583.
- [20] B. Mirza, R. Narimani, M. Zarei, *Eur. Phys. J C* **2006**, 48, 641.
- [21] S. K. Moayed, F. Darabi, *Phys. Lett A* **2004**, 322, 173–178.
- [22] H. Motavalli, A. R. Akbarieh, *Mod. Phys. Lett A* **2010**, 25, 2523–2528.
- [23] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *J. Phys. A : Math.Gen* **1998**, 31, 6717–6724.
- [24] M. H. Pacheco, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, *Phys. Lett A* **2003**, 311, 936–6.
- [25] E. Sadurni, J. M. Torres, T. H. Seligman, *J. Phys. A : Math. Theor* **2010**, 43, 285204.
- [26] E. S. Santos, G. R. deMelo, *Int. J. Theor. Phys* **2011**, 50, 332–338.
- [27] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, A. Boumali, *Int. J. Geom. Metho. Mod. Phys* **2017**, 14, 1750112.
- [28] J. Wang, K. Li, *Chinese. Phys C* **2008**, 32, 803–806.

- [29] K. M. Fujiwara, Z. A. Geiger, K. Singh, R. Senaratne, S. V. Rajagopal, M. Lipatov, T. Shimasaki, D. M. Weld, *New J. Phys* **2018**, *20*, 063027.
- [30] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special Functions*, Cambridge : Cambridge University Press, **1999**.
- [31] E. Schrödinger, *Ann. Phys* **1926**, *384*, 361.
- [32] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics wave equations*, Springer-Verlag Berlin, **2000**.
- [33] J. D. Bjorken, S. D. Drell, *Relativistic Quantum Theory*, **1964**.
- [34] H. Umezawa, *Quantum field theory*, North holland publishing, **1956**.
- [35] F. Schwabl, *Advanced Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, **2008**.
- [36] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, **1965**.
- [37] H. J. W. George B. Arfken, *Mathematical methods for physicists*, I. D. o. H. B. . C. Academic Press (Ed.), Academic Press Limited, **1999**.
- [38] H. P. Laba, V. M. Tkachuk, *Eur. Phys. J. Plus* **2018**, *133*, 279.
- [39] M. H. Pacheko, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, R. R. Landim, *Eur. Phys. Lett* **2014**, *108*, 10005.
- [40] V. Santos, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *Ann Phys* **2014**, *349*, 402–410.
- [41] H. Hassanabadi, S. S. Hosseini, A. N. Ikot, A. Boumali, S. Zarrinkamar, *Eur. Phys. J. Plus* **2014**, *129*, 132.
- [42] E. Elizalde, *Ten physical applications of spectral zeta functions*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, **1995**.
- [43] M.-A. Dariescu, C. Dariescu, *J. Phys : Condens. Matter* **2007**, *19*, 256203.

- [44] M.-A. Dariescu, C. Dariescu, *Chaos. Solitons and Fractals* **2007**, 33, 776–781.
- [45] M.-A. Dariescu, C. Dariescu, *Rom. Journ. Phys* **2011**, 56, 1043–1052.
- [46] J. Yang, J. Piekarewicz, *Phys. Rev. C* **2020**, 102, 954308.
- [47] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys* **2014**, 92, 1460–1463.
- [48] C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, J. N. Prata, *J. Math. Phys* **2008**, 49, 072101.
- [49] A. Bermudez, M. A. M. Delgado, A. Luis, *Phys. Rev A* **2008**, 77, 063815.
- [50] A. Boumal, L. Chetouani, *Phys. Lett A* **2005**, 346, 261–268.
- [51] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys. Scr* **2011**, 84, 1–2.
- [52] M. Moreno, A. Zentella, *J. Phys. A* **1989**, 23, L821–LS25.
- [53] J. Benitez, R. P. M. y Romero, H. N. Nunez-Yepey, A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett* **1990**, 64, 1643–5.
- [54] R. P. Martinez-yRomero, A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys* **1992**, 33, 1831.
- [55] R. P. MartinezyRomero, H. N. Nunez-Yepey, A. L. Salas-Brito, *Eur. J. Phys* **1995**, 16, 135–141.
- [56] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, 22, L817.
- [57] M. M. M, A. Zentella, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, 22, L821.
- [58] B. M. M.G. Benedict, *Phys. Rev. A* **1999**, 60, 1737.
- [59] L. Infeld, T. E. Hull, *Rev. Mod. Phys.* **1951**, 23, 21–68.
- [60] F. Cooper, A. Khare, U. Sukhatme, *Phys. Rep* **1995**, 251, 267–385.

- [61] A. Gangopadhyaya, J. V. Mallow, C. Rasinariu, *Supersymmetric. Quantum. Mechanics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., **2018**.
- [62] F. Cooper, B. Freedman, *Ann.Phys* **1983**, *146*, 262–288.
- [63] E. Witten, *Nucl. Phys. B* **1981**, *185*, 513–554.
- [64] G. Junker, *2020 EPL* **130** 30003 **2020**, *130*, 30003.
- [65] G. Junker, *Supersymmetric Methods in Quantum, Statistical and SolidState Physics*, OP Publishing Ltd, **2019**.
- [66] S.-H. Donga, W. S. Chung, G. J. and H. Hassanabadi, *Results Phys.* **2022**, *39*, 105664.
- [67] W. R. Inc., *Wolfram|One, Version 12.0.0*, Wolfram Research, Inc., **2021**, Champaign, IL, 2021. <https://www.wolfram.com/wolfram-one>.