



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Larbi Tebessi –TEBESSA–
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département de mathématiques et informatique



Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat LMD
En : MATHÉMATIQUES
Option : Analyse fonctionnelle appliquée

Par : **MESBAH NADIA**

Intitulée:

Étude de la finitude des opérateurs dans un espace de Hilbert de dimension infinie

Devant le jury :

ZARAI Abderrahmane	Professeur	Université Larbi Tebessi – Tébessa	Président
MESSAOUDENE Hadia	Professeur	Université Larbi Tebessi – Tébessa	Rapporteuse
BOUZENADA Smail	Professeur	Université Larbi Tebessi – Tébessa	Co-Rapporteur
MANSOUR Abdelouahab	Professeur	Université Hamma Lakhdar – El Oued	Examineur
MESLOUB Fatiha	MCA	Université Larbi Tebessi – Tébessa	Examinatrice
BELOUL Said	MCA	Université Hamma Lakhdar – El Oued	Examineur
HANACHI Fareh	MCA	Université Larbi Tebessi – Tébessa	Examineur

Date de soutenance : 26/06/2022

Remerciements

*Je tiens tout d'abord à rendre grâce à **ALLAH**, Le Clément, Le Miséricordieux, qui m'a donné la santé et beaucoup de persévérance et de volonté pour accomplir ce modeste travail.*

*En premier lieu, un vif remerciement à ma directrice de thèse, madame **MESSAOUDENE Hadia** professeur à l'université de Tébessa, qui m'a donné beaucoup de conseils et m'a dirigé du mieux qu'elle pouvait. Je remercie chaleureusement sa disponibilité et ses précieux conseils. Sans elle, ce travail n'a pu être mené à bien.*

*Je remercie le professeur **BOUZENADA Smail** pour ses précieux conseils qui m'ont beaucoup aidé.*

*J'exprime mes sincères remerciements au professeur **ZARAI Abderrahmane** qui m'a honoré en acceptant de présider le jury de cette thèse.*

*J'exprime ma reconnaissance à monsieur **MANSOUR Abdelouahab** professeur à l'université de El Oued, monsieur **BELOUL Said** maître de conférence à l'université de El Oued, madame **MESLOUB Fatiha** maître de conférence à l'université de Tébessa et monsieur **HANACHI Fareh** maître de conférence à l'université de Tébessa pour avoir accepté de participer au jury de cette thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail.*

Enfin, je remercie mes collègues du département de mathématiques de la faculté des sciences exactes.

ملخص

ليكن \mathcal{H} فضاء هيلبرت عقدي قابل للفصل ذو بعد لا نهائي و $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ جبر المؤثرات الخطية المحدودة المعرفة على \mathcal{H} . من أجل A و B من $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ ، المشتقة المعممة المولدة بـ A و B والتي يرمز لها بـ $\delta_{A,B}$ معرفة كما يلي:

$$\begin{aligned} \delta_{A,B} &: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ T &\longmapsto AT - TB. \end{aligned}$$

إذا كان $A = B$ ، فإن $\delta_{A,A} = \delta_A$ يسمى المشتقة الداخلية المولدة بـ A . نسمي مؤثر A من $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ مؤثر منتهي إذا كان:

$$(1) \quad \|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

الثنائية (A, B) من $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$ هي مؤثر منته معمم إذا كان:

$$(2) \quad \|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

نقول عن مؤثر A من $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ أنه *- منتهي إذا كان:

$$(3) \quad \|TA - AT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

الهدف الفرعي من هذا العمل هو دراسة خصائص المؤثرات المنتهية، ال *- منتهية والمنتھية المعممة وتقديم صفوف جديدة من المؤثرات التي تحقق (1)، (2) و (3).

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو تعميم فئة المؤثرات ال *- منتهية من خلال تقديم فئة جديدة تسمى فئة المؤثرات ال *- منتهية المعممة المعرفة بـ:

$$(4) \quad \mathcal{GF}^*(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$$

وإجراء دراسة طوبولوجية وجبرية لهذه الفئة وتقديم بعض الثنائيات (A, B) من المؤثرات التي تنتمي إلى $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$.

الكلمات المفتاحية: المشتقة الداخلية، المشتقة المعممة، مشتقة جوردان، التعامد، المؤثرات المنتهية، المؤثرات المنتهية المعممة، المؤثرات ال *- منتهية المعممة.

Abstract

Let \mathcal{H} be a complex separable infinite dimensional Hilbert space and let $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ be the algebra of all bounded linear operators on \mathcal{H} . For operators $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, the generalized derivation induced by A and B noted $\delta_{A,B}$ is defined by :

$$\begin{aligned}\delta_{A,B} &: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ T &\longmapsto AT - TB.\end{aligned}$$

If $A = B$, then $\delta_{A,A} = \delta_A$ is called the inner derivation induced by A .

For $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, A is said to be finite operator if :

$$\|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (I \text{ is the identity operator}). \quad (1)$$

The pair $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is generalized finite operator if :

$$\|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (2)$$

We say that the operator $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ is *-finite if :

$$\|TA - AT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (3)$$

The sub-objective of our work is to give the properties of finite, *-finite and generalized finite operators and to present new classes of operators satisfying inequalities (1), (2), (3).

The main objective of this thesis is to generalize the class of *-finite operators by introducing a new class called the class of generalized *-finite operators and defined by :

$$\mathcal{GF}^*(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \quad (4)$$

and to make a topological and algebraic study of this class and present some pairs of operators $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$.

Keywords : Inner derivation, generalized derivation, Jordan derivation, orthogonality, finite operators, generalized finite operators, generalized *-finite operators.

Résumé

Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe, séparable de dimension infini et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis et à valeurs dans \mathcal{H} . Pour les opérateurs $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la dérivation généralisée induite par A, B notée $\delta_{A,B}$ est définie par :

$$\begin{aligned}\delta_{A,B} &: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ T &\longmapsto AT - TB.\end{aligned}$$

Pour $A = B$; alors $\delta_{A,A} = \delta_A$ est appelée la dérivation intérieure induite par A .

On dit que $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un opérateur fini si :

$$\|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (I \text{ est l'opérateur identité}). \quad (1)$$

La paire $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un opérateur fini généralisé si :

$$\|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (2)$$

On dit que $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un opérateur *-fini si :

$$\|TA - AT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \quad (3)$$

Le sous-objectif de notre travail est de donner les propriétés des opérateurs finis, *-finis et les opérateurs finis généralisés et de présenter des nouvelles classes d'opérateurs vérifiant les inégalités (1), (2), (3).

L'objectif principal de cette thèse est de généraliser la classe des opérateurs *-finis en introduisant une nouvelle classe appelée la classe des opérateurs *-finis généralisés et définie par :

$$\mathcal{GF}^*(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\} \quad (4)$$

et de faire une étude topologique et algébrique de cette classe et présenter quelques paires d'opérateurs $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$.

Mots clés : Dérivation intérieure, dérivation généralisée, dérivation de Jordan, orthogonalité, opérateurs finis, opérateurs finis généralisés, opérateurs *-finis généralisés.

TABLE DES MATIÈRES

Notations	1
Introduction	3
1 Notions préliminaires	6
1.1 Quelques notions de base	6
1.1.1 Espace de Hilbert	6
1.1.2 Opérateurs linéaires bornés	9
1.1.3 Spectres d'un opérateur	11
1.2 Image numérique	12
1.2.1 Image numérique d'un opérateur dans un espace de Hilbert	12
1.2.2 Image numérique d'un élément d'une algèbre de Banach	14
1.3 Commutateur et trace d'un opérateur linéaire	16
1.3.1 Commutateur	16
1.3.2 Trace d'un opérateur linéaire	17
1.4 Dérivations	19
1.4.1 Dérivation intérieure induite par un opérateur	19
1.4.2 Dérivation généralisée	21
1.4.3 *-Dérivation de Jordan	21
1.5 Quelques classes d'opérateurs dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$	26
2 Classification des opérateurs finis	28

Table des matières

2.1 Opérateurs finis	29
2.1.1 Définitions et propriétés	29
2.1.2 Quelques classes d'opérateurs finis	31
2.2 Opérateurs finis généralisés	34
2.2.1 Définition et caractérisation des opérateurs finis généralisés	35
2.2.2 Nouvelles classes d'opérateurs dans $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$	41
2.2.3 Étude de l'orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivation	43
3 Opérateurs *-finis et opérateurs *-finis généralisés	46
3.1 Opérateurs *-finis	46
3.1.1 Définitions	46
3.1.2 Opérateurs *-finis sous perturbation spectrale	49
3.2 Opérateurs *-finis généralisés	50
3.2.1 Définition et propriétés de base	50
3.2.2 Quelques paires d'opérateurs *-finis généralisés	54
Conclusion	57
Bibliographie	59

- \mathcal{H} : Espace de Hilbert séparable complexe de dimension infinie.
- $\mathcal{B}(\mathcal{H})$: Algèbre des opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{H} .
- $\|A\|$: Norme de l'opérateur A .
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: Produit scalaire.
- I : Opérateur identité.
- A^* : Adjoint de l'opérateur A .
- A^{-1} : Inverse de l'opérateur A .
- \oplus : Somme directe.
- \otimes : Produit tensoriel.
- $\{A\}'$: Ensemble des commutants de A .
- $\{A\}''$: Ensemble des bicommutants de A .
- $R(A)$: Image de l'opérateur A .
- $\ker(A)$: Noyau de l'opérateur A .
- δ_A : Dérivation intérieure induite par l'opérateur A .
- $R(\delta_A)$: Image de la dérivation δ_A .
- $Tr(A)$: Trace de A .
- $\sigma(A)$: Spectre de A .
- $\sigma_p(A)$: Spectre ponctuel de A .

$\sigma_a(A)$: Spectre approché de A .
$\sigma_{ar}(A)$: Spectre approché réduisant de A .
$r(A)$: Rayon spectral de A .
$W(A)$: Image numérique de A .
$\partial W(A)$: Frontière de l'image numérique de A .
$\omega(A)$: Rayon numérique de A .
$\{x_n\}$: Suite des vecteurs unitaires
\mathcal{A}^*	: Espace dual topologique de \mathcal{A} .
f	: État.
$J_{A,B}$: *-Dérivation généralisée de Jordan .
$R_{A,B}$: Image de $J_{A,B}$.
\mathcal{M}^\perp	: Complément orthogonal de \mathcal{M} .
$\overline{\mathcal{M}}$: Adhérence de \mathcal{M} .

Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe, séparable de dimension infini et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur \mathcal{H} .

Pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la dérivation intérieure induite par A notée δ_A , la dérivation généralisée induite par les opérateurs A, B notée $\delta_{A,B}$ et la *-dérivation généralisée de Jordan notée $J_{A,B}$ sont définies successivement comme suit :

$$\begin{aligned}\delta_A & : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}); \delta_A(T) = AT - TA; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \\ \delta_{A,B} & : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}); \delta_{A,B}(T) = AT - TB; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \\ J_{A,B} & : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}); J_{A,B}(T) = TA - BT^*; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).\end{aligned}$$

Ces opérateurs ont plusieurs applications, on cite comme exemples :

- La mécanique quantique pour représenter des grandeurs physiques, les observables,...
- La théorie de perturbation des opérateurs linéaires.

La classe des opérateurs finis, notée $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, est la classe des opérateurs pour laquelle la distance de l'opérateur identité I et l'image de l'opérateur dérivation δ_A est maximale i.e.

$$\mathcal{F}(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

Cette classe a été introduite pour la première fois par J. P. Williams [45], il a étudié le critère de finitude et a posé plusieurs questions dans le contexte, comme il a prouvé que la classe des opérateurs finis contient les opérateurs normaux, hyponormaux et les opérateurs satisfaisant à une équation quadratique.

De nombreux auteurs ont étendu ces résultats aux opérateurs non normaux (voir par exemple [11], [16], [38]).

S. Mecheri [25] a introduit une nouvelle classe appelée classe d'opérateurs finis généralisés, notée $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$ et définie par :

$$\mathcal{GF}(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

L'auteur a aussi montré que la classe des opérateurs finis généralisés est uniformément fermée.

S. Mecheri [27] et S. Bouzenada [8] ont présenté quelques paires d'opérateurs appartenant à $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

Sur la base de l'étude des opérateurs finis et de la *-dérivation intérieure de Jordan, N. Hamada [21] a introduit une nouvelle classe appelée la classe des opérateurs *-finis, notée $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ et définie par :

$$\mathcal{F}^*(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|TA - AT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

Dans [22], l'autrice a présenté quelques propriétés des opérateurs *-finis et a prouvé que les opérateurs paranormaux sous certaines perturbations scalaires sont des opérateurs *-finis.

Motivé par les travaux de recherche de J. P. Williams [45] et N. Hamada [21] sur les opérateurs finis et *-finis, H. Messaoudene et N. Mesbah [35] ont introduit une nouvelle classe d'opérateurs appelée opérateurs *-finis généralisés notée $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$, qui est la classe d'opérateurs $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ où la distance entre l'image de la *-dérivation généralisée de Jordan et l'opérateur λI ; $\lambda \in \mathbb{C}$, est maximale, c'est-à-dire :

$$\mathcal{GF}^*(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

L'objectif de notre travail est : tout d'abord, l'étude des classes d'opérateurs : $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$, $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ et $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ et de donner quelques propriétés algébriques de base de ces classes d'opérateurs.

Par la suite, on se concentre sur la présentation de quelques opérateurs appartenant aux classes cités auparavant.

Cette thèse est composée d'une introduction et trois chapitres ainsi qu'une conclusion et une liste de références bibliographiques.

Au premier chapitre nous évoquons une synthèse bibliographique indispensables concernant les opérateurs bornés et leurs propriétés et les différents types des spectres.

Nous avons aussi évoqué brièvement le concept de l'image numérique d'un opérateur qui sera utilisée plus tard. Nous présentons les propriétés principales des commutateurs, des dérivations (interne, généralisée et de Jordan) ainsi que certains théorèmes à propos de ces notions importantes.

Le deuxième chapitre est consacré aux classification des opérateurs finis, il comprend deux sections. Dans la première section, nous étudions la classe des opérateurs finis et nous présentons quelques propriétés fondamentales et importantes de cette classe. Nous prouvons aussi l'appartenance de quelques classes d'opérateurs à $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Dans la deuxième section, nous traitons la classe des opérateurs finis généralisés et nous présentons de nouvelles paires d'opérateurs dans $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

Nous étudions aussi l'orthogonalité de l'image au noyau de la dérivation généralisée, et nous allons généraliser certains travaux existants.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les opérateurs *-finis et *-finis généralisés. Ce chapitre est divisé en deux grandes parties. Dans la première, on a commencé par la définition des opérateurs *-finis et on a donné des exemples d'opérateurs non *-finis mais sous une perturbation du spectre approché réduisant sont des opérateurs *-finis.

Dans la deuxième partie, nous introduisons une nouvelle classe d'opérateurs dite la classe des opérateurs *-fini généralisés et nous donnons un aperçu sur cette classe d'opérateur (définition, propriétés algébriques et topologiques).

Enfin, nous présentons quelques paires d'opérateurs *-finis généralisés.

CHAPITRE 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre, nous présentons des notions préliminaires concernant les notions d'opérateur borné dans un espace d'Hilbert, spectre, image numérique, dérivation et d'autres définitions et résultats que nous allons utiliser dans notre travail.

1.1 Quelques notions de base

Dans tout ce qui suit, on désignera par \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie muni d'un produit scalaire noté par $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.1.1 Espace de Hilbert

Définition 1.1.1 On dit qu'un espace normé X est complet si toute suite de Cauchy a une limite dans X .

Définition 1.1.2 Un espace préhilbertien est la donnée d'un espace vectoriel E complexe et d'une forme sesquilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, i.e. linéaire en la première variable :

$$\langle \lambda x + \lambda' x', y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \lambda' \langle x', y \rangle; \quad \forall x, x', y \in E; \quad \forall \lambda, \lambda' \in \mathbb{C},$$

et anti-linéaire en la seconde :

$$\langle x, \beta y + \beta' y' \rangle = \overline{\beta} \langle x, y \rangle + \overline{\beta'} \langle x, y' \rangle; \quad \forall x, y, y' \in E; \quad \forall \beta, \beta' \in \mathbb{C}.$$

Cette forme sesquilinéaire est de plus hermitienne : $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ et strictement positive i.e. :

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ et } \langle x, x \rangle = 0 \text{ si et seulement si } x = 0.$$

On appelle cette forme le produit scalaire sur E .

Proposition 1.1.1 [17] Dans un espace préhilbertien E , l'application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \text{ pour tout } x \in E,$$

est une norme pour E .

Définition 1.1.3 Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet par rapport à la norme induite par un produit scalaire.

Théorème 1.1.1 [17] (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$\text{Pour tous } x, y \in \mathcal{H} \text{ on a : } |\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \|y\|_{\mathcal{H}}.$$

Définition 1.1.4 Deux vecteurs x, y dans \mathcal{H} sont dits orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$, on note $x \perp y$.

Définition 1.1.5 Soit $J = \{1, 2, \dots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$). Une famille de vecteurs $\{x_i, i \in J, x_i \in \mathcal{H}\}$ est dite orthogonale si pour tous $i, j \in J$ tels que $i \neq j$ on a : $\langle x_i, x_j \rangle = 0$.

Définition 1.1.6 Une famille de vecteurs $\{x_i, i \in J, x_i \in \mathcal{H}\}$ est dite orthonormée (orthonormale) si :

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & ; \text{ si } i = j \\ 0 & ; \text{ si } i \neq j \end{cases}.$$

Définition 1.1.7 Une famille de vecteurs $\{x_i, i \in J, x_i \in \mathcal{H}\}$ est dite totale (ou complète) dans \mathcal{H} si le sous-espace engendré par cette famille est dense i.e. :

$$\{x_i, i \in J, x_i \in \mathcal{H}\}^{\perp} = \{0\}.$$

Définition 1.1.8 [17] Une suite orthonormée totale d'un espace de Hilbert est appelée base orthonormée (ou base Hilbertienne).

Théorème 1.1.2 *Un espace de Hilbert de dimension infinie est séparable si et seulement s'il possède une base orthonormée.*

Définition 1.1.9 Soit \mathcal{M} un sous-ensemble de \mathcal{H} , le complément orthogonal de \mathcal{M} (noté par \mathcal{M}^\perp) est défini par :

$$\mathcal{M}^\perp = \{y \in \mathcal{H}; \langle x, y \rangle = 0, \forall x \in \mathcal{M}\}.$$

Théorème 1.1.3 [17] *Si \mathcal{M} est un sous-espace fermé de \mathcal{H} ; alors \mathcal{H} est la somme directe orthogonale de \mathcal{M} et \mathcal{M}^\perp , notée par $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$.*

Définition 1.1.10 On appelle espace de Banach tout espace vectoriel normé complet pour la métrique associée à la norme .

Définition 1.1.11 Une algèbre \mathcal{A} sur un corps commutatif \mathbb{k} est un \mathbb{k} -espace vectoriel \mathcal{A} muni d'une opération binaire \times (c'est-à-dire que le "produit" $x \times y$ de deux éléments de \mathcal{A} est un élément de \mathcal{A}) bilinéaire, ce qui signifie que pour tous vecteurs $x, y, z \in \mathcal{A}$ et tous scalaires $a, b \in \mathbb{k}$, les égalités suivantes sont vraies :

- 1) $(x + y) \times z = x \times z + y \times z;$
- 2) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z;$
- 3) $(ax) \times (by) = (ab)(x \times y).$

Les deux premières égalités traduisent la distributivité de la loi \times par rapport à la loi $+$.

Définition 1.1.12 Une algèbre de Banach est une algèbre complexe normée \mathcal{A} qui est complète et vérifiant :

$$\|ab\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{\mathcal{A}} \|b\|_{\mathcal{A}} \text{ pour tout } a, b \in \mathcal{A}.$$

Définition 1.1.13 Une *-algèbre de Banach est une algèbre de Banach complexe \mathcal{A} munie d'une involution antilinéaire continue $*$ (appelé adjoint).

Pour tout a, b dans \mathcal{A} et λ dans \mathbb{C} , on a :

$$\begin{aligned} (a + b)^* &= a^* + b^*, \quad (\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*, \\ (a^*)^* &= a, \quad (ab)^* = b^* a^*. \end{aligned}$$

Définition 1.1.14 Une C^* -algèbre est une $*$ -algèbre de Banach avec une condition supplémentaire sur la norme :

$$\|a^*a\|_{\mathcal{A}} = \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \text{ pour tout } a \in \mathcal{A}.$$

1.1.2 Opérateurs linéaires bornés

Définition 1.1.15 Une application $A : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ est appelée opérateur linéaire si A satisfait les deux propriétés suivantes :

- 1) $A(x + y) = A(x) + A(y); \forall x, y \in \mathcal{H}.$
- 2) $A(\lambda x) = \lambda A(x); \forall x \in \mathcal{H}, \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

Définition 1.1.16 Soit A un opérateur linéaire. On dit que A est borné, s'il existe un nombre réel positif c , tel que :

$$\|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq c \|x\|_{\mathcal{H}}; \forall x \in \mathcal{H}.$$

De plus, la norme de l'opérateur A est définie par :

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \sup \left\{ \|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}; x \in \mathcal{H} : \|x\| = 1 \right\}.$$

Notation 1.1.1 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ désigne l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis et à valeurs dans \mathcal{H} .

Définition 1.1.17 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, l'image de A , notée par $R(A)$, est définie par :

$$R(A) = \{Ax : x \in \mathcal{H}\}.$$

Le noyau de A , noté $\ker(A)$ est l'ensemble défini par :

$$\ker(A) = \{x \in \mathcal{H} : Ax = 0\}.$$

Définition 1.1.18 Un opérateur $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit projecteur si $P^2 = P$.

Définition 1.1.19 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- (1) Un sous-espace fermé E de \mathcal{H} est invariant par A lorsque $A(E) \subset E$.

(2) Si un sous-espace fermé E de \mathcal{H} est invariant par A et admet un supplémentaire topologique qui est aussi invariant par A , on dit que E est réductant pour A . Ce qui est équivalent à l'existence d'un projecteur P sur H tel que :

$$R(P) = E \text{ et } AP = PA.$$

Définition 1.1.20 Une suite d'opérateurs $\{A_n\}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ converge uniformément (en norme) vers un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ si :

$$\|A_n - A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \longrightarrow 0; \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Définition 1.1.21 L'opérateur adjoint d'un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est l'unique opérateur $A^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que :

$$\forall x, y \in \mathcal{H}, \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^*y \rangle.$$

Proposition 1.1.2 [I7] Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors :

- (i) $\|A^*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.
- (ii) $\|A^*A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|AA^*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2$.
- (iii) $\ker(A^*) = (R(A))^\perp$.
- (iv) $\overline{R(A^*)} = (\ker(A))^\perp$.

Définition 1.1.22 Soit F un sous-espace fermé de \mathcal{H} . La projection orthogonale de \mathcal{H} sur F est l'opérateur noté P_F défini par :

$$\forall x \in \mathcal{H} : x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in F \text{ et } x_2 \in F^\perp, \quad P_F(x) = x_1.$$

Proposition 1.1.3 [I7] Un opérateur $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est une projection orthogonale si et seulement si $P^2 = P = P^*$.

Définition 1.1.23 Si F est un sous-espace fermé de \mathcal{H} , la compression de A sur F , notée $A|_F$, est la restriction de l'opérateur $P_F A$ sur F , (où P_F est la projection orthogonale sur F).

1.1.3 Spectres d'un opérateur

Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors :

- Le spectre de A est défini par :

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est non inversible}\} .$$

- Tout scalaire $\lambda \in \sigma(A)$ est dit valeur spectrale.

- Le rayon spectral de A , noté par $r(A)$, est défini par :

$$r(A) = \sup \{|\lambda|; \lambda \in \sigma(A)\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{n}}$$

et on a toujours: $r(A) \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$. Si $\sigma(A) = \emptyset$; alors, $r(A) = 0$.

- Un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A , s'il existe un vecteur non nul $x \in \mathcal{H}$, tel que : $Ax = \lambda x$.

Chaque vecteur non nul $x \in \mathcal{H}$ satisfaisant l'égalité précédente s'appelle vecteur propre de A associé à la valeur propre λ .

- Le spectre ponctuel de A est l'ensemble :

$$\sigma_p(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ valeur propre de } A\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ n'est pas injectif}\} .$$

- Une valeur propre de A est une valeur spectrale et on a toujours $\sigma_p(A) \subset \sigma(A)$.

On appelle espace propre associé à la valeur propre $\lambda \in \sigma_p(A)$, le sous-espace vectoriel $\ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$.

- L'ensemble résolvant de A est le complémentaire dans \mathbb{C} du spectre de A , on le note $\rho(A)$ et il est donné par :

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (A - \lambda I) \text{ est inversible}\} .$$

- La résolvante de A est l'application qui à tout $\lambda \in \rho(A)$ associe :

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

- Le spectre approché de A est l'ensemble :

$$\sigma_a(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}; \exists \{x_n\} \subset \mathcal{H}; \|x_n\|_{\mathcal{H}} = 1 : \lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda I)x_n = 0 \right\} .$$

- Le spectre approché réduisant de A est l'ensemble :

$$\begin{aligned} \sigma_{ar}(A) &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \exists \{x_n\} \subset \mathcal{H} : \|x_n\|_{\mathcal{H}} = 1; \lim_{n \rightarrow +\infty} (A - \lambda I)x_n = 0; \lim_{n \rightarrow +\infty} (A - \lambda I)^* x_n = 0 \right\} \\ &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0, \exists x \in \mathcal{H} : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1; \|Ax - \lambda x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \varepsilon \text{ et } \|A^*x - \bar{\lambda}x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} < \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

- On a :

$$\sigma_p(A) \subset \sigma_a(A) \quad \text{et} \quad \sigma_{ar}(A) \subset \sigma_a(A).$$

1.2 Image numérique

1.2.1 Image numérique d'un opérateur dans un espace de Hilbert

Définition 1.2.1 Soit A un opérateur linéaire borné sur \mathcal{H} . L'image numérique de A est l'ensemble défini par :

$$W(A) = \{ \langle Ax, x \rangle : x \in \mathcal{H}, \|x\|_{\mathcal{H}} = 1 \}.$$

Définition 1.2.2 Soit A un opérateur linéaire borné sur \mathcal{H} . Le rayon numérique de A est le réel positif défini par :

$$\omega(A) = \sup \{ |\lambda|; \lambda \in W(A) \} = \sup \{ |\langle Ax, x \rangle| : x \in \mathcal{H}, \|x\|_{\mathcal{H}} = 1 \}.$$

Proposition 1.2.1 [20] Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors pour tout opérateur unitaire U , pour tout sous-espace fermé \mathcal{M} de \mathcal{H} et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ on a :

1. $W(U^*AU) = W(A)$.
2. $W(\alpha A + \beta I) = \alpha W(A) + \beta$.
3. $W(A|_{\mathcal{M}}) \subset W(A)$.
4. $W(A^*) = \{ \bar{\lambda}, \lambda \in W(A) \}$.
5. $W(A + B) \subset W(A) + W(B)$.
6. $W(\operatorname{Re}(A)) = \operatorname{Re} W(A)$ et $W(\operatorname{Im}(A)) = \operatorname{Im}(W(A))$ (où $\operatorname{Re}(A)$ ($\operatorname{Im}(A)$) est la partie réelle (partie imaginaire) de A).

Théorème 1.2.1 [37] L'image numérique d'un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un ensemble non vide et borné.

Preuve. 1) Soit $x \in \mathcal{H}$, tel que $x \neq 0$. Alors $\left\langle A \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}}}, \frac{x}{\|x\|_{\mathcal{H}}} \right\rangle \in W(A)$, identiquement, $W(A) \neq \emptyset$.

2) Soit $\lambda \in W(A)$; alors il existe $x \in \mathcal{H}$, $\|x\|_{\mathcal{H}} = 1$; tel que $\lambda = \langle Ax, x \rangle$

$$|\lambda| = |\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|x\|_{\mathcal{H}} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|x\|_{\mathcal{H}}^2 = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Donc pour tout $\lambda \in W(A)$, $|\lambda| \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$. ■

Théorème 1.2.2 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors :

1. $\sigma_p(A) \subset W(A)$.

2. $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$; où $\overline{W(A)}$ est la fermeture de l'image numérique de A .

Preuve. 1. Soient $\lambda \in \sigma_p(A)$ et $x \in \mathcal{H} : \|x\|_{\mathcal{H}} = 1; Ax = \lambda x$; alors : $\langle (A - \lambda)x, x \rangle = 0$.
Donc $\lambda = \langle Ax, x \rangle$; d'où $\lambda \in W(A)$.

2. On sait que $\partial\sigma(A) \subset \sigma_a(A)$ [25] ($\partial\sigma(A)$ est la frontière du spectre de A) et que $W(A)$ est convexe (voir théorème de Toeplitz-Hausdorff [19]). Il suffit de montrer que $\sigma_a(A) \subset \overline{W(A)}$.

Soient $\lambda \in \sigma_a(A)$ et $\{x_n\}$ une suite des vecteurs unitaires telles que :

$$\|(A - \lambda I)x_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \longrightarrow 0.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient :

$$|\langle (A - \lambda I)x_n, x_n \rangle| \leq \|(A - \lambda I)x_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \longrightarrow 0,$$

ainsi ;

$$\langle Ax_n, x_n \rangle \longrightarrow \lambda.$$

D'où ;

$$\lambda \in \overline{W(A)}. \quad \blacksquare$$

Proposition 1.2.2 Soit A un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors :

$$\frac{1}{2} \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \omega(A) \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Preuve. Soient $x, y \in \mathcal{H}$, on a :

$$|\langle Ax, x \rangle| \leq \|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|x\|_{\mathcal{H}} \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|x\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Donc ;

$$\omega(A) \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

D'après une des propriétés de l'image numérique on a :

$$|\langle Ax, y \rangle| \leq 4\omega(A) [\|x\|_{\mathcal{H}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}}^2].$$

Comme ;

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \sup \{ |\langle Ax, y \rangle| : \|x\|_{\mathcal{H}} = \|y\|_{\mathcal{H}} = 1 \}.$$

D'où ;

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 2\omega(A).$$

■

Théorème 1.2.3 Si $\omega(A) = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$; alors $r(A) = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.

Preuve. Si $\omega(A) = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 1$; alors il existe une suite des vecteurs unitaires $\{x_n\}$ telle que :

$$\langle Ax_n, x_n \rangle \longrightarrow \lambda \in W(A), \quad |\lambda| = 1,$$

et comme ;

$$|\langle Ax_n, x_n \rangle| \leq \|Ax_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 1,$$

alors ; on obtient : $\|Ax_n\| \longrightarrow 1$. Donc :

$$\|(A - \lambda I)x_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 = \|Ax_n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 - |\langle Ax_n, \lambda x_n \rangle| - |\langle \lambda x_n, Ax_n \rangle| + \|x_n\|_{\mathcal{H}}^2 \longrightarrow 0,$$

d'où ; $\lambda \in \sigma_a(A)$ et donc $r(A) = 1$. ■

1.2.2 Image numérique d'un élément d'une algèbre de Banach

Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre avec identité e .

Définition 1.2.3 Une fonctionnelle linéaire f sur \mathcal{A} est dite positive si $f(a^*a) \geq 0$; $\forall a \in \mathcal{A}$ (on note $f \geq 0$) ; f est dite **état** si $f \geq 0$ et $\|f\| = 1$. L'ensemble d'états de \mathcal{A} noté \mathcal{P} est défini par :

$$\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{A} : f(e) = \|f\|_{\mathcal{A}} = 1\}.$$

Proposition 1.2.3 Pour $f \in \mathcal{P}$; alors :

1. $f \geq 0 \Rightarrow f = f^*, \|f\|_{\mathcal{A}} = f(e)$.
2. Pour $a \in \mathcal{A} : \|a\|_{\mathcal{A}} = \sup \{|f(a)| : f \in \mathcal{P}\}$.

Définition 1.2.4 Pour $a \in \mathcal{A}$, l'ensemble;

$$W_0(a) = \{f(a) : f \in \mathcal{P}\}$$

est appelé image numérique de a .

Proposition 1.2.4 Pour $a \in \mathcal{A}$, $W_0(a)$ est un ensemble non vide, convexe, compact et contient le spectre de a ; $\sigma(a)$, où

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (a - \lambda e) \text{ est non inversible}\}.$$

Remarque 1.2.1 Si $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors $W_0(a) = \overline{W(A)}$.

Lemme 1.2.1 Soit $a \in \mathcal{A}$. Alors; $0 \in W_0(a)$ si et seulement si $\forall \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|a - \lambda\|$.

Preuve. Supposons que $0 \in W_0(a)$ et soit $f_0 \in \mathcal{P} : f_0(a) = 0$. Alors $f_0(a - \lambda) = -\lambda$, d'où;

$$|\lambda| \leq \|f_0\|_{\mathcal{A}} \|a - \lambda\| = \|a - \lambda\|; \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Réciproquement, si $|\lambda| \leq \|a - \lambda\|; \forall \lambda \in \mathbb{C}$; alors si a n'est pas un opérateur scalaire, en appliquant le théorème de Hahn-Banach [13, p. 64], on peut choisir $f_a \in \mathcal{A}^*$ tel que :

$$f_a(a) = 0, f_a(1) = 1 \text{ et } \|f_a\|_{\mathcal{A}} = \left\| f_a|_{\text{Vect}(a,1)} \right\|_{\mathcal{A}}.$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$f_a(\alpha a + \beta) = \beta, \|\alpha a + \beta\| = |\alpha| \|a - (-\alpha^{-1}\beta)\| \geq |\alpha| |-\alpha^{-1}\beta| = |\beta|.$$

Donc;

$$\begin{aligned} \frac{|f_a(\alpha a + \beta)|}{\|\alpha a + \beta\|} &\leq 1, \\ \|f_a\|_{\mathcal{A}} &= 1 = f_a(1), \end{aligned}$$

i.e., $f_a \in \mathcal{P}$ et $0 = f_a(a) \in W_0(a)$. ■

1.3 Commutateur et trace d'un opérateur linéaire

Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie, $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une base orthonormée dans \mathcal{H} et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés définis et à valeurs dans \mathcal{H} .

1.3.1 Commutateur

Définition 1.3.1 Un élément $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est un commutateur s'ils existent A et B de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que : $X = AB - BA$. On note $AB - BA$ par $[A, B]$.

Définition 1.3.2 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

(i) Le commutant de A , noté $\{A\}'$ est défini par :

$$\{A\}' = \{B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : AB = BA\}.$$

(ii) Le bicommutant de A , noté $\{A\}''$, est défini par :

$$\{A\}'' = \{C \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : CB = BC, \forall B \in \{A\}'\}.$$

Lemme 1.3.1 Pour $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, on a :

i) $\{\{A\}'\}'' = \{A\}'$.

ii) $\{A\}'$ est une sous-algèbre de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

iii) $\{A\}''$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Théorème 1.3.1 L'opérateur identité I n'est pas un commutateur.

Preuve. On suppose que I est un commutateur, donc ils existent $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tels que :

$$I = AB - BA.$$

Multiplions à gauche et à droite par A :

$$A = A^2B - ABA,$$

$$A = ABA - BA^2.$$

En additionnant les deux relations on trouve :

$$2A = A^2B - BA^2,$$

et en suivant la même méthode on trouvera :

$$nA^{n-1} = A^n B - BA^n. \quad (1.1)$$

Supposons que (1.1) est vraie pour $k \in \mathbb{N}$ et prouvons la pour $k + 1$, on a :

$$\begin{aligned} A^{k+1}B - BA^{k+1} &= A(A^k B - BA^k) + (AB - BA)A^k \\ &= A^k A^{k-1} + A^k \\ &= (k + 1) A^k. \end{aligned}$$

Donc ;

$$\forall n \in \mathbb{N} : nA^{n-1} = A^n B - BA^n.$$

$$\|nA^{n-1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq \|A^n B - BA^n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 2 \|B\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|A^n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Pour $\|A^{n-1}\| \neq 0$, on aura :

$$n \leq 2 \|B\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}.$$

Pour un entier n_1 , où $n_1 > 2 \|B\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$, on a $\|A^{n_1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 0$. Par conséquent :

$$\|A^{n_1}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \left\| A^{n_1-1} \right\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \dots = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 0,$$

donc $A = 0$. D'où $I = AB - BA = 0$, qui est une contradiction. D'où I n'est pas un commutateur. ■

Corollaire 1.3.1 [20] *L'unique commutateur sous forme d'un scalaire dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est l'opérateur nul.*

1.3.2 Trace d'un opérateur linéaire

Définition 1.3.3 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $\sum_{i \in \mathbb{N}} \langle |A| e_i, e_i \rangle < \infty$ (où $|A| := (A^* A)^{\frac{1}{2}}$), pour toute base orthonormée $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. On définit la trace de A par :

$$\begin{aligned} Tr &: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C} \\ Tr(A) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle A e_i, e_i \rangle. \end{aligned}$$

On appelle opérateur à trace un opérateur A , tel que $Tr(|A|)$ soit fini. On définit un produit scalaire sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ par :

$$\langle A, B \rangle = Tr(B^*A).$$

C'est le produit scalaire auquel on associe la norme de \mathcal{H} :

$$\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 = \langle A, A^* \rangle.$$

Proposition 1.3.1 *La trace définit une forme linéaire sur l'ensemble des opérateurs de classe trace.*

Preuve. Pour tous $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ avec $Tr(|A|) < \infty$ et $Tr(|B|) < \infty$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} Tr(\alpha A + \beta B) &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle (\alpha A + \beta B) e_i, e_i \rangle \\ &= \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle \alpha A e_i + \beta B e_i, e_i \rangle \\ &= \alpha \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle A e_i, e_i \rangle + \beta \sum_{i \in \mathbb{N}} \langle B e_i, e_i \rangle \\ &= \alpha Tr(A) + \beta Tr(B). \end{aligned}$$

■

Remarque 1.3.1 Les opérateurs à trace forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, qui est complet pour la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Proposition 1.3.2 [10] *Pour tous opérateurs à trace A et B , on a :*

- $Tr(A^*) = \overline{Tr(A)}$, où $\overline{Tr(A)}$ est le conjugué de $Tr(A)$.
- $|Tr(A)| \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.
- $|Tr(AB)| \leq \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|B\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$.
- $Tr(AB) = Tr(BA)$.

En dimension infinie la trace est la somme des valeurs propres, en dimension finie la trace d'un opérateur est la somme des coefficients diagonaux de la représentation matricielle de cet opérateur.

1.4 Dérivations

Soit \mathcal{A} une algèbre de Banach sur un corps commutatif \mathbb{k} .

Définition 1.4.1 On appelle **dérivation** toute application linéaire continue $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ satisfaisant la propriété :

$$d(xy) = d(x)y + xd(y);$$

pour tout $x, y \in \mathcal{A}$.

1.4.1 Dérivation intérieure induite par un opérateur

Définition 1.4.2 On appelle **dérivation intérieure induite** par $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$, l'application linéaire $\delta_{\mathfrak{a}}$ définie par:

$$\delta_{\mathfrak{a}} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

$$t \mapsto at - ta.$$

Proposition 1.4.1 Soit A un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, l'application :

$$\delta_A : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

$$T \mapsto AT - TA$$

est une dérivation dite **dérivation intérieure induite** par A , linéaire et continue pour la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Preuve. • En effet, on a :

$$\begin{aligned} \forall T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \delta_A(T + S) &= A(T + S) - (T + S)A \\ &= AT + AS - TA - SA \\ &= \delta_A(T) + \delta_A(S). \end{aligned}$$

Et ;

$$\delta_A(\alpha T) = A(\alpha T) - (\alpha T)A = \alpha \delta_A(T); \quad \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \forall \alpha \in \mathbb{C}^*.$$

D'où A est linéaire.

On a :

$$\|\delta_A(T)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|AT - TA\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq 2\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})},$$

donc il existe $M = 2 \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$ tel que $\|\delta_A(T)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq M \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$; ainsi on a prouvé que δ_A est bornée donc continue pour la norme de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- Prouvons que : $\delta_A(TS) = \delta_A(T)S + T\delta_A(S)$:

$$\begin{aligned} \delta_A(TS) &= ATS - TSA \\ &= ATS - TSA + TAS - TAS \\ &= (AT - TA)S + T(AS - SA) \\ &= \delta_A(T)S + T\delta_A(S). \end{aligned}$$

■

Proposition 1.4.2 Une dérivation intérieure δ_A sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ possède les propriétés suivantes :

1. $\|\delta_A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 2 \inf \left\{ \|A - \lambda I\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$.
2. $\delta_{A+B} = \delta_A + \delta_B$.
3. Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors $\delta_A = \delta_B$ si $B = A + \beta I$; $\beta \in \mathbb{C}$.

Preuve. 1. Remarquons que $\delta_A = \delta_{A-\lambda I}$. En effet, on a pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\begin{aligned} \delta_{A-\lambda I}(T) &= (A - \lambda I)T - T(A - \lambda I) \\ &= AT - TA \\ &= \delta_A(T). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\delta_A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} &= \|\delta_{A-\lambda I}\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \\ &= \|(A - \lambda I)T - T(A - \lambda I)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \\ &\leq 2 \|A - \lambda I\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \|T\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}. \end{aligned}$$

D'où; $\|\delta_A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = 2 \inf \left\{ \|A - \lambda I\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} : \lambda \in \mathbb{C} \right\}$.

2. On a, pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\begin{aligned} (\delta_A + \delta_B)(T) &= AT - TA + BT - TB \\ &= (A + B)T - T(A + B) \\ &= \delta_{A+B}(T). \end{aligned}$$

3. Si $B = A + \beta I$; alors $\delta_B = \delta_{A+\beta I} = \delta_A$ (d'après 1). ■

Proposition 1.4.3 Soit $\mathcal{B}(E)$ l'algèbre des opérateurs définis sur un espace de dimension n , muni d'un produit scalaire trace ; alors on a :

- $(\delta_A)^* = \delta_{A^*}$.
- $R(\delta_A) = \left(\{A^*\}'\right)^\perp$.

Preuve. • Soient $X, Y \in \mathcal{B}(E)$; on a :

$$\begin{aligned} \langle X, (\delta_A)^* Y \rangle &= \langle \delta_A X, Y \rangle = \text{Tr}(\delta_A(X)Y^*) \\ &= \text{Tr}(AXY^* - XAY^*) \\ &= \text{Tr}(XY^*A) - \text{Tr}(XAY^*) \\ &= \text{Tr}(X(AY^* - Y^*A)) \\ &= \langle X, \delta_{A^*}(Y) \rangle, \end{aligned}$$

d'où ; $(\delta_A)^* = \delta_{A^*}$.

• Il est connu que $R(\delta_A) = (\ker(\delta_A)^*)^\perp$. D'après la première partie de cette proposition on trouve :

$$R(\delta_A) = (\ker(\delta_{A^*}))^\perp = \left(\{A^*\}'\right)^\perp.$$

■

1.4.2 Dérivation généralisée

Définition 1.4.3 Une application δ de \mathcal{A} dans \mathcal{A} qui associe à tout élément t de \mathcal{A} son image

$$\delta_{a,b}(t) = at - tb,$$

où a et b sont des éléments de \mathcal{A} , est appelée **dérivation généralisée** induite par a et b .

Remarque 1.4.1 Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $A = B$; on note alors $\delta_{A,B} = \delta_A$.

1.4.3 *-Dérivation de Jordan

Définition 1.4.4 Soit \mathcal{A} une *-algèbre de Banach.

1) Une application $d : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est dite **dérivation de Jordan** si :

$$d(a^2) = ad(a) + d(a)a; \text{ pour tout } a \in \mathcal{A}.$$

2) Une application linéaire $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ est dite ***-dérivation de Jordan** si pour tout $a, b \in \mathcal{A}$:

$$i) J(a + b) = J(a) + J(b), \quad (1.2)$$

$$ii) J(a^2) = aJ(a) + J(a)a^*, \text{ (} a^* \text{ est l'adjoint de } a\text{)}. \quad (1.3)$$

3) La ***-dérivation intérieure de Jordan** associée à $a \in \mathcal{A}$ est définie par :

$$J_a(t) = ta - at^*; \forall t \in \mathcal{A}.$$

Remarque 1.4.2 Il est clair que toute dérivation est une dérivation de Jordan, l'inverse ne semble pas être vrai en général. Cependant, comme résultat remarquable, il a été démontré que toutes les dérivations de Jordan sur $\mathcal{B}(\mathcal{X})$, où \mathcal{X} est un espace de Banach réel ou complexe, sont des dérivations [24].

Proposition 1.4.4 Soit $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors pour $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, l'application :

$$\begin{aligned} J(T) &\equiv J_A(T) : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ T &\longmapsto TA - AT^* \end{aligned}$$

est une *-dérivation intérieure de Jordan.

Preuve. En effet on a :

$$J(S + T) = (S + T)A - A(S + T)^* = SA + TA - AS^* - AT^* = J(S) + J(T),$$

et ;

$$\begin{aligned} J(T^2) &= T^2A - AT^{*2} \\ TJ(T) + J(T)T^* &= T^2A - TAT^* + TAT^* - AT^{*2}. \end{aligned}$$

■

Remarque 1.4.3 La ***-dérivation généralisée de Jordan** est de la forme :

$$J_{A,B}(T) = TA - BT^*; \text{ pour tous } A, B, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

son image notée par $R_{A,B}$ est définie par :

$$R_{A,B} = \{TA - BT^*; T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

On note $R_{A,A}$ par R_A .

Théorème 1.4.1 Soient \mathcal{A} une *-algèbre de Banach et $J : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ une application additive. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) J est une *-dérivation de Jordan.
- (ii) Pour tout $a \in \mathcal{A}$ inversible ;

$$J(a) = -aJ(a^{-1})a^*. \quad (1.4)$$

- (iii) Pour tous $a, b \in \mathcal{A}$,

$$J(aba) = abJ(a) + aJ(b)a^* + J(a)b^*a^*. \quad (1.5)$$

Preuve. (ii) \Rightarrow (i), (1.4) donne $J(1) = 0$. Si a est inversible et $\|a\| < 1$; alors $1 + a$, $1 - a$, $1 - a^2$ sont aussi inversibles, de plus : $(a - 1)^{-1} - (a^2 - 1)^{-1} = (a^2 - 1)^{-1}a$. On va montrer que pour un tel a on a :

$$J(a^2) = aJ(a) + J(a)a^*.$$

En effet ;

$$\begin{aligned} J(a) + a^{-1}J(a)a^{*-1} &= J(a) - J(a^{-1}) = J(a - a^{-1}) = J(a^{-1}(a^2 - 1)) \\ &= -a^{-1}(a^2 - 1)J((a^2 - 1)^{-1}a)(a^{*2} - 1)a^{*-1} \\ &= -a^{-1}(a^2 - 1)J((a - 1)^{-1})(a^{*2} - 1)a^{*-1} \\ &\quad + a^{-1}(a^2 - 1)J((a^2 - 1)^{-1})(a^{*2} - 1)a^{*-1} \\ &= a^{-1}(a + 1)J(a - 1)(a^* + 1)a^{*-1} - a^{-1}J(a^2 - 1)a^{*-1} \\ &= (a^{-1} + 1)J(a)(1 + a^{*-1}) - a^{-1}J(a^2)a^{*-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $0 = a^{-1}J(a) + J(a)a^{*-1} - a^{-1}J(a^2)a^{*-1}$; d'où $J(a^2) = aJ(a) + J(a)a^*$.

Considérons maintenant un élément inversible a de norme supérieure à 1. Alors pour un entier positif n , $n^{-1}a$ est inversible de norme inférieure à 1 et on a : $a = n(n^{-1}a)$. Comme J est additive, (1.3) reste vraie dans ce cas. Maintenant, soit a arbitraire. Choisissons un entier $n > \|a\|$, on trouve :

$$J(a^2) - 2nJ(a) = J((a - n)^2) = (a - n)J(a) + J(a)(a^* - n),$$

d'où (1.3) est également valable pour ce a .

(i) \Rightarrow (iii). En remplaçant a par $a + b$ dans (1.3) on trouve :

$$J(ab) + J(ba) = bJ(a) + aJ(b) + J(a)b^* + J(b)a^* \quad (1.6)$$

pour tous $a, b \in \mathcal{A}$. Soit $x = J(a(ab + ba) + (ab + ba)a)$. En utilisant (1.6) ; on obtient :

$$\begin{aligned} x &= aJ(ab + ba) + (ab + ba)J(a) + J(ab + ba)a^* + J(a)(b^*a^* + a^*b^*) \\ &= 2abJ(a) + a^2J(b) + aJ(a)b^* + 2aJ(b)a^* + baJ(a) \\ &\quad + bJ(a)a^* + 2J(a)b^*a^* + J(b)a^{*2} + J(a)a^*b^*. \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} x &= 2J(aba) + J(a^2b) + J(ba^2) = 2J(aba) + bJ(a^2) + a^2J(b) + J(a^2)b^* + J(b)a^{*2} \\ &= 2J(aba) + baJ(a) + bJ(a)a^* + a^2J(b) + aJ(a)b^* + J(a)a^*b^* + J(b)a^{*2}. \end{aligned}$$

En comparant les deux expressions de x on arrive à (1.5).

(iii) \Rightarrow (ii). Prendre $b = a^{-1}$ en (1.5) pour obtenir le résultat recherché. ■

Théorème 1.4.2 [21] Soit $J : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ une $*$ -dérivation de Jordan. Alors il existe un unique opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tel que $J(T) = TA - AT^*$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Preuve. Pour l'unicité de A , supposons qu'il existe $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $TA - AT^* = TB - BT^*$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Donc, $T(A - B) = (A - B)T^*$. Si on prend $T = iI$; alors on a : $2i(A - B) = 0$, i.e. $A = B$.

Pour l'existence, choisissons $A = -\frac{i}{2}J(iI)$. Alors ; d'après le théorème 1.4.1 (iii), on obtient :

$$J(-T) = J((iI)T(iI)) = iTJ(iI) + J(T) - iJ(iI)T^*.$$

Donc ;

$$J(T) = T(-\frac{i}{2}J(iI)) - (-\frac{i}{2}J(iI))T^*,$$

d'où ; $J(T) = TA - AT^*$, pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

Corollaire 1.4.1 *Toute *-dérivation de Jordan sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est continue.*

Corollaire 1.4.2 *Toute *-dérivation de Jordan J sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vérifie $J(BC) = BJ(C) + J(B)C^*$ pour tous opérateurs B, C qui commutent.*

Preuve. D'après le théorème [1.4.2](#), il existe un opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que ; $J(T) = TA - AT^*$. Ainsi ; si $B, C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que $BC = CB$; alors :

$$J(BC) = (BC)A - A(BC)^* = BCA - AB^*C^*,$$

et

$$BJ(C) + J(B)C^* = B(CA - AC^*) + (BA - AB^*)C^* = BCA - AB^*C^*.$$

■

Proposition 1.4.5 [\[40\]](#) *Toute *-dérivation de Jordan additive sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ est réelle et linéaire ; où \mathcal{H} est un espace de Hilbert complexe .*

Preuve. Pour T un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ et r un réel arbitraire, en utilisant le corollaire [1.4.2](#), on obtient :

$$J(rT) = J((rI)T) = rJ(T) + J(rI)T^*.$$

D'autre part ;

$$J(rT) = J(T(rI)) = TJ(rI) + rJ(T).$$

Donc $J(rI)T^* = TJ(rI)$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En particulier ; lorsque $T = iI$, on a : $J(rI) = 0$; pour tout $r \in \mathbb{R}$. Par conséquent ; $J(rT) = rJ(T)$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

1.5 Quelques classes d'opérateurs dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit :

- **Compact** : Si l'image par A de la boule unité de \mathcal{H} est compacte au sens de la topologie de la norme. Les opérateurs compacts vérifient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle Ax_n, x_n \rangle = 0$; pour toute suite orthonormée $\{x_n\} \in \mathcal{H}$. La classe des opérateurs compacts est notée par $\mathcal{K}(\mathcal{H})$.
 - **De rang fini** : Si $R(A)$ est de dimension finie.
 - **Auto-adjoint** : Si $A = A^*$; où A^* est l'adjoint de A .
 - **Positif** : Si $\langle Ax, x \rangle \geq 0$; pour tout $x \in \mathcal{H}$, on note $A \geq 0$.
- On a : $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ et $[A^*, A] = A^*A - AA^* = |A|^2 - |A^*|^2$.
- **Isométrique** : Si $A^*A = I$, $(\|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|x\|_{\mathcal{H}}; \forall x \in \mathcal{H})$.
 - **Unitaire** : Si $A^*A = AA^* = I$, $(\|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|A^*x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|x\|_{\mathcal{H}}; \text{ pour tout } x \in \mathcal{H})$.
 - **Normal** : Si $AA^* = A^*A$.
 - **Quasi normal** : Si $A(A^*A) = (A^*A)A$.
 - **Hyponormal** : Si $A^*A - AA^* \geq 0 \iff \|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \geq \|A^*x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}; \forall x \in \mathcal{H}$.
 - **p-hyponormal** : Si $(AA^*)^p \leq (A^*A)^p; (0 < p \leq 1)$.
 - **log-hyponormal** : Si A est inversible et vérifie : $\log(A^*A) \geq \log(AA^*)$.

Il est connu que :

$$\{\text{opérateur } p\text{-hyponormal inversible}\} \implies \{\text{opérateur log-hyponormal}\},$$

mais l'inverse n'est pas vrai [44].

- **(p, k)-quasihyponormal** : Si $A^{*k} |A^*|^{2p} A^k \leq A^{*k} |A|^{2p} A^k$; où $k \in \mathbb{N}$ et $0 < p \leq 1$.
- **Dominant** : Si pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$: $R(A - \lambda I) \subset R(A - \lambda I)^* \iff$ il existe un réel $M_\lambda \geq 1$; tel que :

$$\|(A - \lambda I)^* x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \leq M_\lambda \|(A - \lambda I)x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}; \forall x \in \mathcal{H}.$$

On peut facilement vérifier que :

$$\text{hyponormal} \subset \text{dominant}$$

et ;

$$\text{normal} \subset \text{hyponormal} \subset (p, k)\text{-quasihyponormal}.$$

- A est de la classe \mathcal{A} si : $|A^2| - |A|^2 \geq 0$.
- **Posinormal** : Si $AA^* \leq c^2 A^*A$; pour $c > 0$. A est posinormal s'il existe un opérateur positif $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que : $AA^* = A^*PA$
- (α, β) –**normal** : Si $\alpha^2 A^*A \leq AA^* \leq \beta^2 A^*A$; tel que $(0 \leq \alpha \leq 1 \leq \beta)$.
- **Totalement** (α, β) –**normal** : Si $A - \lambda$ est (α, β) –normal pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
- A est de la classe (\mathcal{Y}_α) ($\alpha \geq 1$) s'il existe un nombre positif k tel que :

$$|AA^* - A^*A|^\alpha \leq k_\alpha^2 (A - \lambda I)^*(A - \lambda I); \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (*)$$

- A est de la classe (\mathcal{Y}) si $\mathcal{Y} = \bigcup_{\alpha \geq 1} \mathcal{Y}_\alpha$ et vérifie (*).
- **Paranormal** : Si $\|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2 \leq \|A^2x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$; pour tout $x \in \mathcal{H}$; tel que $\|x\|_{\mathcal{H}} = 1$.
- p –***–paranormal** : Si $\| |A|^p U |A|^p x \|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \geq \| |A|^p U^* x \|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^2$; pour tout vecteur unitaire $x \in \mathcal{H}$, où $A = U |A|$ est la décomposition polaire de A .
- **Quasi–*– n –paranormal** : Si $\|A^{2+n}x\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{1+n}} \|Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^{\frac{n}{1+n}} \geq \|A^*Ax\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}$; $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathcal{H}$.
- **Normaloïde** : Si $\|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = r(A)$; où $r(A)$ est le rayon spectral de A tel que :

$$r(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A^n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \|A^n\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|A\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})}^n.$$

- **Transaloïde** : Si $(\lambda - A)$ est normaloïde; pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.
- **Convexoïde** : Si $\overline{W(A)} = \text{co}\sigma(A)$, ($\text{co}\sigma(A)$ est l'enveloppe convexe de $\sigma(A)$).
- **Spectraloïde** : Si $r(A) = \omega(A)$; tel que $\omega(A) = \sup \{ \alpha : \alpha \in W(A) \}$.

Remarque 1.5.1 On a :

$$\begin{array}{c} \{ p\text{-hyponormal} \} \longrightarrow \{ \text{classe } \mathcal{A} \} \\ \nearrow \\ \{ \text{log-hyponormal} \} \end{array}$$

et

Classe $\mathcal{A} \subset \text{paranormal} \subset \text{normaloïde} \subset \text{spectraloïde}$.

Transaloïde \subset convexoïde \subset spectraloïde.

Remarque 1.5.2 Dans le reste de cette thèse, on met $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = \|\cdot\|$ pour l'abréviation.

CHAPITRE 2

Classification des opérateurs finis

Le concept d'opérateur fini a été présenté par J. P. Williams [45] en 1970, il a étudié les critères de finitude et a posé plusieurs questions dans le contexte.

J. P. Williams a prouvé que la classe des opérateurs finis est uniformément fermée et contient les opérateurs normaux, hyponormaux et les opérateurs dominants.

S. Mecheri [25] et H. Messaoudene [33] ont généralisé les travaux de J. P. Williams pour des classes d'opérateurs plus générales que les opérateurs normaux et hyponormaux, comme les opérateurs paranormaux et normaloïdes.

Dans la première partie de ce chapitre, nous présentons les opérateurs pour lesquels la distance de I à $R(\delta_A)$ vaut l'unité (opérateurs finis) et les résultats les plus fondamentaux sur la classe d'opérateurs finis.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la classe des opérateurs finis généralisés où la distance entre l'image de dérivation généralisée et l'opérateur identité est maximale. Cette classe a été introduite par S. Mecheri [25]. S. Mecheri [27] et S. Bouzenada [8] ont présenté quelques paires d'opérateurs appartenant à cette classe.

Après avoir donné une courte définition et caractérisation des opérateurs finis généralisés, nous présentons des nouvelles classes d'opérateurs finis généralisés. Nous donnons aussi des nouveaux résultats concernant l'orthogonalité de l'image au noyau de la dérivation généralisée.

Soient \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe séparable de dimension infinie et $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés dans \mathcal{H} .

2.1 Opérateurs finis

2.1.1 Définitions et propriétés

Définition 2.1.1 Un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dit opérateur fini si la distance entre l'opérateur identité et l'image de l'opérateur de dérivation induite par A vaut l'unité i.e. :

$$\|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

La classe des opérateurs finis est notée par $\mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Théorème 2.1.1 [45] Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1) $\|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.
- 2) $0 \in \overline{W(AT - TA)}$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; où $\overline{W(AT - TA)}$ est la fermeture de $W(AT - TA)$.
- 3) Il existe un état f de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que : $f(AT - TA) = 0$.

Dans ce qui suit nous allons étudier les propriétés algébriques des opérateurs finis. Remarquons tout d'abord qu'il est aisé de vérifier que l'opérateur nul et l'opérateur identité sont des opérateurs finis.

Proposition 2.1.1 Soit $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; alors :

1. $\alpha A \in \mathcal{F}(\mathcal{H}); \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
2. $(A - \alpha I) \in \mathcal{F}(\mathcal{H}); \forall \alpha \in \mathbb{C}$.
3. Si A est inversible; alors $A^{-1} \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.
4. $A^* \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.
5. $A^{2^m} \in \mathcal{F}(\mathcal{H});$ pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Preuve. 1. Soit $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; alors :

$$\|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Posons $T = \alpha Y$; $\forall \alpha \in \mathbb{C}^*$; $\forall Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, donc :

$$\|(\alpha A)Y - Y(\alpha A) - I\| \geq 1; \forall Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

d'où; $\alpha A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

2. On a : $AT - TA = (A - \alpha I)T - T(A - \alpha I)$. Donc ;

$$\|(A - \alpha I)T - T(A - \alpha I) - I\| = \|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

3. Soit A un opérateur inversible de $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Alors ; $\|AT - TA - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Pour $T = (-A^{-1}YA^{-1})$; on trouve :

$$\|A^{-1}Y - YA^{-1} - I\| \geq 1; \forall Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

4. Si $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; on a :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|AT - TA - I\| = \|(T^*A^* - A^*T^* - I)^*\| \\ &= \|T^*A^* - A^*T^* - I\| \\ &= \|A^*(-T)^* - (-T)^*A^* - I\|. \end{aligned}$$

Donc $A^* \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

5. Soit $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; alors il existe un état f de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que : $f(AT - TA) = 0$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

On prouve la relation par récurrence :

Pour $m = 0$ (évidente).

Supposons qu'il existe un état f de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que :

$$f(A^{2^m}T - TA^{2^m}) = 0; \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}.$$

Alors ;

$$f(A^{2^m}(A^{2^m}T) - (A^{2^m}T)A^{2^m}) = 0 \text{ et } f(A^{2^m}(TA^{2^m}) - (TA^{2^m})A^{2^m}) = 0,$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Par conséquent,

$$f(A^{2^{m+1}}T - TA^{2^{m+1}}) = 0; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

■

Théorème 2.1.2 [26] Soient A, B des éléments de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que : $A^n = I$ et $B^n = I$, pour un entier n , alors : $\|AT - TB - S\| \geq \|S\|$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et tout opérateur S tel que $AS = SB$.

En utilisant le théorème précédent, mettons $A = B$ et $S = I$ on trouvera :

Corollaire 2.1.1 Soit A un opérateur de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tel que $A^n = I$; pour un entier n ; alors : $\|AT - TA - I\| \geq 1$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ (i. e. A est fini).

Théorème 2.1.3 Soient $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ et W un opérateur inversible de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors $A \otimes W \in \mathcal{F}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; alors :

$$\begin{aligned} 1 &\leq \|AT - TA - I\| = \|(AT - TA - I) \otimes I\| \\ &= \|AT \otimes I - TA \otimes I - I \otimes I\| \\ &= \|AT \otimes WW^{-1} - TA \otimes W^{-1}W - I \otimes I\| \\ &= \|(A \otimes W)(T \otimes W^{-1}) - (T \otimes W^{-1})(A \otimes W) - I \otimes I\|. \end{aligned}$$

Pour $Y = T \otimes W^{-1}$, on a :

$$\|(A \otimes W)Y - Y(A \otimes W) - I \otimes I\| \geq 1.$$

Ce qui prouve que $A \otimes W$ est un opérateur fini. ■

2.1.2 Quelques classes d'opérateurs finis

Dans ce paragraphe, on va présenter quelques nouvelles classes d'opérateurs finis contenant les classes des opérateurs normaux et hyponormaux, en les classifiant par rapport à la classe des opérateurs normaloïdes, ou en prouvant leur appartenance à la classe $\overline{\mathcal{R}_1}$.

Définition 2.1.2 Soit A un élément de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, la classe $\overline{\mathcal{R}_1}$ est définie par :

$$\overline{\mathcal{R}_1} = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \sigma_{ar}(A) \neq \emptyset\}.$$

Lemme 2.1.1 [25] Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors l'intersection de la frontière de l'image numérique et le spectre de A est incluse dans le spectre approché réduisant de A , i. e. : $\partial W(A) \cap \sigma(A) \subset \sigma_{ar}(A)$.

Théorème 2.1.4 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $A \in \overline{\mathcal{R}_1}$; alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

Preuve. Soit $A \in \overline{\mathcal{R}_1}$; alors $\sigma_{ar}(A) \neq \phi$. Donc, ils existent $\lambda \in \mathbb{C}$ et une suite $\{x_n\} \in \mathcal{H}$, tels que : $(A - \lambda I)x_n \rightarrow 0$ et $(A - \lambda I)^*x_n \rightarrow 0$. On a :

$$\begin{aligned} \|AT - TA - I\|^2 &= \|(A - \lambda I)T - T(A - \lambda I) - I\|^2 \\ &= |\langle ((A - \lambda I)T - T(A - \lambda I) - I)x_n, ((A - \lambda I)T - T(A - \lambda I) - I)x_n \rangle| \\ &\geq |\langle T(A - \lambda I)x_n, x_n \rangle - \langle x_n, (A - \lambda I)Tx_n \rangle + I| \\ &\geq \langle T(A - \lambda I)x_n, x_n \rangle - \langle x_n, (A - \lambda I)Tx_n + I \rangle \\ &= |\langle (A - \lambda I)x_n, T^*x_n \rangle - \langle (A - \lambda I)^*x_n, Tx_n \rangle + I|. \end{aligned}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient : $\|AT - TA - I\| \geq 1$. D'où $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. ■

Théorème 2.1.5 Soit A un opérateur totalement (α, β) -normal; alors A est fini.

Preuve. Comme $\ker(A - \lambda) = \ker((A - \lambda)^*)$ (voir [11]) et $A - \lambda$ est (α, β) -normal; pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on obtient $\sigma_a(A) = \sigma_{ar}(A)$. Et comme $\partial\sigma(A) \subset \sigma_a(A)$, on a : $\sigma_{ar}(A) \neq \emptyset$. D'où A est fini d'après le théorème 2.1.4. ■

Théorème 2.1.6 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si A est normaloïde; alors $A \in \overline{\mathcal{R}_1}$.

Preuve. Soit A un opérateur normaloïde; alors $\|A\| = r(A)$ i.e. il existe $\lambda \in \sigma(A)$; tel que $\|A\| = |\lambda|$. Comme λ est dans la frontière de $\sigma(A)$; alors $\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$. Par conséquent, $\|(A - \lambda I)^*x_n\| \rightarrow 0$; d'où $A \in \overline{\mathcal{R}_1}$. ■

Lemme 2.1.2 Si A est un opérateur quasi- $*$ - n -paranormal; alors A est normaloïde.

Preuve. On peut voir à partir de la définition de l'opérateur quasi- $*$ - n -paranormal que :

$$\|A^{n+2}x\| \|Ax\|^n \geq \|A^*Ax\|^{n+1}$$

pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Remplaçant x par $A^{k-1}x$; alors :

$$\|A^{n+1+k}x\| \|A^k x\|^n \geq \|A^* A^k x\|^{n+1}$$

est vrai pour tout entier $k \geq 1$, donc ;

$$\|A^{n+1+k}\| \|A^k\|^n \geq \|A^* A^k\|^{n+1}. \quad (2.1)$$

Supposons maintenant que $\|A^k\| = \|A\|^k$; pour certain $k \geq 1$ (ce qui est vrai tautologiquement pour $k = 1$).

Alors ;

$$\begin{aligned} \|A\|^{(k-1)(n+1)} \|A^{n+1+k}\| \|A\|^{kn} &\geq \|A^{*(k-1)}\|^{n+1} \|A^{n+1+k}\| \|A^k\|^n \\ &\geq \|A^{*(k-1)}\|^{n+1} \|A^* A^k\|^{n+1} \\ &\geq \|A^{*k} A^k\|^{n+1} \\ &= \|A^k\|^{2(n+1)} \\ &= \|A\|^{2k(n+1)}, \end{aligned}$$

et donc ;

$$\|A^{k+(n+1)}\| = \|A\|^{k+(n+1)}.$$

D'où ; par récurrence, $\|A^{k+(n+1)j}\| = \|A\|^{k+(n+1)j}$ pour tout $j \geq 1$. Ce qui donne une sous-suite $\{A^{nj}\}$ de $\{A^n\}$, où $A^{nj} = A^{1+(n+1)j}$, tel que $\lim_j \|A^{nj}\|^{\frac{1}{nj}} = \lim_j \left(\|A\|^{nj}\right)^{\frac{1}{nj}} = \|A\|$.

Notez que $\{\|A^n\|^{\frac{1}{n}}\}$ est une suite convergente qui converge vers $r(A)$, où $r(A)$ est le rayon spectral de A , il s'ensuit que $r(A) = \|A\|$. Donc A est normaloïde. ■

Théorème 2.1.7 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur quasi- $*$ - n -paranormal; alors A est fini.

Preuve. L'hypothèse implique que A est normaloïde d'après le lemme [2.1.2](#). D'où le résultat requis découle du théorème [2.1.6](#) et du théorème [2.1.4](#). ■

Théorème 2.1.8 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur spectraloïde; alors A est fini.

Preuve. On a : $r(A) = \omega(A)$; alors il existe $\lambda \in \sigma(A) \subset \overline{W(A)}$; tel que $|\lambda| = \omega(A)$; d'où $\lambda \in \partial W(A)$, i.e. $\partial W(A) \cap \sigma(A) \neq \emptyset$; d'où $\sigma_{ar}(A) \neq \phi$ (voir Lemme [2.1.1](#)). Il en résulte que A est fini. ■

Théorème 2.1.9 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si A est un opérateur p -*-paranormal; alors A est fini.

Preuve. Comme tout opérateur p -*-paranormal est un opérateur normaloïde [29], donc A est un opérateur spectraloïde; d'où A est fini d'après le théorème 2.1.8. ■

Corollaire 2.1.2 Les opérateurs : auto-adjoints, isométriques, unitaires, normaux, quasi-normaux, hyponormaux, p -hyponormaux, classe (\mathcal{A}) , log-hyponormaux, paranormaux sont des opérateurs de la classe $\overline{\mathcal{R}}_1$; donc des opérateurs finis.

Lemme 2.1.3 Soit A un opérateur posinormal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors $A \in \overline{\mathcal{R}}_1$.

Preuve. Soit A un opérateur posinormal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors :

$$\begin{aligned} \|(A - \lambda I)^* x\|^2 &= \langle (A - \lambda I) (A - \lambda I)^* x, x \rangle \\ &= \langle (A - \lambda I)^* P (A - \lambda I) x, x \rangle \\ &= \left\langle \sqrt{P} (A - \lambda I) x, \sqrt{P} (A - \lambda I) x \right\rangle \\ &= \left\| \sqrt{P} (A - \lambda I) x \right\|^2 \leq \left\| \sqrt{P} \right\|^2 \|(A - \lambda I) x\|^2. \end{aligned}$$

D'où;

$$\|(A - \lambda I)^* x\| \leq \left\| \sqrt{P} \right\| \|(A - \lambda I) x\|.$$

Pour $\lambda \in \sigma_a(A)$, on trouve que $(A - \lambda I)^* x_n \rightarrow 0$. Donc $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$; d'où $A \in \overline{\mathcal{R}}_1$. ■

Corollaire 2.1.3 Soit A un opérateur posinormal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$.

2.2 Opérateurs finis généralisés

Dans cette section on étudie la classe des opérateurs finis généralisés. C'est une classe plus générale que la classe des opérateurs finis, elle est obtenue par l'orthogonalité de l'image d'une dérivation généralisée et l'opérateur identité. On présente aussi des nouvelles paires des opérateurs appartenant à cette classe.

2.2.1 Définition et caractérisation des opérateurs finis généralisés

Définition 2.2.1 La paire $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est dite finie généralisée si :

$$\|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

On note par $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$ la classe des opérateurs finis généralisés.

Théorème 2.2.1 $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$ est fermée dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Preuve. Soit $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$ qui converge vers (A, B) . On a pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$1 \leq \|A_n T - TB_n - I\| \leq \|AT - TB - I\| + \|A_n - A\| \|T\| + \|B_n - B\| \|T\|.$$

On a :

$$\forall \varepsilon > 0; \exists N_\varepsilon; \forall n > N_\varepsilon : \|A_n - A\| < \varepsilon \text{ et } \|B_n - B\| < \varepsilon,$$

alors ; par le choix de $n > N_\varepsilon$ on obtient :

$$1 - 2\varepsilon \|x\| < \|AT - TB - I\|,$$

d'où ;

$$\|AT - TB - I\| \geq 1,$$

i.e. $(A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$. Donc $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$ est fermée dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

Théorème 2.2.2 Pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $0 \in \overline{W(AT - TB)}$; $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;
- (ii) $\|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;
- (iii) Il existe un état f , tel que : $f(AT) = f(TB); \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Preuve. [(i) \implies (ii)] En appliquant le lemme **1.2.1** pour $AT - TB$ au lieu de A on obtient $0 \in W_0(AT - TB)$ si est seulement si : $\|AT - TB - \lambda I\| \geq |\lambda|$; pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la remarque **1.2.1** implique que : $\|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

[(ii) \implies (iii)] Soit $M = \{AT - TB; T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$. Il est clair que M est une variété linéaire de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. D'après le théorème de Hahn-Banach [13, p. 64], il existe un élément f de $\mathcal{P} = \{f \in \mathcal{A}^*; f(I) = \|f\| = 1\}$; tel que $f(I) = 1$, $\|f\| = \frac{1}{\inf_T \|AT - TB - I\|}$ et $f(Y) = 0$; pour tout $Y \in M$, i.e. $f(AT) = f(TB)$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

[(iii) \implies (i)] D'après la définition 1.2.4, l'hypothèse implique que $0 \in W_0(AT - TB)$. Donc, d'après la remarque 1.2.1 on a $0 \in \overline{W(AT - TB)}$; $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, i.e. (A, B) est finie généralisée. ■

Proposition 2.2.1 Pour $(A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$; on a :

- (1) $(\alpha A + \beta, \alpha B + \beta) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$; pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.
- (2) Si A et B sont des opérateurs inversibles; alors $(A^{-1}, B^{-1}) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.
- (3) $(B^*, A^*) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.
- (4) $(A^{2^m}, B^{2^m}) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$, pour tout $m \in \mathbb{N}$.
- (5) $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$.

Preuve. (1) Si $(A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$; alors d'après le théorème 2.2.2, il existe un état f ; tel que : $f(AT) = f(TB)$; $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Comme f est linéaire on a :

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : f((\alpha A + \beta)T) = f(T(\alpha B + \beta))$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- (2) Soit f un état de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que : $f(AT) = f(TB)$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors :

$$f(A^{-1}T) = f((A^{-1}TB^{-1})B) = f(A(A^{-1}TB^{-1})) = f(TB^{-1}); \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

- (3) Soit f un état de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que $f(AT) = f(TB)$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Donc on a :

$$\begin{aligned} f^*(B^*T) &= \overline{f(B^*T)^*} = \overline{f(T^*B)} \\ &= \overline{f(AT^*)} = \overline{f(TA^*)^*} \\ &= f^*(TA^*), \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Comme l'adjoint d'un état est un état aussi; on a $(B^*, A^*) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

- (4) Soit f un état de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que : $f(AT - TB) = 0$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. On a par récurrence ;

Pour $m = 0$, $(A^{2^0}, B^{2^0}) = (A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

On suppose; pour tout $m \in \mathbb{N}$, qu'il existe un état f de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que :

$$f(A^{2^m}T - TB^{2^m}) = 0; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Alors :

$$f(A^{2^m}(A^{2^m}T) - (A^{2^m}T)B^{2^m}) = 0 \text{ et } f(A^{2^m}(TB^{2^m}) - (TB^{2^m})B^{2^m}) = 0,$$

d'où;

$$f(A^{2^{m+1}}T - TB^{2^{m+1}}) = 0.$$

(5) Supposons que, $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$. M. Rosenblum [39] a prouvé que $\sigma(\delta_{A,B}) \subset \sigma(A) - \sigma(B)$; alors $\delta_{A,B}$ est inversible. Par conséquent, il existe $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ pour lequel on a : $\|\delta_{A,B}(T) - I\| < 1$; contradiction. ■

Lemme 2.2.1 Soient A, B, C et D quatre opérateurs différents dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $(A, B), (C, D) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$; alors :

- (1) $(CA, DB) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.
- (2) $(A + C, B + D) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

Preuve. (1) Si $(A, B), (C, D) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$; alors d'après le Théorème 2.2.2 ils existent deux états f, g tels que $f(AT - TB) = 0$ et $g(CT - TD) = 0$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

D'où :

$$f(CAT - CTB) = 0 \text{ et } g(CTB - TDB) = 0.$$

Donc;

$$(f + g)(CAT - TDB) = 0; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

(2) Soient f, g deux états sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vérifiant : $f(AT - TB) = 0$ et $g(CT - TD) = 0$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Soit $h = f + g$. Puisque f et g sont linéaires; on a :

$$\begin{aligned} 0 &= f(AT - TB) + g(CT - TD) \\ &= (f + g)(AT + CT - TB - TD) \\ &= h((A + C)T - T(B + D)); \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

■

Proposition 2.2.2 $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$ est invariante par équivalence unitaire.

Preuve. Supposons que $(A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$ et U est un opérateur unitaire. On a :

$$\|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Puisque l'application $T \mapsto U^*TU$ est surjective; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, il existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que : $T = U^*SU$. Alors ;

$$\begin{aligned} \|(U^*AU)T - T(U^*BU) - I\| &= \|(U^*AU)U^*SU - U^*SU(U^*BU) - U^*U\| \\ &= \|U^*(AS - SB - I)U\| \\ &= \|AS - SB - I\| \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

D'où; $((U^*AU), (U^*BU)) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$. ■

– Soit

$$S\mathcal{GF}(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H}); \mathcal{S}(A, B) \subset \mathcal{GF}(\mathcal{H})\}$$

où $\mathcal{S}(A, B)$ est l'orbite de similitude de (A, B) ,

$$\mathcal{S}(A, B) = \{(T^{-1}AT, T^{-1}BT) : T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \text{ est inversible}\}.$$

Il est bien connu [45, Theorem 8] que le nilpotent $N(A)$, défini sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}')$ par $N(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \end{pmatrix}$; où $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^{(3)} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, est fini si et seulement si A est fini.

Dans le théorème suivant, on montre que $\mathcal{GF}(\mathcal{H}) \not\subseteq S\mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

Théorème 2.2.3 Le couple d'opérateurs finis généralisés défini sur $\mathcal{B}(\mathcal{H}') \times \mathcal{B}(\mathcal{H}')$ par :

$$(N(0), N(0)) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \end{pmatrix} \right),$$

où $\mathcal{H}' = \mathcal{H}^{(3)} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, n'est pas dans $S\mathcal{GF}(\mathcal{H}')$.

Preuve. Il suffit de montrer l'existence d'un couple d'opérateurs semblable à $(N(0), N(0))$ qui n'est pas dans $\mathcal{GF}(\mathcal{H}')$.

On sait que $\mathcal{GF}(\mathcal{H}) \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; tels que : $(A, B) \notin \mathcal{GF}(\mathcal{H})$. Alors;

$$(N(A), N(B)) = \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ B & I & 0 \end{bmatrix} \right) \notin \mathcal{GF}(\mathcal{H}').$$

On définit le couple d'opérateurs $(S(A), S(B))$ par :

$$(S(A), S(B)) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ -A & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -B & I \end{bmatrix} \right).$$

Donc;

$$([S(A)]^{-1}, [S(B)]^{-1}) = \left(\begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ A & 0 & I \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & B & I \end{bmatrix} \right)$$

et

$$\begin{aligned} ([S(A)]^{-1} N(0) S(A), [S(B)]^{-1} N(0) S(B)) &= \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ A & I & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ B & I & 0 \end{bmatrix} \right) \\ &= (N(A), N(B)). \end{aligned}$$

Ainsi; $(N(A), N(B))$ est un couple d'opérateurs semblable à $(N(0), N(0))$ n'appartenant pas à $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$, i.e. $(N(0), N(0)) \notin S\mathcal{GF}(\mathcal{H})$. Il en résulte que $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$ n'est pas invariant par similitude. ■

Théorème 2.2.4 Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. S'il existent une suite normale $\{x_n\}_{n \geq 1} \in \mathcal{H}$ et un scalaire λ tels que :

$$\|(A - \lambda I)^* x_n\| \rightarrow 0 \text{ et } \|(B - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0;$$

alors $(A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

Preuve. Soit $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors ;

$$\begin{aligned} \|AT - TB - I\| &= \|(A - \lambda I)T - T(B - \lambda I) - I\| \\ &\geq |\langle [(A - \lambda I)T - T(B - \lambda I) - I]x_n, x_n \rangle| \\ &= |\langle Tx_n, (A - \lambda I)^*x_n \rangle - \langle (B - \lambda I)x_n, T^*x_n \rangle - 1|. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient $\|AT - TB - I\| \geq 1$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

- Soit $\tilde{\delta}_{A,B}$ l'image de $\delta_{A,B}$ par la projection canonique de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dans l'algèbre de Calkin $\mathfrak{S}(\mathcal{H}) = \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H}) = \{\tilde{A}, A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}$ (où $\tilde{A} = \{A + K, K \in \mathcal{K}(\mathcal{H})\}$ et $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est l'idéal des opérateurs compacts de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$), définie par :

$$\tilde{\delta}_{A,B}(\tilde{T}) = \tilde{A}\tilde{T} - \tilde{T}\tilde{B}.$$

Théorème 2.2.5 Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. S'il existent une suite normale $(x_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{H}$ et un scalaire λ tels que :

$$\|(A - \lambda I)^*x_n\| \rightarrow 0 \text{ et } \|(B - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0,$$

alors : $\|\tilde{A}\tilde{T} - \tilde{T}\tilde{B} - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Preuve. Soit K un opérateur compact, donc $Kx_n \rightarrow 0$. Alors pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la compacité de K entraîne que :

$$\begin{aligned} \|AT - TB - I - K\| &\geq |\langle [(A - \lambda I)T - T(B - \lambda I) - I - K]x_n, x_n \rangle| \\ &= |\langle Tx_n, (A - \lambda I)^*x_n \rangle - \langle (B - \lambda I)x_n, T^*x_n \rangle - 1 - \langle Kx_n, x_n \rangle| \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on a :

$$\|AT - TB - I - K\| \geq 1,$$

et comme K est arbitraire alors ;

$$\|\tilde{A}\tilde{T} - \tilde{T}\tilde{B} - I\| \geq 1.$$

■

2.2.2 Nouvelles classes d'opérateurs dans $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$

Définition 2.2.2 La classe \mathcal{R}_1^2 est la classe de tous les couples $(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$; tels que A et B admettent un sous-espace réduisant de dimension 1, $E_{(A,B)}^1$, vérifiant $A|_{E_{(A,B)}^1} = B|_{E_{(A,B)}^1}$.

Théorème 2.2.6 Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $(A, B) \in \overline{\mathcal{R}_1^2}$; alors $(A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

Preuve. Si $(A, B) \in \overline{\mathcal{R}_1^2}$, alors ils existent une suite orthonormale $\{x_n\} \in \mathcal{H}$ et $\lambda \in \sigma_{ar}(A, B)$; tels que :

$$\lim_n (A - \lambda I)x_n = 0, \quad \lim_n (A - \lambda I)^*x_n = 0$$

et

$$\lim_n (B - \lambda I)x_n = 0, \quad \lim_n (B - \lambda I)^*x_n = 0,$$

avec $\|x_n\|_{\mathcal{H}} = 1$. Donc ;

$$\begin{aligned} \|AT - TB - I\| &= \|(A - \lambda I)T - T(B - \lambda I) - I\| \\ &\geq |\langle (A - \lambda I)Tx_n - T(B - \lambda I)x_n - x_n, x_n \rangle| \\ &\geq |1 - \langle Tx_n, (A - \lambda I)^*x_n \rangle + \langle (B - \lambda I)x_n, T^*x_n \rangle|. \end{aligned}$$

Si $n \rightarrow \infty$, on obtient $\|AT - TB - I\| \geq 1$. ■

Proposition 2.2.3 [6] (Technique de Berberian). Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert complexe ; alors ils existent un espace de Hilbert $\mathcal{H}_0 \supset \mathcal{H}$ et un isomorphisme *-isométrique ; $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_0)$; tel que, pour tout $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

(i) $\varphi(A^*) = \varphi(A)^*$, $\varphi(I_{\mathcal{H}}) = \varphi(I_{\mathcal{H}_0})$, $\varphi(\alpha A + \beta B) = \alpha\varphi(A) + \beta\varphi(B)$, $\varphi(AB) = \varphi(A)\varphi(B)$, $\|\varphi(A)\| = \|A\|$, $\varphi(A) \leq \varphi(B)$ si $A \leq B$.

(ii) $\sigma(A) = \sigma(\varphi(A))$, $\sigma_a(A) = \sigma_a(\varphi(A)) = \sigma_p(\varphi(A))$.

Lemme 2.2.2 Soit \mathcal{A} une C^* -algèbre, et soient $a, b \in \mathcal{A}$. Si $(a, b) \in \overline{\mathcal{R}_1^2}$; alors (a, b) est finie généralisée.

Preuve. D'après la proposition 2.2.3, il existe un espace de Hilbert \mathcal{H} et un isomorphisme *-isométrique $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Donc ; pour $t, a, b \in \mathcal{A}$, on a :

$$\begin{aligned} \|at - tb - e\|_{\mathcal{A}} &= \|\varphi[at - tb - e]\| \\ &= \|\varphi(a)\varphi(t) - \varphi(t)\varphi(b) - I\|. \end{aligned}$$

Comme $(a, b) \in \overline{\mathcal{R}_1^2}$; alors $(\varphi(a), \varphi(b))$ est aussi dans $\overline{\mathcal{R}_1^2}$; donc $(\varphi(a), \varphi(b))$ est finie généralisée d'après le théorème 2.2.6. Il en résulte que :

$$\|at - tb - e\| = \|\varphi(a)\varphi(t) - \varphi(t)\varphi(b) - I\| \geq 1,$$

i.e. $(a, b) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$. ■

Théorème 2.2.7 Soit $(A, B) \in \overline{\mathcal{R}_1^2}$ et soit K un opérateur compact. Si $R = A + K$ et $S = B + K$; alors la paire (R, S) est finie généralisée.

Preuve. Comme l'algèbre de Calkin $\mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ est une C^* -algèbre. Si $R = A + K$ et $S = B + K$; alors $(R, S) \in \overline{\mathcal{R}_1^2}$. Ainsi, la proposition 2.2.3 montre qu'ils existent un espace de Hilbert \mathcal{H} et un isomorphisme *-isométrique; $\varphi : \mathcal{B}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En utilisant le lemme 2.2.2, on obtient que $(\varphi(R), \varphi(S))$ est finie généralisée. D'où; $(R, S) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$. ■

Lemme 2.2.3 Si $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$; alors $(A, B) \in \mathcal{GF}(\mathcal{H})$.

Preuve. Soient $A, B \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Alors d'après le théorème 2.2.2 ils existent deux états f et g sur $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vérifiant :

$$f(AT - TA) = 0 \text{ et } g(BT - TB) = 0; \text{ pour tout } T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

La linéarité de f et g implique que :

$$\begin{aligned} (f + g)(AT - TB) &= (f + g)(AT - TA + TA - TB + BT - BT) \\ &= f(AT - TA) + g(BT - TB) - (f + g)(BT - TA) \\ &= -(f + g)(BT - TA). \end{aligned}$$

Puisque $f + g$ est une fonctionnelle positive normalisée; alors $(f + g)(AT - TB) = 0$. Ce qui termine la démonstration. ■

2.2.3 Étude de l'orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivation

Orthogonalité de l'image au noyau d'une dérivation

Définition 2.2.3 Soit F un espace de Banach. On dit qu'un élément $a \in F$ est orthogonal à $b \in F$ au sens de Birkhoff, si :

$$\|a + \lambda b\| \geq \|a\|; \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

On note $a \perp b$.

Dans [2], les auteurs ont montré que si A et B sont des opérateurs normaux et $S \in \ker(\delta_{A,B})$ (noyau de $\delta_{A,B}$); alors :

$$\|\delta_{A,B}(T) - S\| \geq \|S\|; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

D'où, l'image de $\delta_{A,B}$ et son noyau sont orthogonaux. En particulier ; si $\|\delta_A(T) - S\| \geq \|S\|$; alors $R(\delta_A)$ et $\ker(\delta_A)$ sont orthogonaux au sens de Birkhoff. Il est facile de prouver que si $R(\delta_A) \perp \ker(\delta_A)$; alors A est fini. En effet, on a $S = I \in \ker(\delta_A)$.

Des études détaillées de l'orthogonalité de l'image au noyau de la dérivation généralisée $\delta_{A,B}$ on été faites ces dernières années (voir par exemple : [1], [3], [12] et [30]).

Orthogonalité de l'image au noyau pour une classe d'opérateur $\overline{\mathcal{R}}_1$

Lemme 2.2.4 Soient $A, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $A \in \overline{\mathcal{R}}_1$ et S normal, tel que : $SA = AS$; alors pour tout $\lambda \in \sigma_p(S)$ (le spectre ponctuel de S);

$$|\lambda| \leq \|S - (AT - TA)\|; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Preuve. Soient $A \in \overline{\mathcal{R}}_1$ et $S, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Soient λ une valeur propre de S et \mathcal{M}_λ l'espace propre associé à λ . Comme S est normal et d'après le théorème de Fuglede [15], il en résulte que : $S^*A = AS^*$. D'où \mathcal{M}_λ est réduisant pour A et pour S .

Selon la décomposition $\mathcal{H} = \mathcal{M}_\lambda \oplus \mathcal{M}_\lambda^\perp$, on peut écrire S, A et T comme suit :

$$S = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2 \\ T_3 & T_4 \end{pmatrix}.$$

Comme la restriction d'un opérateur de classe $\overline{\mathcal{R}_1}$ sur un sous-espace invariant est de classe $\overline{\mathcal{R}_1}$, on a :

$$\begin{aligned} \|S - (AT - TA)\| &= \left\| \begin{pmatrix} \lambda I - (A_1 T_1 - T_1 A_1) & * \\ & * \end{pmatrix} \right\| \\ &\geq \|\lambda I - (A_1 T_1 - T_1 A_1)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \\ &\geq |\lambda| \left\| I - \left(A_1 \left(\frac{T_1}{\lambda} \right) - \left(\frac{T_1}{\lambda} \right) A_1 \right) \right\| \\ &\geq |\lambda|. \end{aligned}$$

■

Nous étudions maintenant l'orthogonalité de l'image au noyau de la dérivation interne δ_A induite par un opérateur A de classe $\overline{\mathcal{R}_1}$ et un opérateur normal S .

Théorème 2.2.8 *Soient $A, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $A \in \overline{\mathcal{R}_1}$ et S est un opérateur normal tel que ; $SA = AS$, alors :*

$$\|S\| \leq \|S - (AT - TA)\|; \text{ pour tout } T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma(S) = \sigma_a(S)$ [20]. D'après la proposition 2.2.3 : $\varphi(S)$ est normal, $\varphi(A) \in \overline{\mathcal{R}_1}$, $\varphi(A)\varphi(S) = \varphi(S)\varphi(A)$ et $\lambda \in \sigma_p(\varphi(S))$. En utilisant le lemme 2.2.4 on obtient :

$$|\lambda| \leq \|\varphi(S) - (\varphi(A)\varphi(T) - \varphi(T)\varphi(A))\| = \|S - (AT - TA)\|; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

D'où;

$$\sup_{\lambda \in \sigma(\varphi(T))} |\lambda| = \|\varphi(S)\| = \|S\| \leq \|S - (AT - TA)\|; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

■

Théorème 2.2.9 *Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si A est un opérateur (p, k) -quasihyponormal injectif et B^* est un opérateur dominant; alors :*

$$\|S - (AT - TB)\| \geq \|S\|;$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et tout $S \in \ker \delta_{A,B}$.

Preuve. Soit $S \in \ker \delta_{A,B}$. Alors $S \in \ker \delta_{A^*,B^*}$ [4, Theorem 2.3]. Par conséquent, $ASS^* = SBS^* = SS^*A$. Comme tout opérateur (p, k) -quasihyponormal est fini d'après [33, Corollary 3.5], SS^* est normal et $A(SS^*) = (SS^*)A$, le théorème [2.2.8] implique que :

$$\begin{aligned} \|S\|^2 &= \|SS^*\| \leq \|SS^* - (ATS^* - TS^*A)\| \\ &= \|SS^* - (ATS^* - TBS^*)\| \\ &\leq \|S^*\| \|S - (AT - TB)\|. \end{aligned}$$

D'où ; $\|S\| \leq \|S - (AT - TB)\|$. ■

CHAPITRE 3

Opérateurs *-finis et opérateurs *-finis généralisés

N. Hamada [21] a introduit une nouvelle classe d'opérateurs appelée la classe des opérateurs *-finis. La motivation de l'étude des opérateurs *-finis est en raison de deux approches, d'une part, de nombreux auteurs se sont intéressés à l'étude de l'image de la *-dérivation intérieure de Jordan $J(T)$.

D'autre part, introduire le concept de l'opérateur *-fini est également motivé par l'étude d'opérateurs finis donnés par J. P. Williams dans [45].

H. Messaoudene et N. Mesbah [35] ont introduit une nouvelle classe d'opérateurs appelée opérateurs *-finis généralisés notée $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$, qui est la classe d'opérateurs $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ où la distance entre l'image de la *-dérivation généralisée de Jordan et l'opérateur λI ; $\lambda \in \mathbb{C}$, est maximale.

Le but de ce chapitre est d'étudier ces types d'opérateurs en donnant leurs définitions et quelques propriétés algébriques et topologiques. On présente aussi des exemples d'opérateurs *-finis et *-finis généralisés.

3.1 Opérateurs *-finis

3.1.1 Définitions

Dans ce paragraphe, nous donnons la définition de l'opérateur *-fini avec quelques propriétés de base.

Définition 3.1.1 Un opérateur $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ est *-fini si :

$$0 \in \overline{W(TA - AT^*)}; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

La classe des opérateurs *-finis est notée $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$.

Proposition 3.1.1 [21] Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors A est *-fini si et seulement si :

$$\|TA - AT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Exemple 3.1.1 Il est clair que l'opérateur nul est un opérateur *-fini, mais l'identité n'est pas un opérateur *-fini; par ailleurs $0 \in \overline{W(T - T^*)}$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, en particulier si $T = iI$, $0 \in \overline{W(2iI)} = \{2i\}$; c'est une contradiction.

Proposition 3.1.2 Soient $A \in \mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors $\lambda A \in \mathcal{F}^*(\mathcal{H})$.

Preuve. Si $\lambda = 0$, ceci est évident. Dans le cas où $\lambda \in \mathbb{C}^*$; soit $\varepsilon > 0$, pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, il existe $x \in \mathcal{H}$; tel que :

$$|\langle (TA - AT^*)x, x \rangle| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Par conséquent,

$$|\langle (T(\lambda A) - (\lambda A)T^*)x, x \rangle| < \varepsilon,$$

i.e. $0 \in \overline{W(T(\lambda A) - (\lambda A)T^*)}$. ■

Proposition 3.1.3 Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Alors ;

$$A \in \mathcal{F}^*(\mathcal{H}) \iff A^* \in \mathcal{F}^*(\mathcal{H}).$$

Preuve. Comme $(A^*)^* = A$, il suffit de prouver une implication. Supposons que $0 \in \overline{W(TA - AT^*)}$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et que $\varepsilon > 0$; alors il existe un vecteur unitaire x tel que :

$$|\langle Ax, T^*x \rangle - \langle T^*x, A^*x \rangle| < \varepsilon.$$

Mais,

$$|\langle A^*x, T^*x \rangle - \langle T^*x, Ax \rangle| = |\overline{\langle A^*x, T^*x \rangle - \langle T^*x, Ax \rangle}| = |\langle Ax, T^*x \rangle - \langle T^*x, A^*x \rangle|.$$

Donc $0 \in \overline{W(TA^* - A^*T^*)}$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

Proposition 3.1.4 $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ est invariante par équivalence unitaire.

Preuve. Soit $A \in \mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ et soit U un opérateur unitaire dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. On a :

$$\|TA - AT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Comme l'application : $T \mapsto U^*TU$ est surjective; $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, il existe $S \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; tel que : $T = U^*SU$. Alors;

$$\begin{aligned} \|T(U^*AU) - (U^*AU)T^* - \lambda I\| &= \|(U^*SU)(U^*AU) - (U^*AU)(U^*S^*U) - \lambda U^*U\| \\ &= \|U^*(SA - AS^* - \lambda I)U\| \\ &= \|SA - AS^* - \lambda I\| \\ &\geq |\lambda|. \end{aligned}$$

D'où; $U^*AU \in \mathcal{F}^*(\mathcal{H})$. On en déduit que : $\mathcal{U}(\mathcal{F}^*(\mathcal{H})) \subset \mathcal{F}^*(\mathcal{H})$, où $\mathcal{U}(\mathcal{F}^*(\mathcal{H}))$ est l'orbite unitaire de $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$, i.e.

$$\mathcal{U}(\mathcal{F}^*(\mathcal{H})) = \{U^*AU; A \in \mathcal{F}^*(\mathcal{H}) \text{ et } U \text{ un unitaire de } \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

■

Proposition 3.1.5 $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ est fermé dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sous la topologie uniforme.

Preuve. Soit $\{A_n\}$ une suite d'opérateurs *-finis tel que : $A_n \rightarrow A$. Pour $\lambda \in \mathbb{C}$; alors :

$$\|TA_n - A_nT^* - \lambda I\| \rightarrow \|TA - AT^* - \lambda I\|.$$

D'où;

$$\inf_T \|TA_n - A_nT^* - \lambda I\| \rightarrow \inf_T \|TA - AT^* - \lambda I\|,$$

i.e. $|\lambda| \rightarrow \|TA - AT^* - \lambda I\|$. Cela implique que : $\inf_T \|TA - AT^* - \lambda I\| = |\lambda|$, pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Donc, $\|TA - AT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|$ pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Par conséquent, A est *-fini et $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ est fermé dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

Proposition 3.1.6 $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ n'est pas dense dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sous la topologie uniforme.

Preuve. D'après la proposition précédente $\mathcal{F}^*(\mathcal{H})$ est fermé dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; Il suffit de prouver que $\mathcal{F}^*(\mathcal{H}) \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ceci est claire puisque I n'est pas un opérateur *-fini. ■

3.1.2 Opérateurs *-finis sous perturbation spectrale

Dans ce paragraphe on va présenter des opérateurs non *-finis mais sous une perturbation du spectre approché réduisant sont des opérateurs *-finis.

Lemme 3.1.1 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur paranormal. Alors $\sigma_{ar}(A) \neq \emptyset$.*

Preuve. Si A est un opérateur paranormal ; alors A est normaloïde. D'où $\|A\| = r(A)$, ce qui implique qu'il existe $\lambda \in \sigma(A)$ tel que ; $|\lambda| = \|A\|$. Comme λ est dans la frontière de $\sigma(A)$; alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un vecteur unitaire $x \in \mathcal{H}$ tel que ; $\|Ax - \lambda x\| < \varepsilon$. Alors $\|A^*x - \bar{\lambda}x\| < \varepsilon$ car $|\lambda| = \|A\|$. ■

Théorème 3.1.1 *Soit $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ un opérateur paranormal. Alors ; $(A - \lambda I)$ est *-fini ; pour tout $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$.*

Preuve. Comme A est paranormal ; alors d'après le lemme [3.1.1](#), il existe $\lambda \in \sigma_{ar}(A)$. La définition du spectre approché réduisant implique que : $\forall \varepsilon > 0$; ils existent un vecteur unitaire $x \in \mathcal{H}$ et un opérateur non nul $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tels que :

$$\|Ax - \lambda x\| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\|T\|},$$

et

$$\|A^*x - \bar{\lambda}x\| \|T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; on obtient :

$$|\langle Ax, T^*x \rangle - \langle \lambda x, T^*x \rangle| \leq \|Ax - \lambda x\| \|T\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

et

$$|\langle T^*x, A^*x \rangle - \langle T^*x, \bar{\lambda}x \rangle| \leq \|A^*x - \bar{\lambda}x\| \|T\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors ; en additionnant les deux dernières inégalités ; on trouve :

$$|\langle T(A - \lambda I) - (A - \lambda I)T^*x, x \rangle| < \varepsilon.$$

Donc, $0 \in \overline{W(T(A - \lambda I) - (A - \lambda I)T^*)}$. Par conséquent $A - \lambda I$ est *-fini. ■

Corollaire 3.1.1 *Les opérateurs suivants sous perturbation du spectre approché réduisant sont des opérateurs *-finis.*

- 1) Opérateurs hyponormaux.
- 2) Opérateurs p -hyponormaux.
- 3) Opérateurs log-hyponormaux.

Remarque 3.1.1 On a montré dans l'exemple [3.1.1](#) que l'opérateur identité I (qui est un opérateur paranormal), n'est pas un opérateur *-fini ; alors que I est trivialement un opérateur fini.

3.2 Opérateurs *-finis généralisés

Motivé par l'étude de la classe des opérateurs *-finis introduite par N. Hamada, où elle a fourni quelques propriétés de ces opérateurs, H. Messaoudene et N. Mesbah [\[35\]](#) ont introduit une nouvelle classe d'opérateurs, plus large que les opérateurs *-finis, appelée la classe des opérateurs *-finis généralisés. Le but de cette partie est d'étudier cette classe et donner ces propriétés algébriques de base, également de présenter quelques paires d'opérateurs appartenant a cette classe.

3.2.1 Définition et propriétés de base

Définition 3.2.1 Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Le couple (A, B) est dit *-fini généralisé si :

$$\|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

On note par $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ la classe des opérateurs *-finis généralisés i.e :

$$\mathcal{GF}^*(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

Théorème 3.2.1 *Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $0 \in \overline{W(TA - BT^*)}$; $\forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;
- (ii) $\|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Preuve. Dans [\[45\]](#), l'auteur a montré que pour tout opérateur A , on a : $0 \in \overline{W(A)}$ si et seulement si : $\|A - \lambda I\| \geq |\lambda|$; pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. En remplaçant A par $TA - BT^*$, on

obtient :

$$0 \in \overline{W(TA - BT^*)}, \text{ ssi : } \|TA - BT^* - \lambda I\|_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

■

Remarque 3.2.1 $(0, I)$ n'est pas un couple d'opérateurs *-finis généralisés. Sinon $0 \in \overline{W(-T^*)}$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. De plus, si $T = iI$, on obtient : $0 \in \overline{W(iI)} = \{i\}$; c'est une contradiction.

Remarque 3.2.2 La condition (ii) ci-dessus signifie que : $\inf_T \|TA - BT^* - \lambda I\| = |\lambda|$; pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Dans ce qui suit, nous donnons quelques propriétés de base de la classe des opérateurs *-finis généralisés.

Proposition 3.2.1 Soient $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$. Alors $(\alpha A, \alpha B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$; pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Preuve. Il est clair que la paire d'opérateurs nuls est une paire d'opérateurs *-finis généralisés. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$, étant donné $\varepsilon > 0$; alors il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que :

$$|\langle (T(\alpha A) - (\alpha B)T^*)x, x \rangle| \leq |\alpha| |\langle (TA - BT^*)x, x \rangle| < |\alpha| \frac{\varepsilon}{|\alpha|},$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Donc :

$$|\langle (T(\alpha A) - (\alpha B)T^*)x, x \rangle| < \varepsilon,$$

i. e. $0 \in \overline{W(T(\alpha A) - (\alpha B)T^*)}$. ■

Proposition 3.2.2 Si $(B, A) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$; alors $(A^*, B^*) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$.

Preuve. Supposons que $(B, A) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$. Alors :

$$\|TB - AT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Puisque l'application : $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}) : T \rightarrow T^*$ est surjective; alors :

$$\|(TB - AT^* - \lambda I)^*\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

D'où ;

$$\|TA^* - B^*T^* - \bar{\lambda}I\| \geq |\lambda|; \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

i. e. (A^*, B^*) est *-fini generalisé. ■

Proposition 3.2.3 *Si $(A, B), (C, D)$ sont des paires d'opérateurs *-finis généralisés ; alors $(A + C, B + D)$ est aussi *-fini généralisée.*

Preuve. Soient $(A, B), (C, D) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$. Pour $\varepsilon > 0$; il existe $x \in \mathcal{H}$ tel que :

$$|\langle (TA - BT^*)x, x \rangle| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |\langle (TC - DT^*)x, x \rangle| < \frac{\varepsilon}{2},$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Donc :

$$\begin{aligned} |\langle (T(A + C) - (B + D)T^*)x, x \rangle| &\leq |\langle (TA - BT^*)x, x \rangle| + |\langle (TC - DT^*)x, x \rangle| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Proposition 3.2.4 *Il existe $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$; tel que :*

$$(A - \lambda I, B - \lambda I) \notin \mathcal{GF}^*(\mathcal{H}); \text{ pour tout } \lambda \in \mathbb{C}^*.$$

Preuve. Supposons que $(A - \lambda I, B - \lambda I) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$. Alors ;

$$0 \in \overline{W(T(A - \lambda I) - (B - \lambda I)T^*)};$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Posons $(A, B) = (0, 0)$ et $T = iI$, donc $0 \in \overline{W(-2\lambda iI)} = \{-2\lambda i\}$;

pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$. C'est une contradiction. ■

Théorème 3.2.2 *Soit $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ et soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs de la forme :*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Si pour tout $i; i = \overline{1, 2} : (A_{ii}, B_{ii}) \in \mathcal{GF}^(\mathcal{H}_i)$; alors $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$.*

Preuve. On a pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$;

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \text{ et } I = \begin{pmatrix} I_{11} & 0 \\ 0 & I_{22} \end{pmatrix}.$$

Alors ; pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} \|TA - BT^* - \lambda I\| &= \left\| \begin{pmatrix} T_{11}A_{11} - B_{11}T_{11}^* - \lambda I_{11} & T_{12}A_{22} + B_{11}T_{21}^* \\ T_{21}A_{11} + B_{22}T_{12}^* & T_{22}A_{22} - B_{22}T_{22}^* - \lambda I_{22} \end{pmatrix} \right\| \\ &\geq \max_{i=1,2} \|T_{ii}A_{ii} - B_{ii}T_{ii}^* - \lambda I_i\| \\ &\geq |\lambda|. \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.3 $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ est fermé dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sous la topologie uniforme.

Preuve. Soit $\{A_n, B_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite dans $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$; telles que : $A_n \rightarrow A$ et $B_n \rightarrow B$.

Alors :

$$\begin{aligned} |\lambda| &\leq \|TA_n - B_nT^* - \lambda I\| \\ &\leq \|TA - BT^* - \lambda I\| + \|A_n - A\| \|T\| + \|B_n - B\| \|T\| \end{aligned}$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

Passons à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on obtient :

$$\|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|.$$

D'où ; $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$. ■

Proposition 3.2.5 $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ n'est pas dense dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sous la topologie uniforme.

Preuve. D'après le théorème 3.2.3 et la remarque 3.2.1, $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ ne peut pas être dense dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ sous la topologie uniforme puisque $\overline{\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})} \neq \mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

Proposition 3.2.6 La classe $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ est invariante par équivalence unitaire.

Preuve. Soient $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ et U un opérateur unitaire. Alors d'après le théorème

3.2.1 on a :

$$\begin{aligned} (A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H}) &\Leftrightarrow 0 \in \overline{W(TA - BT^*)}; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \overline{W(U^*(TA - BT^*)U)}; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \overline{W(U^*(TUU^*A - BUU^*T^*)U)}; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow 0 \in \overline{W(S(U^*AU) - (U^*BU)S^*)}; \forall S \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \\ &\Leftrightarrow ((U^*AU), (U^*BU)) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

■

3.2.2 Quelques paires d'opérateurs *-finis généralisés

Lemme 3.2.1 Soient A, B des opérateurs de rang fini ; alors (A, B) est *-fini généralisé.

Preuve. Pour tout opérateur $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $TA - BT^*$ est aussi de rang fini. Puisque 0 appartient au spectre de chaque opérateur de rang fini, alors ;

$$0 \in \sigma(TA - BT^*) \subseteq \overline{W(TA - BT^*)};$$

pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Par conséquent (A, B) est *-fini généralisé. ■

Théorème 3.2.4 Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. S'ils existent une suite normée $(x_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{H}$ et un scalaire λ vérifiant :

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0 \text{ et } \|(B - \lambda I)^*x_n\| \rightarrow 0,$$

alors $(A - \lambda I, B - \lambda I)$ est *-fini généralisé.

Preuve. On a pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$:

$$\begin{aligned} \|T(A - \lambda I) - (B - \lambda I)T^* - \lambda I\| &\geq |\langle [T(A - \lambda I) - (B - \lambda I)T^* - \lambda I]x_n, x_n \rangle| \\ &= |\langle (A - \lambda I)x_n, T^*x_n \rangle - \langle T^*x_n, (B - \lambda I)^*x_n \rangle - \lambda|. \end{aligned}$$

Pour $n \rightarrow +\infty$, on obtient $\|T(A - \lambda I) - (B - \lambda I)T^* - \lambda I\| \geq |\lambda|$; pour tout $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$. ■

Corollaire 3.2.1 Si $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors pour tout $\lambda \in \sigma_a(A)$ et pour tout $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$(C(A - \lambda I), (A - \lambda I)^*) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H}).$$

Preuve. Soit $\lambda \in \sigma_a(A)$. Alors il existe une suite normée $\{x_n\}_{n \geq 1}$ dans \mathcal{H} vérifiant : $\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$.

Si $R = A - \lambda I$ et $S = CR$ avec $C \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$; alors :

$$\|((R - 0)^*)^*x_n\| = \|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0$$

et

$$\|(S - 0)x_n\| = \|(C(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0.$$

Donc ;

$$(C(A - \lambda I), (A - \lambda I)^*) = (S, R^*) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H}).$$

■

Proposition 3.2.7 Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs paranormaux ; alors $(A - \lambda I, B - \lambda I) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$; pour tout $\lambda \in \sigma_{ar}(A) \cap \sigma_{ar}(B)$.

Preuve. Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ des opérateurs paranormaux. Alors d'après le lemme [3.1.1](#) ils existent $\lambda \in \sigma_{ar}(A) \cap \sigma_{ar}(B)$ et une suite normée $(x_n)_{n \geq 1}$ dans \mathcal{H} vérifiant :

$$\|(A - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0, \|(A - \lambda I)^*x_n\| \rightarrow 0 \text{ et } \|(B - \lambda I)x_n\| \rightarrow 0, \|(B - \lambda I)^*x_n\| \rightarrow 0.$$

Par conséquent, d'après le théorème [3.2.4](#); on obtient $(A - \lambda I, B - \lambda I) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$. ■

Corollaire 3.2.2 Pour toutes les paires (A, B) suivantes, la paire $(A - \lambda I, B - \lambda I)$ est *-finie généralisée pour tout $\lambda \in \sigma_{ar}(A) \cap \sigma_{ar}(B)$.

- (i) A et B sont des opérateurs hyponormaux,
- (ii) A et B sont des opérateurs p -hyponormaux,
- (iii) A et B sont des opérateurs de class \mathcal{A} ,
- (iv) A et B sont des opérateurs log-hyponormaux.

Proposition 3.2.8 Soient $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Si $R_{A,B}$ ne contient pas d'opérateur inversible ; alors $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$.

Preuve. Soit $C \in R_{A,B}$ (i.e. $C = TA - BT^*$). Par hypothèse, C est un opérateur non inversible. Donc, d'après [\[23\]](#), p.162] on a : $\|C - \lambda I\| \geq |\lambda|$; $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. D'où, $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$. ■

Proposition 3.2.9 Si $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$; alors $\overline{R_{A,B}}$ (la fermeture de $R_{A,B}$) ne contient aucun opérateur scalaire non nul.

Preuve. Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$: $\lambda I \in \overline{R_{A,B}}$; alors on peut trouver une suite $\{T_n\}$ dans $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ vérifiant :

$$\|T_n A - B T_n^* - \lambda I\| \rightarrow 0.$$

Comme $(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$, on a : $|\lambda| \leq \|T_n A - B T_n^* - \lambda I\| \rightarrow 0$, c'est une contradiction.

■

S. Mecheri [25] a introduit une classe plus générale que la classe des opérateurs finis appelée classe d'opérateurs finis généralisés définie par :

$$\mathcal{GF}(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|AT - TB - I\| \geq 1; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})\}.$$

La conclusion de l'étude de la classe des opérateurs finis généralisés dans notre travail est que $\mathcal{GF}(\mathcal{H})$ n'est pas invariante sous orbite de similitude et qu'on peut étendre l'orthogonalité de l'image de la dérivation généralisée et son noyau aux opérateurs non normaux, y compris les opérateurs (p, k) -quasihyponormaux et opérateurs dominants.

Dans une autre partie, nous avons introduit une nouvelle classe d'opérateurs appelée la classe des opérateurs *-finis généralisés. Pour $A, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H})$, le couple (A, B) est dit opérateur *-fini généralisé s'il est un élément de $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$, où :

$$\mathcal{GF}^*(\mathcal{H}) = \{(A, B) \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \|TA - BT^* - \lambda I\| \geq |\lambda|; \forall T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

La classe des opérateurs *-finis généralisés est une généralisation de la classe des opérateurs *-finis.

Nous avons donné une condition nécessaire et suffisante pour qu'une paire d'opérateurs appartient à $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$, nous avons présenté quelques propriétés algébriques de $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ et nous avons prouvé que la classe des opérateurs *-finis généralisés est fermée pour la topologie uniforme. Aussi, nous avons prouvé que $\mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ est invariante par équivalence unitaire.

Nous avons alloué la dernière partie pour présenter quelques couples d'opérateurs

$(A, B) \in \mathcal{GF}^*(\mathcal{H})$ et d'autres couples d'opérateurs non *-finis généralisés mais sous une perturbation du spectre approché réduisant sont des opérateurs *-finis généralisés.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Anderson, *On normal derivations*, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 135–140. DOI : <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1973-0312313-6>
- [2] J. Anderson and C. Foais, *Properties which normal operators share with normal derivation and related operators*, Pacific J. Math. **61** (1975), no. 2, 313–325. DOI : <http://doi.org/10.2140/pjm.1975.61.313>.
- [3] A. Bachir and A. Segres, *Generalized Fuglede-Putnam theorem and orthogonality*, AJMAA **1** (2004), 1–5.
- [4] A. N. Bakir and S. Mecheri, *Another version of Fuglede-Putnam theorem*, Georgian Math. J. **16** (2009), no. 3, 427–433. DOI : <https://doi.org/10.1515/GMJ.2009.427>.
- [5] P. Battyanyi, *On the range of a Jordan *-derivation*, Comment. Math. Univ. Carol. **37** (1996), no. 4, 659–665.
- [6] S. K. Berberian, *Approximate proper vectors*, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), no. 1, 111–114. DOI : <http://doi.org/10.1090/S0002-9939-1962-0133690-8>.
- [7] S. Bouzenada, *Étude des opérateurs finis et leurs caractérisations*, Thèse de Doctorat, Université de Annaba (2008).
- [8] S. Bouzenada, *Generalized finite operators and orthogonality*, SUT J. of Math. **47** (2011), no. 1, 15–23. DOI : <http://doi.org/10.20604/00000977>

- [9] M. Brešar and B. Zalar, *On the structure of Jordan $*$ -derivations*, Colloq. Math. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, **63** (1992), 163–171. DOI : <https://doi.org/10.4064/cm-63-2-163-171>
- [10] J. Conway, *A course in functional analysis*, Springer-Verlag, New York (1985).
- [11] S. S. Dragomir and M. S. Moslehian, *Some inequalities for (α, β) -normal operators in Hilbert spaces*. Series Mathematics and Informatics, (2008), 39–47.
- [12] B. P. Duggal, *Putnam-Fuglede theorem and the range-kernel orthogonality of derivations*, Int. J. Math. Math. Sci. **27** (2001), no. 9, 572–582.
- [13] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators I*, Interscience publishers, Inc, New York (1958).
- [14] A. Fialkow and D. Herrero, *Finite operators and similarity orbits*, Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), no. 4, 601-609.
- [15] B. Fuglede, *A commutativity theorem for normal operators*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **36** (1950), no. 1, 35–40, DOI : <https://doi.org/10.1073/pnas.36.1.35>
- [16] T. Furuta, M. Ito, and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, Sci. Math. **1** (1998), no. 3, 389–403.
- [17] T. Furuta, *Invitation to linear operators : from matrices to bounded linear operators on Hilbert space*, Taylor and Francis, London and New York (2001).
- [18] A. Guangyu and Y. Ying, *Characterizations of Jordan $*$ -derivations on Banach $*$ -algebras*, Pure. Appl. Math. J. **9** (2020), no. 5, 96–100. DOI : <https://doi.org/10.11648/j.pamj.20200905.13>
- [19] K. E. Gustafson and D. K. M. Rao, *Numerical range*, Springer, New York, Inc. (1997).
- [20] P. R. Halmos, *A Hilbert space problem book*, 2nd edition, Springer- Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1982).
- [21] N. H. Hamada, *Jordan $*$ -derivations on $B(H)$* , Thèse de Doctorat, Université de Baghdad, Baghdad (2002).

- [22] N. H. Hamada, *Notes on $*$ -finite operators class*, Cogent Mathematics **4** (2017), no. 1, 1316451. DOI :<https://doi.org/10.1080/23311835.2017.1316451>
- [23] G. Helmberg, *Introduction to spectral theory in Hilbert space*, North-Holland publishing company, London (1969).
- [24] I. N. Herstein, *Jordan derivations of prime rings*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 1104–1110.
- [25] S. Mecheri, *Finite operators*, Dema. Math. **35** (2002), no. 2, 357–366. DOI :<https://doi.org/10.1515/dema-2002-0216>
- [26] S. Mecheri, *Non normal derivation and orthogonality*, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2004), no. 3, 759–762. DOI : <https://doi.org/10.2307/4097750>
- [27] S. Mecheri, *Generalized finite operators*, Demonstr. Math. **38** (2005), no. 1, 163–167. DOI :<https://doi.org/10.1515/dema-2005-0118>
- [28] S. Mecheri, *Finite operators and orthogonality*, Nihonkai Math. J. **19** (2008), 53–60.
- [29] S. Mecheri and N. L. Braha. *Polaroid and p – $*$ –paranormal operators*, Math. Ineq. Appl. **16** (2013), N 2, 557–568.
- [30] S. Mecheri and A. Toualbia, *Range kernel orthogonality and finite operators*, Kyungpook Math. J. **55** (2015), 63–71. DOI : <https://doi.org/10.5666/KMJ.2015.55.1.63>
- [31] N. Mesbah, H. Messaoudene and A. Alharbi, *Some results on generalized finite operators and range kernel orthogonality in Hilbert spaces*, Demonstr. Math. **54** (2021), no. 1, 318–325. DOI :<https://doi.org/10.1515/dema-2021-0037>
- [32] H. Messaoudene, *Classe d’opérateurs de Joël Anderson*, Thèse de doctorat, Université de Annaba (2011).
- [33] H. Messaoudene, *Finite operators*, J. Math. Syst. Sci. **3** (2013), no. 4, 190–194.
- [34] H. Messaoudene, *Study of classes of operators where the distance of the identity operator and the derivation range is maximal or minimal*, Int. J. Math. Anal. **8** (2014), no. 11, 503–511. DOI : <https://doi.org/10.12988/ijma.2014.4245>
- [35] H. Messaoudene and N. Mesbah, *New class of operators where the distance between the identity operator and the generalized Jordan $*$ -derivation range is maximal*.

- Demonstr. Math. **54** (2021), no. 1, 311–317. DOI :[https://doi.org/ 10.1515/dema-2021-0032](https://doi.org/10.1515/dema-2021-0032).
- [36] L. Molnár, *The range of a Jordan *-derivation*, Math. Japon. **44** (1996), no. 2, 353–356.
- [37] J. Muscat, *Functional Analysis*, Springer International Publishing Switzerland (2014).
- [38] M. H. M. Rashid, *On n -*-Paranormal Operators*, Commun. Korean Math. Soc. **31** (2016), no. 3, 549–565.
- [39] M. Rosenblum, *On the operator equation $BX - XY = Q$* , Duke Math. J. **23** (1956), 263–269.
- [40] P. Šemrl, *On Jordan *-derivations and an application*, Colloq. Math. **59** (1990), 241–251. DOI :[https://doi.org/ 10.4064/cm-59-2-241-251](https://doi.org/10.4064/cm-59-2-241-251)
- [41] P. Šemrl, *Quadratic functionals and Jordan*-derivations*, Studia Math. **97** (1991), no. 3, 157–165.
- [42] P. Šemrl, *Jordan *-derivations of standard operator algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), no. 2, 515–518. DOI : <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1994-1186136-6>
- [43] J. G. Stampfli, *Derivations on $B(H)$: The range*, Ill. J. Math. **17** (1973), no. 3, 518–524. DOI : [https://doi.org/ 10.1215/ijm/1256051617](https://doi.org/10.1215/ijm/1256051617)
- [44] K. Tanahashi, *On log-hyponormal operators*, Integr. Equ. Oper. Theory **34** (1999), no. 3, 364–372. DOI : <https://doi.org/10.1007/BF01300584>
- [45] J. P. Williams, *Finite operators*, Proc. Amer. Math. Soc. **26** (1970), no. 1, 129–135. DOI :[https://doi.org/ 10.1090/S0002-9939-1970-0264445-6](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1970-0264445-6)
- [46] J. P. Williams, *On the range of a derivation*, Pacific J. Math. **38** (1971), no. 1, 273–279. DOI :[https://doi.org/ 10.2140/pjm.1971.38.273](https://doi.org/10.2140/pjm.1971.38.273)
- [47] B. Zalar, *Jordan *-derivations and quadratic functionals on octonion algebras*, Comm. Algebra **22** (1994), no. 8, 2845–2859. DOI :<https://doi.org/10.1080/00927879408824996>

-
- [48] B. Zalar, *Jordan \ast -derivations pairs and quadratic functionals on modules over \ast -rings*, Aequationes Math. **54** (1997), no. 1, 31–43.
- [49] F. Zuo and W. Yan, *Finite operators and Weyl type theorems for quasi- \ast - n -paranormal operators*, Kyungpook Math. J. **55** (2015), no. 4, 885–892.