République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département des mathématiques et informatique

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MASTER

Filière : (Mathématiques/Informatique)

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Par
Ayadi Dhouha
Senouci Chahinez

L'étude de certains problèmes elliptiques

(Multiplicité des solutions)

Date de soutenance : 20/06/2021

Devant le jury

Ms.AKROUT Kamel	P.R.F	Université de L'arbi Tébessi –Tébessa.	Président
Mlle.ZEDIRI Sounia	M.A.A	Université de L'arbi Tébessi –Tébessa	Rapportrice
Ms.GUEFAIFIA Rafik	M.C.A	Université de L'arbi Tébessi –Tébessa	Examinateur

Année Universitair: 2020/**2021**

Remerciements

Avant tout, nous remercions ALLAH, qui nous a donné le courage, la patience, et la volonté pour finir ce travail.

Nous remercions également notre enseignante encadreuse ZEDIRI SOUNIA M.A.A à l'université de Tébessa que nous avoir proposé le sujet de ce mémoire, c'est grâce a sa grande disponibilité, ses conseils, ses orientations et encouragements que nous avons pu mener à bien ce travail.

De même, nous remercions les membres de jury pour avoir accepté d'évaluer notre travail.

Monsieur le professeur AKROUT KAMEL, pour avoir bien voulu me faire l'honneur d'accepter de présider le jury.

Monsieur GUEFAIFIA RAFIK maitre de conférences de classe A.

Nous remercions tous les enseignants pendant cinq années.

Et toutes les personnes ayant participé a la réussite de notre mémoire.

Et tous les responsables et personnels que nous avons connus à département de mathématique et informatique de l'université de L'arbi Tébessi –Tébessa.

Table des matières

Résumé

L'objet de ce mémoire est l'étude de l'existence de trois solutions pour des problèmes elliptiques de Dirichlet.

On applique le théorème de trois points critiques de Bonanno qui permet d'établir la multiplicité des solutions pour les problèmes non linéaires.

Mots clés

Points critiques, trois solutions, problème de Dirichlet, méthodes variationnells, résultat de multiplicité.

Abstract

The object of this memory is the study of the existence of three solutions for elliptics problems of Dirichlet.

We apply Bonanno's three critical point theorem which allows us to establish the multiplicity of solutions for nonlinear problems.

Keywords

Critical points, three solutions, Dirichlet problem, variational methods, multiplicity result.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو دراسة وجود ثلاثة حلول للجمل الاهليجية لديريكلي و نطبق نظرية النقاط الحرجة الثلاث لبونانوو التي تتيح لنا تحديد تعدد الحلول للجمل الغير خطية.

الكلمات المفتاحية

نقاط الحرجة، ثلاثة حلول، جملة ديريكلية، طرق التباين، نتيجة التعددية.

Introduction

Récemment, de nombreuses publications sont apparues sur le théorème de trois points critiques qui a été utilisés pour prouver des résultats de multiplicité des solutions pour des équations différentielles ordinaires voir D. Averna and G. Bonanno [2] temps que partielles, avec des différentes versions d'épandent d'hypothèses imposées et du problème associer.

Dans ce mémoire nous présentons des travaux qui s'intéresse à l'application de ce théorème pour prouver l'existence de trois solution du problème elliptique non linéaire avec condition de Dirichlet au bord. La version de théorème appliquée est celle de Bonanno qui est basée sur les traveaux de B.Ricceri.

Le premier travail est celui de G.A .Afrouzi, T.N .Ghara, intitulé "L'existence de trois solutions faibles d'un problème elliptique de Dirichlet " [1], le problème étudier est le suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x,u) - a(x)\, u \ , x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Sous certaines conditions posées sur : la non linéarité de f, a, λ et des hypothèses qui doit la fonctionnelle d'énergie les satisfais, ils établirent le résultat de multiplicité des solutions.

Et nous avons choisi le deuxième travail, "Solutions multiples pour un système elliptique de Dirichlet quasi- linéaire intervenant l'operateur de p, q-Laplace", de Gabriele Bonanno, Shapour Heidarkhanib, et Donal O'Rgan [5], qui nous semble être une généralisation des résultats du premier travail avec des résultats supplémentaires.

Ce travail est organisé comme suit

Chapitre 1 expose un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle, qui contient quelques notions essentielles qui concernent les espaces L^p, les espaces de Hilbert, de Sobolev et les injections et quelques notions sur les fonctions et les opérateurs, et finalement nous annonçons le théorème de trois points critiques.

Dans le deuxième chapitre nous exposons les résultats de multiplicité des solutions pour un problème elliptique qui intervient le Laplace, et nous terminons par les résultats du système de p, q-Laplacien, dans le troisième chapitre.

Chapitre 1

Préliminaires

1-Les espaces fonctionnelles.

2-Rappels d'analyses fonctionnellesrappels.

3-Dérivation au sens de Gâteaux .

4-Théorème de trois points critiques.

1.1 Les espaces fonctionnelles

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$

1.1.1 Espaces de Lebesgue

Définition 1.1 *[8] Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ pour $1 \leq p < +\infty$ on définit*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to R^N; \textit{mesurable et } \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

c'est un espace de Banach sur $\mathbb{R}^N$, on le muni de la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

pour $p = 2$, $L^2(\Omega)$ c'est un Hilbert, muni de produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx.$$

Pour $p = +\infty$, on définit

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^N; \textit{mesurable et } \exists c > 0 \textit{telle que } |f(x)| \leq c.p.p \textit{ sur } \Omega \right\},$$

on le muni de la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \left\{ c > 0 \textit{tel que } |f(x)| \leq c.p.p \textit{ sur } \Omega \right\}.$$

Proposition 1.1 *soit $1 < p < \infty$, l'espace L^p est réflexif et séparable ,son dual est $L^{P'}$*

Si $p = 1$, l'espace L^1 est non réflexif et séparable, son dual est L^∞

Si $p = \infty$, l'espace L^∞ est non réflexif et non séparable, son dual est contient strictement L^1

1.1.2 Espaces de Sobolev

soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ $(N > 1)$ et soient $m \in \mathbb{N}$ et $p \in [1, +\infty]$

Définition 1.2 [8] *On définit le espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \ \ et \ D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall |\alpha| \leq m\},$$

avec

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N,$$

et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \ldots \partial_{x_N}^{\alpha_N}}, |\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i D^\alpha,$$

Sont les dérivées au sens de distributions, c-à-d. :

$$\langle D^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega).$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme suivante pour $p \in [1, +\infty[$

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

Définition 1.3 *On définit le espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \ tel \ que \ \partial_i u \in L^p(\Omega), 1 \leq i \leq n\}$$

ou ∂_i *est la i-éme dérivée faible de* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *avec la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) dx \right),$$

alors $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach .*

Cas particulier pour $(p = 2)$

$W^{1,2}(\Omega)$ (noté aussi $H^1(\Omega)$) est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|\alpha| \leq m}^{N} \langle D^\alpha u; D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

tel que

$$\langle u,u\rangle_{H^1(\Omega)} = \|u\|^2_{H^1(\Omega)}, u \in H^1(\Omega).$$

Théorème 1.1 *(Inégalité de Poincaré) On suppose que Ω est un ouvert borné alors il existe une constante C (dépendant de Ω et P) telle que :*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < \infty,$$

en particulier l'expression $\|\nabla u\|_{L^p}$ est une norme sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ qui est équivalent à la norme $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.

Théorème 1.2 *(Inégalité de Holder) Soit $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1$ et*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}, \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

1.1.3 Les injections des espaces

Injections continues

Théorème 1.3 [8] *On suppose $p \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$. Alors :*

(1) Si $N > m, p$, pour tout q tel que $p \leq q \leq \frac{Np}{(N-mp)}$, on a la propriété :

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right).$$

L'inégalité d'injection continue peut être précisée comme suit. Il existe une constante C telle que :

$$\forall \varphi \in W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right). \|\varphi\|_q \leq C \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

(2) Pour $p = 1$, on a :

$$W^{N,1}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow C_b\left(\mathbb{R}^N\right).$$

(3) Si $N = mp$ et $p > 1$, alors, pour tout q tel que $p \leq q < \infty$, on a la propriété

$$W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow L^q\left(\mathbb{R}^N\right).$$

(4) Si $p > N$, alors :

$$0 < \lambda \leq 1 - \frac{N}{p} \Rightarrow W^{1,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow C_b^{0,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

(5) Si $mp > N$ lorsque $\frac{N}{p} \notin \mathbb{N}$ et si j est tel que $(j-1)p < N < jp$ alors :

$$0 < \lambda \leq j - \frac{N}{p} \Rightarrow W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow C_b^{m-j}\left(\mathbb{R}^N\right).$$

Si $\frac{N}{p} \in \mathbb{N}$ et $m \geq j = \frac{N}{p} + 1$ alors $W^{m,p}\left(\mathbb{R}^N\right) \hookrightarrow C_b^{m-j,\lambda}\left(\mathbb{R}^N\right)$ pour tout $\lambda < 1$.

Corollaire 1.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$. On a*

Si $1 \leq p < N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p*}(\Omega)$ ou $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$.

Si $p = N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p, +\infty[$.

Si $p > N$, alors $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

Injections compacts

Théorème 1.4 [11]*(Rellich-Kondrachov) Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $p \geq 1$.*

-Si $p < N$, alors pour tout $q \geq 1$ tel que $q < p^*, W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

-Si $p = N$, alors pour tout $q < \infty$ $W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

-Si $p > N$, et $0 < \alpha < 1$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$.

De plus on a

Théorème 1.5 [8] *L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continument dans $L^\infty(\Omega)$ ($W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$) pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, i.e qu'il existe un constant C (dépendant seulement de Ω) tel que*

$$\|u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}, \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

De plus, si Ω *est borné on a*

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\Omega) \text{ avec injection compacte, } 1 < p \leq +\infty,$$
$$W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{q}(\Omega) \text{ avec injection compacte, } 1 \leq q < +\infty.$$

Théorème 1.6 *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*

soit (f_n) *une suite de fonctions de* L^1 *. On suppose que*

-$f_n(x) \to f(x)$ *p.p. sur* Ω ,

-il existe une fonction $g \in L^1$, *telle que pour chaque* n ,$|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω *alors* $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \to 0.$

1.2 Rappels d'analyses fonctionnelles

1.2.1 Semi-continuité inférieure (supérieure)

Définition 1.4 *Une fonction* $f : X \to \mathbb{R}$ *définie sur un espace topologique* X *est dite semi-continue inférieurement (s.c.i.) en* $x_0 \in X$ *si :*

Pour tout réel $r < f(x_0)$ *il existe un voisinage* V *de*x_0 *tel que* $r < f(x)$ *pour tout* $x \in V$, *la fonction* f *est dite semi-continue inférieurement sur une partie* C *de* X *si* f *est semi-continue inférieurement en tout point de* C *.Une fonction* f *est semi-continue supérieurement (s.c.s.) en* x_0 *si* f *est s.c.i. en* x_0.

Et elle est dite continue en x_0 *si elle est s.c.i. et s.c.s. en* x_0.

Définition 1.5 *Soit* $f : X \to \mathbb{R}$ *une fonctionnelle, on dit que*

(i) f *est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement (resp f.s.s.c.s) pour tout suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ *vérifiant* $u_n \rightharpoonup u$, *lorsque* $n \to \infty$, *alors*

$$f(u) \leq \varliminf_{n\to+\infty} f(u_n), (\text{resp. } f(u) \geq \varlimsup_{n\to+\infty} f(u_n))$$

(ii) f *est faiblement séquentiellement semi-continue supérieurement, si* $-f$ *est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement.*

Remarque 1.1 *Il est clair que si $f(x_0) = -\infty$, la fonction est s.c.i.en x_0 : Si $f(x_0) = +\infty$, la semi-continuité inférieure de f permet de dire que*

$$\forall r > 0, \exists V \in \upsilon(x_0), \forall x \in V : f(x) > r.$$

Autrement dit, les valeurs de f peuvent être aussi grandes que l'on veut dans un certain voisinage (assez petit) de x_0 :

Maintenant, lorsque $f(x_0) \in \mathbb{R}$ i.e. lorsque $f(x_0)$ est fini, la définition ci-dessus de semi-continuité inférieure de f enx_0 est équivalente à la définition usuelle à savoir, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un voisinage V de x_0 de sorte que $f(V) \subset [f(x_0) - \varepsilon, +\infty]$ ou encore

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \upsilon(x_0), \forall x \in V : f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon \ (s.c.i).$$

De même pour la définition de semi-continuité supérieure, on aura

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \upsilon(x_0), \forall x \in V : f(x) \leq f(x_0) - \varepsilon \ (s.c.s).$$

Théorème 1.7 [10] *Toute fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, semi-continue inférieurement (resp.supérieurement) sur un espace topologique X atteint son minimum*

(resp. maximum) sur tout sous-ensemble compact non vide C de X telle que $C \cap D_f \neq \varnothing$.

Lorsque l'espace X est de dimension finie, la condition de compacité peut-être remplacée par une hypothèse de fermeture du domaine des contraintes ainsi que la condition de coercivité qui impose que $f(x) \to +\infty$ quant $\|x\| \to +\infty$ ou de façon équivalente que pour tout réel r le sous-ensemble $f^{-1}(]-\infty, r])$ soit borné.

1.2.2 Les fonctions convexes

On rappelle ci-dessous quelques propriétés bien connues des ensembles et des fonctions convexes.

Définition 1.6 [10] *Soit X un espace vectoriel. On dit qu'une partie K de X est convexe si :*

$$\forall x, y \in K, \forall \theta \in [0,1], \theta x + (1-\theta) y \in K$$

Lorsque K est convexe et $j : K \to \mathbb{R}$, est une fonction , on dit que j est convexe si :

$$\forall x, y \in K, \forall \theta \in [0,1], j(\theta x + (1-\theta) y) \leq \theta j(x) + (1-\theta) j(y).$$

Proposition 1.2 *Quelques propriétés élémentaires des fonctions convexes :*

(a) Si j est une fonction convexe, alors épi j est un ensemble convexe dans $E \times \mathbb{R}$, et réciproquement,(épi $j = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : j(x) \leq \alpha\}$).

(b) Si j est une fonction convexe, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $[j \leq \lambda]$ est convexe ; mais la réciproque n'est pas vraie.

(c) Si $j_1$et j_2 sont des fonctions convexes, alors $j_1 + j_2$ est convexe.

(d) Si $(j_i)_{i\in I}$ est une famille des fonctions convexes, alors l'enveloppe supérieure des (j_i) est convexe.

Théorème 1.8 *(Théorème des accroissements finis sur $\mathbb{R}$)*

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $]a, b[$.

Alors, il existe $\theta \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Ou il existe $\theta \in]0,1[$tel que

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a).$$

Définition 1.7 *Une fonction $f : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ est dite de Carathéodory ou bien une C-fonction si elle vérifie*

$$\begin{cases} \text{p.p. en } x \in \Omega, \text{ la fonction } u \to f(x,u) \text{est continue par rapport à } u. \\ \forall u \in \mathbb{R}^m, \text{la fonction } u \to f(x,u) \text{est mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } u \text{ de } \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Définition 1.8 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f \in C\left(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}\right)$. l'opérateur N_f définie par*

$$N_f u(x) = f(x, u(x)),$$

est appelé opérateur de Nemytskii relatif à f.

1.2.3 Les opérateurs compactes

Soit E et F deux espaces de Banach

Définition 1.9 *On dit que l'opérateur $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact si $T(B_E)$ est relativement compact pour la topologie forte, tel que B_E est la boule unité dans E. c'est à dire $\overline{T(B_E)}$ est compact dans F.*

Dire que $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact revient exactement à dire ceci : pour toute suite bornée (x_n) dans E, la suite image (Tx_n) admet une sous-suite convergente dans F.

(Si X_0 est un sous-espace vectoriel fermé de E et si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ est compact, sa restriction $T_{|X_0}$ est un opérateur compact de X_0 dans F, puisque l'image de la boule unité de X_0 est continue dans l'image de la boule de l'espace entier. Si T est un endomorphisme compact de E dans F, est un endomorphisme compact de F).

1.2.4 Les opérateurs monotones

Soit H un espace préhilbertien dont le produit scalaire est noté $\langle .,. \rangle$ et la norme associée $\|.\|$.

Définition 1.10 [15]*Soit $T : H \to H$, et $\mathcal{G}(T)$ le graphe de T,*

on dit que T est un opérateur monotone si

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathcal{G}(T) \quad \left\langle y - y', x - x' \right\rangle \geq 0.$$

-T strictement monotone si l'inégalité ci-dessus est stricte lorsque $x \neq x'$.

-T est uniformément monotone s'il existe $c > 0, \alpha > 1$,

$$\forall (x,y), (x',y') \in \mathcal{G}(T), \quad \left\langle y - y', x - x' \right\rangle \geq c \left\| x - x' \right\|^{\alpha}.$$

-T est hémicontinue si pour tous $x, x' \in H$, l'application $t \to \langle T(x + tx'), x' \rangle$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.9 *(voir* [15.*de A.* 37]*)*

Si l'opérateur T est uniformément monotone, coercif et hémicontinu sur un espace de Banach réel réflexif X, alors T admet un inverse continu sur X^*.

1.3 Dérivations au sens de Gâteaux

Soit X un espace de Banach et ω un ouvert non vide de X . On note X' le dual topologique de X c'est à dire l'espace des formes linéaires continues sur X . Nous noterons par $\langle .,. \rangle$ le produit dans le dualité entre X' et X .

Définition 1.11 [10]*Soient ω une partie d'un espace de Banach X et $J : \omega \to \mathbb{R}$. Si $u \in \omega$, on dit que F est dérivable au sens de Gâteaux (ou G-dérivable ou encore G-différentiable) en u, s'il existe $l \in X'$ tel que dans chaque direction $z \in X$ où $J(u+tz)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_z(u)$ existe et on a :*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J(u+tz) - J(u)}{t} = \langle l, z \rangle .$$

On pose $J'(u) = l$.

Autrement, on dit qu'une fonctionnelle $J : \Omega \to \mathbb{R}$ est différentiable au sens de Gâteaux en $u \in \Omega$ de dérivée $g(u) \in X'$ si , pour tout $h \in X$.

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[J(u+th) - J(u) - \langle g(u), th \rangle \right] = 0.$$

Proposition 1.3 *(voir* [15]*) Soit $f : M \subseteq X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle définie sur un sous-ensemble convexe fermé M de X. Si f est G-différentiable sur M et sa dérivée au sens de Gâteaux f' est monotone alors f est séquentiellement faiblement semi-continue inférieurement.*

Exemple 1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N, n \geq 3$, un ouvert ,pour $p \in (1, +\infty)$ on définit une fonctionnelle*

$$J \quad : \quad W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

$$J(u) \quad = \quad \int_\Omega |\nabla u|^p \, dx; \tag{1.2}$$

alors J *est différentiable dans* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *et*

$$J'(u)(v) = p \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$*, définit par :* $\varphi(x) = |x|^p$*, c'est une fonction de classe* C^1*, et* $\nabla\varphi = p|x|^{p-2}x$*.*

en effet,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\varphi(x+ty) - \varphi(x)}{t} = p|x|^{p-2} x.y, \forall x, y \in \mathbb{R}^N$$

comme conséquence

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) . \nabla v(x),$$

par le théorème des accroissement finis, pour presque tout $x \in \Omega$ *et pour* $t > 0$*, il existe une fonction* θ *à valeur dans* $]0,1[$ *telle que l'on puisse écrire :*

$$\begin{aligned} &|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p - tp|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) . \nabla v(x) \\ &= tp|\nabla u(x) + \theta(t,x) t\nabla v(x)|^{p-2} (\nabla u(x) + \theta(t,x) t\nabla v(x)) . \nabla v(x) \\ &-tp|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) . \nabla v(x). \end{aligned} \tag{*}$$

En divisant par t*, on obtient pour presque tout* x *:*

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla(u+tv)(x)|^p - |\nabla u(x)|^p - tp|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) . \nabla v(x)}{t} = 0$$

D'autre par, on peut majorer le deuxième membre de l'égalité $(*)$ *divisée par* t *par*

$$h(x) = 2\left|\nabla v(x)\right| \left(\left|\nabla u(x)\right| + \left|\nabla v(x)\right|\right)^{p-1}$$

En utilisant en suite l'inégalité de Holder, on a :

$$\int_{\Omega} \left|h(x)\right| dx \leq c \left\|\nabla v\right\|_p \left(\left\|\nabla u\right\|_p^{p-1} + \left\|\nabla v\right\|_p^{p-1}\right).$$

On peut dent appliquer le théorème de convergence dominée et conclure à :

$$J'(u)(v) = p\int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^{p-2} \nabla u.\nabla v dx, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Alors J*, est Gâteaux différentiable.*

Exemple 1.2 *Soit* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *une fonction de Carathéodory, on pose*

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,\sigma)\, d\sigma.$$

On définit une fonctionnelle V *par*

$$V(u) = \int_{\Omega} F(x,u(x))dx.$$

Nous allons préciser dans quelles conditions $u \to V(u)$ *est continue ou de classe* C^1*.*

on va montrer que V *est G-dérivable et que la G-dérivée est continue de* $L^p(\Omega)$ *dans* $L^{p'}(\Omega)$

En posant

$$\phi(t,x) = \frac{F(x,u(x)+tv(x)) - F(x,u(x))}{t} - f(x,u(x))v(x),$$

on a

$$\frac{V(u+tv) - V(u)}{t} - \int_{\Omega} f(x,u(x))v(x)dx = \int_{\Omega} \phi(t,x)dx.$$

Or, il existe $\theta(t,x) \in]0,1[$ *tel que*

$$|\phi(t,x)| = |f(x,u(x)+\theta(t,x)tv(x)) - f(x,u(x))|\,|v(x)|\,.$$

Ainsi, d'un part on a $\theta(t,x) \to 0$ *lorsque* $t \to 0$*, p.p. en* $x \in \Omega$ *et d'autre part, on a la majoration*

$$|\phi(t,x)| \leq 2(a_0(x) + b_0(|u(x)| + |v(x)|)^{p-1} + b_0\,|u(x)|^{p-1})\,|v(x)|\,.$$

Comme le second membre de l'inégalité ci-dessus est dans $L^1(\Omega)$*, le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet de dire que*

$$\lim_{t\to 0^+}\left[\frac{V(u+tv)-V(u)}{t} - \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx\right] = \int_\Omega \lim_{t\to 0^+}\phi(t,x)dx = 0.$$

Ainsi la G-dérivée $V'(u)$ *existe et on a pour tout* $v \in L^p(\Omega)$

$$\langle V'(u), v\rangle = \int_\Omega f(x,u(x))v(x)dx.$$

Si de plus on a condition de croissance sur f *l'opérateur* $u \to f(.,u)$ *est contenu de* $L^p(\Omega)$ *dans* $L^{p'}(\Omega)$ *ce qui implique que* V *est de classe* C^1 *sur* $L^p(\Omega)$*.*

1.4 Théorème de trois points critiques

Théorème 1.10 [6] *Soit X un espace de Banach réel réflexif, $\phi : X \to \mathbb{R}$ est coercive, continue G-différentiable et faiblement séquentiellement semi-continus inférieurs dont leur dérivée aux sens de Gâteaux admet un inverse continue sur X^* , $\psi : X \to \mathbb{R}$ continuellement G-différentiable dont leur G-dérivée est compacte telle que $\phi(0) = \psi(0) = 0$ .Supposons qu'il existe $r > 0$ et $\overline{x} \in X$, avec $r < \phi(\overline{x})$, tels que*

(a_1)

$$\frac{\sup_{\phi(x)<r} \psi(x)}{r} < \frac{\psi(\overline{x})}{\phi(x)},$$

(a_2)

$$\textit{pour toute } \lambda \in \Lambda_r = \left] \frac{\phi(x)}{\psi(x)}, \frac{r}{\sup_{\phi(x)<r} \psi(x)} \right[,$$

la fonctionnelle $\phi - \lambda\psi$ est coercitive. Ensuite, pour chaque $\lambda \in \Lambda_r$, la fonctionnelle $J_\lambda = \phi - \lambda\psi$ a au moins trois points critiques distincts dans X.

Chapitre 2

Multiplicité de solution pour un problème elliptique de Dirichlet

2.1 Introduction

Nous présentons ici des résultats publiées dans [1], qui concerne un problème elliptique avec condition de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda f(x, u) - a(x)\, u, x \in \Omega \\ u = 0, x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

où Ω est un ouvert borné non vide de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, avec frontière de classe C^1, λ un paramètre réel positif, $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et a la fonction de poids positive de $C(\Omega)$.

Notre outil principal est le théorème de trois points critiques 1.10.

2.2 Notations et hypothèses

Soit

$$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

une fonction Carathéodory, telle que

(h_1) Il existe deux constantes non négatives a_1, a_2 et $q \in \left]1, \frac{2N}{(N-2)}\right[$ tel que

$$|f(x,t)| \leq a_1 + a_2 |t|^{q-1}, \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.2}$$

Soit $X = H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$, par rapport à la norme

$$||u|| = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

et nous définissons

$$||u||_a = \left(\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^2 + a(x) |u(x)|^2\right) dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

alors il existe des constantes positives appropriées c_1, c_2 tel que

$$c_1||u|| \leq ||u||_a \leq c_2||u||.$$

Définition 2.1 *Une fonction* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *est dite une solution faible de* (2.1) *si* $u \in H_0^1(\Omega)$ *et*

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) \, dx - \lambda \int_\Omega f(x, u(x)) v(x) \, dx = -\int_\Omega a(x) u(x) v(x) \, dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Et soient les fonctionnelles $\phi, \psi : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ définies comme suite

$$\phi(u) = \frac{\|u\|_a^2}{2},$$

et

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x, u(x)) \, dx; \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$F(x,\xi) = \int_0^\xi f(x,t) \, dt, \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

et

$$J_\lambda(u) = \phi(u) - \lambda\psi(u),$$

un point critique de J_λ est un $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\langle J'_\lambda(u), v\rangle = \phi'(u)(v) - \lambda\psi'(u)(v) = 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), \tag{2.3}$$

donc un point critique de J_λ est une solution faible du problème (2.1).

Soit $2^* = \frac{2N}{(N-2)}$ et désignons, comme d'habitude, par Γ la fonction Gamma définie par

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} z^{t-1} e^{-z} dz, \forall t > 0.$$

A partir du théorème d'injection de Sobolev, il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} \leq c\|u\|, u \in H_0^1(\Omega). \tag{2.4}$$

La meilleure constante qui apparaît dans (2.4) est

$$c = \frac{1}{\sqrt{N(N-2)\pi}} \left(\frac{N!}{2\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{N}}, \tag{2.5}$$

Pour $q \in [1, 2^*[$ fixé, et par les injections de Sobolev, il existe une constante positive c_q telle que

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le c_q \|u\|, u \in H_0^1(\Omega), \tag{2.6}$$

et, en particulier, l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ est compact.

En raison de (2.5), comme simple conséquence de l'inégalité de Holder, il s'ensuit que

$$c_q \le \frac{meas(\Omega)^{\frac{2^*-q}{2^*q}}}{\sqrt{N(N-2)\pi}} \left(\frac{N!}{2\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)} \right)^{\frac{1}{N}}, \tag{2.7}$$

où $meas(\Omega)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω.

De plus, soit

$$D = \sup_{x \in \Omega} dist(x, \partial\Omega). \tag{2.8}$$

Soit $B(x_0, D) \subseteq \Omega$, une boule de centre x_0 et de rayon D.

Enfin, nous définissons

$$k = \frac{D\sqrt{2}}{2\pi^{\frac{N}{4}}} \left(\frac{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}{D^N - \left(\frac{D}{2}\right)^N} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.9}$$

et

$$k_1 = \frac{2\sqrt{2}c_1\left(2^N-1\right)}{D^2}, k_2 = \frac{2^{\frac{2+q}{2}}c_q^q\left(2^N-1\right)}{qD^2}. \tag{2.10}$$

2.3 Résultat principale

Théorème 2.1 [1]*Soit* $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est une fonction carathéodory telle que* (h_1) *est satisfaite. On suppose que.*

(h_2) $F(x,\xi) \geq 0$ *pour tout* $(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$,

(h_3) *il existe deux constants positives* b *et* $s < 2$ *tel que*

$$F(x,\xi) \leq b\left(1 + |\xi|^s\right),$$

pour presque tout $x \in \Omega$ *et pour tout* $\xi \in \mathbb{R}$,

(h_4) *il existe deux constant positives* γ *et* δ, *avec* $\delta > \gamma k$ *telles que*

$$\frac{\inf\limits_{x\in\Omega} F(x,\delta)}{E\delta^2} > a_1 \frac{k_1}{\gamma} + a_2 k_2 \gamma^{q-2},$$

ou a_1, a_2 *sont donnés dans* (h_1) *et* k_1, k_2 *sont donnés par* (2.9) *et* (2.10).

Alors pour chaque paramètre λ *appartenant a*

$$\Lambda_{(\gamma,\delta)} = \left] \frac{2\left(2^N - 1\right)}{D^2} \frac{\delta^2 E}{\inf\limits_{x\in\Omega} F(x,\delta)}, \frac{2\left(2^N - 1\right)}{D^2} \frac{1}{a_1 \frac{k_1}{\gamma} + a_2 k_2 \gamma^{q-2}} \right[,$$

le problème (2.1) *possède au moins trois solutions faibles dans* $H_0^1(\Omega)$.

Preuve Sous les hypothèses $(h_1), (h_2), (h_3)$ et (h_4) et par l'application du théorème 1.10, le problème (2.1) admet trois points critiques,

soit $X = H_0^1(\Omega)$, nous commençons par remplir les premières conditions de la théorème 1.10 en ce qui concerne ϕ et ψ.

Il claire que (par définition)

$$\phi(0) = \psi(0) = 0.$$

Et la coercivité de

$$\phi(u) = \frac{\|u\|_a^2}{2},$$

est évidente, et on a démontré dans l'exemple 1.1 que la fonctionnelle ϕ est continument G-différentiable de dérivée

$$\phi'(u)(v) = \int_{\Omega} (\nabla u(x) . \nabla v(x) + a(x) u(x) v(x)) \, dx,$$

et par (proposition 25.20 [15]) on déduit qu'elle est faiblement séquentiellement semi-continue inférieure, on va démontrer que leur G-dérivée admet un inverse continu sur X^*,

on a $\phi' : X \to X^*$ définit précédemment pour tout $u, v \in X$, alors

$$\begin{aligned}
\langle \phi'(u_1) - \phi'(u_2), (u_1 - u_2) \rangle &= \int_{\Omega} \nabla u_1(x) . (\nabla (u_1 - u_2)) + a(x) u_1(x) (u_1 - u_2) \, dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \nabla u_2(x) . (\nabla (u_1 - u_2)) + a(x) u_2(x) (u_1 - u_2) \, dx \\
&= \int_{\Omega} (|\nabla (u_1 - u_2)|^2 + a(x) |u_1 - u_2|^2) dx \\
&\geq \|u_1 - u_2\|_a^2 ,
\end{aligned}$$

donc ϕ' est uniformément monotone, et hémicontinue dans X, d'aprés [15] , et par l'application de théorème $26.A$, on obtient que ϕ' admet un inverse continu sur X^*.

De plus, et comme dans l'exemple 1.2,

$$\psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u(x)) \, dx, \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Est continument différenciable au sens de Gâteaux, de dérivée

$$\psi'(u)(v) = \int_{\Omega} f(x, u(x)) v(x) \, dx,$$

et on prouve que cette dérivée est compacte. (voir[8]).

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de $X = H_0^1(\Omega)$, elle admet une sous suite notée aussi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n \to +\infty}{\rightharpoonup} u$ dans X, alors $u_n \underset{n \to +\infty}{\to} u$ dans $C\left(\overline{\Omega}\right)$.

Puisque $F(x,\cdot)$ est de class C^1 dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \Omega$, elle est donc continu dans $\mathbb{R}$ pour tout $x \in \Omega$, et nous obtenons que $F(x, u_n) \underset{n \to +\infty}{\to} F(x, u)$.

Par l'injection compacte dans C, et les critères de convergence de Lebesgue on a

$\psi'(u_n) \underset{n\to+\infty}{\to} \psi'(u)$ est fortement, ce qui signifie que ψ' est fortement continue, alors c'est un opérateur compact.

Maintenant nous vérifiant les conditions (a_1) et (a_2) de théorème 1.10.

D'après (h_1), on a

$$F(x,\xi) \leq a_1 |\xi| + a_2 \frac{|\xi|^q}{q}, \forall (x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

Soit $r \in]0,+\infty[$ et considérons la fonction

$$\chi(r) = \frac{\sup_{u\in\phi^{-1}(]-\infty,r])} \psi(u)}{r},$$

tenant compte de (2.11), il s'ensuit que

$$\psi(u) = \int_\Omega F(x; u(x))\, dx \leq a_1 \|u\|_{L^1(\Omega)} + \frac{a_2}{q} \|u\|^q_{L^q(\Omega)}.$$

Alors, pour tout $u \in X : \phi(u) \leq r$, en raison de (2.6), on obtient

$$\psi(u) \leq \left(\sqrt{2r} c_1 a_1 + \frac{2^{\frac{q}{2}} c_q^q a_2}{q} r^{\frac{q}{2}} \right).$$

D'où

$$\sup_{u\in\phi^{-1}(]-\infty,r])} \psi(u) \leq \left(\sqrt{2r} c_1 a_1 + \frac{2^{\frac{q}{2}} c_q^q a_2}{q} r^{\frac{q}{2}} \right). \tag{2.12}$$

A partir de (2.12), on a

$$\chi(r) \leq \left(\sqrt{2r} c_1 a_1 + \frac{2^{\frac{q}{2}} c_q^q a_2}{q} r^{\frac{q}{2}-1} \right), \forall r > 0. \tag{2.13}$$

Ensuite, définissons

$$u_\delta(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x \in \Omega - B(x_0, D) \\ \\ \frac{2\delta}{D}(D - |x - x_0|), \text{ si } x \in B(x_0, D) - B\left(x_0, \frac{D}{2}\right) \\ \\ \delta, \text{ si } x \in B\left(x_0, \frac{D}{2}\right). \end{cases} \tag{2.14}$$

Clairement $u_\delta \in X$.

nous avons

$$\begin{aligned} \phi(u_\delta) &= \tfrac{1}{2}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u_\delta(x)|^2 + a(x)|u_\delta(x)|^2\right) dx\right) \\ &= \tfrac{1}{2}\Big(\int_{B(x_0,D)-B\left(x_0,\frac{D}{2}\right)} \tfrac{(2\delta)^2}{D^2} dx + \int_{B(x_0,D)-B\left(x_0,\frac{D}{2}\right)} a(x)\tfrac{(2\delta)^2}{D^2}|D - |x - x_0||^2 dx\Big) \\ &+ \tfrac{1}{2}\int_{B\left(x_0,\frac{D}{2}\right)} a(x)\delta^2 dx \\ \\ &\leq \tfrac{1}{2}\tfrac{(2\delta)^2}{D^2}\tfrac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}\left(D^N - \left(\tfrac{D}{2}\right)^N\right) \\ &+ \tfrac{(2\delta)^2}{D^2}\sup_{x\in\Omega} a(x)\max_{x\in B(x_0,D)-B\left(x_0,\frac{D}{2}\right)}|D - |x - x_0||^2 \tfrac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}\left(D^N - \left(\tfrac{D}{2}\right)^N\right) \\ &+ \delta^2 \sup_{x\in\Omega} a(x)\tfrac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}\tfrac{D^N}{2^N} \\ \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{(2\delta)^2}{D^2}\tfrac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}\left(D^N - \left(\tfrac{D}{2}\right)^N\right)\left(1 + Mh + \tfrac{D^2}{2}M\tfrac{1}{2^N-1}\right) \\ &= \tfrac{E}{2}\tfrac{(2\delta)^2}{D^2}\tfrac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}\left(D^N - \left(\tfrac{D}{2}\right)^N\right). \end{aligned}$$

D'où

$$\phi(u_\delta) \leq \frac{E}{2}\frac{(2\delta)^2}{D^2}\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}\left(D^N - \left(\frac{D}{2}\right)^N\right). \tag{2.15}$$

En tenant compte que $\delta > \gamma k$, il s'ensuit que

$$\gamma^2 < \phi(u_\delta).$$

Et on a

$$\psi\left(u_{\delta}\right)=\int_{\Omega}F\left(x,u_{\delta}\left(x\right)\right)dx\geq\int_{B\left(x_0,\frac{D}{2}\right)}F\left(x,\delta\right)dx\geq\inf_{x\in\Omega}F\left(x,\delta\right)\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}\frac{D^N}{2^N}. \tag{2.16}$$

Par conséquent, et par (2.15) , (2.16) on a

$$\frac{\psi\left(u_{\delta}\right)}{\phi\left(u_{\delta}\right)}\geq\frac{D^2}{2\left(2^N-1\right)}\frac{\inf_{x\in\Omega}F\left(x,\delta\right)}{\delta^2E}, \tag{2.17}$$

on tenu compte de (2.13) et (h_4), on a

$$\chi\left(\gamma^2\right)=\frac{\sup_{u\in\phi^{-1}(]-\infty,\gamma^2])}\psi(u)}{\gamma^2}$$

$$\leq\left(\sqrt{2}\frac{c_1}{\gamma}a_1+\frac{2^{\frac{q}{2}}c_q^qa_2}{q}\gamma^{q-2}\right)=\frac{D^2}{2(2^N-1)}\left(a_1\frac{k_1}{\gamma}+a_2k_2\gamma^{q-2}\right)$$

$$<\frac{D^2}{2(2^N-1)}\frac{\inf_{x\in\Omega}F(x;\delta)}{\delta^2E}\leq\frac{\psi(u_\delta)}{\phi(u_\delta)}.$$

Par conséquent, l'hypothèse (a_1) du théorème 1.10 est satisfaite.

De plus, si $s<2$, pour tout $u\in X$, $|u|^s\in L^{\frac{2}{s}}\left(\Omega\right)$ et l'inégalité de Holder donne

$$\int_{\Omega}\left|u\left(x\right)\right|^s dx\leq\|u\|_{L^2(\Omega)}^s\,meas\left(\Omega\right)^{\frac{2-s}{2}},\forall u\in X.$$

Ensuite, par (2.6), on a

$$\int_{\Omega}\left|u\left(x\right)\right|^s dx\leq c_2^s\left\|u\right\|^s meas\left(\Omega\right)^{\frac{2-s}{2}},\forall u\in X. \tag{2.18}$$

A partir de (2.18) et de la condition (h_3), il s'ensuit que

$$J_{\lambda}\left(u\right)\geq\frac{\|u\|_I^2}{2}-\lambda b meas\left(\Omega\right)^{\frac{2-s}{2}}\left\|u\right\|^s-\lambda b meas\left(\Omega\right),\forall u\in X.$$

Par conséquent, J_λ est coercive pour chaque paramètre positif, en particulier pour tout

$$\lambda \in \Lambda_{(\gamma,\delta)} \subseteq \left] \frac{\phi(u_\delta)}{\psi(u_\delta)}, \frac{\gamma^2}{\sup\limits_{\phi(u)\leq\gamma^2} \psi(u)} \right[.$$

Ensuite, sous la condition (a_2), et puisque toutes les hypothèses du théorème 1.10 sont satisfait pour toute $\lambda \in \Lambda_{(\gamma,\delta)}$, la fonctionnelle J_λ admet au moins trois points critiques distincts qui sont des solutions faibles du problème (2.1). ■

Chapitre 3

Multiplicité des solutions pour un système elliptique de Dirichlet

3.1 Introduction

Dans cette partie nous traitons un système elliptique intervenant p, q-Lapalace avec la condition de Dirichlet homogène suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = \lambda F_u(x,u,v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v + b(x)|v|^{q-2}v = \lambda F_v(x,u,v) \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

tel que Ω un ouvert borné de frontière régulière de $\mathbb{R}^N (N \geq 1), p, q > N$, $\Delta_s u = div(|\nabla u|^{s-2}\nabla u)$, est l'opérateur s-laplacien, $a, b \in L^\infty\ (\Omega)$ avec $essinf_\Omega a \geq 0$ et $essinf_\Omega b \geq 0$, et λ est un paramètre positif, $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $F(\cdot, t_1, t_2)$ est continue en $\overline{\Omega}$ pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ et $F(x,\cdot,\cdot)$ est de class C^1 dans $\mathbb{R}^2$ pour chaque $x \in \Omega$, et F_s désigne la dérivée partielle de F par rapport à s.

Nous souhaitons établir l'existence d'au moins trois solutions faibles pour ce système, on appliquant le théorème 1.10 (basé sur le théorème de trois points critique très récent dû à Bonanno et Marano [6]).

3.2 Notations et hypothèses

Dans la suite, X désignera le produit d'espaces Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ équipé de la norme

$$\|(u,v)\| = \|u\| + \|v\|,$$

ou

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$\|v\| = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

on définit

$$\|u\|_1 = \left(\int_\Omega |\nabla u(x)|^p + a(x)|u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$\|v\|_2 = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^q + b(x)|v(x)|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

On note

$$k = max \left\{ \sup_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|^p}{\|u\|^p}, \sup_{v \in W_0^{1,q}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)|^q}{\|v\| \, q} \right\}. \tag{3.2}$$

Puisque $p, q > N$, on a $k < +\infty$. De plus, à partir de [14], on a

$$\sup_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|}{\|u\|} \leq \frac{N^{\frac{-1}{p}}}{\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{N}{2}\right) \right]^{\frac{1}{N}} \left(\frac{p-1}{p-N} \right)^{1-\frac{1}{p}} [meas(\Omega)]^{\frac{1}{N}-\frac{1}{p}},$$

et

$$\sup_{v \in W_0^{1,q}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)|}{\|v\|} \leq \frac{N^{\frac{-1}{q}}}{\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{N}{2}\right) \right]^{\frac{1}{N}} \left(\frac{q-1}{q-N} \right)^{1-\frac{1}{q}} [meas(\Omega)]^{\frac{1}{N}-\frac{1}{q}}.$$

Où $meas(\Omega)$ est la mesure de Lebesgue de l'ensemble Ω .

Clairement, on a

$$\|u\| \leq \|u\|_1 \leq (1 + \|a\|_\infty meas(\Omega) k)^{\frac{1}{p}} \|u\|,$$

et

$$\|v\| \leq \|v\|_2 \leq (1 + \|b\|_\infty meas(\Omega) k)^{\frac{1}{q}} \|v\|. \tag{3.3}$$

Par conséquent, la norme dans $W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega)$ est

$$\|(u, v)\|_1 = \|u\|_1 + \|v\|_2.$$

Est équivalent à l'habituel. Pour tout $c > 0$ on note l'ensemble

$$K_1(c) = \left\{ (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|t_1|^p}{p} + \frac{|t_2|^q}{q} \leq c \right\}. \tag{3.4}$$

Définition 3.1 *Une solution faible du problème* (3.1) *est un couple* $(u, v) \in X$ *tel que*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(|\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x) \nabla h_1(x) + a(x) |u(x)|^{p-2} u(x) h_1(x) \right) dx \\
&+ \int_\Omega \left(|\nabla v(x)|^{q-2} \nabla v(x) \nabla h_2(x) + b(x) |v(x)|^{q-2} v(x) h_2(x) \right) dx \\
&- \lambda \int_\Omega \left(F_u(x, u(x), v(x)) h_1(x) + F_v(x, u(x), v(x)) h_2(x) \right) dx = 0, \forall (h_1, h_2) \in X.
\end{aligned}$$

3.3 Résultat principale

Nous annonçons la théorème suivant

Théorème 3.1 [5]*Soit* $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *une fonction telle que* $F(\cdot, t_1, t_2)$ *est continue en* $\overline{\Omega}$ *pour tout* $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $F(x,\cdot,\cdot)$*est de classe* C^1*dans* $\mathbb{R}^2$ *et* $F(x, 0, 0) = 0$ *pour tout* $x \in \Omega$.

Supposons qu'il existe une constante positive r *et une fonction* $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in X$ *telle que*

(α_1)

$$\frac{\|\omega_1\|_1^p}{p} + \frac{\|\omega_2\|_2^q}{q} > r,$$

(α_2)

$$\frac{\int_\Omega \sup_{(t_1,t_2)\in k_1(kr)} F(x, t_1, t_2)\, dx}{r} < \frac{\int_\Omega F(x, \omega_1(x), \omega_2(x))\, dx}{\frac{\|\omega_1\|_1^p}{p} + \frac{\|\omega_2\|_2^q}{q}},$$

où

$$K_1(kr) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 : \frac{|t_1|^p}{p} + \frac{|t_2|^q}{q} \leq kr\},$$

(voir (3.4)*) et* k *est donné par* (3.2),

(α_3)

$$\limsup_{|t_1|\to+\infty, |t_2|\to+\infty} \frac{F(x, t_1, t_2)}{\frac{|t_1|^p}{p} + \frac{|t_2|^q}{q}} < \frac{\int_\Omega \sup_{(t_1,t_2)\in k_1(kr)} F(x, t_1, t_2)\, dx}{meas(\Omega)\, kr},$$

uniformément par rapport à $x \in \Omega$.

Alors, pour chaque

$$\lambda \in \Lambda_1 = \left] \frac{\frac{\|\omega_1\|_1^p}{p} + \frac{\|\omega_2\|_2^q}{q}}{\int\limits_\Omega F\left(x, \omega_1\left(x\right), \omega_2\left(x\right)\right) dx}, \frac{r}{\int\limits_\Omega \sup\limits_{(t_1,t_2)\in k_1(kr)} F\left(x, t_1, t_2\right) dx} \right[$$

le problème (3.1) *admet au moins trois solutions faibles distinctes dans X.*

Nous avons besoin de la proposition suivante dans la preuve du théorème (3.1).

Proposition 3.1 [5]*Soit $T : X \to X^*$ l'opérateur définit par*

$$\begin{aligned} T(u,v)(h_1,h_2) &= \int\limits_\Omega \left(|\nabla u(x)|^{p-2}\right) \nabla u(x) \nabla h_1(x) + a(x)|u(x)|^{p-2}u(x)h_1(x))dx \\ &+ \int\limits_\Omega \left(|\nabla v(x)|^{q-2}\right) \nabla v(x) \nabla h_2(x) + b(x)|v(x)|^{q-2}v(x)h_2(x))dx, \forall (u,v),(h_1,h_2) \in X. \end{aligned}$$

Alors T admet un inverse continu sur X^*.

Preuve Tenant compte de (2.2) de [13] pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$ il existe une constante positive c_p telle que

$$\left\langle |x|^{p-2} x - |y|^{p-2} y, x - y \right\rangle \geq c_p \left|x - y\right|^p$$

où $\langle ., . \rangle$ désigne le produit interne habituel de $\mathbb{R}^N$. Ainsi, il est facile de voir que

$$(T(u_1,v_1) - T(u_2,v_2))(u_1 - u_2, v_1 - v_2) \geq min\{c_p, c_q\} \left(\|u_1 - u_2\|_1^p - \|v_1 - v_2\|_2^q\right)$$

pour tout (u_1, v_1), $(u_2, v_2) \in X$, ce qui signifie que T est uniformément monotone.

Par conséquent, puisque T est coercitif et hémicontinue dans X, en appliquant le théorème 26.A. de [15], nous avons que T admet un inverse continu sur X^*. ■

Maintenant nous démontrerons notre résultat principal

Preuve Pour appliquer le théorème 1.10, nous commençons par prendre

$$X = W_0^{1,p}(\Omega) \times \ W_0^{1,p}(\Omega),$$

muni de la norme $\|(u,v)\|_1$. De plus, définissons

$$\phi(u,v) = \frac{1}{p}\|u\|_1^p + \frac{1}{q}\|v\|_2^q, \tag{3.5}$$

et

$$\psi(u,v) = \int\limits_{\Omega} F(x,u(x),v(x))dx; \tag{3.6}$$

pour tout $(u,v) \in X$. Puisque $p,q > N$, X s' injecte de manière compacte dans $C^0\left(\overline{\Omega}\right) \times C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ et il est bien connu que ϕ et ψ sont bien définis et continuellement G-différentiable dont leurs dérivées de Gâteaux au point $(u,v) \in X$ sont les fonctionnelles $\varphi', \psi' \in X^*$, donné par

$$\begin{aligned} \phi'(u,v)\left(h_1,h_2\right) &= \int\limits_{\Omega} (|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)\nabla h_1(x) + a(x)|u(x)|^{p-2}u(x)h_1(x))dx \\ &\quad + \int\limits_{\Omega} (|\nabla v(x)|^{q-2}\nabla v(x)\nabla h_2(x) + b(x)|v(x)|^{q-2}v(x)h_2(x))dx, \end{aligned}$$

et

$$\psi'(u,v)\left(h_1,h_2\right) = \int\limits_{\Omega} F_u(x,u(x),v(x))h_1(x)dx + \int\limits_{\Omega} F_v(x,u(x),v(x))h_2(x)dx).$$

Pour tout $(h_1,h_2) \in X$, respectivement.

la proposition 3.1 confirme que ϕ' admet un inverse continu sur X^*, et puisque ϕ' est monotone, alors ϕ est séquentiellement faiblement semi continue inférieur (voir [15, proposition 25.20]).

De plus ψ est séquentiellement faiblement semi-continue supérieur voir [11] .et $\psi' : X \to X^*$est un opérateur compact. En effet, pour $(u,v) \in X$ fixé, supposons $(u_n,v_n) \underset{n\to+\infty}{\rightharpoonup} (u,v)$ est faiblement dans X , alors $(u_n,v_n) \underset{n\to+\infty}{\to} (u,v)$ est fortement en $C(\overline{\Omega})$. Puisque $F(x,\cdot,\cdot)$ est de classe C^1dans $\mathbb{R}^2$ pour tout $x \in \Omega$, il est donc continue dans $\mathbb{R}^2$ pour tout $x \in \Omega$, et nous obtenons que $F(x, u_n, v_n) \underset{n\to+\infty}{\rightarrow} F(x, u, v)$.

A cause d'injection compacte et les critères de convergence, $\psi'(u_n, v_n) \to \psi'(u, v)$ est fortement, ce qui signifie que ψ' est fortement continue, alors c'est un opérateur compact.

Choisissons $(u_0, v_0) = (0, 0)$ et $(u_1, v_1) = (\omega_1, \omega_2)$, de (α_1) et (3.5) nous obtenons

$0 < r < \phi(u_1, v_1)$, et à partir de (3.6) nous avons $\psi(u_0, v_0) = (0, 0)$, qui sont des hypothèses requises dans le théorème 1.10. De plus, depuis

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|^p \leq k\,\|u\|^p\,, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

et

$$\sup_{x\in\Omega}|v(x)|^q \leq k\,\|v\|^q\,, \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega),$$

$$\sup_{x\in\Omega}|u(x)|^p \leq k\,\|u\|_1^p\,, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

et

$$\sup_{x\in\Omega}|v(x)|^q \leq k\,\|v\|_2^q\,, \forall v \in W_0^{1,q}(\Omega),$$

d'ou

$$\sup_{x\in\Omega}\left(\frac{|u(x)|^p}{p} + \frac{|v(x)|^q}{q}\right)| \leq k\left(\frac{\|u\|_1^p}{p} + \frac{\|v\|_2^q}{q}\right), \forall\,(u, v) \in W_0^{1,p}(\Omega) \times W_0^{1,q}(\Omega). \tag{3.7}$$

En utilisant (3.5) et (3.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(]-\infty, r]) &= \{(u, v) \in X, \phi(u, v) \leq r\} \\
&= \left\{(u, v) \in X, \frac{\|u\|_1^p}{p} + \frac{\|v\|_2^q}{q} \leq r\right\} \\
&\subseteq \left\{(u, v) \in X, \frac{\|u\|_1^p}{p} + \frac{\|v\|_2^q}{q} \leq kr, \forall\ x \in \Omega\right\},
\end{aligned}$$

et il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\sup_{(u,v)\in\phi^{-1}(]-\infty,r])} \psi(u,v) &= \sup_{(u,v)\in\phi^{-1}(]-\infty,r])} \int_\Omega F(x,u(x),v(x))dx \\
&\leq \sup_{(t_1,t_2)\in K_1(kr)} \int_\Omega F(x,t_1,t_2)dx.
\end{aligned}$$

Donc, à partir de (3.6), en raison de (α_2), on a

$$\begin{aligned}
\sup_{u\in\phi^{-1}(]-\infty,r])} \psi(u,v) &= \sup_{(u,v)\in\phi^{-1}(]-\infty,r])} \int_\Omega F(x,u(x),v(x))dx \\
&\leq \int_\Omega \sup_{(t_1,t_2)\in K_1(kr)} F(x,t_1,t_2)dx \\
&< r\frac{\int_\Omega F\left(x,\omega_1\left(x\right),\omega_2\left(x\right)\right)dx}{\frac{\|\omega_1\|_1^p}{p}+\frac{\|\omega_2\|_2^q}{q}} \\
&= r\frac{\psi(\omega_1,\omega_1)}{\phi(\omega_1,\omega_1)},
\end{aligned}$$

à savoir, l'hypothèse (α_1) du théorème 1.10 est remplie. En plus de (α_3) il existe deux constantes $\gamma,\tau\in\mathbb{R}$ avec

$$0<\gamma<\frac{\int_\Omega \sup_{(t_1,t_2)\in K_1(kr)} F(x,t_1,t_2)dx}{r},$$

tel que

$$kmeas\left(\Omega\right)F(x,t_1,t_2)\leq\gamma\left(\frac{|t_1|^p}{p}+\frac{|t_2|^q}{q}\right)+\tau,$$

pour tout $x\in\Omega$ et pour tout $(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$.

Fixons $(u,v) \in X$. Puis

$$\begin{aligned}
\phi(u,v) - \lambda\psi(u,v) &= \tfrac{1}{p}\|u\|_1^p + \tfrac{1}{q}\|v\|_2^q - \lambda\int_\Omega F(x,u(x),v(x))dx \\
&\geq \tfrac{1}{p}\|u\|_1^p + \tfrac{1}{q}\|v\|_2^q - \tfrac{\lambda\gamma}{kmeas(\Omega)}\left(\tfrac{1}{p}\int_\Omega |u(x)|^p\,dx + \tfrac{1}{q}\int_\Omega |v(x)|^q\,dx\right) - \tfrac{\lambda\tau}{k} \\
&\geq \tfrac{1}{p}\|u\|_1^p + \tfrac{1}{q}\|v\|_2^q - \tfrac{\lambda\gamma}{kmeas(\Omega)}\left(\tfrac{kmeas(\Omega)}{p}\|u\|_1^p + \tfrac{kmeas(\Omega)}{q}\|v\|_2^q\right) - \tfrac{\lambda\tau}{k} \\
&= \tfrac{1}{p}\|u\|_1^p + \tfrac{1}{q}\|v\|_2^q - \tfrac{\lambda\gamma}{p}\|u\|_1^p + \tfrac{\lambda\gamma}{q}\|v\|_2^q - \tfrac{\lambda\tau}{k} \\
&\geq \tfrac{1}{p}\left(1 - \gamma\frac{r}{\int_\Omega \sup_{(t_1,t_2)\in K_1(kr)}\int_\Omega F(x,t_1,t_2)dx}\right)\|u\|_1^p \\
&\quad + \tfrac{1}{q}\left(1 - \gamma\frac{r}{\int_\Omega \sup_{(t_1,t_2)\in K_1(kr)}\int_\Omega F(x,t_1,t_2)dx}\right)\|v\|_2^q - \tfrac{\lambda\tau}{k},
\end{aligned}$$

Et ainsi

$$\lim_{\|u,v\|\to+\infty} (\phi(u,v) - \lambda\psi(u,v)) = +\infty,$$

ce qui signifie que la fonctionnelle $\phi - \lambda\psi$ est coercive. Donc, l'hypothèse (α_2) du le théorème 1.10 est satisfaite. Maintenant, nous pouvons appliquer le théorème 1.10. Par conséquent, en tenant compte du fait que les solutions faibles de (3.1) sont exactement les solutions de l'équation $\phi'(u,v) - \lambda\psi'(u,v) = 0$, le problème (3.1) admet au moins trois solutions faibles . ■

3.3.1 Résultats suplémentaires

Fixons $x_0 \in \Omega$ et choisissons r_1, r_2 avec $0 < r_1 < r_2$ tel que

$$S(x_0,r_1) \subset S(x_0,r_2) \subseteq \Omega.$$

Soit

$$Q_{\min} = (r_2^N - r_1^N)\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(1+\frac{N}{2})} \min\left\{\frac{1}{(r_{2.} - r_1)^p}, \frac{1}{(r_{2.} - r_1)^q}\right\}, \tag{3.8}$$

$$Q_{\max} = (r_2^N - r_1^N)\frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(1+\frac{N}{2})} \max\left\{\frac{1}{(r_{2.} - r_1)^p}, \frac{1}{(r_{2.} - r_1)^q}\right\}, \tag{3.9}$$

$$R = 1 + meas(\Omega)kmax\{\|a\|_\infty, \|b\|_\infty\},$$

$$L = \frac{1}{kRQ_{\max}} \text{ et } l = kQ_{\min}.$$

Donnons ici une conséquence du théorème 3.1 pour une fonction de test fixe ω.

Corollaire 3.1 [5]*Soit $F : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $F(\cdot, t_1, t_2)$ soit continue en Ω pour tout $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, $F(x,\cdot,\cdot)$est C^1 dans $\mathbb{R}^2$ et $F(x, 0, 0) = 0$pour tout $x \in \Omega$.*

Supposons qu'il existe une constante $c > 0$ et un vecteur $\underline{d} = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$, $d_1, d_2 \geq 0$,avec $c < l(\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q})$, tel que

$(\beta_1)F(x, t_1, t_2) \geq 0$ *pour chaque* $(x, t_1, t_2) \in (\Omega \backslash S(x^0, r_1)) \times [0, d_1] \times [0, d_2]$,

(β_2)

$$\frac{\int\limits_{\Omega} \sup\limits_{(t_1,t_2)\in K_1(kr)} \int\limits_{\Omega} F(x, t_1, t_2)dx}{c} < L \frac{\int\limits_{S(x^0,r_1)} F(x, d_1, d_2)dx}{\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q}}.$$

(β_3)

$$\limsup_{|t_1|\to+\infty, |t_2|\to+\infty} \frac{F(x, t_1, t_2)}{\frac{|t_1|^p}{p} + \frac{|t_2|^q}{q}} F(x, t_1, t_2) \leq 0,$$

uniformément par rapport à $x \in \Omega$,

où

$$K_1(c) = \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2; \frac{|t_1|^p}{p} + \frac{|t_2|^q}{q} \leq c,$$

et l, L sont donnés par (3.9).

Alors, pour chaque

$$\lambda \in \left] RQ_{\max} \frac{\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q}}{\int\limits_{S(x^0,r_1)} F(x, d_1, d_2)dx}, \frac{1}{k} \frac{c}{\int\limits_{\Omega} \sup\limits_{(t_1,t_2)\in K_1(kr)} \int\limits_{\Omega} F(x, t_1, t_2)dx} \right[,$$

où $Q_{\max}$ est donné par (3.8), *le problème* (3.1) *admet au moins trois solutions faibles distinctes dans X.*

Preuve Nous affirmons que toutes les hypothèses du théorème 3.1 sont satisfaites en choisissant

$\omega(x) = (\omega_1(x), \omega_2(x))$ avec

$$\omega_i(x) = \begin{cases} 0, x \in \Omega \backslash S(x^0, r_2) \\ \frac{d_i}{r_2 - r_1}\left[r_2 - \sqrt{\sum_{i=I}^{N} (x_i - x_i^0)^2} \right], x \in S(x^0, r_2) \backslash S(x^0, r_1) \\ d_i, x \in S(x^0, r_1), \end{cases} \tag{3.10}$$

pour $i = 1, 2$ et $r = \frac{c}{k}$. D'aprés le résultat de (3.10) tel que $(\omega_1, \omega_2) \in X$ et

$$\|\omega_1\|^p = (r_2^N - r_1^N) \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{N}{2})} \left(\frac{d_1}{r_2 - r_1} \right)^p,$$

et

$$\|\omega_2\|^q = (r_2^N - r_1^N) \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma(1 + \frac{N}{2})} \left(\frac{d_{.2}}{r_2 - r_1} \right)^q.$$

Par conséquent,

$$Q_{\min} \left(\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q} \right) \leq \frac{\|\omega_1\|^p}{p} + \frac{\|\omega_2\|^q}{q} \leq Q_{\max} \left(\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q} \right).$$

De $c < l \left(\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q} \right)$ on a

$$kr < kQ_{\min} \left(\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q} \right) \leq k\phi\left(\omega_1, \omega_2\right),$$

c'est-à-dire : $r < \frac{\|\omega_1\|^p}{p} + \frac{\|\omega_2\|^q}{q}$,

à savoir (α_1) est vérifié. De plus, puisque $0 \leq \omega_i(x) \leq d_i$, $i = 1, 2$, $\forall\ x \in \Omega$, la condition (β_1)

assure que

$$\int\limits_{\Omega\setminus S(x^0,r_2)} F\left(x,\omega_1\left(x\right),\omega_2\left(x\right)\right)dx + \int\limits_{S(x^0,r_2)\setminus S(x^0,r_1)} F\left(x,\omega_1\left(x\right),\omega_2\left(x\right)\right)dx \geq 0.$$

De plus, à partir de (β_2) on a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} \sup_{(t_1,t_2)\in k_1(kr)} F(x,t_1,t_2)dx &= k\frac{\int\limits_{\Omega} \sup\limits_{(t_1,t_2)\in k_1(c)} F(x,t_1,t_2)dx}{c} \\
&< kL\frac{\int\limits_{S(x^0,r_1)} F(x,d_1,d_2)dx}{\frac{d_1^p}{p}+\frac{d_2^q}{q}} \\
&= \frac{1}{RQ_{\max}}\frac{\int\limits_{S(x^0,r_1)} F(x,d_1,d_2)dx}{\frac{d_1^p}{p}+\frac{d_2^q}{q}} \\
&\leq \frac{\int\limits_{S(x^0,r_1)} F(x,d_1,d_2)dx}{\Phi\left(\omega_1,\omega_2\right)} \\
&\leq \frac{\int\limits_{\Omega} F\left(x,\omega_1\left(x\right),\omega_2\left(x\right)\right)dx}{\frac{\|\omega_1\|^p}{p}+\frac{\|\omega_2\|^q}{q}},
\end{aligned}$$

donc (α_2) est satisfait. Enfin (β_3) implique (α_3).

Tenant compte du fait que

$$\left]RQ_{\max}\frac{\frac{d_1^p}{p}+\frac{d_2^q}{q}}{\int\limits_{S(x^0,r_1)} F(x,d_1,d_2)dx}, \frac{c}{k\int\limits_{\Omega} \sup\limits_{(t_1,t_2)\in k_1(c)} F(x,t_1,t_2)dx}\right[\subseteq \Lambda_1,$$

le théorème 3.1 assure le résultat. ■

Nous signalons maintenant les cas particuliers suivants du corollaire 3.1 lorsque F ne dépendent de $x \in \Omega$.

Soit

$$Q^1_{\max} = \left(r_2^N - r_1^N\right)\max\left\{\frac{1}{\left(r_2-r_1\right)^p}, \frac{1}{\left(r_2-r_1\right)^q}\right\},$$

et

$$L^1 = \frac{r_1^N}{m\,(\Omega)} \frac{1}{KRQ_{\max}^1}.$$

Corollaire 3.2 *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, telle que $F(0,0) = 0$. Supposons qu'il existe une constante $c > 0$et un vecteur $\underline{d}(d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2$, $d_1, d_2 \geq 0$, avec $c < l\left(\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q}\right)$, tel que*

(β_1') $F(t_1, t_2) \geq 0$ *pour chaque* $(t_1, t_2) \in [0, d_1] \times [0, d_2]$,

(β_2')

$$\frac{\sup\limits_{(t_1,t_2)\in K_1(c)} F(t_1, t_2)}{c} < L^1 \frac{F(d_1, d_2)}{\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q}},$$

(β_3')

$$\lim_{|t_1|\to+\infty, |t_2|\to+\infty} \sup \frac{F(t_1, t_2)}{\frac{|t_1|^p}{p} + \frac{|t_2|^q}{q}} \leq 0.$$

Alors

$$\forall\lambda \in \left]\frac{RQ_{\max}^1}{r_1^N} \frac{\frac{d_1^p}{p} + \frac{d_2^q}{q}}{F(d_1, d_2)}, \frac{1}{kmeas\,(\Omega)} \frac{c}{\sup\limits_{(t_1,t_2)\in k_1(c)} F(x, t_1, t_2)dx}\right[,$$

le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = \lambda F_u(u, v) \text{ dans } \Omega \\ -\Delta_q v + b(x)|v|^{q-2}v = \lambda_v F(u, v) \text{ dans } \Omega \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.11}$$

admet au moins trois solutions faibles distinctes dans X.

Preuve Puisque $Q_{\max} = \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)} Q_{\max}^1$et $m(S(x^0, r_1)) = r_1^N \frac{\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{N}{2}\right)}$, corollaire 3.1 assure le résultat. ■

Théorème 3.2 [5] *Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ un ensemble ouvert borné non vide avec une frontière de classe C^1. Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que le différentiel*

1-la forme $\omega = f(\xi, \eta)d\xi + g(\xi, \eta)d\eta$ est intégrable et soit F une primitive de ω telle que $F(0,0) = 0, F(d_1, d_2) > 0$ pour certains $d_1, d_2 > 0$ et $F(\xi, \eta) \geq 0$ dans $[0, d_1] \times [0, d_2]$.

Soit $p, q > 2$ et supposons que

$$\liminf_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{F(\xi,\eta)}{\frac{|\xi|^p}{p}+\frac{|\eta|^q}{q}} = \lim_{|\xi|\to+\infty,|\eta|\to+\infty} \sup \frac{F(\xi,\eta)}{\frac{|\xi|^p}{p}+\frac{|\eta|^q}{q}} = 0.$$

Ensuite, il y a $\lambda^* > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda^*$ le problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda f(u,v), \ x \in \Omega \\ -\Delta_q u = \lambda g(u,v), \ x \in \Omega \\ u = v = 0, x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Admet au moins trois solutions faibles.

Enfin, nous prouvons le théorème 3.2

Preuve Fixons

$$\lambda > \lambda^* = \frac{RQ^1_{\max}}{r_1^N} \frac{\frac{d_1^p}{p}+\frac{d_2^q}{q}}{F(d_1,d_2)}.$$

En tenant compte du fait que

$$\liminf_{(\xi,\eta)\to(0,0)} \frac{F(\xi,\eta)}{\frac{|\xi|^p}{p}+\frac{|\eta|^q}{q}} = 0,$$

il y a $\{c_n\}_{n\in N} \subseteq]0,+\infty[$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sup\limits_{(\xi,\eta)\in K_1(c_n)} F(\xi,\eta)}{c_n} = 0.$$

En effet, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sup\limits_{(\xi,\eta)\in K_1(c_n)} F(\xi,\eta)}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{F(\xi_{c_n},\eta_{c_n})}{\frac{|\xi_{c_n}|^p}{p}+\frac{|\eta_{c_n}|^q}{q}} \times \frac{\frac{|\xi_{c_n}|^p}{p}+\frac{|\eta_{c_n}|^q}{q}}{c_n} = 0,$$

où $F(\xi_{c_n},\eta_{c_n}) = \sup\limits_{(\xi,\eta)\in K_1(c_n)} F(\xi,\eta).$

Par conséquent, il y a $\overline{c} > 0$ tel que

$$\frac{\sup\limits_{(\xi,\eta)\in K_1(\overline{c})} F(\xi,\eta)}{\overline{c}} < \min\left\{ L^1 \frac{F(d_1,d_2)}{\frac{d_1^p}{p}+\frac{d_2^q}{q}}, \frac{km\,(\Omega)}{\lambda} \right\},$$

et $\overline{c} < l\left(\frac{d_1^p}{p}+\frac{d_2^q}{q}\right)$. Du corollaire 3.2, les résultats suivront.

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons utilisée la théorie de point critique pour étudier la multiplicité des solution faibles de certains problèmes elliptiques avec condition de Dirichlet homogène ce résultat est généralisé sur les systèmes elliptiques non linaires intervenant p, q-Laplacien.

Ce théorème peut etre appliqué sur les problèmrs fractionnaires.

Bibliographie

[1] G.A. Afrouzi, T.N. Ghara, Existence of three weak solutions for elliptic Dirichlet problem, the journal of mathematics and computer science Vol. 4 No.3 (2012) 386 - 391.

[2] D. Averna and G. Bonanno, A three critical points theorem and its applications to ordinary Dirichlet problems, Topol. Methods Nonlinear Anal. 22 (2003), 93-103.

[3] G. Bonanno, G.M. Bisci, Three weak solutions for elliptic Dirichlet problems, J. Math. Anal.Appl. 382 (2011) 1-8.

[4] G. Bonanno, P. Candito, Three solutions for a Neumann problem for elliptic équations involving the p-Laplacian, Arch. Math. (Basel) 80 (2003) 424–429.

[5] G Bonanno, S Heidarkhani, and D O'regan, Multiple solutions fot a class of Dirichlet quasilinear elliptic systemes driven by a (p,q)-Laplacian operator, Dynamic Systems and Applications 20 (2011) 89-100.

[6] G. Bonanno, S. A. Marano, On the structure of the critical set of non-differentiable functions with a weak compactness condition, Appl. Anal. 89 (2010) 1–10.

[7] G. Bonanno, G. Riccobono, Multiplicity results for Sturm-Liouville boundary value problems, Appl. Math. Comput. 210 (2009) 294–297.

[8] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson. Parie.New York Barcelone Milan Mexico Sao Paulo 1987.

[9] F. Demengel, G. Demengel, Espaces fonctionnels Utilisation dans la résolution des équationsaux dérivées partielles, Savoir Actuels. EDP Sciences/ CNRS Editions, 2007.

[10] O. Kavian, Introduction à la théorique des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Springer-Velarg.France, Parie, 1993.

[11] H. Le Dret, Equations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013.

[12] B. Ricceri, On a three critical points theorem, Arch. Math. (Basel) 75 (2000) 220-226.

[13] J. Simon, Regularité de la solution d'une equation non lineaire dans RN. LMN 665, P. Benilan ed. Berlin-Heidelberg-New York 1978.

[14] G. Talenti, Some inequalities of Sobolev type on two-dimensional spheres, in : W. Walter (Ed.), General Inequalities, Vol. 5, Internat. Ser Numer. Math. 8 (1987) 401–408.

[15] E. Zeidler, Nonlinear functional analysis and its applications, Vol. II/B. Berlin-Heidelberg-New York 1985.