République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiqueset Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

Quelques nouveaux résultats de point fixe pour les F-contractions de Hardy- Rogers dans un espace b-métrique

Présenté Par :
Atmania Hibet Allah

Devant le jury :

Mr, Ben Zahi Mourad	DR	UnivérsitéLarbi Tébessi	Président
Mr, Bouznada smaile	PROF	UnivérsitéLarbi Tébessi	Examinateur
Mr , Merghadi Faycel	DR	UnivérsitéLarbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 19/09/2021.

بسم الله الرحمن الرحيم

Dédicaces

Je dédie ce travail particulièrement à mes parents, mes frères et à tous mes collègues de promotion qui ont contribué de près ou loin à la réalisation de ce modeste travail, et j'oublie pas tous mes amis pour leur souien moral sans avoir citer explicitement leurs noms.

Remerciements

Tout d'abord merci à ALLAH de nous avoir donné la force pour terminer ce travail.

Nous tenons à remercier ***Dr : Merghady Faycel*** encadreur , d'avoir consacré beaucoup de son temps à notre travail, pour ses conseils pertinents, et ses orientations judicieuses.

Mes remerciements distingués vont à **Dr.Bouznada smail** pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury. Mes remerciements vivement a **Dr.Ben Zahi Mourad** d'avoir accepter d'examiner ce mémoire.

Nous adressons nos vifs remerciements à tous les enseignants du département des Mathématiques

RÉSUMÉE

Notre thèse (ou le mémoire) s'appuie essentiellement sur certains nombre de résultats publiés par Djamila Derouiche and Hichem Ramoul et autres. Plus précisement, Nous allons étudier quelques théorémes de point fixe dans un espace b-métrique sous des conditions contractives généralisées telles que: la F-contraction génélalisée de type Hardy-Rogers, la F-contraction génélalisée de type Suzuki et la F-contractraction faible généralisée de type Hardy-Rogers. Également, notre étude est bien cloturée par quelques théorèmes de bases et quelques applications illustratives pour démontrer l'existence et l'unicité de solution de certaines équations fonctionnelles, intégrales et différentielles.

ABSTRACT

Our thesis is mainly based on a number of results published by Djamila Derouiche and Hichem Ramoul and others. More precisely, we are going to study some fixed point’s theorems in a b-metric space under generalized contractive conditions such as: the generalized F-contraction of Hardy-Rogers type, the generalized F-contraction of Suzuki type and the weak F-contractraction. generalized Hardy-Rogers type. Also, our study is well closed by some basic theorems and some illustrative applications to demonstrate the existence and the uniqueness of solution of certain functional, integral and differential equations.

.

الملخص

تستند أطروحتنا بشكل أساسي إلى عدد من النتائج التي نشرتها جميلة الدرويش وهشام رامول وآخرون. بتعبير أدق ، سنقوم بدراسة بعض نظريات النقطة الثابتة في فضاء ب متري في ظل ظروف انكماشية معممة مثل: انكماش F المعمم لنوع هاردي روجرز ، انكماش F المعمم لنوع سوزوكي وانكماش F الضعيف . نوع هاردي روجرز المعمم. أيضًا ، تم تدعيم دراستنا جيدًا ببعض النظريات الأساسية وبعض التطبيقات التوضيحية لإثبات وجود ووحدانية الحل لبعض المعادلات الوظيفية والتكاملية والتفاضلية..

Table des matières

Introduction générale

Qu'est-ce qu'un point fixe ?

Un point fixe est un point qui reste immobile par une application ou une transformation. Parle de lui et il vous montrera le visage. On le rencontre partout et sur tous les chemins : que vous étudiez les fractales. les cours de la bourse, les équations de la phisique mathématiques ou verifiez un compteur éléctrique vous rencontrerez des point fixe. Les anciens disaient,

Qu'on ne peut pas passer, sans sauter, d'une berge d'une rivière à l'autre sans se mouiller le pieds.

Il s,agit là peut être de la premiére preuve d'un théorème de topologie. En dimension un, Bolzano n'a fait, en vérité, qu'écrire en y pensant ce que les anciens ont dêja dit sans y penser, Rigoureusement, il s'agit ici du théorème des valeurs intermédiaire qui affirme que toute fonction continue d'une variable réelle qui prend des signes opposés en deux valeurs a et $b, a \prec b$ s'annule au moins une fois entre a et b.

En dimension trois, le mathématicien sait, que lorsque il tourne conscieuseument la cuillère dans sa tasse à café, qu'il a démontré un théorème assurant, qu'à la fin de l'opération un point (au moins) du café a repris sa place qu'il occupait au départ. Le même théorème, en dimension deux, affirme que si vous froissez une feuille de papier et l'écrasez telle quelle sur une et même feuille mise à plat, l'un des points de la feuille froissée se superpose au même point de la feuille à plat. Ce point n'a pas bougé au terme de froissage. Que vous tourniez la cuillère durant des heures ou que vous pliez la feuille en 1000 n'y cgangera rien, un point resistera toujours à notre acharment, Le théorème qui garnanti l'existence de ce point immobile est le théorème de point fixe. L'intérêt de ce théorème dépasse de loin le cadre purement géométrique. Le théorème a aujourd'hui plus que 100 ans, mais il ne fait pas son age. Son père est ;e mathématicien L. Brouwer (1881-1966).

La structure topologique des espaces utilisés est trés importante. Si on effectue une rotation propre d'un anneau de disque sur lui même on n'obtient aucun point fixe. Les structures trouées, non convexes, ne font pas l'affaire.

Dans un ensemble dans lequel on sait mesurer la distance entre deux point (un espace métrique), il existe un résultat qui concerne les contractions. U ne contraction est d'abord, une transformation qui pour tous les couples de points réduit la distance qui les sépare d'un même facteur. Par exemple, la transformation passant de l'image générale à celle plus petite dans la main de la personne située dans la figure ci-dessus est une contraction, Ce type de transformation possède un unique point fixe.

Aprés un nombre infini d'itérations de la contraction, l'ensemble des points de l'image géométrique se superposent à ce point (indiqué par un flèche).

Cet exemple illustre une règle tout à fait générale, toute contraction d'un espace métrique complet sur lui-même a un point fixe unique, Ce point s'obtient comme limite des itérations successives d'un point quelconque de l'espace.

L'auteur de ce résultat très constructif est Mr : S. Banach (1922). Ce théorème était une concrétisation de travaux antérieurs, en particulier ceux de E. Picard qui avait bien auparavant utilisé la méthode des approximations successives pour résoudre de nombreux problèmes s'exprimant en termes d'equations différentielles, intégrales, ou aux dérivées partielles. Le théorème de Banach révélé être un outil fondamental dans l'étude des équations de la physique mathématiques.
En terme théorique, étant donné une fonction f, le problème de point fixe consiste à résoudre l'équation $f(x) = x$. L'expérience nous montre qu'en étant capable de résoudre un problème de point fixe on sera aussi capable de résoudre une quantité d'autre problème qui, à première vue, ne resemble pas à un problème de point fixe. Par exemple :
- Si on cherche un point x tel que $f(x) = 0$, on peut trouver un tel point en résolvant le problème de point fixe $g(x) = x$ où $g(x) = f(x) + x$.
- Si on cherche un point x tel que $f(x) = y$, on peut obtenir un tel x en résolvant l'équation $g(x) = f(x) - y + x$.
- L'étde de système dynamiques se réduit souvent à un problème de recherche de points fixes d,un champ de vecteurs $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, i.e. $f^n(x) = x$, $n \in \mathbb{N}$.
Ainsi on s'aperçoit que la théorie de point fixe est un point de rencontre de bn nombres de disiplines. Par conséquent, notre sujet est un sujet d'actualité. Alors, dans cet esprit de choses on aimerait aussi, lors d'une étude d'un problème de point fixe connaitre si
- Le point fixe existe
- Le point fixe est unique
- Il existe une méthode itérative qui converge vers ce point fixe.
Par ailleurs, le théorème de Banach affirme que si X est un espace métrique complet et si F est une application de X dans lui-même qui satisfait

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$$

pour un certain $k < 1$ et tous les $x, y \in X$, alors T a un unique point fixe x_0, et les approximations successives $\{T^n x\}$ convergent vers x_0 pour $x \in X$.
D'autre part, la condition

$$d(Tx, Ty) < d(x, y)$$

n'assure pas que T a un point fixe.
Ce théorème a de nombreuses applications dans de nombreuses disciplines telles que la chimie, la physique, la biologie, l'informatique et d'autres branches des mathématiques. De nombreux auteurs ont amélioré, généralisé et étendu ce résultat classique en analyse non linéaire.
Une des diverses généralisations de la célèbre contraction de Banach est la F-contraction définie en 2012 par Wardowski [6], et la F-contractions de Hardy–Rogers en 2016 par Vetro [20] en

prouvant des nouveaux théorèmes de point fixe.
Et en 2020 D. Derouiche, H. Ramoul [24] ont généralisé la notion de de F-contraction de type Hardy-Rogers, F-contraction de type Suzuki-Hardy-Rogers et F-contraction faible de type Hardy-Rogers en introduisant des nouvelles notions dans le contexte des espaces b-métriques.

La présente thèse ou le mémoire contient quatres principaux chapitres, à savoir :
Le premier chapitre est en quelques sorte la clée indisponsable pour s'introduire dans le reste de la thèse. Il contient un rappel des définitions et des théorèmes fondamentaux relatifs au point fixe. Plus présicement,
Dans le deuxième chapitre nous étudions l'existence et l'unicité de point fixe de certaines contractions de type (ϕ, F)-cntraction dans le cadre d'espaces métriques complet. et comme application nous obtenons l'existance et l'unicité des solutions de l'équation intégrale de Fredholm avec un temp d'echelles
Dans le chapitre 3 nous prouvons des théorème de point fixe des fonction de type Hardy-Rogers et Suzuki-Hardy-Rogers et F-contraction faible. à savoir en introduisant des nouvelles notions de F-contraction généralisées de type Hardy-Rogers, F-contraction généralisée de type Suzuki-Hardy-Rogers et F-contraction faible généralisée de type Hardy-Rogers.
Le dernier chapitre sera clôturé par des applications dont on a besoin pour illustrer quelques resultats obtenus auparavant. Plus présicement, nous présentons trois applications différentes et dans chacune d'elles, nous démontrons l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations. Dans la première application, nous traitons des équations fonctionnelles apparaissant dans la programmation dynamique. La deuxième application concerne les équations intégrales non linéaires de Volterra. La dernière application est consacrée à l'étude d'un problème aux limites pour une équation différentielle du second ordre.

Chapitre 1

Notions, Définitions et préliminaires.

Dans ce chapitre, nous introduisons un nouveau concept de contraction dans l'espce métrique et prouvons un théorème de point fixe qui généralise le principe de contraction de Banach d'une manière différente des résultats connus dans la littérature. Aprét on va défini des applications de type contractif sur un espace métrique complet X qui sont des généralisations de la contraction de Banach bien connue.
Pour la commodité du lecteur, rappelons-nous d'abord des notatios et des résultats préliminaires de la théorie des espaces b-metriques.

Définition 1.1 *[2]Un espace métrique et le pair (X, d) ou X est un ensemble non vide, et $\sigma : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une application verifiant les proprités suivantes :*
i) $\forall x \in X, \forall y \in X : d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$
ii) $\forall x \in X, \forall y \in X : d(x, y) = d(y, x).$
iii) $\forall x, y, z \in X : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$
Le nombre réel $d(x, y)$ est appellé distance de x à y, pour tout $x, y \in X$, la proprité (iii) est appellé l'inégalité triangulaire

Exemple 1.1 *1. Dans $\mathbb{R}$, on peut considérer la distance d suivante dite distance usuelle :*

$$d(x, y) = |x - y|, \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

2. Soient $X = \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ et $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ on définie :

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ \text{pour } p \geq 1.$$

$$d_\infty(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}.$$

3. Soit X un ensenble quelconque, on définie :

$$d(x,y)=\begin{cases}1 \text{ si } x\neq y,\\ 0 \text{ si } x=y,\end{cases}$$

on l'appelle métrique discrète

Définition 1.2 *[2] Soit $\{x_n\}$ une suite dans un espace metrique (X,d), on dit que $\{x_n\}$ est une suite de cauchy, si elle verifier la proprité suivante :*

$$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall (p,q)\in\mathbb{N}^2, p\geq N \text{ et } q\geq N \Longrightarrow d(x,y)<\varepsilon$$

Exemple 1.2 *Dans $(\mathbb{R},|.|)$ la suite définie par :*

$$U_n=\frac{1}{n}$$

soit $n,m\in\mathbb{N}$, $n>m$

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &= \left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right| \\ &= \left|\frac{m-n}{nm}\right| \\ &\leq \left|\frac{n}{nm}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{m}\right|, \end{aligned}$$

alors $\lim\limits_{m\longrightarrow\infty}\frac{1}{m}=0$, Donc $\{U_n\}$ suite de cauchy.

Définition 1.3 *Une suite $\{x_n\}$ dans un espace metrique (X,d) est une suite convergente si et seulement si :*

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}\Longrightarrow d(x_n,x)<\varepsilon$$

Proposition 1.1 *Toute suite convergente est une suite de Cauchy. L'inverce est généralement faux.*

Exemple 1.3 *Soit la suite $\{x_n\}$ dans l'espace métrique $(\mathbb{R}-\{1\},|.|)$, tel que $x_n=\frac{n}{n+1}$. On a $\lim_{n\to\infty}x_n=1\notin\mathbb{R}-\{1\}$, donc la suite $\{x_n\}$ diverge.*
Soit $n,m\in\mathbb{N},n>m$:

$$\begin{aligned} d(x_n,x_m) &=\left|\frac{n}{n+1}-\frac{m}{m+1}\right| \\ &=\left|\frac{n-m}{(n+1)(m+1)}\right| \end{aligned}$$

$$\leq \frac{n}{n(m+1)}$$

$$\leq \frac{1}{m+1},$$

alors $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{m+1} = 0$. *D'ou* $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$, *donc la suite* $\{x_n\}$ *est de Cauchy.*

Définition 1.4 *Un espace metrique* (X, d) *est dit espace metrique complet si toute suite de Cauchy* $\{x_n\}$ *de* (X, d) *converge dans* X, *alors :* $\exists x \in X$ *tel que*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x.$$

Définition 1.5 *[2] (**Espace Normé**) Un espace normé est le pair* $(E, \|.\|)$, *avec* E *un espace vectoriel et* $\|.\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *une application verifiant les troits proprietés suivantes :*

i) a) $\|x\| > 0$ *pour tout* $x \in E$.

b) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|, \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{k}$.

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| \, \|y\|, \forall x, y \in E$.

Définition 1.6 *[2](**Espace de Banach**) : Un espace de Banach est un espace normé Complet.*

Proposition 1.2 *Un espace normé est dit complet si toute suite de Cauchy dans* E *est convergente dans* E.

1.1 Espace b-métrique

Définition 1.7 *[9] Soit* X *un ensemble non vide, soit* $s \geq 1$ *un nombre réel donné, une application* $\sigma : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ *est dite* b*-métrique, si pour tout* $x, y, z \in X$, *les conditions suivantes sont verifiées :*

b$_1$*)* $\sigma(x, y) = 0$ *ssi* $x = y$;

b$_2$*)* $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$;

b$_3$*)* $\sigma(x, y) \leq s[\sigma(x, y) + \sigma(x, y)]$.

le couple (X, σ) *est un espace* b*-métrique avec la condition* $s \geq 1$.

Remarque 1.1 *Il est evident que la classe des espaces* b*-métriques est plus grand que celle des espces métriques, puisque l'espace* b*-métrique est un espace métrique avec* $s = 1$, *mais l'inverce n'est pas vrais.*

Exemple 1.4 *Soit (X,d) un espace métrique et que l'application $\sigma_d : X\times X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par*

$$\sigma_d(x,y) = (d(x,y))^p, \quad \text{pour tout } x,y\in X.$$

avec $p>1$ est un nombre réel fixe. Alors (X,σ_d) est un espace b-métrique avec $s=2^{p-1}$.
En particulier, si $X=\mathbb{R}$, $d(x,y)=|x-y|$ est la distance euclidienne habituelle et

$$\sigma_d(x,y) = (x-y)^2, \quad \text{pour tout } x,y\in X.$$

alors $(\mathbb{R},\sigma_d)$ est un espace b-métrique avec $s=2$. Cependant, $(\mathbb{R},\sigma_d)$ n'est pas un espace métrique sur $\mathbb{R}$ puisque $(b3)$ ne tient pas. En effet,

$$\sigma_d(-2,2) = 16 > 8 = 4+4 = \sigma_d(-2,0)+\sigma_d(0,-2).$$

Définition 1.8 *[9] Soit (X,σ) un espace b-métrique, alors : la suite $\{x_n\}$ dans X est :*
a) Convergente ssi : $\exists x\in X$ tel que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\sigma(x_n,x)=0$ et dans ce cas on écrit :

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x.$$

b) Cauchy ssi : $\lim\limits_{n,m\longrightarrow\infty}\sigma(x_n,x_m)=0$

Remarque 1.2 *Soit (X,σ) est un espac b-metrique, alors :*
a) Toute suite convergente dans (X,σ) est une suite de Cauchy.

$$\sigma(x_n,x_m) \le s(\sigma(x_n,x)+\sigma(x,x_m))$$

b) L'espace b-métrique (X,σ) est dit complet ssi, tout suite de Cauchy dans X est converge dans X.

Définition 1.9 *[3] Un sous-ensemble $A\subseteq X$ est appelé b-borné si $\sup\{\sigma(x,y): x,y\in A\}<\infty$; Si l'ensemble A est b-borné. Alors le nombre $\sup\{\sigma(x,y): x,y\in A\}<\infty$ s'appelle son b-diamètre est noté $\delta_b(A)$.*

Définition 1.10 *[3] Un ensemble $A\subseteq X$ est appelé b-fermé si pour toute suite convergente $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset A$ la convergence :*

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_n = x,$$

implique $x\in A$.

Une fonction b-metrique σ est continue si pour tout $y\in X$ et tout $\varepsilon>0$, il existe $\delta=\delta(y,\varepsilon)>0$ tel que $\sigma(x,z)<\delta$. on a

$$|\sigma(y,x)-\sigma(y,z)|<\varepsilon,$$

On observe que si σ est continue et x_n est b-convergente à x alors $\sigma(y, x_n) \longrightarrow \sigma(y, x)$.
Chaque suite b-convergente dans l'espace b-métrique est une suite b-Cauchy. Si une suite est une b-convergente dans l'espace b-métrique, sa limite est unique. En général, une fonction b-métrique n'est pas continue.

Remarque 1.3 *Dans un espce b-métrique, les affirmations suivantes sont satisfaisantes :*
1) Une suite convergente a une unique limite.
2) Toute suite convergente est une suite de Cauchy.

Remarque 1.4 *On générale l'espace b-metrique est non continu [8].*

Exemple 1.5 *Soit $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\sigma : X \times X \longrightarrow \{0, \infty\}$ est défini par*

$$\sigma(m,n) = \begin{cases} 0, & \textit{si } m = n, \\ \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, & \textit{si l'un des m,n est pair et l'autre est pair ou } \infty, \\ 5, & \textit{si l'un de m,n est impair et } m \neq n, \\ 2, & autrement. \end{cases}$$

Pour tout $m, n, p \in X$

$$\sigma(m,p) \leq \frac{5}{2}\left[\sigma(m,n) + \sigma(n,p)\right].$$

Ainsi (X, σ) est un espace b-métrique avec $s = \dfrac{5}{2}$: Soit $x_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors :

$$\sigma(2n, \infty) = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 \textit{ en tant que } n \longrightarrow \infty.$$

c'est-à-dire, $x_n \longrightarrow \infty$, mais $\sigma(x_n, 1) = 2 \nrightarrow 5 = \sigma(\infty, 1)$ en tant que $n \longrightarrow \infty$.

Lemme 1.1 *Soit (X, σ) un espace b-métrique avec une constante $s \geq 1$ et $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ deux suites telles que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$ dans (X, σ). Alors nous avons :*

$$\frac{1}{s^2}\sigma(x,y) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(x_n, y_n) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \sigma(x_n, y_n) \leq s^2 \sigma(x,z).$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(x_n, y_n) = 0$ si et seulement si $x = y$. De plus pour tout $z \in X$ nous avons

$$\frac{1}{s}\sigma(x,z) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \sigma(x_n, z) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \sigma(x_n, z) \leq s\sigma(x,z).$$

Preuve. *[27] En utilisant l'inégalité triangulaire dans un espace b-métrique,*

$$\begin{aligned} \sigma(x,y) &\leq s\sigma(x,x_n) + s\sigma(x_n,y) \\ &\leq s\sigma(x,x_n) + s^2\sigma(x_n,y_n) + s^2\sigma(y_n,y) \end{aligned}$$

et

$$\sigma\left(x_n, y_n\right) \leq s\sigma\left(x_n, x\right) + s^2\sigma\left(x, y\right) + s^2\sigma\left(y, y_n\right)$$

En prenant la limite inférieure comme $n \longrightarrow \infty$ *dans la première inégalité, on obtient*

$$\frac{1}{s}\sigma\left(x, y\right) \leq \liminf_{n\to\infty} \sigma\left(x_n, y\right).$$

et la limite supérieure comme $n \longrightarrow \infty$ *dans la deuxième inégalité, nous obtenons*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \sigma\left(x_n, y\right) \leq s\sigma\left(x, y\right).$$

alors,

$$\frac{1}{s}\sigma\left(x, y\right) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \sigma\left(x_n, y\right) \leq \lim_{n\to\infty} \sup \sigma\left(x_n, y\right) \leq s\sigma\left(x, y\right).$$

■

Lemme 1.2 *[28]Soit* (X, σ) *un espace* b*-métrique avec une constante* $s \geq 1$ *et* $\{x_n\}$ *une suite dans* X *tel que*

$$\lim \sigma\left(x_n, x_{n+1}\right) = 0. \tag{$*$}$$

Si $\{x_n\}$ *n'est pas une suite de Cauchy dans* (X, σ), *alors il existe* $\varepsilon > 0$ *et deux suites* $\{m(k)\}$ *et* $\{n(k)\}$ *d'entiers positifs tels que les éléments suivants sont vérifiés :*

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq \lim_{k\to\infty} \inf \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq s\varepsilon; \\
\frac{\varepsilon}{s} &\leq \lim_{\to\infty} \inf \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}\right) \leq s^2\varepsilon; \\
\frac{\varepsilon}{s} &\leq \lim_{k\to\infty} \inf \sigma\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\right) \leq s^2\varepsilon; \\
\frac{\varepsilon}{s^2} &\leq \lim_{k\to\infty} \inf \sigma\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) \leq s^3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Lemme 1.3 *[29] Que toutes les conditions du Lemme 2.9 soient satisfaisantes. Alors il existe* $\blacksquare > 0$ *et deux suites* $\{m(k)\}$ *et* $\{n(k)\}$ *d'entiers positifs tels que les éléments suivants sont vérifiés :*

$$\begin{aligned}
\varepsilon^+ &\leq \lim_{k\to\infty} \inf \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq s\varepsilon^+; \\
\frac{\varepsilon}{s} &\leq \lim_{k\to\infty} \inf \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}\right) \leq s^2\varepsilon; \\
\frac{\varepsilon}{s} &\leq \lim_{k\to\infty} \inf \sigma\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)}\right) \leq s^2\varepsilon; \\
\frac{\varepsilon}{s^2} &\leq \lim_{k\to\infty} \inf \sigma\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) \leq \lim_{k\to\infty} \sup \sigma\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) \leq s^3\varepsilon.
\end{aligned}$$

Preuve. *Si* $\{x_n\}$ *n'est pas une suite de Cauchy, alors il existe* $\varepsilon > 0$ *et deux suites* $\{m(k)\}$ *et* $\{n(k)\}$ *d'entiers positifs tels que* $n(k)$ *est le plus petit indice pour lequel* $n(k) > m(k) > k$ *et*

$\sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) > \varepsilon$. *En raison de (2.1), ceci implique que* $\sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\right) \leq \varepsilon$ *pour tout* $k \geq 1$. *En utilisant (b3), on obtient*

$$\begin{aligned} \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) &\leq s\sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)-1}\right) + s\sigma\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right) \\ &\leq s\varepsilon + s\sigma\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right). \end{aligned}$$

Cela conduit à

$$\frac{1}{s}\sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq \varepsilon + \sigma\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right).$$

Puisque $\sigma\left(x_{n(k)-1}, x_{n(k)}\right) > 0$, *alors en prenant limite supérieure comme* $k \to \infty$ *avec* $(*)$, *on obtient*

$$\frac{1}{s}\limsup_{k \longrightarrow \infty} \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq \varepsilon^{+}.$$

ou, de manière équivalente,

$$\limsup_{k \longrightarrow \infty} \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \leq s\varepsilon^{+}. \qquad (**)$$

D'autre part, nous avons

$$\underset{k \longrightarrow \infty}{\frac{1}{k}} + \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) > \frac{1}{k} + \varepsilon, \quad \textit{pour tout } k \geq 1.$$

En prenant la limite inférieure quand $k \to \infty$, *on obtient*

$$\liminf_{k \longrightarrow \infty} \sigma\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \geq \varepsilon^{+}. \qquad (***)$$

À partir de $(**)$ *et* $(***)$, *nous obtenons le premier élément du lemme 2.10. Puisque sont les mêmes que dans le Lemme 2.9, la preuve est terminée.* ■

Proposition 1.3 *[30] Soit* (X, σ) *un espace* b*-métrique avec une constante* $s \geq 1$. *Si* σ *est continue par rapport à une variable, alors* σ *est continue par rapport à l'autre variable.*
Évidemment, on observe à partir du résultat ci-dessus que si σ *n'est pas continue par rapport à une variable, alors* σ *n'est pas continue à l'autre variable.*
Preuve. *Sans perte de généralité ?? , on peut supposer que* σ *est continue par rapport à la première variable. Pour tout* $x \in X$, *si* $\lim_{n \longrightarrow \infty} y_n = y$, *alors on a*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma(x, y_n) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma(y_n, x) = \sigma(y, x) = \sigma(x, y).$$

Cela prouve que σ *est continue par rapport à la seconde variable.* ■

Nous avons donné un example qui illustre certaines propriétés précédentes concernant les espaces b-métrique.

Exemple 1.6 *Soit* $X = [0, \infty)$. *Soit* $\sigma : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ *une application définie par :*

$$\sigma(x, y) = \begin{cases} d(x, y), & xy \neq 0, \\ 4d(x, y), xy = 0, \end{cases}$$

où $d(x, y) = |x - y|$. *Alors les conditions suivantes sont satisfaisantes :*
(1) (X, σ) *est un espace b-méteique complet avec la condition* $s = 4$.
(2) σ *n'est pas une distance dans* X.
(3) σ *n'est pas continue dans chaque variable.*

Preuve. (1) Nous commençons à prouver que (X, σ) est un espace b-métrique avec la constante $s = 4$. Clairement, $(b1)$ et $(b2)$ sont satisfaisantes. Pour $(b3)$, nous prouvons facilement que pour tout $x, y \in X$,

$$d(x, y) \leq \sigma(x, y) \leq 4d(x, y) \tag{$\bullet$}$$

On considér alors les cas suivants.
Cas 1 Supposons que $xy \neq 0$. Alors, en utilisant (1.1), pour tout $z \in X$, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \\ &\leq \sigma(x, z) + \sigma(z, y) \leq 4(d(x, z) + d(z, y)) \end{aligned}$$

Cas 2 Supposons que $xy = 0$. De plus, grâce à $(\bullet)$, nous avons pour tout $z \in X$,

$$\begin{aligned} \sigma(x, y) &= 4d(x, y) \leq 4d(x, z) + 4d(z, y) \\ &\leq 4\sigma(x, z) + \sigma(z, y). \end{aligned}$$

Ensuite, puisque (X, d) est un espace métrique complet, la complétude de (X, σ) découle immédiatement de $(\bullet)$.
(2) En effet, σ n'est pas une métrique sur X puisque nous avons

$$\sigma(0, 2) = 8 > 4 + 1 = \sigma(0, 1) + \sigma(1, 2).$$

(3) Soit $x_n = \frac{1}{n}$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma\left(\frac{1}{n}, 0\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \frac{4}{n} = 0.$$

Alors $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} x_n = 0$ dans (X, σ). D'autre part, on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma(x_n, 1) = 1 \neq 4 = \sigma(0, 1).$$

Ceci, ainsi que la proposition 1.13 , prouve que σ n'est pas continue sur chque variable. ■

Définition 1.11 ***(metric-like spaces)[4]***
Soit X un ensemble non vide, une application $d : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ est dite comme-métrique (like-métrique), si pour tout $x, y, z \in X$, les conditions suivantes sont verifiées :
b_1') $d(x, y) = 0$ alors $x = y$,
b_2') $d(x, y) = d(y, x)$,
b_3') $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.
pour tout $x, y, z \in X$, (X, d) est appelé espace comme-métrique .
Ces espaces ont été étudiés comme une généralisation des espaces métriques partiels dans lesquels l'inégalité triangulaire est de la forme

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) - d(z, z).$$

1.2 Contractions généralisées

Définition 1.12 *Soient (X, d) un espace métrique et $F : X \longrightarrow X$ une application, on dit que F est lipschitzienne ou K-lipschitzienne s'il existe un nombre réel $k \succ 0$ tel que :*

$$\forall x, y \in X : d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y)$$

Le plus petit réel k qui vérifie l'inégalité est appelé la constante de lipschitz .
F est une application contractante s'il existe $k \in [0, 1[$, tel que

$$\forall x, y \in X : d(F(x), F(y)) \leq kd(x, y)$$

Elle est non expansive si $k = 1$. Enfin est dite contractive si pour tout $x, y \in X$ et $x \neq y$, on a

$$d(F(x), F(y)) \prec d(x, y)$$

Remarque 1.5 *Notons que contraction $\Rightarrow$ contractive $\Rightarrow$ non expansive $\Rightarrow$ lipschitzienne , et que toutes ces fonctions sont uniformément continues.*

Un certain nombre d'auteurs ont défini des applications de type contractif sur un espace métrique complet X qui sont des généralisations de la contraction de Banach , et qui ont la propriété que chacune de ces applications a un point fixe unique.

1. Contraction de Banach
2. (Rakotch)[10] Il existe une fonction monotone décroissante $\alpha : (0, \infty) \rightarrow [0, 1)$, tel que, pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$,
$$d(T(x), T(y)) \leq \alpha d(x, y).$$

3. (Edelstien)[11] Pour chaque $x, y \in X$, $x \neq y$,

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq d\left(x, y\right).$$

4. (Kannan)[12] Il existe un nombre α, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, tel que, pour tout $x, y \in X$,

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq \alpha\left[d\left(x, T\left(x\right)\right) + d\left(y, T\left(y\right)\right)\right].$$

5. (Bianchini)[13] Il existe un nombre h, $0 \leq h < 1$, tel que, pour tout $x, y \in X$,

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq h \max\left\{d\left(x, T\left(x\right)\right), d\left(y, T\left(y\right)\right)\right\}.$$

6. Pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \prec \max\left\{d\left(x, T\left(x\right)\right), d\left(y, T\left(y\right)\right)\right\}.$$

7. (Reich)[14] Il existe des nombres non négatifs a, b, c satisfaisant $a + b + c < 1$ de sorte que, pour tout $x, y \in X$,

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq ad\left(x, T\left(x\right)\right) + bd\left(y, T\left(y\right)\right) + cd\left(x, y\right).$$

8. (Reich)[15] Il existe des fonctions monotones décroissantes a, b, c de $(0, \infty)$ à $[0, 1)$ satisfaisant à $a\left(t\right) + b\left(t\right) + c\left(t\right) < 1$ tel que, pour tout $x, y \in X, x \neq y$,

$$\begin{aligned} d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq\ & a\left(d\left(x, y\right)\right) d\left(x, T\left(x\right)\right) \\ & + b\left(d\left(x, y\right)\right) d\left(y, T\left(y\right)\right) + c\left(d\left(x, y\right)\right) d\left(x, y\right). \end{aligned}$$

9. (sehagal)[16] Pour chaque $x, y \in X$, $x \neq y$,

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) < \max\left\{d\left(x, T\left(x\right)\right), d\left(y, T\left(y\right)\right), d\left(x, y\right)\right\}.$$

10. (Chatterjea)[3] Il existe un nombre α, $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$, tel que, pour tout $x, y \in X$,

$$d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq \alpha\left\{d\left(x, T\left(y\right)\right) + d\left(y, T\left(x\right)\right)\right\}.$$

11. (Hardy et Rogers)[17] Il existe des constantes non négatives α_i satisfaisant à $\sum\limits_{i=1}^{5}\alpha_i < 1$ tel que, pour tout $x, y \in X$,

$$\begin{aligned} d\left(T\left(x\right), T\left(y\right)\right) \leq\ & \alpha_1 d\left(x, y\right) + \alpha_2 d\left(x, T\left(x\right)\right) + \alpha_3 d\left(y, T\left(y\right)\right) \\ & + \alpha_4 d\left(x, T\left(y\right)\right) + \alpha_5 d\left(y, T\left(x\right)\right). \end{aligned}$$

1.2.1 Comparaison de quelques contractions généralisées

Théorème 1.1 *(i)* $1 \implies 2 \implies 3 \implies 9, 2 \nRightarrow 1, 3 \nRightarrow 1, 8 \nRightarrow 3.$

(ii) $2 \Rightarrow 8, 8 \nRightarrow 2.$

(iii) $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 9$, *mais pas l'inverse.*

(iv) $4 \Rightarrow 7 \Rightarrow 9 \Rightarrow 10, 7 \nRightarrow 4.$

(v) $1 \Rightarrow 11, 4 \Rightarrow 11, 9 \Rightarrow 11$, *mais pas l'inverse.*

Preuve. *La plupart des implications directes sont évidentes à partir des définitions. Pour les implications inverses on va démontrer quelques unes*

(i) Pour montrer que $2 \nRightarrow 1$, *on défint* $\alpha : (0, \infty) \longrightarrow [0,1)$ *par* $\alpha(d) = \frac{1}{d+1}$. *Soit maintenant* $T(x) = \frac{1}{x+1}$ *avec* $0 \leq x \leq 1$, *alors* $T : [0,1] \to [0,1]$ *a un point fixe en* $x = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$. *D'autre part, pour tout* a *fixe, tel que* $0 < a < 1$, *en choisissant* $y \leq \frac{1}{a} - 1$ *et* $y \in \left(0, \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}\right)$, *on obtient*

$$d(T(0), T(y)) = \frac{y}{y+1} > ay = d(0, y),$$

ce qui ne verifie pas (1).

Par contre, pour tous $0 \leq x < y \leq 1$,

$$d(T(x), T(y)) = \frac{y-x}{(x+1)+(y+1)} \leq \left(\frac{1}{(y-x)+1}\right)(y-x) = \alpha(d)\, d(x,y),$$

et sarisfait (2).

Pour montrer que $9 \nRightarrow 6$, *Soit* V *l'intervalle fermé* $[0,5]$ *muni de la distance usuelle habitue, et soit* $T : V \to V$ *une application définie par*

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & 0 \leq x \leq 4, \\ -2x + 10 & 4 < x \leq 5. \end{cases}$$

■

– ***Preuve.*** *Alors* T *est évidemment continue. D'après [l'exemple 2 de [5]],* T *verifie (9). Depuis* $|T(4) - T(5)| > 1$, T *n'est pas une application contractive.*
  (ii) Soit $T(x) = \dfrac{x}{3}$, $0 \leq x < 1$, $T(1) = \dfrac{1}{2}$. *Alors* T *satisfait à (9) mais pas à (2).* ■

1.3 La $F-$contraction et théorème de point fixe.

Dans cette section nous allons utiliser la notion de la $F-$contraction pour démontrer un théorème de point fixe publié par Wardowski [6] et qui généralise le principe de contraction de Banach d'une manière différente de celle des résultats connus dans la littérature.

Définition 1.13 *[6] Soit (X,d) un espace métrique. Une auto-application $T : X \to X$ est appelée F-contratante (F-contraction) s'il existe $\tau > 0$ and $F \in \mathcal{F}$ tels que*

$$\forall x,y \in X : (d(Tx,Ty) > 0 \Longrightarrow \tau + F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y))) . \tag{1.1}$$

Oû $\mathcal{F}$ est l'ensemble de toutes les fonctions $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivante :
(F1) F est strictement croissante , i.e. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha < \beta$, $F(\alpha) < F(\beta)$;
(F2) Pour toute suite $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombre positifs $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} F(\alpha_n) = -\infty,$$

(F3) Il existe un $k \in (0,1)$ tel que

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0.$$

Lorsque nous considérons différents types d'applications F dans **(1,1)**, nous obtenons différents type de contractions, dont certains sont des types connus dans la littérature.

Exemple 1.7 *Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ donnée par la formule $F(\alpha) = \ln \alpha$.*
Pour toute application $T : X \to X$, on a $d(Tx,Ty) > 0$

$$\begin{aligned} F(d(Tx,Ty)) &\leq -\tau + F(d(x,y)) \\ \ln(d(Tx,Ty)) &\leq -\tau + \ln(d(x,y)) \\ d(Tx,Ty) &\leq e^{-\tau} d(x,y) \end{aligned} \tag{1.2}$$

pour tout $x,y \in X$ et $Tx \neq Ty$.
Nous avons que pour $x,y \in X$ tel que $Tx = Ty$ l'inégalité $d(Tx,Ty) \leq e^{-\tau} d(x,y)$ est également valable, c'est-à-dire que T est une contraction de Banach

Exemple 1.8 *Si $F(\alpha) = \ln \alpha + \alpha$, $\alpha > 0$ alors F satisfaisant (F1), (F2) et (F3) et la condition $(\mathbf{1},\mathbf{1})$ est de la forme :*

$$\frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)} e^{\sigma(Tx,Ty) - \sigma(x,y)} \leq e^{-\tau} \tag{1.3}$$

en effet :

$$\begin{aligned} \tau + F(d(Tx,Ty)) &\leq F(d(x,y)) \\ \ln(d(Tx,Ty)) + d(Tx,Ty) &\leq -\tau + \ln(d(x,y)) + d(x,y) \\ \ln(d(Tx,Ty)) + d(Tx,Ty) - \ln(d(x,y)) - d(x,y) &\leq -\tau \\ \ln \frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)} + d(Tx,Ty) - d(x,y) &\leq -\tau \\ \frac{d(Tx,Ty)}{d(x,y)} e^{d(Tx,Ty) - d(x,y)} &\leq e^{-\tau}. \end{aligned}$$

Nous présentons maintenant un exemple d'un espace X et d'une application T pour montrer que le Théorème 1 dans [1] améliore bien le résultat de Rakotch [10]. En effet, il ne peut y avoir de fonction a, soit décroissante, soit croissante, avec $\alpha(t) \leq 1$ pour $t > 0$, et tel que

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))\, d(x, y),$$

Dans l'exemple suivant, nous avons obtenu un cas particulier de contraction non linéaire. du type $d(Tx, Ty) \leq \alpha(d(x, y))d(x, y)$ présentée par Rakotch [10].

Exemple 1.9 *On considére* $F(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{\alpha}}$, *alors sa condition contractive est de la forme :*

$$d(Tx, Ty) \leq \frac{1}{\left(1 + \tau\sqrt{d(x, y)}\right)^2} d(x, y).$$

En effet

$$\begin{aligned} \tau + \frac{-1}{\sqrt{d(Tx, Ty)}} &\leq \frac{-1}{\sqrt{d(Tx, Ty)}} \\ \frac{-1}{\sqrt{d(Tx, Ty)}} &\leq -\tau + \frac{-1}{\sqrt{d(Tx, Ty)}} \\ d(Tx, Ty) &\leq \frac{1}{\left(1 + \tau\sqrt{d(x, y)}\right)^2} d(x, y), \quad \text{pour tout } x, y \in X\ Tx \neq Ty. \end{aligned}$$

Exemple 1.10 *Soit* $F(\alpha) = \ln(\alpha^2 + \alpha)$

Ici, nous avons obtenu un cas particulier de contraction non linéaire Évidemment, F *satisfait (F1)-(F3) et pour la* F*-contraction de* T*, la condition suivante s'applique*

$$\frac{d(Tx, Ty)(d(Tx, Ty) + 1)}{d(x, y)(d(x, y) + 1)} \leq e^{-\tau}, \quad \text{pour tout } x, y \in X,\ Tx \neq Ty.$$

Remarque 1.6 *De (F1) et (1.1), il est facile de conclure que chaque* F*-contraction* T *est une application contractive, i.e.*

$$d(Tx, Ty) < d(x, y) \text{ pour tout } x, y \in X,\ Tx \neq Ty.$$

Ainsi, chaque F*-contraction est une application continue.*

Remarque 1.7 *[6] Soit* F_1, F_2 *deux application verifient (F1),(F2) et (F3). Si* $F_1(\alpha) \leq F_2(\alpha)$ *pour tout* $\alpha > 0$ *et soit l'application* $G = F_2 - F_1$ *est croissante alors toute* F_1*-contaction* T *est* F_2*-conraction.*

En effet, à partir de la remarque précédente on a $G(d(Tx, Ty)) \leq G(d(x, y))$ *pour tout* $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$.

Donc, pour tout $x, y \in X$, $Tx \neq Ty$ on obtient

$$\begin{aligned}\tau + F_2(d(Tx,Ty)) &= \tau + F_1(d(Tx,Ty)) + G(d(Tx,Ty)) \\ &\leq F_1(d(x,y)) + G(d(x,y)) \\ &= F_2(d(x,y))\end{aligned}$$

Théorème 1.2 *[6] Soient (X, d) un espace metrique complet et $T : X \to X$ une F-contraction. Alors T admet un unique point fixe $x^* \in X$ et pour tout $x_0 \in X$, la suite $\{T^n x_0\}$ est convergente vers x^*.*

Preuve. *Observons tout d'abord que T a au plus un point fixe, si $x_1^*, x_2^* \in X$, $Tx_1^* = x_1^* \neq x_2^* = Tx_2^*$, alors nous obtenons*

$$\begin{aligned}\tau + F(d(Tx_1^*, Tx_2^*)) &\leq F(d(x_1^*, x_2^*)) \\ \tau &\leq F(d(x_1^*, x_2^*)) - F(d(Tx_1^*, Tx_2^*)) = 0,\end{aligned}$$

Donc, $\tau \leq 0$, qui est une contradiction.
Afin de prouver que T a un point fixe, soit $x_0 \in X$ un point arbitraire et fixe. Nous définissons une suite $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, telle que $x_{n+1} = Tx_n$ pour tout $n = 0, 1, 2....$, i.e. $x_n = T^n x_0$, $n = 0, 1..$ On pose $\gamma_n = d(x_{n+1}, x_n)$, $n = 0, 1....$.
S'il existe $n_{0\in\mathbb{N}}$ pour lequel $x_{n_0+1} = x_{n_0}$, alors $Tx_{n_0} = x_{n_0}$ et la preuve est terminée.
*Supposons maintenant que $x_{n+1} \neq x_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\gamma_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en utilisant **(1.1)**, ce qui suit est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$F(\gamma_n) \leq F(\gamma_{n-1}) - \tau \leq F(\gamma_{n-2}) - 2\tau \leq ... \leq F(\gamma_0) - n\tau. \tag{1.4}$$

*à partir de **(1.4)**, on obtien $\lim_{n\to\infty} F(\gamma_n) = -\infty$ qui avec (F2) donne*

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n = 0. \tag{1.5}$$

à partir de (F3) il existe $k \in (0, 1)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \gamma_n^k F(\gamma_n) = 0. \tag{1.6}$$

D'après (1.4). on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\gamma_n^k F(\gamma_n) - \gamma_n^k F(\gamma_0) \leq \gamma_n^k (F(\gamma_n) - n\tau) - \gamma_n^k F(\gamma_n) = -\gamma_n^k n\tau \leq 0 \tag{1.7}$$

quand $n \to \infty$ dans $(\mathbf{1.7})$, en utilisant $(\mathbf{1.5})$ et $(\mathbf{1.6})$, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma_n^k = 0 \tag{1.8}$$

Or, on observe à partir de $(\mathbf{1.8})$*, il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$n\gamma_n^k \leq 1$$

en effet :
On a

$$\lim_{n\to\infty} n\gamma_n^k = 0$$

Donc,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_1 \Longrightarrow \left|n\gamma_n^k - 0\right| < \varepsilon$$

suposons que $\varepsilon = 1$ *alors,*

$$\left|n\gamma_n^k\right| < 1$$

pour tout $n > n_1$*. Nous avons en suite*

$$\gamma_n \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{k}}},\ \textit{pour tout}\ n > n_1. \tag{1.9}$$

Afin de montrer que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy, on cosidére que* $m, n \in \mathbb{N}$ *tel que* $m > n > n_1$*.*
De la définition de la distance et $(\mathbf{1.9})$ *on a*

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + \ldots + d(x_{m-2}, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq \gamma_n + \ldots + \gamma_{m-2} + \gamma_{m-1} \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} \gamma_i \\ &< \sum_{i=n}^{\infty} \gamma_i \\ &\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}} \end{aligned}$$

De ce qui précède et de la convergence de la série $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{\frac{1}{k}}}$ *on déduit que,* $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Cauchy.*
De la complétude de X *il existe* $x^* \in X$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$*. Finalement, la continuité de* T *donne*

$$d(Tx^*, x^*) = \lim_{n\to\infty} d(Tx_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(Tx_{n+1}, x_n) = 0,$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Chapitre 2

La (ϕ, F)-contraction et théorème de point fixe

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de point fixe de certaines contractions de type (ϕ, F) dans le cadre d'un espace métrique. Comme application du théorème, nous considérons l'existence et l'unicité de solution de l'équation intégrale non linéaire de Fredholm de deuxième espèce sur des échelles de temps. Nous présentons également un exemple particulier qui démontre les résultats théoriques.

Définition 2.1 *[4] Soit (X, d) un espace métrique, $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ et $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$.*

1. *F est strictement croissante, i.e., $x < y$ implique $F(x) < F(y)$ pour tout $x, y \in (0, \infty)$.*
2. *$\lim F(\alpha) = -\infty$.*
3. *$\liminf \phi(\alpha) > 0$ pour tout $s > 0$.*

Une application $T : X \to X$ est appelé un (ϕ, F)-contraction dans (X, d) si

$$\phi(d(x, y)) + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)), \tag{2.1}$$

pour tout $x, y \in X$ Pour qui $Tx \neq Ty$.

2.1 Échelle du temps et équation intégrale de Fredholm

Dans cette section, nous décrivons brièvement quelques notions de base sur les échelles de temps ainsi que les équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce sur les échelles de temps. La raison pour laquelle nous étudions les équations intégrales sur les échelles de temps est la nature unificatrice des échelles de temps, c'est-à-dire le fait qu'elles peuvent représenter à la fois des espaces continus et discrets.

1. Une échelle de temps (time scale) est un sous-ensemble fermé arbitraire non vide des nombres réels. Une échelle de temps est généralement désignée par le symbole $\mathbb{T}$.
2. Pour $t \in \mathbb{T}$ l'opérateur de saut vers l'avant (forward jump) $\delta : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est définie par
$$\delta(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}.$$
3. Pour $t \in \mathbb{T}$ l'opérateur de saut arrière (backward jump) $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ est définie par
$$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}.$$
4. La fonction granuleuse (graininess function) $\mu : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ est définie par
$$\mu(t) = \delta(t) - t.$$
5. Nous fixons
$$\inf \emptyset = \sup \mathbb{T}, \quad \sup \emptyset = \inf \mathbb{T}. \tag{2.2}$$

Définition 2.2 *[4]Soit $\mathbb{T}$ un échelle de temps avec l'opérateur de saut vers l'avant et l'opérateur de saut arrière δ et ρ, respectivement. un point $t \in \mathbb{T}$ est appelé*

1. Densité à gauche si $\rho(t) = t$ et densité à droite si $\delta(t) = t$.
2. Diffusion à gauche $\rho(t) < t$ et diffusion à droite si $\delta(t) > t$.
3. Isolé si t est à la fois diffusé à droite et à gauche.

Nous donnons ci-dessous quelques exemples d'échelles du temps.

Exemple 2.1 *1.* $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, *alors on a pour tout* $t \in \mathbb{R}$
$$\delta(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf(t, \infty) = t$$
et de même $\rho(t) = t$. *Par conséquent, tout point* $t \in \mathbb{R}$ *est dense. La fonction de granularité* μ *s'avère être*
$$\mu(t) \equiv 0.$$

2. $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ *est une échelle de temps.*
$$\delta(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\} = \inf\{t+1, t+2, t+3, ...\} = t+1.$$
et de même $\rho(t) = t - 1$. *Par conséquent, tout point* $t \in \mathbb{R}$ *est dense. La fonction de granularité* μ *s'avère être*
$$\mu(t) \equiv 1.$$

3. *Soit* $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. *L'ensemble* $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0} = \{1, 2, 4...\}$ *est une échelle de temps. Sur cette échelle de temps,* $\sigma(t) = 2t$ *et* $\mu(t) = t$.

Définition 2.3 *[4]Une équation intégrale de Fredholm du second type est définie comme*

$$x(t) = u(t) + \int F(s, t, \sigma(s), \sigma(t), x(s)) \Delta s, \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T}. \tag{2.3}$$

ici $u : [a, b]_{\mathbb{T}} \to \mathbb{R}$ *et* $F : ([a, b]_{\mathbb{T}})^4 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est donné les fonctions,* λ *est un nombre réel et* x *est la fonction inconnue. Si* $u = 0$ *pour tout* $t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ *, alors l'équation.* $(\mathbf{A})$ *devenir*

$$x(t) = \lambda \int F(s, t, \sigma(s), \sigma(t), x(s)) \Delta s, \quad t \in [a, b]_{\mathbb{T}}. \tag{2.4}$$

et est appelée l'équation intégrale homogène de Fredholm du second type.
Nous discuterons des conditions d'existence et d'unicité de solution de l'équation intégrale (A) *suivants.*

2.2 Théorème de point fixe de (Φ, F)-contractante dans un espace comme-métrique

Dans cette section, on considére les contractions de type (Φ, F) donnée dans la défintion 2.1 sur l'éspace comme-métrique. Soientt (X, σ) un espace comme-métrique, $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ une fonction de l'ensemble $\mathcal{F}$ et $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ une fonction qui vérifie la condition 3 de définition 4 (article). Comme dans le cas d'espace métrique usuel. on appelle l'application $T : X \to X$ une (ϕ, F)-contraction dans l'espace comme-métrique (X, σ) si

$$\phi(\sigma(x, y)) + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y)), \tag{2.5}$$

pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$.
Notons qu'ici nous utilisons la forme originle de la fonction F donnée dans la définition 1.14, au lieu de celui modifié, la définition 4 dans [4]. Ci-dessous, nous énonçons et prouvons le théorème suivant.

Théorème 2.1 *[4] Soit* (X, d) *un espace comme-métrique complet et soit* $T : X \to X$ *une application* (ϕ, F)*-contractante continue, avec la fonction* $F \in \mathcal{F}$ *et* ϕ *donnée. Alors* T *admet un unique poit fixe dans* X.
Preuve. *La preuve est basée sur la technique standard employant la séquence itérative* $\{x_n\}$ *construite comme* $x_n = T^n x_0$ *pour* $x_0 \in X$ *arbitraire. Supposons que* $Tx_{n-1} = Tx_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, et donc,*

$\rho(Tx_n - 1, Tx_n) > 0$. *Alors la suite* $\{r_n\}$ *définie par* $r_n = \rho(x_n, x_{n+1})$ *est positive pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *L'inégalité de contraction* (2.5) *avec* $x = x_{n-1}$ *et* $y = x_n$ *prend la forme*

$$\phi(\rho(x_{n-1}, x_n)) + F(\rho(Tx_{n-1}, Tx_n)) \leq F(\rho(x_{n-1}, x_n)).$$

et implique

$$F(r_n) \leq F(r_{n-1}) - \phi(r_n) \leq F(r_{n-1}). \tag{2.6}$$

Puisque F *est croissante, alors*$r_n \geq r_{n-1}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *c'est-à-dire que la suite positive* $\{r_n\}$ *est décroissante. Par conséquent, elle converge vers une limite* $r \geq 0$. *L'inégalité* (2.6) *implique .*

$$\begin{aligned} F(r_n) &\leq F(r_{n-1}) - \phi(r_n) \\ &\leq F(r_{n-2}) - \phi(r_{n-2}) - \phi(r_{n-1}) \\ &\leq \cdots \\ &\leq F(r_0) - \sum_{i=0}^{n-1} \phi(r_i). \end{aligned} \tag{2.7}$$

En raison du fait que $\liminf\limits_{\alpha \longrightarrow s^+} \phi(\alpha) > 0$, *on a* $\liminf\limits_{n \longrightarrow \infty} \phi(r_n) > 0$. *Alors, il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et* $a > 0$ *tels que pour tout* $n \geq n_0$, $\phi(r_n) > a$. *Par conséquent, l'inégalité* $(2,7)$ *donne*

$$\begin{aligned} F(r_n) &\leq F(r_0) - \sum_{i=0}^{n_0-1} \phi(r_i) - \sum_{i=n_0}^{n-1} \phi(r_i) \\ &\leq F(r_0) - \sum_{i=0}^{n-1} a \\ &= F(r_0) - (n - n_0)a, \end{aligned} \tag{2.8}$$

pour tout $n \geq n_0$. *En prenant la limite comme* $n \longrightarrow \infty$ *dans* (2.8), *nous concluons*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} F(r_n) \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} [F(r_0) - (n - n_0)a], \tag{2.9}$$

c'est-à-dire $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} F(r_n) = -\infty$, *et donc, la condition* 2 *de la définition* 1.14 *implique*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} r_n = 0.$$

Nous allons prouver ensuite que $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy dans l'espace like-métrique* (X, ρ). *Notons que la condition* 3. *de la définition* 1.14 *implique qu'il existe* $k \in (0, 1)$ *tel que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (r_n)^k F(r_n) = 0.$$

D'après l'inégalité (2.8), nous obtenons

$$(r_n)^k F(r_n) \leq (r_n)^k [F(r_0) - (n - n_0)a],$$

et donc,

$$(r_n)^k [F(r_n) - F(r_0)] \leq (r_n)^k (n - n_0) a \leq 0.$$

En prenant la limite de cette inégalité comme $n \longrightarrow \infty$ nous concluons,

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} (r_n)^k (n - n_0) a = 0.$$

Alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq n_1$,

$$r_n \leq \frac{1}{[(n - n_0) a]^{\frac{1}{k}}}.$$

Par conséquent, pour $m > n \geq \max\{n_0, n_1\}$ on a

$$\begin{aligned}
\rho(x_n, x_m) &\leq \rho(x_n, x_{n+1}) + \rho(x_n + 1, x_{n+2}) + \cdots + \rho(x_{m-1}, x_m) \\
&= r_n + r_{n+1} + \cdots + r_{m-1} \\
&= \sum_{i=n}^{m-1} r_i \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} r_i \\
&\leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{[(i - n_0) a]^{\frac{1}{k}}}
\end{aligned}$$

Puisque $0 < k < 1$, alors la série infinie du côté droit de l'inégalité est convergente et en prenant la limite en $n \longrightarrow \infty$ des deux côtés, on obtient

$$\lim \rho(x_n, x_m) = 0.$$

En conséquence, nous concluons que {xn} est une suite de $0 - \rho$Cauchy et puisque (X, ρ) est un espace $0 - \rho$-comme-métrique complet, elle converge vers un certain $x \in X$ avec $\rho(x, x) = 0$.
Si T est continu, alors

$$0 = \lim_{n \longrightarrow \infty} \rho(x_n, x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \rho(Tx_n, Tx) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \rho(x_{n+1}, Tx) = \rho(x, Tx),$$

ce qui implique que $x = Tx$.
Pour prouver l'unicité, nous supposons que x et y sont deux points fixes différents de T, c'est-à-dire $x \neq y$, $x = Tx$ et $y = Ty$. Alors, $Tx \neq Ty$ et l'inégalité (2.5) implique

$$\phi(\rho(x, y)) + F(\rho(Tx, Ty)) = \phi(\rho(x, y)) + F(\rho(x, y)) \leq F(\rho(x, y)),$$

ce qui est une contradiction puisque $\phi(\rho(x, y)) > 0$. Nous concluons que $x = y$, ce qui complete la preuve. ■

2.3 Résolution de l'équation intégrale de Fredholm sur l'échelle de temps

Soit $\mathbb{T}$ un time scale avec l'opérateur Delta derivative Δ et l'opérateur forward jump δ. Soit $a, b \in \mathbb{T}$. Considérons l'équation intégrale de Fredholm non linéaire homogéne du second type, donnée comme

$$x(t) = \lambda \int_a^b K(s, t, \sigma(s), \sigma(t), x(s)) \Delta s, \qquad t \in [a, b]_{\mathbb{T}} = [a, b] \cap \mathbb{T}, \tag{2.10}$$

ou $K : ([a, b]_{\mathbb{T}})^4 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, est une fonction donnée, $x(t)$ est une fonction inconnue, $\lambda \in \mathbb{R}$ est un paramétre. La fonction K s'appelle le noyau de l'équation intégrale.

Soit $X = C([a, b]_{\mathbb{T}})$ l'éspace de tout les fonctions réel continues $x : [a, b]_{\mathbb{T}} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est noté de l'éspace like- metrique d donné comme

$$d(x, y) = \sup_{t \in [a,b]_{\mathbf{T}}} (|x(t)| + |y(t)|),$$

pour tout $x, y \in X$. Par l'exemple 1, l'éspace (X, d) est $0 - d$ complet.

dans [5], l'équation intégrale a une solution continue unique $x(t)$ si la fonction noyau K dans (2.10) est bornée et satisfait une condition de Lipschitz.

Théorème 2.2 *[4] Considérons l'équation intégrale de Fredholm* (2.6) *. Supposons que le noyau est* Δ*-intégrable dans* $[a, b]_{\mathbb{T}}$ *et il satisfait la condition*

$$|K(s, t, \sigma(s), \sigma(t), x(s))| + |K(s, t, \sigma(s), \sigma(t), x(s))| \leq He^{\frac{-1}{(|x(s)|+|y(s)|+1)}} (|x(s)| + |y(s)|) \tag{2.11}$$

pour tout $s, t \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ *et une certaine constante réel positive* H*. Alors l'equation* (2.6) *admet un unique solution* $x \in [a, b]_{\mathbb{T}}$ *pour une certaine constante* λ *dépondant des constantes* a, b *et* H*.Considérons l'équation intégrale de Fredholm* (2.6)*supposons que le*

Preuve. *On définie l'opérateur* T *comme suit :*

$$Tx(t) = \lambda \int_a^b K(s, t, \sigma(s), \sigma(t), x(s)) \Delta s. \tag{2.12}$$

Puisque K est delta intégrable, ensuite,clairement T *est une auto-application sur* $C\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$*, c'est* $T : C\left[a,b\right]_{\mathbb{T}} \longrightarrow C\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$.

On trouvera la condition sur λ *sous laquelle l'opérateur a un point fixe unique qui sera la solution de l'équation intégrale* (2.6) .

Soit $F : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\phi : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ *est définir par* $F(t) = \ln t$ *et* $\phi(t) = \frac{1}{t+1}$*, respectivement. Clairement, la fonction* F *est de la famille* $\mathcal{F}$ *et la fonction* ϕ *satisfait*

$$\lim_{t\longrightarrow s^{+}} \inf \phi(t) > 0 \quad \textit{pour tout } s > 0.$$

Nous devons montrer que l'opérateur T *est une application* (ϕ, F)*-contractante continue pour tout* $x, y \in C\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$ *pour qui* $Tx \neq Ty$*. Observez que, par la condition* (2.7)*, pour* $x, y \in C\left[a,b\right]_{\mathbb{T}}$ *, nous avons*

$$\begin{aligned}
\left|Tx(t)\right| + \left|Ty(t)\right| &= \left|\lambda\right| \int_a^b \left(\left|K\left(s,t,\delta(s),\delta(t),x(s)\right)\right| + \left|K\left(s,t,\delta(s),\delta(t),y(s)\right)\right|\right)\Delta s \\
&\leq \left|\lambda\right| \int_a^b H e^{\frac{-1}{(|x(s)|+|y(s)|+1)}} \left(|x(s)| + |y(s)|\right)\Delta s \\
&= \left|\lambda\right| H \int_a^b e^{\frac{-1}{(|x(s)|+|y(s)|+1)}} \left(|x(s)| + |y(s)|\right)\Delta s
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
&\sup_{[a,b]_{\mathbb{T}}} \left|Tx(t)\right| + \left|Ty(t)\right| \\
\leq\ & \left|\lambda\right| H (b-a) \sup_{[a,b]_{\mathbb{T}}} e^{\frac{-1}{(|x(t)|+|y(t)|+1)}} \left(|x(t)| + |y(t)|\right) \\
\leq\ & \left|\lambda\right| H (b-a) \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} e^{\frac{-1}{(|x(t)|+|y(t)|+1)}} \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(|x(t)| + |y(t)|\right) \\
\leq\ & \left|\lambda\right| H (b-a) e^{-\sup\limits_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \frac{1}{(|x(t)|+|y(t)|+1)}} \sup_{t\in[a,b]_{\mathbb{T}}} \left(|x(t)| + |y(t)|\right).
\end{aligned}$$

Ainsi nous avons

$$\sigma(Tx, Ty) \leq \left|\lambda\right| H (b-a) e^{\frac{-1}{(\sigma(x,y)+1)}} \sigma(x,y). \tag{2.13}$$

Puisque par définition de la distance σ *on a* $\sigma(Tx,Ty) > 0$ *et* $\sigma(x,y) > 0$ *pour tout* $x \neq y$*, alors* *nous pouvons prendre le logarithme naturel des deux cotés et obtenir dans*

$$\begin{aligned}\ln \sigma(Tx,Ty) &\leq \ln\left(|\lambda| H(b-a) e^{\frac{-1}{(\sigma(x,y)+1)}} \sigma(x,y)\right) \\ &= -\frac{1}{\sigma(x,y)+1} + \ln(|\lambda| H(b-a)\sigma(x,y)) \\ &\leq -\frac{1}{\sigma(x,y)+1} + \ln(\sigma(x,y)),\end{aligned}$$

à condition que $|\lambda| H(b-a) \leq 1$ *la derniére inégalité implique que*

$$\phi(\sigma(x,y)) + F(\sigma(Tx,Ty)) \leq F(\sigma(x,y)) \tag{2.14}$$

c'est, T *est* (ϕ, F)*-contraction. Par le Théorème* 2.1 *nous conclusons que* T *a un point fixe unique pour* $|\lambda| \leq \frac{1}{H(b-a)}$, *alors l'équation* (2.6) *admet une unique solution.* ∎

L'exemple suivant illustre le résultat du Théorème 2.2.

Exemple 2.2 *Soit* $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}_0} = \{1,2,4,...\}$. *Considérez l'équation*

$$x(t) = \lambda \int_1^8 \frac{x(s)}{4+(x(s))^2} \Delta s, \quad t \in [1,8]_{\mathbf{T}}. \tag{2.15}$$

ici, $K(s,t,\delta(s),\delta(t),x) = \frac{x(s)}{4+(x(s))^2}$ *et on a*

$$\begin{aligned}& |K(s,t,\delta(s),\delta(t),x)| + |K(s,t,\delta(s),\delta(t),y)| \\ =& \left|\frac{x(s)}{4+(x(s))^2}\right| + \left|\frac{y(s)}{4+(y(s))^2}\right| \\ \leq& \frac{1}{4}(|x(s)| + |y(s)|) \\ =& e^{-1/(1+|x(s)|+|y(s)|)}(|x(s)| + |y(s)|)\end{aligned}$$

par conséquent, la condition (2.7) *est vraie avec* $H = 1$. *Par le théorème 2.2 l'equation intégrale donnée a une solution unique pour* $|\lambda| H(8-1) \leq 1$, *c'est* $|\lambda| \leq \frac{1}{7}$. *Nous concluons que l'equation intégrale donnée avait une solution unique qui est la solution triviale* $x(t) \equiv 0$.
En fait, on peut montrer que l'équation n'a que la solution triviale $x(t) \equiv 0$ *pour* $|\lambda| \leq \frac{1}{7}$ *en utilisant le calcul direct. Soit*

$$\alpha = \int_1^8 \frac{x(s)}{4+(x(s))^2} \Delta s$$

ensuite nous avons $x(t) = \lambda\alpha$, *et donc*

$$\begin{aligned}\alpha &= \int_1^8 \frac{\lambda\alpha}{4+(\lambda\alpha)^2} \Delta s \\ &= 7\frac{\lambda\alpha}{4+(\lambda\alpha)^2}.\end{aligned}$$

l'équation peut s'écrire

$$\alpha^3\lambda^2 - (7\lambda - 4)\,\alpha = 0,$$

c'est, pour $\lambda < \frac{4}{7}$ *il n'y qu'une seule vraie solution qui est* $\alpha = 0$. *Par conséquent, par calcul direct, nous obtenons que cette équation a une solution unique lorsque* $\lambda < \frac{4}{7}$.

Chapitre 3

Nouveaux resultats de point fixe dans un espace b-métrique via la F-contraction de type Hardy-Rogers.

La condition (F_2) peut être remplacée par une condition équivalente et plus simple (noté (F_2') : $\inf F = -\infty$).

3.1 F-contractions de type Hardy–Rogers.

Théorème 3.1 *[18]Soit (X, d) un espace métrique complet. Supposons qu'il existe $\tau > 0$ et $F \in \mathcal{F}$ tel que $T : X \to X$ satisfait à*

$$d(Tx, Ty) > 0 \implies \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F\left(B_T^d(x, y)\right),$$

où

$$B_T^d(x, y) = ad(x, y) + bd(x, Tx) + cd(y, Ty) + e[d(x, Ty) + d(y, Tx)]$$

avec $a, b, c, e \geq 0$ et $a + b + c + 2e < 1$. Si T ou F est continue, alors
(1) T admet un unique point fixe $x^* \in X$.
(2) pour tout $x \in X$, la suite $\{T^n x\}$ est convergent vers x^*.

Définition 3.1 *[19]Soit (X, d) un espace métrique. Un auto-application T sur X est appelé une F-contraction de type Hardy-Rogers s'il existe $F \in \mathcal{F}$ tel que, pour tout $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) > 0 \implies \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F\left(Q_T^d(x, y)\right),$$

où

$$Q_T^d(x,y) = \alpha d(x,y) + \beta d(x,Tx) + \gamma d(y,Ty) + \delta d(x,Ty) + L(y,Tx)$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, L \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1$ *et* $\gamma \neq 1$.

Théorème 3.2 *(voir [12,théorème 3.1])Soit* (X, σ) *un espace métrique et soit* $T : X \longrightarrow X$ *une application de type Hardy-Rogers. Alors* T *admet un point fixe. De plus, si* $\alpha + \delta + L \leq 1$, *alors le point fixe de* T *est unique.*

Si l'on choisit opportunément la fonction F, on obtient alors certaines classes de contractions connues dans la littérature, et c'est ce que montre l'exemple suivant.

Notation

$\mathcal{S}$ la famille de tout fonction $\tau : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ satisfaisant la propieté suivant :

$$\liminf_{t \longrightarrow \eta^+} \tau(t) > 0, \quad \text{pour tout } \eta \geq 0.$$

On considaore aussi la condition suivante :

(F_3') : F est continu sur $(0,\infty)$,

$\mathfrak{F}$ l'ensemble de tout fonctions $F : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions (F_1) , (F_2) et (F_3') ,

$\mathbb{F}$ l'ensemble de tout fonctions $F : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions (F_1) , (F_2) .

Dans la définition suivante, nous généralisons la notion de F-contraction de type Hardy-Rogers.

Définition 3.2 *[20]Soit* (X, d) *un espace métrique complet. Une auto-application* T *dans* X *est appelé une F-contraction de type Hardy-Rogers s'il existe* $F \in \mathcal{F}$ *tel que pour tout* $x, y \in X$,

$$d(Tx,Ty) > 0 \Longrightarrow \tau(d(x,y)) + F(d(Tx,Ty)) \leq F\left(Q_T^d(x,y)\right), \tag{H.R}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, L \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1$, *et* $\alpha + \delta + L \leq 1$.

Exemple 3.1 *[20] Soit* (X, d) *un espace métrique et* $T : X \longrightarrow X$ *une application F-contraction de type Hardy-Rogers. Supposons que* T *satisfasse* $(H.R)$ *avec* $\beta = \gamma = \delta = L = 0$ *et* $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *donné par* $F(x) = x$. F *satisfait à* $(F_1), (F_2)$. *De*

$$\tau(d(x,y)) + F(d(Tx,Ty)) \leq F(d(x,y)) \quad \text{pour tout } x, y \in X,\ Tx \neq Ty,$$

on obtien

$$d(Tx,Ty) \leq e^{-\tau(d(x,y))} d(x,y) \quad \text{pour tout } x, y \in X,\ Tx \neq Ty.$$

Puisque l'inégalité est également valable si $Tx = Ty$, *nous déduisons que toute contraction est une contraction F de type Hardy-Rogers.*

Remarque 3.1 *La fonction $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ définie parv $F(t) = \frac{-1}{t}$ pour tout t satisfait les conditions $(F1)$ et $(F2)$, mais elle ne satisfait pas la condition $(F3)$ et donc $F \in \mathfrak{F}$, mais $F \notin \mathcal{F}$.*

Théorème 3.3 *[20] Soit (X, d) un espace métrique complet. Si T est une application F-contractante de type Hardy-Rogers et F est continue (i.e., $F \in \mathfrak{F}$), alors T admet un unique point fixe.*

Remarque 3.2 *Si (F_3') est affaibli à la condition que F soit semi-continu supérieurement sur $(0, \infty)$, alors le théorème 3.3 est valable pour l'inégalité stricte $\alpha + \delta + L < 1$.*

Corollaire 3.1 *(voir [20, corollaire 1]) Soit (X, d) un espace métrique complet. Et T est un auto-application sur X. Supposons qu'il existe une application $F \in \mathcal{F}$ semi-continue supérieurement et $\tau \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$,*

$$\tau(d(x, y)) + F(d(Tx, Ty)) \leq F(\beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)),$$

où $\beta, \gamma \in [0, \infty)$ satisfaisant $\beta + \gamma = 1$ and $\gamma \neq 1$. Alors T admet un unique point fixe dans X.

Corollaire 3.2 *(voir [20, corollaire 3]) Soit (X, d) un espace métrique complet. Et T est une auto-application sur X. Supposons qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{F}$ continu et $\tau \in \mathcal{S}$ tel que pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$,*

$$\tau(d(x, y)) + F(d(Tx, Ty)) \leq F(\alpha d(x, y) + \beta d(x, Tx) + \gamma d(y, Ty)),$$

où $\alpha n, \beta, \gamma \in [0, \infty)$ satisfaisant $\alpha + \beta + \gamma = 1$ and $\gamma \neq 1$. Alors T admet un unique point fixe dans X.

on introduit la condition suivante (noté (F_4))

Définition 3.3 *(voir définition 3.1 dans [21]) Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ devenez une application satisfaisante :*
$(F1)$ F croissant strictement, i.e. pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ tel que $\alpha < \beta$, $F(\alpha) < F(\beta)$,
$(F2)$ Pour chaque suite $\{\alpha_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de nombre positifs $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ si et seulement si

$$\lim_{n \to \infty} F(\alpha_n) = -\infty,$$

$(F3)$ Il existe $k \in (0, 1)$ tel que

$$\lim_{\alpha \to 0^+} \alpha^k F(\alpha) = 0.$$

Une application $T : X \to X$ on dit que c'est F-conraction si $\exists \tau > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X : (d(Tx, Ty) > 0 \Longrightarrow \tau + F(d(Tx, Ty)) \leq F(d(x, y))).$$

(F_4) *Soit* $s \geq 1$, *pour chaque suite* $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}^+$ *de nombres positifs tels que* $\tau + F(s\alpha_n) \leq F(\alpha_{n-1})$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $s \geq 1$, *et certains* $\tau \in \mathbb{R}^+$, *alors* $\tau + F(s^n \alpha_n) \leq F(s^{n-1}\alpha_{n-1})$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $s \geq 1$.

nous définissons une nouvelle classe de fonctions (notées $\mathcal{F}_{s,\tau}$) satisfaisant une condition plus facile que (F4) :

Définition 3.4 *[22] Soit* $s \geq 1$ *et* $\tau > 0$. *nous disons que* $F \in \mathbb{F}^*$ *appartient à* $\mathcal{F}_{s,\tau}$ *s'il satisfait aussi* $(\mathcal{F}_{s,\tau})$ *si* $\inf F = -\infty$ *et* $x, y, z \in (0, \infty)$ *sont telles que* $\tau + F(sx) \leq F(y)$ *et* $\tau + F(sy) \leq F(z)$ *alors*

$$\tau + F\left(s^2 x\right) \leq F(sy),$$

avec $\mathbb{F}^*$ *est l'ensemble de tout fonctions* $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *satisfaisant les conditions* (F_1) *et* (F_3).

Ensuite, nous avons introduit la notion de F-contraction faible de type Hardy-Rogers dans le cadre des espaces b-métriques comme suit :

Définition 3.5 *[22]Soit* (X, σ) *un espace* b*-métrique avec constante* $s \geq 1$, $a, b, c, e, f \geq 0$ *des nombres réel et* $T : X \longrightarrow X$ *un opérateur.*
s'il existe $\tau > 0$ *et* $F \subset \mathcal{F}_{s,\tau}$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *l'inégalité* $\sigma(Tx, Ty) > 0$ *implique*

$$\tau + F(s\delta(Tx, Ty)) \leq F(A_T^\sigma(x, y)),$$

avec

$$A_T^\sigma(x, y) = a\sigma(x, y) + b\sigma(x, y) + c\sigma(x, y) + e\sigma(x, y) + f\sigma(x, y),$$

alors T *est appelée une* F*-contraction faible de type Hardy-Rogers.*

Proposition 3.1 *[22] Si* F *est une fonction croissante, alors* $(\mathcal{F}_{s,\tau})$ *est equivalente à* (F_4)

la proposition précédente prouver le résultat du point fixe suivante.

Théorème 3.4 *[22] Supposons que* (X, σ) *est un espace* b*-métrque avec une constante* $s \geq 1$ *et* $T : X \longrightarrow X$ *est une* F*-contruction faible de type Hardy-Rogeres. Si* $a + b + c + (s+1)e < 1$ *ou* $a + b + c + (s+1)f < 1$ *verifier, alors tout* $x_0 \in X$, *la suite* $x_{n+1} = Tx_n$ *converge vers un point fixe de T. De plus, si* $a + e + f < s$ *est également valable, alors* T *a exactement un point fixe.*

3.2 Résultats du point fixe

Dans cette section, nous améliorons (et/ou) élargissons essentiellement les susmentionnés : du théorème 3.3, remarque 3.2 et théorème 3.4 dans le cadre des espaces b-métriques. Il est utile de mentionner que dans nos résultats suivants, la b-métrique n'a pas besoin d'être continue.
Par commodité, nous définissons
$\mathcal{F}_c = \{F : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R} :\ F$ est une fonction continue non décroissante$\}$.
Soit $\omega \geq 1$ soit un nombre réel donné. On désigne par $\mathcal{S}_\omega$ la famille de toutes les fonctions $\tau : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ qui satisfont à la condition suivante :

$$\liminf_{t\longrightarrow r} \tau(t) > 0,\ \text{avec } r \in \left[\eta^+, \eta^+\varepsilon\right],\ \text{pour tout } \eta > 0. \tag{A_ω}$$

Évidemment, si $\omega + 1$, la condition (A_ω) devient la suivante :

$$\liminf_{t\longrightarrow \eta} \tau(t) > 0,\ \text{pour tout } \eta > 0. \tag{A_1}$$

Désormais, nous désignons par $\mathcal{S}_1$ l'ensemble $\mathcal{S}_\omega$ lorsque $\omega = 1$. Clairement, on a $\mathcal{S}_\omega \subseteq \mathcal{S}_1$.

Exemple 3.2 *[23] Soit la fonction suivante $G : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $G(x) = \frac{-1}{x+1}$.*
On a $G \in \mathcal{F}_c$ mais il ne satisfait pas à la condition (F_2). En effet, si $\alpha_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$, on a $\lim_{n\longrightarrow\infty} \alpha_n = 0$ et $\lim_{n\longrightarrow\infty} G(\alpha_n) = -1 \neq -\infty$. Plus précisément, on a $\mathfrak{F} \subset \mathcal{F}_c$.

nous affinons les notions de F-contraction de type Hardy-Rogers, F-contraction de type Suzuki-Hardy-Rogers et F-contraction faible de type Hardy-Rogers en introduisant des nouvelles notions dans le contexte des espaces b-métriques, à savoir les notions de F-contraction généralisée de type Hardy-Rogers, F-contraction généralisér de type Suzuki-Hardy-Rogers et F-contraction faible généralisée de type Hardy-Rogers.

Lemme 3.1 *[24] Soit $k \geq 1$ un nombre positive. Soit$\{t_n\} \subset (0,\infty)$ une suite et $\phi, \psi : (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions satisfaisnatt les conditions :*
(i) $\psi(kt_n) \leq \phi(t_{n-1})$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(ii) ψ est non décroissante.
(iii) $\phi(t) < \psi(t)$, pour tout $t > 0$.
(iv) $\limsup_{t\longrightarrow\eta^+} \phi(t) < \psi(\eta^+)$. pour tout $\eta > 0$.
Alors $\lim_{n\longrightarrow\infty} t_n = 0$.
Preuve. *Tout d'abord, nous notons que la limite droite de ψ existe puisque ψ est non récurrente. Grâce à (i) et (iii), nous avons*

$$\psi\left(kt_n\right) \leq \phi\left(t_{n-1}\right) < \psi\left(t_{n-1}\right), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En tenant compte de la condition (ii), il s'ensuit que

$$kt_n < t_{n-1}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

comme $k \geq 1$, *la dernière inégalité implique que* $\{t_n\}$ *est une suite strictement décroissante de nombres positifs. Par conséquent, il existe* $r \geq 0$ *tel que*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} t_n = r^+.$$

Maintenant, nous montrons que $r = 0$. *En argumentant par contradiction, nous supposons que* $r > 0$. *De nouveau par* (i) *et* (ii), *nous avons*

$$(i)\ \psi \text{ croissante } \Longrightarrow \psi\left(t_n\right) \leq \psi\left(kt_n\right),$$

et

$$(ii) \Longrightarrow \psi\left(t_n\right) \leq \phi\left(t_{n-1}\right). \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

En prenant la limite supérieure comme $n \to \infty$ *dans* (3.1), *nous obtenons*

$$\psi\left(r^+\right) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \psi\left(t_n\right) \leq \limsup_{n \longrightarrow \infty} \phi\left(t_{n-1}\right) \leq \limsup_{t \longrightarrow r^+} \phi\left(t_n\right),$$

ce qui contredit (iv). *Ainsi,* $r = 0$, *c'est-à-dire* $\lim_{n \longrightarrow \infty} t_n = 0$. ∎

Nous prouvons maintenant la proposition suivante qui joue un rôle important dans les preuves de nos résultats.

Proposition 3.2 *[24] Soit* (X, σ) *un espace b-métrique avec une constante* $s \geq 1$ *et soit* λ. *est un nombre réel donné tel que* $1 \leq \lambda \leq s$. *Soit* $T : X \longrightarrow X$ *soit une application et {xn} la suite de Picard de T basée sur une valeur arbitraire* $x_0 \in X$. *Supposons qu'il existe une fonction non décroissante* F *et* $\tau \in \mathcal{S}_1$ *tels que pour tout* $z \in X$ *avec* $Tz \neq T^2 z$,

$$\begin{aligned} &\blacksquare(\sigma(z, Tz)) + F\tau(\sigma(Tz, T^2 z)) \\ \leq\ & F\left(\left(d_1 + d_2\right) \sigma(z, Tz) + d_3 \sigma(Tz, T^2 z) + d_4 \sigma(z, T^2 z)\right), \end{aligned} \tag{P}$$

où d_1, d_2, d_3, d_4 *sont des nombres réels non négatifs satisfaisant*

$$d1 + d2 + d3 + 2d4s = \frac{\lambda}{s} \text{ et } d_3 \neq \frac{\lambda}{s}. \tag{D}$$

Alors $\lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma\left(x_n, x_{n+1}\right) = 0$.

Preuve. *Posons* $\sigma_n = \sigma(x_n, x_{n+1})$. *Si* $x_n = x_{n+1}$ *pour certains* $n \in \mathbb{N}_0$, *la preuve de la preuve est immédiatement terminée. Par conséquent, nous supposons que*

$$x_n \neq x_{n+1}, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}_0.$$

Cela signifie que $Tx_n \neq Tx_{n+1}$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *En appliquant l'inégalité* (P) *avec* $z = x_{n-1}$, *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & \tau(\sigma_{n-1}) + F\tau(\lambda\sigma_n) \\ \leq\ & F\left((d_1 + d_2)\sigma_{n-1} + d_3\sigma_n + d_4\sigma(x_{n-1}, x_{n+1})\right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

En utilisant l'inégalité triangulaire relaxée $(b3)$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \sigma(x_{n-1}, x_{n+1}) &\leq s\sigma(x_{n-1}, x_n) + s\sigma(x_n, x_{n+1}) \\ &= s(\sigma_n + \sigma_{n+1}), \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ainsi, (3.2) *se transforme en*

$$\begin{aligned} & \blacksquare(\sigma_{n-1}) + F\tau(\lambda\sigma_n) \\ \leq\ & F\left((d_1 + d_2 + d_4 s)\sigma_{n-1} + (d_3 + d_4 s)\sigma_n\right), \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Puisque F *est non décroissant et* $\tau(t) > 0$, *il s'ensuit que*

$$\begin{aligned} & F\tau(\lambda\sigma_n) \\ <\ & F\left((d_1 + d_2 + d_4 s)\sigma_{n-1} + (d_3 + d_4 s)\sigma_n\right) \end{aligned}$$

alors

$$\lambda\sigma_n < (d_1 + d_2 + d_4 s)\sigma_{n-1} + (d_3 + d_4 s)\sigma_n, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Cela implique que

$$(\lambda - d_3 - d_4 s)\sigma_n < (d_1 + d_2 + d_4 s)\sigma_{n-1}, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

on a $1 \leq s \leq \lambda$ *alors :* $\lambda \geq \frac{\lambda}{s}$,
Depuis

$$\lambda - d_3 - d_4 s \geq \frac{\lambda}{s} - d_3 - d_4 s,$$

l'inégalité (3.4) *donne*

$$\left(\frac{\lambda}{s} - d_3 - d_4 s\right)\sigma_n < (d_1 + d_2 + d_4 s)\sigma_{n-1}, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Depuis $d_1 + d_2 + d_3 + 2d_4 s = \frac{\lambda}{s}$ *et* $d_3 \neq \frac{\lambda}{s}$,

$$d_1 + d_2 + d_4 s = \frac{\lambda}{s} - d_3 - d_4 s$$

on obtient

$$\frac{\lambda}{s} - d_3 - d_4 s > 0.$$

Par conséquent, l'inégalité (3.5) *permet d'obtenir*

$$\sigma_n < \frac{d_1 + d_2 + d_4 s}{\left(\frac{\lambda}{s} - d_3 - d_4 s\right)} \sigma_{n-1} = \sigma_{n-1}, \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.6}$$

Comme F *est non décroissant, alors en substituant* (3.6) *dans* (3.3) *on obtien*

$$F\tau(\lambda\sigma_n) \leq F\left(\left(d_1 + d_2 + d_4 s\right)\sigma_{n-1} + \left(d_3 + d_4 s\right)\sigma_{n-1}\right) - \tau\left(\sigma_{n-1}\right),$$

et en utilisant à nouveau $d_1 + d_2 + d_3 + 2d_4 s = \frac{\lambda}{s}$ *avec* $1 \leq \lambda \leq s \Rightarrow \frac{\lambda}{s} \leq 1$ *alors :*

$$\begin{aligned} F\tau(\lambda\sigma_n) &\leq F\left(\frac{\lambda}{s}\sigma_{n-1}\right) - \tau\left(\sigma_{n-1}\right) \\ &\leq F\left(\sigma_{n-1}\right) - \tau\left(\sigma_{n-1}\right). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Cela conduit à

$$F\tau(\lambda\sigma_n) \leq F\left(\sigma_{n-1}\right) - \tau\left(\sigma_{n-1}\right), \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

En prenant $\psi(t) = F(t)$ *et* $\phi(t) = F(t) - \tau(t)$ *pour tout* $t \in (0, \infty)$*, l'inégalité.* (3.8) *peut s'écrire sous la forme suivante :*

$$\psi\left(\lambda\sigma_n\right) \leq \phi\left(\sigma_{n-1}\right), \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Comme F *est non décroissant, alors compte tenu de la dernière inégalité et en utilisant le fait que* $\tau \in \mathcal{S}_1$ *(i.e.,* A_ω *détient). Vous allez maintenant montrer les conditions de lemme* 3.5

(i) *D'apret* (3.8) *:* $\psi\left(\lambda t_n\right) \leq \phi\left(t_{n-1}\right), \quad$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

(ii) *Comme* F *est non décroissant et* $\psi(t) = F(t)$*, alors* ψ *est non décroissant,*

(iii) *On a* $\phi(t) = \psi(t) - \tau(t)$ *et comme* $\tau(t) > 0$*, alors :*

$$\phi(t) < \psi(t), \quad \textit{pour tout } t > 0,$$

(iv) *On a*

$$\phi(t) = \psi(t) - \tau(t)$$

alors :

$$\begin{aligned} \lim\sup_{t \longrightarrow \eta^+} \phi(t) &= \lim\sup_{n \longrightarrow \eta^+} \psi(t) - \lim\sup_{t \longrightarrow \eta^+} \tau(t) \\ \lim\sup_{t \longrightarrow \eta^+} \phi(t) &= \psi(\eta^+) - \lim\sup_{t \longrightarrow \eta^+} \tau(t) \\ \lim\sup_{t \longrightarrow \eta^+} \phi(t) &< \psi(\eta^+) \end{aligned}$$

les conditions de lemme 3.5 *sant satsifaisant avec* $(k = \lambda \geq 1)$

Donc $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \sigma_n = 0.$ ■

3.2.1 F-contraction généralisée de type Hardy-Rogers

Dans cette sous-section , nous présentons les résultats graduellement pour souligner les différentes techniques utilisées dans certaines étapes des preuves, dans le cas où la seule condition omise est (F_2) et dans le cas où nous supposons seulement la condition que F est croissante..
Soit (X, σ) un espace b-métrique avec une constante $s \geq 1$. on désigne, pour tout $x, y \in X$,

$$Q_T^\sigma (x, y) = \alpha\sigma (x, y) + \beta\sigma (x, Tx) + \gamma\sigma (y, Ty) + \delta\sigma (x, Ty) + L\sigma (y, Tx),$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, L$ sont des nombres réels non négatifs. Si $s = 1$, nous écrivons $Q_T^d (x, y)$ au lieu de $Q_T^\sigma (x, y)$, avec d est une distance sur X.

Définition 3.6 *[24] Soit* (X, σ) *un espace* b*-métrique avec une constante* $s \geq 1$. *une application* $T : X \longrightarrow X$ *est dite une* F*-contraction généralisée de type Hardy-Rogers s'il existe* $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $\tau \in \mathcal{S}_\omega$ *tel que pour tout* $x, y \in X$,

$$\sigma (Tx, Ty) > 0 \implies \tau (\sigma (x, y)) + F (\sigma (Tx, Ty)) \leq F (Q_T^\sigma (x, y)). \tag{3.9}$$

Remarque 3.3 *Si* F *est croissante, on voit d'après la Définition* $(3.9$ *article* $)$ *que toute F-contraction de type Hardy-Rogers* T *verifie la condition suivante*

$$\sigma (Tx, Ty) \leq Q_T^\sigma (x, y) \tag{3.10}$$

pour tout $x, y \in X$ *avec* $Tx \neq Ty$.

Ce qui suit est une extension et une amélioration du Théorème (3.3).

Théorème 3.5 *[24] Soit* (X, σ) *un espace* b*-métrique avec une constante* $s \geq 1$ *et* $T : X \longrightarrow X$ *une* F*-contraction étendue de type Hardy-Rogers avec* $F \in \mathcal{F}_c$. *Supposons que soit* (H_s^1) *ou* (H_s^2), *où*
(H_s^1) $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta s = \frac{1}{s}$ *et* $\gamma \neq \frac{1}{s}$,
(H_s^2) $\alpha + \beta + \gamma + 2Ls = \frac{1}{s}$ *et* $\beta \neq \frac{1}{s}$.
En outre, nous supposons que $s^2\alpha + s^3 (\delta + L) \leq 1$. *Alors* T *a un unique point fixe* x^* *et pour tout* $x_0 \in X$ *la suite* $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* x^*.
Preuve. *Tout d'abord, nous allons montrer que* T*a au plus un point fixe. Supposons que* x^* *et* y^* *sont deux points fixes distincts de* T, *c'est-à-dire que* $Tx^* = x^* \neq y^* = Ty^*$.
alors

$$\sigma (Tx^*, Ty^*) = \sigma (x^*, y^*) > 0.$$

1-Si $\alpha+\beta+L>0$, de (3.9 article) avec $x=x^*$ et $y=y^*$, on obtien

$$\begin{aligned}\tau\left(\sigma\left(x^*,y^*\right)\right)+F\left(\sigma\left(x^*,y^*\right)\right) &\leq F\left(\alpha\sigma\left(x^*,y^*\right)+\beta\sigma\left(x^*,Tx^*\right)+\gamma\sigma\left(y^*,Ty^*\right)+\delta\sigma\left(x^*,Ty^*\right)+L\sigma\left(y^*,Tx^*\right)\right.\\ &\leq F\left(\alpha\sigma\left(x^*,y^*\right)+\delta\sigma\left(x^*,Ty^*\right)+L\sigma\left(y^*,Tx^*\right)\right)\\ &\leq F\left(\left(\alpha+\delta+L\right)\sigma\left(x^*,y^*\right)\right)\\ &\leq F\left(\left(s^2\alpha+s^3\left(\delta+L\right)\right)\sigma\left(x^*,y^*\right)\right)\\ &\leq F\left(\sigma\left(x^*,y^*\right)\right).\end{aligned}$$

2-La dernière inégalité donne $\tau\left(\sigma\left(x^*,y^*\right)\right)\leq 0$, ce qui est une contradiction.
Si $\alpha+\beta+L=0$, de (3.10 article) avec $x=x^*$ et $y=y^*$, on a

$$\begin{aligned}\tau\left(\sigma\left(x^*,y^*\right)\right)+F\left(\sigma\left(x^*,y^*\right)\right) &\leq F\left(\alpha\sigma\left(x^*,y^*\right)+\beta\sigma\left(x^*,Tx^*\right)+\gamma\sigma\left(y^*,Ty^*\right)+\delta\sigma\left(x^*,Ty^*\right)+L\sigma\left(y^*,Tx^*\right)\right.\\ &\leq F\left(\left(\alpha+\delta+L\right)\sigma\left(x^*,y^*\right)\right),\end{aligned}$$

alors :

$$F\left(\sigma\left(x^*,y^*\right)\right)<F\left(\left(\alpha+\delta+L\right)\sigma\left(x^*,y^*\right)\right),$$

puisque F croissante :

$$\sigma\left(x^*,y^*\right)<Q_T^\sigma\left(x^*,y^*\right)=\left(\alpha+\delta+L\right)\sigma\left(x^*,y^*\right)=0,$$

ce qui est une contradiction.
Ainsi, dans les deux cas, on obtient une contradiction. Donc, T a au plus un point fixe fixe.
Ensuite, nous prouvons l'existence d'un point fixe. Soit $\{x_n\}$ soit la suite de Picard basée sur une suite arbitraire $x_0\in X$. S'il existe $n_0\in\mathbb{N}$. Tel que $x_{n_0}=x_{n_0+1}$, alors x_{n_0} est le point fixe de T et la preuve est complétée. Si $x_{n_0}\neq x_{n_0+1}$, pour tout $n\in\mathbb{N}_0$, on a

$$\sigma_n:=\sigma\left(x_n,x_{n+1}\right)=\sigma\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)>0,\quad \textit{pour tout } n\in\mathbb{N}. \tag{3.11}$$

A partir de l'hypothèse du théorème, on considère les cas suivants : Cas 1 si (H_s^1) vérifier. Grâce à (3.11)*, nous pouvons appliquer la condition contractive* (3.9) *avec $x=x_{n-1}$ et $y=x_n$. Par conséquent, nous obtenons pour tous $n\in\mathbb{N}$.*

$$\begin{aligned}&\tau\left(\sigma\left(x_{n-1},x_n\right)\right)+F\left(\sigma\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)\right)\\ \leq\;& F\left(\left(\alpha+\beta\right)\sigma\left(x_{n-1},x_n\right)+\gamma\sigma\left(x_n,Tx_n\right)+\delta\sigma\left(x_{n-1},Tx_n\right)\right).\end{aligned} \tag{3.12}$$

Mettre $x_{n-1}=z$ et en utilisant le fait que

$$Tz=Tx_{n-1}=x_n\neq x_{n+1}=T^2x_{n-1}=T^2z,$$

l'inégalité (3.12) se transforme en (P) avec $d_1 = \alpha$, $d_2 = \beta$, $d_3 = \gamma$, $d_4 = \delta$ *et* $\lambda = 1$. *Par conséquent, en vertu de*$(\mathcal{S}_\omega \subseteq \mathcal{S}_1)$ *et la proposition* (3.6) *avec* $\lambda = 1$, *on a* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n = 0$.
Cas 1 si (H_s^1) *vérifier. de* (3.11) . *nous pouvons aussi appliquer* (3.9) *avec* $x = x_n$ *et* $y = x_{n-1}$. *donc, en utilisant la condition de symétrie* (b_2), *on obtien pour tout* $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} & \tau\left(\sigma\left(x_{n-1},x_n\right)\right)+F\left(\sigma\left(Tx_{n-1},Tx_n\right)\right) \\ \leq\ & F\left(\left(\alpha+\gamma\right)\sigma\left(x_{n-1},x_n\right)+\beta\sigma\left(x_n,Tx_n\right)+L\sigma\left(x_{n-1},Tx_n\right)\right). \end{aligned} \tag{3.13}$$

De même, comme dans le cas 1, *l'inégalité* (3.12) *se transforme en* (P) *avec* $d_1 = \alpha$, $d_2 = \gamma$, $d_3 = \beta$, $d_4 = L$ *et* $\lambda = 1$. *De nouveau, selon la proposition* (3.6) *avec* $\lambda = 1$, *on a* $\lim_{n\longrightarrow\infty} \sigma_n = 0$.
Par conséquent, dans les deux cas, on obtient

$$\lim_{n\longrightarrow\infty}\sigma_n=\lim_{n\longrightarrow\infty}\sigma\left(x_n,x_{n-1}\right)=0. \tag{3.14}$$

Maintenant, nous prouvons que $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy. Supposons au contraire, i.e.,* $\{x_n\}$ *n'est pas une suite de Cauchy. Alors, d'après* (3.14)*et le premier élément du lemme* 1.4, *il existe* $\varepsilon > 0$ *et deux suites* $\{m(k)\}$, $\{n(k)\}$ *d'entiers positifs tels que*

$$\varepsilon^+ \leq \lim_{k\longrightarrow\infty}\inf\sigma\left(x_{m(k)},x_{n(k)}\right)\leq\lim_{k\longrightarrow\infty}\sup\sigma\left(x_{m(k)},x_{n(k)}\right)\leq s\varepsilon^+.$$

Ainsi, on en déduit qu'il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ *tel que* $\left\{\sigma\left(x_{m(k)},x_{n(k)}\right)\right\}$ *est bornée pour tout* $k \geq k_0$ *et donc elle a une sous-suite convergente. Il s'ensuit qu'il existe un nombre réel* l *et une sous-suite* $\{k(p)\}_{p\geq k_0}$ *de* $\{k\}_{k\geq k_0}$ *tel que*

$$\lim\sigma\left(x_{m(k(p))},x_{n(k(p))}\right)=l \tag{3.15}$$

avec

$$0<\varepsilon^+\leq\lim_{k\longrightarrow\infty}\inf\sigma\left(x_{m(k)},x_{n(k)}\right)\leq l\leq\lim_{k\longrightarrow\infty}\sup\sigma\left(x_{m(k)},x_{n(k)}\right)\leq s\varepsilon^+. \tag{3.16}$$

D'autre part, en utilisant $(b3)$, *on obtient pour tout* $p \geq k_0$

$$\begin{aligned} \sigma\left(x_{m(k(p))},x_{n(k(p))}\right) &\leq s\sigma\left(x_{m(k(p))},x_{m(k(p))+1}\right)+s\sigma\left(x_{m(k(p))+1},x_{n(k(p))}\right) \\ &\leq s\sigma\left(x_{m(k(p))},x_{m(k(p))+1}\right)+s^2\sigma\left(x_{m(k(p))+1},x_{n(k(p))+1}\right) \\ &\quad +s^2\sigma\left(x_{n(k(p))+1},x_{n(k(p))+1}\right) \\ &= s\sigma_{m(k(p))}+s^2\sigma\left(x_{m(k(p))+1},x_{n(k(p))+1}\right)+s^2\sigma_{n(k(p))}. \end{aligned}$$

Cela conduit à

$$\sigma\left(x_{m(k(p))+1},x_{n(k(p))+1}\right)\geq\frac{1}{s^2}\left(\sigma\left(x_{m(k(p))},x_{n(k(p))}\right)-s\sigma_{m(k(p))}-s^2\sigma_{n(k(p))}\right), \tag{3.17}$$

pour tout $p \geq k_0$.
En prenant la limite inférieure en $p \longrightarrow \infty$ *dans* (3.17) *et en utilisant* (3.14), *nous obtenons.*

$$\lim_{p \longrightarrow \infty} \inf \sigma \left(x_{m(k(p))+1}, x_{n(k(p))+1} \right) \geq \frac{l}{s^2} \tag{3.18}$$

Par conséquent, il existe $N \geq k_0$ *tel que*

$$\sigma \left(Tx_{m(k(p))}, Tx_{n(k(p))} \right) = \sigma \left(x_{m(k(p))+1}, x_{n(k(p))+1} \right) > 0, \quad \textit{pourtout } p \geq N. \tag{3.19}$$

Par commodité, nous définissons

$$a_p = \sigma \left(x_{m(k(p))}, x_{n(k(p))} \right), \quad b_p = \sigma \left(x_{m(k(p))+1}, x_{n(k(p))+1} \right),$$
$$c_p = \sigma \left(x_{m(k(p))}, x_{n(k(p))+1} \right), \quad d_p = \sigma \left(x_{n(k(p))}, x_{m(k(p))+1} \right).$$

Par conséquent, il résulte de (3.19) *que l'inégalité contractive t peut être appliquée avec* $x = x_{m(k(p))}$ *et* $y = x_{n(k(p))}$. *Par conséquent, pour tout* $p \geq N$, *nous avons*

$$\tau (a_p) + F (b_p) \leq F \left(\alpha a_p + \beta \sigma_{m(k(p))} + \gamma \sigma_{n(k(p))} + \delta c_p + L d_p \right).$$

À l'aide de (b_3), *de la monotonicité de* F *et* $s^2 \alpha + s^3 (\delta + L) \leq 1$, *on obtient*

$$\begin{aligned} & \tau (a_p) + F (b_p) \\ \leq \; & F \left((\alpha + s (\delta + L)) a_p + (\beta + sL) \sigma_{m(k(p))} + (\gamma + s\delta) \sigma_{n(k(p))} \right). \\ \leq \; & F \left(\frac{1}{s^2} a_p + (\beta + sL) \sigma_{m(k(p))} + (\gamma + s\delta) \sigma_{n(k(p))} \right). \end{aligned}$$

pour tout $p \leq N$.
Maintenant, en combinant l'inégalité ci-dessus avec (3.15) *et* (3.19) *à travers le fait que* $F \in \mathcal{F}_c$, *nous obtenons la chaîne des inégalités suivante*

$$\begin{aligned} \liminf_{t \longrightarrow l} \tau (t) + F \left(\frac{l}{S^2} \right) & \leq \liminf_{p \longrightarrow \infty} \tau (a_p) + F \left(\frac{l}{S^2} \right) \\ & \leq \liminf_{p \longrightarrow \infty} \tau (a_p) + F \left(\liminf_{p \longrightarrow \infty} b_p \right) \\ & = \liminf_{p \longrightarrow \infty} \tau (a_p) + \liminf_{p \longrightarrow \infty} F (b_p) \\ & = \liminf_{p \longrightarrow \infty} \left[\tau (a_p) + F (b_p) \right] \\ & \leq \lim_{p \longrightarrow \infty} F \left(\frac{1}{s^2} a_p + (\beta + sL) \sigma_{m(k(p))} + (\gamma + s\delta) \sigma_{n(k(p))} \right) \\ & = F \left(\frac{1}{s^2} \right). \end{aligned}$$

Compte tenu de (3.18), l'inégalité précédente implique qued

$$\liminf \tau (t) \leq 0. \quad \textit{avec } l \in \left[\varepsilon^+, s\varepsilon^+ \right].$$

ce qui est une contradiction avec (A_ω) $(\eta = \varepsilon > 0, \omega = s \geq 1)$. *Cette contradiction montre que* $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy. Par complétude de* (X, σ), $\{x_n\}$ *converge vers un certain point* x^* *sur* X, *c'est-à-dire,*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma(x_n, x^*) = 0. \tag{3.20}$$

Enfin, nous montrons que x^* *est un point fixe de* T, *c'est-à-dire que* $Tx^* = x^*$. *Supposons au contraire, i.e.,* $\sigma(x^*, Tx^*) > 0$. *Ensuite, par (3.20), il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\sigma(x_n, x^*) \leq \frac{\sigma(x^*, Tx^*)}{2s}, \quad \forall n \geq n_{0.} \tag{3.21}$$

en effet :

Ona

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma(x_n, x^*) = 0,$$

alors

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sigma(x_n, x^*) < \varepsilon,$$

supposons que $\varepsilon = \frac{\sigma(x^*, Tx^*)}{2s} > 0$

Donc

$$\sigma(x_n, x^*) \leq \frac{\sigma(x^*, Tx^*)}{2s}, \quad \forall n \geq n_{0.}$$

D'autre part, par (b_3), *on a*

$$\sigma(x^*, Tx^*) \geq s\sigma(x^*, Tx_n) + s\sigma(Tx_n, Tx^*). \tag{3.22}$$

En utilisant (3.21), *l'inégalité* (3.22) *donne :*

$$\begin{aligned} \sigma(Tx_n, Tx^*) &\geq \frac{1}{s}(\sigma(x^*, Tx^*) - s\sigma(x^*, Tx_n)) \\ &= \frac{1}{s}\sigma(x^*, Tx^*) - \sigma(x^*, Tx_n) \\ &\geq \frac{\sigma(x^*, Tx^*)}{2s} > 0, \end{aligned} \tag{3.23}$$

pour tout $n \geq n_0$.

En tenant compte de (3.23), *nous pouvons appliquer* (3.10) *avec* $x = x_n$ *et* $y = x^*$. *Par conséquent, pour tout* $n \geq n_0$, (3.22) *donne*

$$\begin{aligned} \sigma(x^*, Tx^*) &\leq s\sigma(x^*, Tx_n) + s\sigma(Tx_n, Tx^*) \\ &< s\sigma(x^*, Tx_n) + s\alpha\sigma(x_n, x^*) + s\beta\sigma(x_n, Tx_n) \\ &\quad + s\gamma\sigma(x^*, Tx^*) + s\delta\sigma(x_n, Tx^*) + sL\sigma(x^*, Tx_n) \\ &= s(1+L)\sigma(x^*, x_{n+1}) + s\alpha\sigma(x_n, x^*) \\ &\quad + s\beta\sigma(x_n, Tx_n) + s\delta\sigma(x_n, Tx^*) + s\gamma\sigma(x^*, Tx^*). \end{aligned}$$

L'inégalité ci-dessus conduit à

$$\begin{aligned}(1-s\gamma)\,\sigma(x^*,Tx^*) \quad &< \quad s(1+L)\,\sigma(x^*,x_{n+1})+s\alpha\sigma(x_n,x^*) \\ &\quad +s\delta\sigma(x_n,Tx^*)+s\beta\sigma(x_n,Tx_n)\,,\end{aligned} \tag{3.24}$$

pour tout $n \geq n_0$.
En prenant la limite supérieure comme $n \to \infty$ *dans* (3.24) *et en utilisant le lemme* 2.8*,* (3.14) *et* (3.20)*, nous obtenons*

$$(1-s\gamma)\,\sigma(x^*,Tx^*) < s^2\delta\sigma(x^*,Tx^*)\,. \tag{3.25}$$

De manière similaire, nous pouvons également appliquer (3.10) *avec* $x = x^*$*,* $y = x_n$ *et nous obtenons*

$$(1-s\beta)\,\sigma(x^*,Tx^*) < s^2L\sigma(x^*,Tx^*)\,. \tag{3.26}$$

De nouveau, selon l'hypothèse du théorème, nous considérons les cas suivants :
Cas 1 Si (H_s^1) *tient, Dans ce cas, on a* $1-s\gamma > 0$ *et* $\gamma + s\delta < \frac{1}{s}$.
Par conséquent, (3.25) *implique que*

$$\sigma(x^*,Tx^*) \leq \frac{s^2\delta}{(1-s\gamma)}\sigma(x^*,Tx^*) < \sigma(x^*,Tx^*)\,, \quad \textit{puisque}\ \frac{s^2\delta}{(1-s\gamma)} < 1,$$

qui est une contradiction.
Cas 2 Si (H_s^2) *tient, In this case, we have* $1-s\beta > 0$ *et* $\beta + sL < \frac{1}{s}$.
Par conséquent, (3.26) *donne*

$$\sigma(x^*,Tx^*) \leq \frac{s^2L}{(1-s\beta)}\sigma(x^*,Tx^*) < \sigma(x^*,Tx^*)\,,$$

ce qui est une contradiction. Par conséquent, que (H_s^1) *ou* (H_s^2) *tient, nous obtenons une contradiction. Ainsi, nous avons* $Tx^* = x^*$*, alors,* x^* *est un point fixe de* T *et ceci complète la preuve du théorème.* ■

Remarque 3.4 *En inspectant la preuve du théorème* 3.5 *et en tenant compte de la remarque* 2.11 *[29], nous observons que si* $s = 1$ *(ce qui correspond au cas de d'espaces métriques), il suffit d'utiliser la condition que* $\tau \in \mathcal{S}_1$ *au lieu de la condition que* $\tau \in \mathcal{S}_\omega$*.*

Dans la suite, (H_s^1) et (H_s^2) désignent les hypothèses données dans le théorème 3.5. De plus, si $s = 1$, (H_s^1) et (H_s^1) sont notés (H_1^1) et (H_1^2), respectivement.

Remarque 3.5 *Le théorème* 3.5 *étend et améliore considérablement le théorème* 3.3*. En effet, en prenant* $s = 1$ *dans le théorème* 3.13 *avec l'hypothèse* (H_1^1)*, on retrouve le théorème* 3.3*. De plus,* *nous montrons que le théorème* 2.24 *peut être prouvé également par l'hypothèse* (H_1^2). *De plus, la condition* $(F2)$ *du théorème* 3.3 *est omise et la condition que* $\tau \in \mathcal{S}$ *est affaiblie à la condition que* $\tau \in \mathcal{S}_1$ *(voir Remark* 3.4*). En plus de celles-ci, nous avons montré implicitement à partir de la preuve du théorème* 3.5 *que la rigueur de la monotonicité de* F *et* $\liminf_{t \longrightarrow 0^+} \tau(t) > 0$ *sont des conditions superflues pour tout* $s \geq 1$.

Si $s = 1$, alors en prenant $\delta = L = 0$ dans le théorème 3.5 et en tenant compte de la remarque 3.4, nous obtenons le résultat suivant.

Corollaire 3.3 *[24] Soit* (X, d) *un espace métrique complet et soit* T *un auto-mappage sur* X. *Supposons qu'il existe* $F \in \mathcal{F}_c$ *et* $\tau \in S_1$ *tel que pour tout* $x, y \in X$ *avec* $Tx \neq Ty$,

$$\tau(\sigma(x, y)) + F(\sigma(Tx, Ty)) = \alpha\sigma(x, y) + \beta\sigma(x, Tx) + \gamma\sigma(y, Ty),$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \infty)$ *satisfaisant* $\alpha + \beta + \gamma = 1$, *et* $\gamma \neq 1$. *Alors* T *a un unique point fixe* x^* *et pour tout* $x_0 \in X$ *la suite* $\{T^n x_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ *converge vers* x^*.

Remarque 3.6 *Le corollaire* 3.3 *améliore le corollaire* 3.2. *En effet, la condition* $(F2)$ *du théorème* 3.3 *est supprimée et la condition que* $\tau \in \mathcal{S}$ *est affaiblie à la condition que* $\tau \in \mathcal{S}_1$. *condition que* $\tau \in \mathcal{S}_1$. *De plus, le Corollaire* 3.2 *reste vrai sans la rigueur de la condition monotone. rigueur de la monotonicité de* F.

L'exemple suivant illustre l'utilité du théorème 3.5.

Exemple 3.3 *Soit* $X = [0, 7]$, *et* $T : X \longrightarrow X$ *soit une application donnée par*

$$Tx = \begin{cases} 7, & si\ x \in]0, 7], \\ 6, & si\ x = 0. \end{cases}$$

soit $\sigma : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ *soit l'appliction définie par*

$$\sigma(x, y) = (x - y)^2, \quad pour\ tout\ x, y \in X.$$

en choisissant $F(t) = \frac{1}{t+1}$, $\tau(t) = \frac{t}{294}$, *pour tout* $t \in (0, \infty)$
Par l'exemple 1.4, (X, σ) *est un espace* b*-métrique complet avec la constante* $s = 2$.
D'abord, nous observons que
$\sigma(Tx, Ty) = 1 > 0 \Longleftrightarrow [(x \in]0, 7] \wedge y = 0) \vee (y \in]0, 7] \wedge x = 0)]$
Soit $x, y \in X$ *et on note*

$$M(x, y) = \frac{1}{8}\sigma(x, y) + \frac{1}{8}\sigma(x, y) + \frac{1}{8}\sigma(x, y)$$

Maintenant, nous considérons les cas suivants :
Cas 1 Si $x \in]0,7]$ *et* $y = 0$*, on obtient dans ce cas :*

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(x,0)}{294} - \frac{1}{\sigma(Tx,Ty)+1} &\leq \frac{49}{294} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \\ &< -\frac{8}{36} = -\frac{8}{\sigma(0,T0)} \\ &\leq -\frac{1}{M(x,0)} \\ &< -\frac{1}{M(x,0)+1}, \end{aligned} \tag{3.27}$$

Cas 2 Si $y \in]0,7] \wedge x = 0$*, on obtient dans ce cas :*

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(x,0)}{294} - \frac{1}{\sigma(Tx,Ty)+1} &\leq \frac{49}{294} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3} \\ &< -\frac{8}{36} = -\frac{16}{\sigma(0,Ty)} \\ &\leq -\frac{1}{M(0,y)} \\ &< -\frac{1}{M(0,y)+1}, \end{aligned} \tag{3.28}$$

De (3.27) *et* (3.28)*, on déduit*

$$\frac{\sigma(x,0)}{294} - \frac{1}{\sigma(Tx,Ty)+1} < -\frac{1}{M(x,y)+1},$$

pour tout $x, y \in X$, $\sigma(Tx,Ty) = 1 > 0$.
T *est une F-contraction étendue de type Hardy-Rogers avec* $\alpha = \frac{1}{8}$, $\gamma = \frac{1}{8}$, $\delta = \frac{1}{16}$, $\beta = L = 0$ *et toutes les conditions du théorème 3.5 avec* (H_s^1) :

$$\alpha + \beta + \gamma + 2\delta s = \frac{1}{s} \Longleftrightarrow \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{2}{16} = \frac{1}{2}$$

et $s^2\alpha + s^3(\delta + L) = 1 \leq 1$ *Par conséquent,* T *a un unique point fixe* x^* *avec* $x^* = 7$.
On remarque que F ne satisfait pas la condition $(F2)$ *et que* $\tau \notin \mathcal{S}$.

L'exemple suivant montre que le Théorème 3.13 améliore grandement le Théorème 2.24.

Exemple 3.4 *Soit* $X = [10, 20]$ *être doté de la métrique euclidienne* $d = |.|$ *et* $T : X \longrightarrow X$ *un mapping défini comme suit :*

$$Tx = \begin{cases} 20, & si\ x \in]10,20], \\ 19, & si\ x = 10. \end{cases}$$

Évidemment, T *n'est pas une* F*-contraction puisque* T *n'est pas continue (voir Remark* 1.6*).*

Soit $x, y \in X$ *et noté*

$$D(x,y) = \frac{1}{2}d(x,Tx) + \frac{1}{4}d(y,Tx).$$

Premièrement, nous avons

$$d(Tx,Ty) = 1 > 0 \iff [(x = 10 \wedge y \in]10,20]) \vee (y = 10 \wedge x \in]10,20])].$$

Deuxièmement, T *est une* F*-contraction étendue de type Hardy-Rogers. En fait, on distinguons les cas suivants :*

Cas 1 Si $(x = 10 \wedge y \in]10,20])$. *Dans ce cas, nous obtenons*

$$\begin{aligned} 1 + D(10,y) &\geq 1 + \frac{1}{2}d(10,T10) = \frac{11}{2} \\ &\geq \left(\frac{d(10,y)}{20}\right)(1 + d(T10,Ty)). \end{aligned}$$

Cas 2 Si $(y = 10 \wedge x \in]10,20])$ *Dans ce cas, on obtient*

$$\begin{aligned} 1 + D(x,10) &\geq 1 + \frac{1}{4}d(10,Tx) = \frac{10}{4} \\ &\geq \left(\frac{d(x,10)}{20} + 1\right)(1 + d(Tx,T10)). \end{aligned}$$

Au vu des cas précédents, nous déduisons que

$$1 + D(x,y) \geq \left(\frac{d(x,y)}{20} + 1\right)(1 + d(Tx,Ty)).$$

En passant aux logarithmes, on obtient

$$\tau(d(x,y)) + F(d(Tx,Ty)) \leq F(D(x,y)),$$

avec $F(t) = \ln(t+1)$ *et* $\tau(t) = \ln\left(\frac{t}{20} + 1\right)$, *pour tout* $t \in (0,\infty)$.
En conséquence, T *est une* F*-contraction étendue de type Hardy-Rogers avec* $\beta = \frac{1}{2}, L = \frac{1}{4}$ *Alors nous concluons que le théorème* 3.5 *est vrai (avec* (H_s^1)*) et* $x^* = 20$ *est une point fixe de* T*. En outre, le Par contre, le théorème* 3.3 *n'est pas applicable dans ce cas puisque* $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = \frac{1}{2} \neq 1$, $\tau \notin$ *Set* F *ne satisfait pas à la condition* (F_2)*.*

3.2.2 F-contractions généralisée de type Suzuki–Hardy–Rogers

Dans cette section nous abrdons à la notion de la F-contraction gnéralisée de type Suzuki- Hardy-Rogers donnée ci-dessous

Définition 3.7 *[20] Soit (X, d) un espace métrique complet. Un auto-application T sur X est appelé une F-contraction de type Suzuki-Hardy-Rogers s'il existe $F \in \mathbb{F}$ et $\tau \in \mathcal{S}$ tels que pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$,*

$$\frac{1}{2s}\sigma(x, Tx) < \sigma(x, y) \Longrightarrow \tau(d(x, y)) + F(d(Tx, Ty)) \leq F\left(Q_T^d(x, y)\right),$$

avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta, L \geq 0$, $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = 1$, $\gamma \neq 1$ et $\alpha + \delta + L \leq 1$.

Théorème 3.6 *[20]2.25Soit (X, d) un espace métrique complet. Si T est une F-contraction de type Suzuki-Hardy-Rogers et que F est continue (i.e. $F \in \mathfrak{F}$), alors T a un point fixe unique.*

nous donnons de manière analogue la définition d'une F-contraction étendue de type Suzuki-Hardy-Rogers dans les espaces b-métriques.

Définition 3.8 *[24]Soit (X, σ)un espace b-métrique avec une constante $s \geq 1$. On dit qu'une application $T : X \longrightarrow X$ est une F-contraction étendue de type Suzuki-Hardy-Rogers s'il existe $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\tau \in S_\omega$ tels que pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$,*

$$\frac{1}{2s}\sigma(x, Tx) < \sigma(x, y) \Longrightarrow \tau(d(x, y)) + F(d(Tx, Ty)) \leq F\left(Q_T^d(x, y)\right). \tag{3.29}$$

Remarque 3.7 *Si F est non décroissant, il ressort de la définition 3.11 que tout T qui est une F-contraction étendue de type Suzuki-Hardy-Rogers satisfait à la condition suivante :*

$$\sigma(Tx, Tx) < Q_T^\sigma(x, y); \tag{3.30}$$

pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$ et $\frac{1}{2s}\sigma(x, Tx) < \sigma(x, y)$.

Le deuxième résultat est consacré à la preuve d'un théorème de point fixe concernant la F-contraction généralisée de type Suzuki-Hardy-Rogers dans le cadre d'un espace b-métrique complet.
Le théorème suivant est une extension et une amélioration du Théorème 3.6.

Théorème 3.7 *[24] Soit (X, σ) un espace b-métrique complet avec une constante $s \geq 1$. et $T : X \rightarrow X$ une F-contraction étendue de type Suzuki-Hardy-Rogers avec $F \in \mathcal{F}_c$. Supposons que l'un ou l'autre (H_s^1) ou (H_s^2) tient. De plus, on suppose que $s^2\alpha + s^3(\delta + L) \leq 1$. Alors T possède un unique point fixe x^* et pour tout $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.*

Preuve. *Tout d'abord, nous allons montrer que T a au plus un point fixe. Supposons que x^* et y^* sont deux points fixes distincts de T, c'est-à-dire que $Tx^* = x^* \neq y^* = Ty^*$.*
alors, on a : $\sigma(Tx^*, Ty^*) = \sigma(x^*, y^*) > 0$.

$$\sigma(Tx^*, Ty^*) = \sigma(x^*, y^*) > 0$$

alors

$$\sigma\left(x^{*}, y^{*}\right)>0=\sigma\left(x^{*}, T x^{*}\right)$$

ce qui implique que

$$\frac{1}{2 s} \sigma\left(x^{*}, T x^{*}\right)=0<\sigma\left(x^{*}, y^{*}\right). \tag{3,31}$$

Par conséquent, grâce aux inégalités contractives (3.29) *et* (3.30)*, l'unicité du point fixe est obtenue de manière similaire à la preuve du théorème* 3.5*.*

Soit $\{x_n\}$ *la séquence de Picard basée sur un* $x_0 \in X$ *arbitraire. Comme dans la preuve du théorème* 3.5*, sans perte de généralité, on peut supposer que* $x_n = x_{n+1}$ *pour tout* $n \in N_0$*. Ainsi ,*

$$\sigma_{n}=\sigma\left(x_{n}, x_{n+1}\right)=\sigma\left(x_{n}, T x_{n}\right)>0.$$

d'où

$$\frac{1}{2 s} \sigma\left(x_{n}, T x_{n}\right)<\sigma\left(x_{n}, T x_{n}\right).$$

En outre, nous avons

$$T z=T x_{n}=x_{n+1} \neq x_{n+2}=T^{2} x_{n}=T^{2} z.$$

Puis en suivant les mêmes étapes que celles utilisées dans la preuve du théorème 3.5*, on obtient selon le cas* (H_s^1) *(respectively,* (H_s^1)*),que l'inégalité contractive* (3.29) *avec* $x = x_n$ *et* $y = Tx_n$ *(respectivement, avec* $x = Tx_n$ *et* $y = x_n$*) se transforme en* (P) *avec* $z = x_n$*,* $\lambda = 1$ *et* $d_1 = \alpha$*,* $d_2 = \beta$*,*$d_3 = \gamma$*,* $d_4 = \delta$ *(respectivement,* $d_1 = \alpha$*,* $d_2 = \gamma$*,*$d_3 = \beta$*,* $d_4 = L$*). En conséquence, par la proposition* 3.6 *avec* $\lambda = 1$*, nous obtenons*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \sigma_{n}=0 \tag{3.32}$$

et $\{\sigma_n\}$ *est strictement décroissante (d'après remarque* 3.7 *[29])*

en supposant que $\{x_n\}$ *n'est pas une suite de Cauchy. Par* (3.32) *et en ayant à l'esprit le processus de preuve du théorème* 3.5*, il existe* $\varepsilon > 0$*,* $k_0 \in \mathbb{N}$ *et deux sous-séquences* $\left\{x_{m(k(p))}\right\}_{p \geq k_0}$*,* $\left\{x_{n(k(p))}\right\}_{p \geq k_0}$ *d'entiers positifs telles que*

$$\lim \sigma\left(x_{m(k(p))}, x_{n(k(p))}\right)=l, \tag{3.33}$$

avec $0 < \varepsilon^+ \leq l \leq s\varepsilon^+$*.*

De nouveau, comme dans la preuve du théorème 3.5*, il existe* $N \geq k_0$ *tel que*

$$\sigma\left(T x_{m(k(p))}, T x_{n(k(p))}\right)>0, \quad \text{pour tout } p \geq N. \tag{3.34}$$

D'une part, d'après (3.33)*, il existe* $p_0 \geq k_0$ *tel que*

$$\sigma\left(x_{m(k(p))}, x_{n(k(p))}\right)>\frac{l}{2}, \quad \text{pour tout } p \geq p_{0}.$$

D'autre part, par (3.32)*, il existe* $p_1 \geq k_0$ *tel que*

$$\sigma\left(x_{m(k(p))}, x_{m(k(p))+1}\right) \leq \frac{l}{2}, \quad \textit{pour tout } p \geq p_1.$$

Ainsi, en fixant $p_2 = \max\{p_0, p_1\}$*, on obtient*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2s}\sigma\left(x_{m(k(p))}, xT_{m(k(p))}\right) &= \frac{1}{2s}\sigma\left(x_{m(k(p))}, x_{m(k(p))+1}\right) \\ &\leq \frac{l}{4s} < \frac{l}{2} \leq \sigma\left(x_{m(k(p))}, x_{n(k(p))}\right) \end{aligned} \tag{3.35}$$

pour tout $p \geq p_2$*.*
Par conséquent, compte tenu de (3.34) *et* (3.35)*, la condition contractive* (3.29) *peut être appliquée avec* $x = x_{m(k(p))}$ *et* $y = x_{n(k(p))}$ *pour tout* $p_3 = \max\{N, p_2\}$*. Par conséquent, en suivant la même méthode que celle utilisée dans la preuve du théorème* 3.5*, nous trouvons une contradiction. En d'autres termes,* $\{x_n\}$ *est une suite de Cauchy. comme* (X, σ) *est complet, converge vers un point* x^* *dans X, c'est-à-dire soit ,*

$$\lim \sigma\left(x_n, x^*\right) = 0.$$

Ensuite, nous montrons que x^* *est un point fixe de* T*, c'est-à-dire que* $Tx^* = x^*$*. Supposons au contraire que le contraire, c'est-à-dire que* $\sigma\left(x^*, Tx^*\right) > 0$*. Nous prouvons maintenant que, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

$$\frac{1}{2s}\sigma\left(x_n, Tx_n\right) < \sigma\left(x_n, x^*\right) \textit{ ou } \frac{1}{2s}\sigma\left(Tx_n, T^2x_n\right) < \sigma\left(Tx_n, x^*\right) \tag{3.36}$$

En argumentant par contradiction, nous supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\frac{1}{2s}\sigma\left(x_m, Tx_m\right) \geq \sigma\left(x_m, x^*\right) \textit{ et } \frac{1}{2s}\sigma\left(Tx_m, T^2x_m\right) \geq \sigma\left(Tx_m, x^*\right) \tag{3.37}$$

En utilisant (b_3) *et* (3.37) *avec le fait que* $\{\sigma_n\}$ *est strictement décroissante, nous obtenons*

$$\begin{aligned} \sigma\left(x_m, Tx_m\right) &\leq s\sigma\left(x_m, x^*\right) + s\sigma\left(x^*, Tx_m\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\sigma\left(x_m, Tx_m\right) + \frac{1}{2}\sigma\left(Tx_m, T^2x_m\right) \\ &< \frac{1}{2}\sigma\left(x_m, Tx_m\right) + \frac{1}{2}\sigma\left(x_m, Tx_m\right) \\ &= \sigma\left(x_m, Tx_m\right). \end{aligned}$$

C'est une contradiction. Par conséquent, (3.36) *tient. Par les mêmes arguments que ceux utilisés dans la preuve du Théorème* 3.5*, il s'ensuit qu'il existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\sigma\left(Tx_n, Tx^*\right) \geq \frac{\sigma\left(Tx^*, x^*\right)}{2s} > 0 \tag{3.38}$$

et

$$\sigma\left(T^2x_n, Tx^*\right) \geq \frac{\sigma\left(Tx^*, x^*\right)}{2s} > 0, \tag{3.29}$$

pour tout $n \geq n_1$.
Par conséquent, d'après la preuve du théorème 3.5*, le premier cas dans* (3.36) *(respectivement, le deuxième cas) avec* (3.38) *(respectivement,* (3.39)*), nous permet d'appliquer* (3.12) *avec* ($x = x_n$, $y = x^*$ ou $x = x^*$, $y = x_n$)*(respectivement, avec* ($x = Tx_n$, $y = x^*$ ou $x = x^*$, $y = Tx_n$) *pour tout* $n \geq n_1$*. Donc, d'une manière similaire que dans la preuve du théorème* 3.5*, on arrive à une contradiction. Donc,* $Tx^* = x^*$. ∎

Remarque 3.8 *Pour les mêmes raisons que celles mentionnées dans la remarque* 3.5*, le Théorème* 3.7 *étend et améliore considérablement le Théorème* 3.6*.*

L'exemple suivant montre que le Théorème 3.7 améliore grandement le Théorème 3.6.

Exemple 3.5 *Soit* $X = \{0, 3, 7\}$ *muni de la métrique usuelle* $d(x, y) = |x - y|$ *pour tout* $x, y \in X$*. Définissons également l'application* $T : X \to X$ *par* $T(0) = T(3) = 3$ *et* $T(7) = 0$*, et* $F(t) = t$ *et* $\tau(t) = \frac{t}{8}$ *pour tout* $t \in (0, \infty)$*.*
On a

$$d(Tx, Ty) = 3 > 0 \iff \begin{bmatrix} (x = 0 \wedge y = 7) \vee (x = 7 \wedge y = 0) \\ (x = 3 \wedge y = 7) \vee (x = 7 \wedge y = 3) \end{bmatrix}. \tag{3.40}$$

D'autre part, dans chacun des cas ci-dessus (3.40), on obtient

$$\frac{1}{2}d(x, Tx) < 4 \leq d(x, y),$$

et

$$\begin{aligned} \frac{d(x,y)}{8} + d(Tx, Ty) &= \frac{d(x,y)}{8} + 3 \\ &\leq \frac{d(x,y)}{8} + \frac{3d(x,y)}{4} \\ &= \frac{7d(x,y)}{8} \leq Z(x,y), \end{aligned} \tag{3.41}$$

avec $Z(x, y) = \frac{7}{8}d(x, y) + \frac{1}{18}d(y, Tx)$*.*
De manière équivalente, l'inégalité (3.41) prend la forme suivante

$$\tau(d(x, y)) + F(d(Tx, Ty)) \leq F(Z(x, y)).$$

Par conséquent, T *est une F-contraction étendue de type Suzuki-Hardy-Rogers avec* $\alpha = \frac{7}{8}$*, et* $L = \frac{1}{16}$*,* $\beta = \gamma = \delta = 0$ *et toutes les conditions du théorème 3.7 sont satisfaites (avec* (H_1^2)*). Par conséquent, T a un unique point fixe* $x^* = 3$*. Notez que le théorème* 3.6 *n'est pas applicable puisque* $\alpha + \beta + \gamma + 2\delta = \frac{7}{8} \neq 1$*,* $\tau \notin \acute{S}$ *et F ne satisfait pas la condition* (F_2)*.*

Notre troisième résultat étend et améliore considérablement le résultat énoncé dans la remarque 3.2. Dans le théorème suivant, nous prouvons un résultat de point fixe concernant une F-contraction étendue de type Hardy-Rogers dans le cadre des espaces b-métriques sans les deux conditions $(F2)$ et "F est semi-continu supérieur".

Théorème 3.8 *[24] Soit (X, σ) un espace b-métrique complet avec une constante $s \geq 1$. et $T : X \longrightarrow X$ satisfaisant la condition contractive (3.9) avec $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction non décroissante et $\tau \in \mathcal{S}_1$. Supposons que l'un ou l'autre de (H_s^1) ou (H_s^2) tient.*
De plus, nous supposons que $s^2\alpha + s^3(\delta + L) < 1$. Alors T a un unique point fixe point fixe x^* et pour tout $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n \in N}$ converge vers x^*.
Preuve. *voir [29]* ■

En mettant $\alpha = \delta = L = 0$, le théorème 3.8 se réduit au corollaire suivant.

Corollaire 3.4 *[24] Soit (X, σ) un espace b-métrique complet avec une constante $s \geq 1$. et T une auto-applocation sur X. Supposons qu'il existe une fonction non décroissante fonction $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\tau \in \mathcal{S}_1$ telle que pour tout $x, y \in X$ avec $Tx \neq Ty$,*

$$\tau\left(d\left(x,y\right)\right) + F\left(d\left(Tx,Ty\right)\right) \leq F\left(\beta d\left(x,Tx\right) + \gamma d\left(y,Yy\right)\right),$$

où $\beta, \gamma \in [0, \infty)$ satisfaisant $\beta + \gamma = \frac{1}{s}$ et $\gamma \neq \frac{1}{s}$. Alors T a un unique point fixe x^* et pour tout $x_0 \in X$ la suite $\{T^n x_0\}_{n \in N}$ converge vers x^*.

Remarque 3.9 *Le corollaire 3.4 est une extension propre et une amélioration du Corollaire 2.27 [29]. En fait, en prenant $s = 1$ dans le Corollaire 3.4, nous retrouvons le Corollaire 2.27[29]. De plus, nous montrons que les deux conditions $(F2)$ et "F est semi-continu supérieur" du corollaire 3.4 sont remplies. semi-continue supérieure" du Corollaire 2.27 [29] peuvent être supprimées. De plus, la condition que $\tau \in \acute{S}$ est changée en la condition légèrement plus faible que $\tau \in \mathcal{S}_1$ et le Corollaire 2.27 [29] reste valide sans la rigueur de la monotonicité de F.*

Chapitre 4

Application

Dans ce chapitre, nous présentons trois applications différentes et dans chacune d'elles, nous prouvons l'existence et l'unicité des solutions pour certaines classes d'équations. Dans la première application, nous traitons des équations fonctionnelles apparaissant dans la programmation dynamique. La deuxième application concerne les équations intégrales non linéaires de Volterra. La dernière application est consacrée à l'étude d'un problème de valeurs limites pour une équation différentielle du second ordre.

4.1 Existence et unicité des solutions bornées des équations fonctionnelles en programmation dynamique

Dans cette section, nous étudions l'existence et l'unicité des solutions bornées des équations fonctionnelles suivantes qui apparaissent dans la programmation dynamique du processus de décision multi-étapes :

$$u(x) = \sup_{y \in D} \{ f(x, y) + G(x, y, u(\varphi(x, y))) \}, \qquad x \in W, \tag{4.1}$$

avec $f : W \times D \longrightarrow \mathbb{R}$ et $G : W \times D \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont bornés, $\varphi : W \times D \longrightarrow W$. Nous supposons que W et D sont des espaces de Banach. Dans ce cadre, W (respectivement, D) est appelé l'espace d'état (respectivement, l'espace de décision). De plus, φ est la transformation du processus et $u(x)$ représente la fonction de rendement optimale avec l'état initial x.

Soit $X = B(W)$ désigne l'espace de toutes les fonctions bornées à valeurs réelles sur W. Maintenant, nous dotons X de σ défini par

$$\sigma(h, k) = \sup_{n \in W} |h(x) - k(x)|^p, \quad p \geq 1,$$

pour tout $h, k \in X$. d'où (X, σ) est un espace b-métrique complet avec $s = 2^{p-1} \geq 1$.

En effet, de l'exemple 2.2, on peut déduire que (X, σ) est un espace b-métrique avec $s = 2^{p-1} \geq 1$. De plus, toute séquence de Cauchy $\{h_n\}$ dans X converge uniformément vers une fonction bornée h^* , ce qui nous permet d'obtenir la complétude de X.
Nous définissons aussi l'application $T : X \longrightarrow X$ par

$$(Tu)(x) = \sup_{y \in D} \{f(x, y) + G(x, y, u(\varphi(x, y)))\}, \tag{4.2}$$

pour tout $u \in X$ et $x \in W$. Puisque f et G sont bornés, et T est bien défini.
Soit $p \geq 1$ et soit $\Psi : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ est défini par

$$\Psi(t) = \begin{cases} \frac{(3t)^{\frac{1}{p}}}{2^{1+\frac{3}{p}}}, & \text{si } 0 < t \leq 1, \\ \frac{1}{2^{1-\frac{1}{p}}}, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

Soit $h, k \in X$. noté

$$\chi_p(h, k) = \xi M(h, k),$$

avec $M(h, k) = \sigma(h, Th) + \sigma(k, Tk)$ et $\xi = \frac{1}{2^p}, p \geq 1$.
Maintenant, nous sommes prêts à énoncer et prouver notre prochain résultat.

Théorème 4.1 *[24]Soit $p \geq 1$. Soit T une auto-application sur X défini par (4.2) et supposons que la condition suivante est satisfaite :*
(K) : pour tout $h, k \in X$ avec $Th \neq Tk$,

$$|G(x, y, h(z)) - G(x, y, k(z))| \leq \Psi\left(\chi_p(h, k)\right),$$

avec $x, z \in X$ et $y \in D$. Alors l'équation fonctionnelle (4.1) a une solution unique bornée.

Preuve. Soit λ Soit un nombre positif arbitraire, $x \in W$ et $h, k \in X$ avec $Th \neq Tk$. Alors il existe $y_1, y_2 \in D$ tels que

$$(Th)(x) < f(x, y_1) + G(x, y_1, h(\varphi(x, y_1))) + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2}, \tag{4.3}$$

$$(Tk)(x) < f(x, y_2) + G(x, y_2, k(\varphi(x, y_2))) + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2} \tag{4.4}$$

Encore une fois, par définition de T, nous avons

$$(Th)(x) \geq f(x, y_2) + G(x, y_2, h(\varphi(x, y_2))), \tag{4.5}$$

$$(Tk)(x) < f(x, y_1) + G(x, y_1, k(\varphi(x, y_1))). \tag{4.6}$$

En utilisant (4.3) et (4.6) avec (K), on peut obtenir

$$
\begin{aligned}
(Th)(x) - (Tk)(x) &< G(x, y_1, h(\varphi(x, y_1))) - G(x, y_1, k(\varphi(x, y_1))) + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2} \\
&\leq |G(x, y_1, h(\varphi(x, y_1))) - G(x, y_1, k(\varphi(x, y_1)))| + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2} \\
&\leq \Psi\left(\chi_p(h, k)\right) + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

Analogiquement, à partir de (4.4) et (4.5) et de (K), nous avons

$$
(Tk)(x) - (Th)(x) < \Psi\left(\chi_p(h, k)\right) + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2} \tag{4.8}
$$

En combinant (4.7) et (4.8), nous déduisons que

$$
|(Th)(x) - (Tk)(x)| < \Psi\left(\chi_p(h, k)\right) + \frac{\lambda^{\frac{1}{p}}}{2}
$$

En utilisant l'inégalité suivante

$$
(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p), \quad a, b > 0,
$$

Il s'ensuit que

$$
{}^{|(Th)(x)-(Tk)(x)|}p < 2^{p-1}\left[\Psi\left(\chi_p(h, k)\right)\right]^p + \frac{\lambda}{2}
$$

L'inégalité ci-dessus donne

$$
\sigma(Th, Tk) < 2^{p-1}\left[\Psi\left(\chi_p(h, k)\right)\right]^p + \frac{\lambda}{2} \tag{4.9}
$$

Maintenant, nous discutons des deux cas possibles :

Cas 1 Si $0 < \chi_p \leq 1$. Dans ce cas, (4.9) se transforme en

$$
\sigma(Th, Tk) < \frac{3\chi_p(h, k)}{16} + \frac{\lambda}{2}. \tag{4.10}
$$

Comme (4.10) ne dépend pas de $x \in W$ et que $\lambda > 0$ est pris arbitrairement, on a

$$
\sigma(Th, Tk) \leq \frac{3\chi_p(h, k)}{16}, \tag{4.11}
$$

d'où il résulte que

$$
\sigma(Th, Tk) < 1. \tag{4.12}
$$

D'autre part, en utilisant $(b3)$, nous avons

$$\begin{aligned}\sigma(h,k) &\leq s\sigma(h,Th)+s^2\sigma(Th,Tk)+s^2\sigma(Tk,k)\\ &\leq s^2\sigma(h,Th)+s^2\sigma(k,Tk)+s^2\sigma(Th,Tk)\\ &\leq s^2M(h,k)+s^2\sigma(Th,Tk)\\ &\leq s^2\frac{\chi_p(h,k)}{\xi}+s^2\sigma(Th,Tk).\end{aligned}$$

En gardant à l'esprit $s=2^{p-1}$ et $\xi=\frac{1}{2^p}$ la dernière inégalité conduit à

$$\sigma(h,k)\leq 2s^3\chi_p(h,k)+s^2\sigma(Th,Tk). \tag{4.13}$$

Grâce à (4.10) et (4.13), nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(h,k)}{16s^3} &\leq \frac{\chi_p(h,k)}{8}+\frac{\sigma(Th,Tk)}{16s}\\ &< \frac{\chi_p(h,k)}{8}+\sigma(Th,Tk)\\ &< \frac{\chi_p(h,k)}{8}+\frac{3\chi_p(h,k)}{16}+\frac{\lambda}{2}\\ &= \frac{5\chi_p(h,k)}{16}+\frac{\lambda}{2}.\end{aligned} \tag{4.14}$$

En tenant compte de (4.14) et en utilisant l'inégalité composée suivante

$$\frac{a}{1+a}<\ln(1+a)<a,\quad \text{pour tout } a>0,$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\sigma(h,k)}{16s^3}+\ln(1+\sigma(Th,Tk)) &< \frac{5\chi_p(h,k)}{16}+\frac{\lambda}{2}+\sigma(Th,Tk)\\ &< \frac{\chi_p(h,k)}{2}+\lambda\\ &\leq \frac{\chi_p(h,k)}{1+\chi_p(h,k)}+\lambda\\ &< \ln\left(1+\chi_p(h,k)\right)+\lambda.\end{aligned}$$

Comme la dernière inégalité ne dépend pas de $x\in X$ et que $\lambda>0$ est pris arbitrairement, on obtient

$$\frac{\sigma(h,k)}{16s^3}+\ln(1+\sigma(Th,Tk))\leq\ln\left(1+\chi_p(h,k)\right). \tag{4.15}$$

De plus, en vertu de (4.11) et (4.13) avec le fait que $0<\chi_p(h,k)\leq 1$, on obtient

$$\sigma(h,k)\leq 2s^3+\frac{3s^2}{16}=2^{3p-2}+3\times 2^{2p-6}. \tag{4.16}$$

Cas 2 Si $\chi_p(h,k) > 1$. Dans ce cas, (4.9) prend la forme

$$\sigma(Th,Tk) < 1 + \frac{\lambda}{2}. \tag{4.17}$$

Encore une fois, comme (4.17) ne dépend pas de $x \in W$ et que $\lambda > 0$ est pris arbitrairement, nous avons

$$\sigma(Th,Tk) \leq 1. \tag{4.18}$$

D'après (4.17) et en utilisant les inégalités suivantes

$$\ln(1+b) < b, b + \frac{1}{b} \geq 2, \quad \text{pour tout } b > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} 1 + \ln(1 + \sigma(Th,Tk)) &< 1 + \sigma(Th,Tk) \\ &< 2 + \frac{\lambda}{2} \\ &< \chi_p(h,k) + \frac{1}{\chi_p(h,k)} + \lambda. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Étant donné que (4.19) ne dépend pas de $x \in W$ et que $\lambda > 0$ est pris arbitrairement, nous avons

$$1 + \ln(1 + \sigma(Th,Tk)) \leq \chi_p(h,k) + \frac{1}{\chi_p(h,k)} \tag{4.20}$$

Par conséquent, compte tenu des inégalités (4.12), (4.16) et (4.18), les inégalités (4.15) et (4.20) nous permettent d'obtenir

$$\begin{aligned} \tau(\sigma(h,k)) + F(\sigma(Th,Tk)) &\leq F(\chi_p(h,k)) \\ &= F\left(\frac{1}{2^p} M(h,k)\right), \end{aligned}$$

pour tout $h, k \in X$ et $Th \neq Tk$ avec $F : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ donné par

$$F(t) = \begin{cases} \ln(t+1), & \text{si } t \in]0,1], \\ t + \frac{1}{t}, & \text{si } t > 1. \end{cases}$$

et $\tau : (0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ donné par

$$\tau(t) = \begin{cases} \frac{t}{2^{3p+1}}, & \text{si } t \in]0, C_p], \\ 1, & \text{sinon}, \end{cases}$$

avec $C_p = 2^{3p-2} + 3 \times 2^{2p-6}$.

Par conséquent, toutes les conditions du Corollaire 3.30 sont satisfaites avec $\beta = \gamma = \frac{1}{2^p}$, $p \geq 1$. Par conséquent, T a un unique point fixe u^* dans $X = B(W)$. Ainsi, l'équation fonctionnelle équation fonctionnelle (4.1) a une solution bornée unique. ■

4.2 Application aux équations intégrales non linéaires de Volterra

Nous appliquons maintenant le théorème 3.26 pour prouver l'existence et l'unicité d'une solution de l'équation intégrale suivante de type Volterra :

$$u(t) = g(t) + \int_0^t K(t, r, u(r))\, dr, \quad t \in [0, a], \tag{4.21}$$

avec $a > 0$, $K : [0, a] \times [0, a] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : [0, a] \to \mathbb{R}$.
Considérons $X = C([0, a], \mathbb{R})$ comme l'ensemble de toutes les fonctions continues $u : [0, a] \to \mathbb{R}$. Il est bien connu que X équipé de la norme de Bielecki

$$\|u\| = \sup_{t\in[0,a]} e^{-t} |u(t)|$$

est un espace de Banach. Ainsi, X doté de la distance associée à la norme de Bielecki

$$d(u, v) = \sup_{t\in[0,a]} e^{-t} |u(t) - v(t)| \quad \text{pour tout } u, v \in X$$

est un espace métrique completest. Maintenant, nous définissons

$$\sigma(u, v) = (d(u, v))^2 = \sup_{t\in[0,a]} e^{-2t} (u(t) - v(t))^2 \quad \text{pour tout } u, v \in X \tag{4.22}$$

Et on a (X, σ) est un epace b-métrique complet avec une constante $s = 2$.

Théorème 4.2 *[24]Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*
(H_1) *les fonctions K et g sont continues,*
(H_2) *pour tout* $r, t \in [0, a]$ *et pour tout* $z, w \in \mathbb{R}$*, on a*

$$|K(t, r, z) - K(t, r, w)| \leq \frac{\sqrt{2}\, |z - w|}{\sqrt{a\left((z - w)^2 + 16\right)}}.$$

Alors l'équation intégrale (4.21) *a une solution unique dans X.*
Preuve. *doté* $X = C([0, a], \mathbb{R})$ *avec la b-métrique définie par (4.22) et considérer le mapping* $T : X \to X$ *comme suit :*

$$(Tu)(t) = g(t) + \int_0^t K(t, r, u(r))\, dr, \quad u \in X,\ t \in [0, a].$$

Évidemment, sous les hypothèses du théorème, T *est bien défini.*

Soit $u, v \in X$ *tel que* $Tu \neq Tv$.*En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'hypothèse* $(H2)$, *nous obtenons*

$$\begin{aligned}
|(Tu)(t)-(Tv)(t)|^2 &\leq \left(\int_0^t 1dr\right)\int_0^t |K(t,r,u(r))-K(t,r,v(r))|^2 dr \\
&\leq \int_0^t \frac{2(u(r)-v(r))^2}{(u(r)-v(r))^2+16}dr \\
&\leq \int_0^t \frac{2(u(r)-v(r))^2}{(u(r)-v(r))^2 e^{-2r}+16}dr \\
&\leq \int_0^t \frac{2(u(r)-v(r))^2 e^{-2r}e^{2r}}{(u(r)-v(r))^2 e^{-2r}+16}dr \\
&\leq \frac{2\sigma(u,v)}{\sigma(u,v)+16}\int_0^t e^{2r}dr \\
&\leq \frac{2\sigma(u,v)e^{2t}}{\sigma(u,v)+16}.
\end{aligned}$$

Cela implique que

$$((Tu)(t)-(Tv)(t))^2 e^{-2t} \leq \frac{2\sigma(u,v)}{\sigma(u,v)+16}.$$

En prenant le suprématisme par rapport à $t \in [0,a]$ *dans l'inégalité ci-dessus, nous avons*

$$\sigma(Tu,Tv) \leq \frac{2\sigma(u,v)}{\sigma(u,v)+16}. \tag{4.23}$$

En utilisant (4.23), *après des calculs de routine, on peut obtenir*

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{\sigma(u,v)}{16}+1\right)+\sigma(Tu,Tv)+\lfloor\sigma(Tu,Tv)\rfloor &\leq \frac{\sigma(u,v)}{8}+\left\lfloor\frac{\sigma(u,v)}{8}\right\rfloor \\
&\leq N(u,v)+\lfloor N(u,v)\rfloor,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

où $\lfloor x\rfloor$ *désigne la partie intégrale de* x *et*

$N(u,v)=\frac{1}{8}d(x,y)+\frac{1}{4}d(x,Tx)+\frac{1}{16}d(y,Ty)+\frac{1}{64}(d(x,Ty)+d(y,Tx))$

En choisissant $F(t)=t+\lfloor t\rfloor$ *et* $\tau(t)=\ln\left(\frac{t}{16}+1\right)$, *pour tout* $t\in(0,\infty)$,

Par conséquent, toutes les conditions du Corollaire 3.4 *sont satisfaites avec* $\beta=\gamma=\frac{1}{2^p}$, $p\geq 1$. *Par conséquent,* T *a un unique point fixe* u^* *dans* $X=C([0,a],\mathbb{R})$ *Alors, l'équation intégrale* (4.21) *a une solution unique* u^* *en* $C([0,a],\mathbb{R})$. ■

4.3 Application aux équations différentielles du second ordre

nous discutons de l'existence et l'unicité des solutions du problème de valeur limite à deux points suivant pour l'équation différentielle du second ordre :

$$\begin{cases} -\frac{d^2x}{dt^2}=f(t,x(t)), & t\in I, \\ x(0)=x(1)=0, \end{cases} \tag{4.25}$$

avec $I=[0,1]$ et $f:[0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est une fonction continu.
Soit $X=C(I,\mathbb{R})$ l'espace de toutes les fonctions continues $x:I\longrightarrow\mathbb{R}$. On sait que est bien connu que X doté de

$$\sigma_\infty(x,y)=\sup\left\{(x(t)-y(t))^2\right\},\quad \text{pour tout } x,y\in X$$

est un epace b-métrique complet avec une constante $s=2$.

Théorème 4.3 *[24]Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :*
(W) *pour tout* $z,w\in\mathbb{R}$ *et pour tout* $r\in I$, *on a*

$$|f(r,z)-f(r,w)|\leq\sqrt{\ln\left(\frac{(z-w)^2}{16}+1\right)}.$$

Alors le problème (4.25) a une solution unique $x^*\in C^2(I,\mathbb{R})$
Preuve. *On sait que le problème (4.25) est équivalent à l'intégrale suivante équation :*

$$x(t)=\int_0^1 G(t,r)f(r,x(r))\,dr,\quad \forall t\in I, \tag{4.26}$$

où G est la fonction de Green associée au problème (4.25), *donnée par*

$$G(t,r)=\begin{cases}t(1-r),0\leq t\leq r\leq 1,\\ r(1-t),0\leq r\leq t\leq 1.\end{cases}$$

Par conséquent, $x\in C^2(I,\mathbb{R})$ *est une solution du problème* (4.25) *si et seulement si .* $x\in C(I,\mathbb{R})$ *est une solution de l'équation intégrale* (4.26). *Maintenant, nous pouvons définir le mapping* $T:X\longrightarrow X$ *comme suit :*

$$Tx(t)=\int_0^1 G(t,r)f(r,x(r))\,dr,\quad \forall t\in I,\forall x\in X.$$

Alors trouver un unique point fixe $x^*\in X$ *de* T *est équivalent à établir l'existence et l'unicité des solutions du problème* (4.25).
Soit $x,y\in X$ *tel que* $Tx\neq Ty$. *D'après l'hypothèse* (W), *nous obtenons*

$$\begin{aligned}((Tx)(t)-(Ty)(t))^2 &\leq \left[\int_0^1 G(t,r)\sqrt{\ln\left(\frac{(x(r)-y(r))^2}{16}+1\right)}\,dr\right]^2\\ &\leq \ln\left(\frac{\sigma_\infty(x,y)}{16}+1\right)\left(\sup_{t\in I}\int_0^1 G(t,r)\,dr\right)^2\\ &= \frac{1}{64}\ln\left(\frac{\sigma_\infty(x,y)}{16}+1\right).\end{aligned}$$

Dans l'inégalité ci-dessus, nous avons utilisé que $\sup\limits_{t\in I}\int_0^1 G(t,r)\,dr=\frac{1}{8}$. *D'ou,*

$$\sigma_\infty(Tx,Ty)\leq\frac{1}{64}\ln\left(\frac{\sigma_\infty(x,y)}{16}+1\right). \tag{4.27}$$

En utilisant (4.27)*, après des calculs de routine, nous obtenons*

$$\frac{\sigma_\infty(x,y)}{16}+\sigma_\infty(Tx,Ty)\leq\frac{\sigma_\infty(x,y)}{8}\leq M(x,y),$$

avec

$$M(x,y)=\frac{1}{8}\left(d(x,y)+d(x,Tx)+d(y,Ty)\right)+\frac{1}{32}\left(d(x,Ty)+d(y,Tx)\right),$$

ou, de manière équivalente,

$$\tau(\sigma(u,v))+F(\sigma(Tu,Tv))\leq F(M(u,v)).$$

Par conséquent, toutes les conditions du Théorème 3.13 sont satisfaisantes avec $F(t)=t$, $\tau(t)=\frac{t}{16}$, *pour tout* $t\in(0,\infty)$, $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{8}$ *et* $L=\delta=\frac{1}{32}$. *Par conséquent,* T *a unique point fixe* u^* *dans* $X=C(I,\mathbb{R})$. *Alors le problème* (4.25) *a une solution unique solution* u^* *dans* $C^2(I,\mathbb{R})$. ∎

Conclusion

En 1973 et dans l'article intitulé **A generalization of a fixed point theorem of Reich,** Hardy, G. E. and Rogers ont démontré le théorème suivant

Théorème 4.4 *Soit* (X,d) *un espace métrique et soit* T *une auto-application sur* X *satisfaisant la condition pour tout* $x,y\in X$,

$$d(Tx,Ty)\leq ad(x,Tx)+bd(y,Ty)+cd(x,Ty)+ed(y,Tx)+fd(x,y), \tag{α_1}$$

où a,b,c,e,f *sont des entiers positifs et on pose* $\alpha=a+b+c+e+f$. *Alors*
(a) Si X *est complet et* $\alpha<1$, T *a un unique point fixe.*
(b) Si (α_1) *est modifié à la condition*
$x\neq y$ *implique*

$$d(Tx,Ty)<ad(x,Tx)+bd(y,Ty)+cd(x,Ty)+ed(y,Tx)+fd(x,y),$$

Dans ce cas on supose que X *est compact, T est continue et* $\alpha=1$, *alors* T *a un point fixe unique*

En outre, on peut voir facilement que la F-contraction de type Hardy-Rogers $d(Tx,Ty)>0\Longrightarrow\tau(d(x,y))+F(d(Tx,Ty))\leq F\left(Q_T^d(x,y)\right)$ avec la croissance de F nous donne l'inégalité stricte suivante : $d(Tx,Ty) < Q_T^d(x,y) = ad(x,y) + bd(x,Tx) + cd(y,Ty) + e[d(x,Ty) + d(y,Tx)])$, ce qui implique $d(Tx,Ty) \leq Q_T^d(x,y) = ad(x,y) + bd(x,Tx) + cd(y,Ty) + e[d(x,Ty) + d(y,Tx)])$ pour tout $x, y \in X$. Cette dernière inégalité et ressemble à celle du théorème montionné ci-dessus. Ce qui montre que l'ancien théorème de Hardy- Roger est plus général. Par conséquent, on déduit que tout ce que nous avons étudié sur la F-contraction et F-contraction de type Hardy-Roger est un cas particulié de l'ancien condition contractive de Hardy-Roger.

Par ailleurs, nous avons conclu que la combinaison entre le théorème de point fixe sous la F-contraction généralisée de type Hardy-Roger et la résolution de certains problèmes mathématiques phisiques est bien fonctionnée.

Bibliographie

[1] Boyd, D. W., & Wong, J. S. (1969). On nonlinear contractions. Proceedings of the American Mathematical Society, 20(2), 458-464.

[2] Li, D. (2013). Cours d'analyse fonctionnelle : avec 200 exercices corrigés. Ellipses.

[3] Koleva, R., & Zlatanov, B. (2016). On fixed points for Chatterjeas maps in b-metric spaces. Turk. J. Anal. Number Theory, 4, 31-34.

[4] Agarwal, R. P., Aksoy, Ü., Karapınar, E., & Erhan, I. M. (2020). F-contraction mappings on metric-like spaces in connection with integral equations on time scales. Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas, 114, 1-12.

[5] Edelstein, M. (1962). On fixed and periodic points under contractive mappings. Journal of the London Mathematical Society, 1(1), 74-79.

[6] Wardowski, D. (2012). Fixed points of a new type of contractive mappings in complete metric spaces. Fixed point theory and applications, 2012(1), 1-6.

[7] Rhoades, B. E. (1977). A comparison of various definitions of contractive mappings. Transactions of the American Mathematical Society, 226, 257-290.

[8] Farkas, C., Molnár, A. É., & Nagy, S. (2014). A generalized variational principle in b-metric spaces. Le Matematiche, 69(2), 205-221.

[9] Derouiche, D., & Ramoul, H. (2020). New fixed point results for F-contractions of Hardy–Rogers type in b-metric spaces with applications. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 22(4), 1-44.

[10] Rakotch, E. (1962). A note on contractive mappings. Proceedings of the American Mathematical Society, 13(3), 459-465.

[11] Edelstein, M. (1962). On fixed and periodic points under contractive mappings. Journal of the London Mathematical Society, 1(1), 74-79.

[12] Kannan, R. (1969). Some results on fixed points—II. The American Mathematical Monthly, 76(4), 405-408.

[13] R. M. T. Bianchini, Su un problema di S. Reich aguardante la teoría dei punti fissi, Boll. Un Mat. Ital. 5 (1972)1, 03-108

[14] B. K. Ray, On non-expansivem appingsi n a metric space, Nanta Math. 7 (1974), 86-92.

[15] S. Reich, Some remarks concerning contraction mappings, Oanad. Math. Bull. 14 (1971), 121-124M. R 45

[16] Sehgal, V. M. (1972). On fixed and periodic points for a class of mappings. Journal of the London Mathematical Society, 2(3), 571-576.

[17] Hardy, G. E., & Rogers, T. D. (1973). A generalization of a fixed point theorem of Reich. Canadian Mathematical Bulletin, 16(2), 201-206.

[18] Wardowski, D., & Van Dung, N. (2014). Fixed points of F-weak contractions on complete metric spaces. Demonstratio Mathematica, 47(1), 146-155.

[19] Cosentino, M., & Vetro, P. (2014). Fixed point results for F-contractive mappings of Hardy-Rogers-type. Filomat, 28(4), 715-722.

[20] Vetro, F. (2016). F-contractions of Hardy–Rogers type and application to multistage decision. Nonlinear Analysis : Modelling and Control, 21(4), 531-546.

[21] Cosentino, M., Jleli, M., Samet, B., & Vetro, C. (2015). Solvability of integrodifferential problems via fixed point theory in b-metric spaces. Fixed Point Theory and Applications, 2015(1), 1-15.

[22] Lukács, A., & Kajántó, S. (2018). Fixed point theorems for various types of F-contractions in complete b-metric spaces. Fixed Point Theory, 19(1), 321-334.

[23] Shukla, S., Gopal, D., & Martínez-Moreno, J. (2017). Fixed points of set-valued F-contractions and its application to non-linear integral equations. Filomat, 31(11), 3377-3390.

[24] Derouiche, D., & Ramoul, H. (2020). New fixed point results for F-contractions of Hardy–Rogers type in b-metric spaces with applications. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 22(4), 1-44.

[25] Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. Fund. math, 3(1), 133-181.

[26] Rousseau, C. Point fixe de Banach.

[27] Aghajani, A., Abbas, M., & Roshan, J. R. (2014). Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces. Mathematica Slovaca, 64(4), 941-960.

[28] Roshan, J. R., Parvaneh, V., & Kadelburg, Z. (2014). Common fixed point theorems for weakly isotone increasing mappings in ordered b-metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl, 7(4), 229-245.

[29] Derouiche, D., & Ramoul, H. (2020). New fixed point results for F-contractions of Hardy–Rogers type in b-metric spaces with applications. Journal of Fixed Point Theory and Applications, 22(4), 1-44.

[30] Van An, T., Tuyen, L. Q., & Van Dung, N. (2015). Stone-type theorem on b-metric spaces and applications. Topology and its Applications, 185, 50-64.