République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Sur quelques équations d'évolution de type hyperbolique avec retard

Thème

Présenté Par:
Faouzi DRID
Nassim DJEDDI

Devant le jury:

Abdellatif TOUALBIA	MCB	Univérsité de Tébessa	Président
Nouri BOUMAZA	MCA	Univérsité de Tébessa	Rapporteur
Belgacem REBIAI	PROF	Univérsité de Tébessa	Examinateur

Date de soutenance : 19/06/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

شكر و عرفان

نحمد الله و نشكره شكرا جزيلا إذ هو خالقنا، و معيننا

فهو الأولى بالشكر في كل الأوقات و الظروف.

نحمد الله عز و جل و نثني عليه الخير كله الذي وفقنا

لإتمام هذا العمل، و نسأله ان يجعل هذا كله

خالصا لوجهه الكريم وأن ينفعنا به و ينتفع به من بعدنا.

نتقدم بكل إحترام و تقدير بشكرنا و عرفاننا للأستاذ و الدكتور

الفاضل الذي كان موجهنا في البحث العلمي

"بومعزة النوري"، الذي كان له الفضل الكبير في شق الطريق نحو النجاح

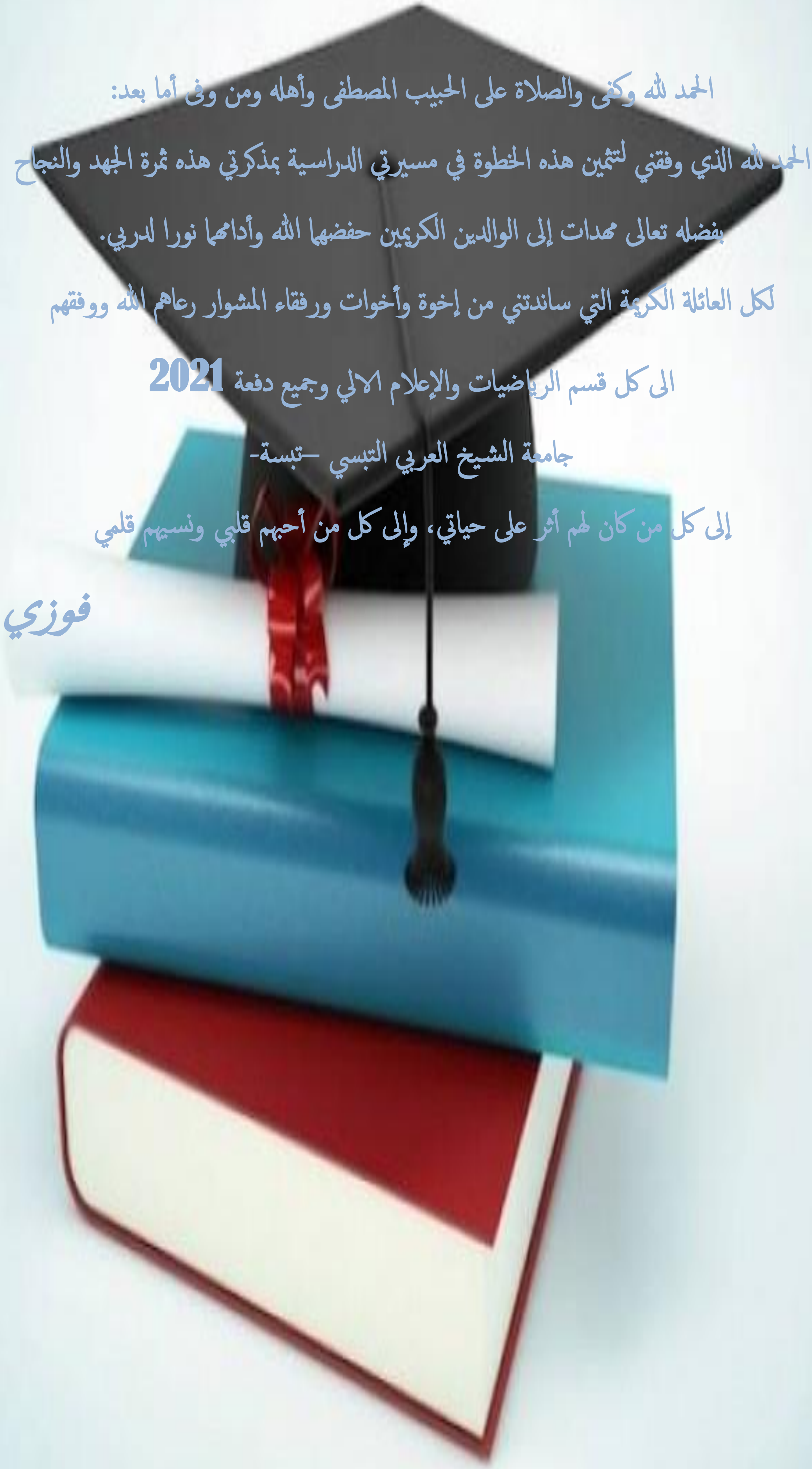
و على كل النصائح و التوجيهات.

كما نتقدم بالشكر لكل الأساتذة في تكويننا عبر مسيرتنا الدراسية

وإلى كل من قدم لنا يد المساعدة من قريب أو من بعيد

فله منا خالص الإحترام و التقدير،

نسأل الله أن يجازي الجميع كل الخير



الحمد لله وكفى والصلاة على الحبيب المصطفى وأهله ومن وفى أما بعد:

الحمد لله الذي وفقني لتثمين هذه الخطوة في مسيرتي الدراسية بمذكرتي هذه ثمرة الجهد والنجاح

بفضله تعالى مهدات إلى الوالدين الكريمين حفضهما الله وأدامهما نورا لدربي.

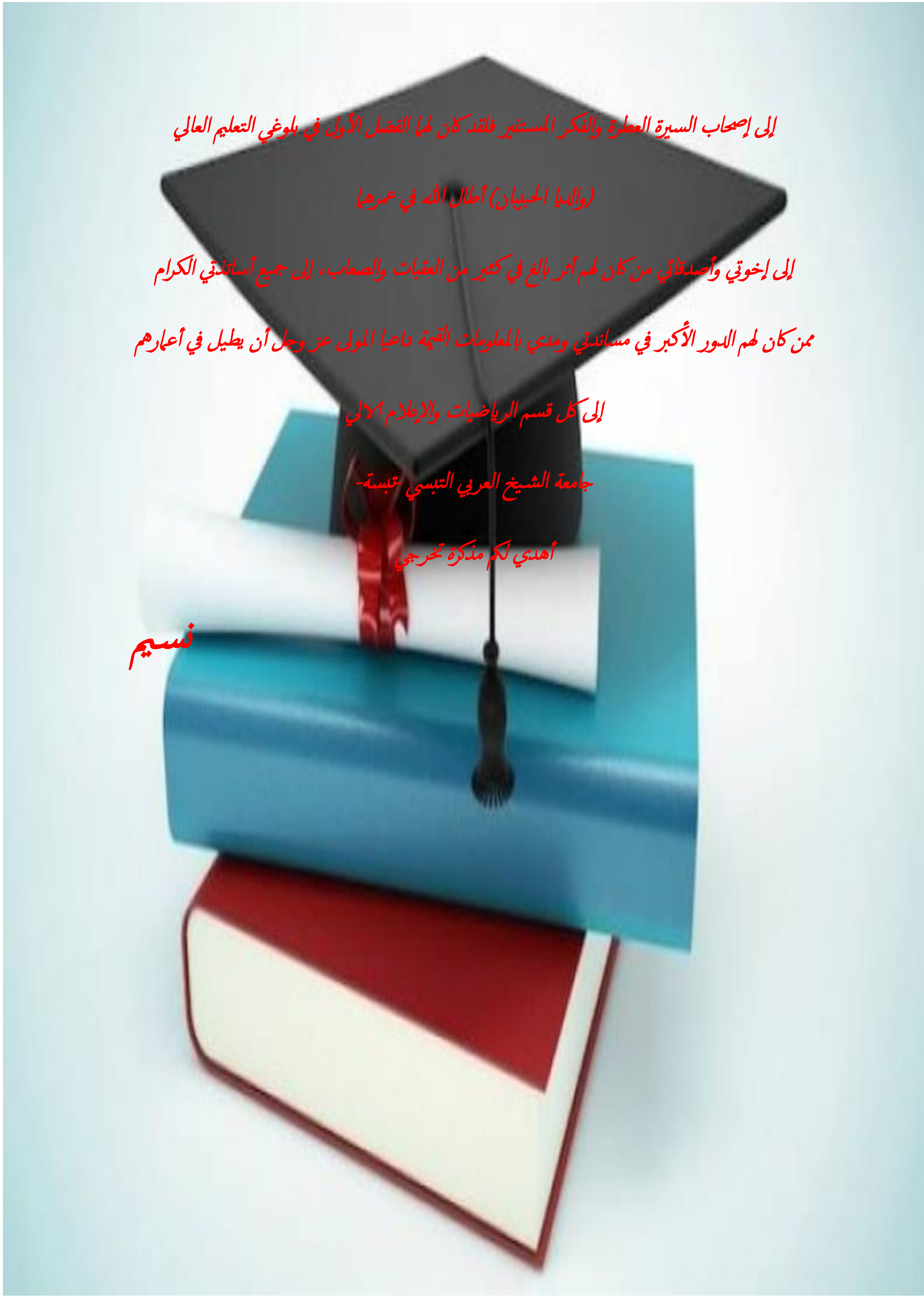
لكل العائلة الكريمة التي ساندتني من إخوة وأخوات ورفقاء المشوار رعاهم الله ووفقهم

الى كل قسم الرياضيات والإعلام الالي وجميع دفعة **2021**

جامعة الشيخ العربي التبسي –تبسة-

إلى كل من كان لهم أثر على حياتي، وإلى كل من أحبهم قلبي ونسيهم قلمي

فوزي



إلى إصحاب السيرة العطرة والفكر المستنير فلقد كان لهما الفضل الأول في بلوغي التعليم العالي

(والديا الحبيبان) أطال الله في عمرهما

إلى إخوتي وأصدقائي من كان لهم أثر بالغ في كثير من العقبات والصعاب، إلى جميع أساتذتي الكرام

ممن كان لهم الدور الأكبر في مساندتي ومدي بالمعلومات القيمة داعيا المولى عز وجل أن يطيل في أعمارهم

إلى كل قسم الرياضيات والإعلام الالي

جامعة الشيخ العربي التبسي -تبسة-

أهدي لكم مذكرة تخرجي

نسيم

Résumé

Le but de ce travail (étudié par M. Remil et H. Ali[8]) est d'étudier la décroissance d'énergie de l'équation d'Onde viscoélastique sous certaines conditions relatives aux termes de retard variables et à la fonction de relaxation g. Pour étudier l'existence globale de la solution, nous avons utilisé la méthode d'approximation de Galerkin.

Mots clés: Existence globale, décroissance d'énergie, méthode de Faedo-Galerkin, temps de retard.

Abstract

The purpose of this work (studied by M. Remil et H. Ali [8]) is to study the decay energy of the viscoelastic equation under certain conditions on the time-varying delay coefficients and the relaxation function g. To study of the global existence of the solution we used the Galerkin approximation method.

Keywords: **G**lobal Existence, energy decay, Faedo-Galerkin method, delay time.

ملخص

الغرض من عملنا (الذي درسه م. رميل و ح. علي [8]) هو دراسة تناقص الطاقة لمعادلة الموجة المرنة اللزجة تحت شروط معينة على معاملات التأخير المتغيرة ودالة الاسترخاء g. لدراسة الوجود الكلي للحل استخدمنا طريقة تقريب Galerkin.

الكلمات المفتاحية: الوجود الكلي ، تناقص الطاقة ، طريقة فادو غلاركين ، زمن التـأخير.

Table des matières

ce mémoire est consacré à l'étude d'un problème visco-élastique qui a été déjà traité par Melouka Remil et al. [12]

On considère l'équation viscoélastique avec un terme de retard comme suit :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - k_0 \Delta u(x,t) + \alpha \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds \\ +\mu_1(t)u_t(x,t) + \mu_2(t)u_t(x,t-\tau) = 0, & \text{sur } \Omega \times]0,+\infty[\,, \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times]0,+\infty[\,, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{sur } \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), & \text{sur } \Omega \times]0,t[\,, \end{cases} \tag{1.1}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n(n \in \mathbb{N}^*)$, avec une frontière lisse $\partial\Omega$.avec des conditions initials u_0 , u_1 , f_0 appartiennent à un espace approprié. De plus $\tau > 0$ est le terme de retard et μ_1 , μ_2 sont des fonctions réel qui seront spécifieés ultérieurement. De plus, k_0 est un nombre réel positif et g est une fonction positive non croissante définie sur $\mathbb{R}^+$.

Ces dernières années, les EDP avec retard sont devenus un domaine actifde la recherche. De nombreux auteurs sont concentrés sur ce problème.[1, 5, 7, 14, 15, 21]

La présence d'un terme de retard peut conduire à une source d'instabilité. Dans [5] par exemple, R. Datko, J. Lagnese et M. P. Polis ont prouvé qu'un petit retard peut déstabiliser un système.

S. Nicaise, C. Pignotti a étudié dans[14] l'équation d'onde avec un terme d'amortissement interne linéaire à retard constant et déterminé des relations appropriées entre μ_0 et $\mu_1 > 0$ dans lesquelles la stabilité ou, en variante, l'instabilité a lieu. Après cela, ils ont étudié dans[13] le problème de stabilisation par amortissement intérieur de l'équation d'onde avec rétro-action de retard aux limites ou interne variable dans le temps un domaine borné et lisse. En introduisant des fonctions de Lyapunov, des estimations de stabilité exponentielle sont obtenues si l'effet de retard est approprié compensé par l'amortissement interne.

il convient de mentionner que récemment Z.Y.Zhang et al.[19] on etudié existance globale et la décroissance uniforme pour l'équation d'onde avec terme dissipatif et terme d'amortissement aux limites sous certin hypothése sur la fonction de rétroaction non linéaire. ils ont obtenu les résultats avec l'utulisation de la méthode Galerkin et de technique du multiplicateur.

Plus précisément, ils ont introduit de nouvelles variables et transformé le problème aux limite en un équivalent avec donnée initiale nuls par argument de compacité et monotonie. Plus de détails sont présents dans [19]. Plus tard, Zhang et al. [23] ont étudié la bonne position et la stabilité uniforme des solutions fortes et faibles de l'équation dissipative généralisée non linéaire de Klein-Gordon avec condition frontière amortie non linéaire . Aussi, les auteurs ont prouvé la bonne position avec la méthode de semi-groupe non linéaire et obtiennent la stabilisation uniforme en utilisant l'énergie perturbée.

méthode fonctionnelle. Dans un autre travail, Zai-Yun Zhang et al ([19, 20, 22]) ont considéré un problème plus général que (1.1). Leur preuve de l'existence est basée sur l'approximation de Galerkin. Pour les solutions fortes, leur approximation nécessite un changement de variables pour transformer le problème principal en un problème équivalent avec la valeur initiale est égale à zéro. Surtout, ils surmontent certaines difficultés, c'est-à-dire présence de termes non linéaires et d'amortissement aux limites non linéaire faisant apparaître des difficultés lors du passage à la limite, en combinant des arguments de compacité et monotonie.

F. Tahamtani et A. Peyravi [18] ont étudié l'équation d'onde viscoélastique non linéaire avec des conditions aux limites dissipatives :

$$u_{tt} - k_0\Delta u + \alpha \int g(t-s)\,\mathrm{div}\left[a\left(s\right)\nabla u\left(s\right)\right] ds + (k_1 + b\left(x\right)\left|u_t\right|^{m-2})u_t = \left|u\right|^{p-2} u$$

Ils ont montré que les solutions explosent en temps fini sous certaines restrictions sur les données initiales et pour une énergie initiale arbitraire dans certains cas. Dans un autre cas, ils ont prouvé un résultat de non-existence lorsque l'énergie initiale est inférieure à la profondeur potentielle du puits.

Wenjun Liu dans [9] a étudié l'équation viscoélastique faible avec un terme de retard interne variant dans le temps.

$$u_{tt} - k_0\Delta u + \alpha(t) \int g(t-s)\Delta u\left(x,s\right) ds + a_0 u_t\left(x,t\right) + a_1 u_t\left(x, t-\tau(t)\right) = 0$$

dans un domaine borné. En introduisant une énergie appropriée et des fonctionnelles de Lyapunov, il établit une estimation générale du taux de décroissance de l'énergie sous des hypothèses appropriées. A. Benaissa, A. Benguessoum et S. A. Messaoudi [1] ont considéré l'équation d'onde avec un faible terme de retard constant interne

$$u_{tt}\left(x,t\right) - \Delta u\left(x,t\right) + \mu_1(t) u_t\left(x,t\right) + \mu_2(t) u_t\left(x, t-\tau\right) = 0, \text{ sur } \left[0, +\infty\right[,$$

Dans un domaine borné. Dans des conditions appropriées sur μ_1 et μ_2, ils ont prouvé l'existence globale de solutions par la méthode Faedo – Galerkin et établir une estimation de décroissance de l'énergie en utilisant la méthode du multiplicateur.

Notre mémoire se compose en trois chapitres

Chapitre 1 :

Dans ce chapitre nous rappelons les principaux notions dont nous aurons besoins, commençons par les espaces normés, Banach et Hilbert, après nous donnerons les espaces Lp, les espaces de Sobolev. Finalement nous présentons les inégalités nécessaires qui sont utilisées dans ce mémoire et aussi nous citons quelques théorèmes utiles.

Chapitre 2 :

Dans ce chapitre nous étudions l'existence globale en utilisant l'approximation de Faedo-Galarkin et quelques estimations d'énergie.

et nous allons montrer que ce problème admet une solution globale unique u, cette méthode consiste une approximation de la solution, ensuite on obtient une estimation à priori nécessaire pour garantir la convergence de la solution approchée vers la solution exacte.

Chapitre 3 : Dans ce chapitre, nous étudierons le comportement asymptotique de notre problème. Notre résultat de stabilité, à savoir la décroissance exponentielle de l'énergie

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappels , nous avons introduire les notions essentielles nécessaires à la compréhension des énoncés qui forment le thème de notre mémoire . Ces rappels concernent les espaces normés , les espaces de Banach , les espaces de Hilbert , les espaces $L^p(\Omega)$, les espaces de Sobolev et quelques inégalités et des théorèmes importants[10]

1.1 Espace normé

Définition 1.1 *Un espace vectoriel linéaire E est dit espace **normé** si pour chaque élément $u \in E$ il existe un nombre réel noté par $\|u\|$, vérifiant les axiomes*

1) $\|u\| = 0 \Longleftrightarrow u = 0,$
2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|, \forall u, v \in E$ (inégalité triangulaire),
3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|, \forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1 $(E, \|.\|_E)$ *est un espace normé.*

Définition 1.2 ***(Equivalence des normes)***

Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes sur V on dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes c_1, c_2 strictement positives telles que

$$\forall u \in V, \quad c_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq c_2 \|u\|_1 .$$

Proposition 1.1 *Soit $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ deux normes équivalentes sur V, on a l'équivalence*

$$u_n \text{ converge vers } u \text{ pour la norme } \|.\|_1 \Longleftrightarrow u_n \text{ converge vers } u \text{ pour la norme } \|.\|_2 .$$

Définition 1.3 ***(Suite de Cauchy)***

Soit $(E, \|.\|)$ espace normé et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'éléments de E, on dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de **Cauchy** si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0(\varepsilon),\ \forall n,\ m \geq 0 \Rightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

Définition 1.4 ***(Espace complet)***

Soit E un espace vectoriel, on dit que E est un espace **complet** si toute suite de **Cauchy** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'espace E est converge vers un élément u de E.

1.2 Espace de Banach

1.2.1 Définitions et propriétés

Définition 1.5 ***(Espace de Banach)***

Soit $(E, \|.\|)$ un espace normé, on dit que E est un espace de **Banach** si E est un espace **complet**.

Définition 1.6 *E' est l'espace linéaire de toutes les fonctions linéaires continues*

$$f : E \to \mathbb{R},$$

et appelé l'espace dual de E.
L'espace E' muni de la norme $\|.\|_{E'}$ définie

$$\|f\|_{E'} = \sup\{|f(u)| : \|u\| \leq 1\},$$

est aussi un espace de Banach.
On note la valeur de $f \in E'$ au $u \in E$ par $f(u)$ ou $\langle f, u\rangle_{E,E'}$.

Définition 1.7 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de **Banach** tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F, cette application permet de considérer E comme un sous espace vectoriel de F et on notera $E \hookrightarrow F$ ou $E \subset F$.*

On dira que cette inclusion est :
1) **Continue :** S'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_F \leq C\|u\|_E$, et on notera $E \hookrightarrow_{continue} F$.
2) **Compact :** Si pour toute suite bornée dans E (pour la norme de E), on peut extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F), et on notera $E \hookrightarrow_{compact} F$.

3) **Dense :** Si pour tout $u \in E$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \subset E$ telle que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ (la convergence étant pour la norme de F).
Soit E un espace de **Banach**, alors E est **réflexif** si et seulement si

$$B_E = \{u \in E : \|u\| \leq 1\},$$

est compact avec la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Définition 1.8 *Soit E espace de Banach et $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite dans E, alors u_n converge fortement vers u dans E si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0,$$

et notée par $u_n \to u$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$.

1.2.2 La topologie faible et faible étoile

Soit E un espace de Banach et $f \in E'$. On note par

$$\varphi_f : E \to \mathbb{R}$$

$$u \mapsto \varphi_f(u),$$

lorsque f dans E', on obtient la famille d'applications $(\varphi_f)_{f\in E'}$ de E dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.9 *La topologie faible en E est la plus faible topologie en E, notée par $\sigma(E, E')$ pour tout $(\varphi_f)_{f\in E'}$ continue.*
allons définir la topologie faible étoile en E', qui notée par $\sigma(E', E)$. Pour tout $u \in E$, on a

$$\varphi_f : E' \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \varphi_u(f) = \langle f, u\rangle_{E',E}$$

lorsque $u \in E$, on obtient la famille d'applications de E' dans $\mathbb{R}$.

Définition 1.10 *La topologie faible étoile dans E' est la plus faible topologie dans E' pour tout $(\varphi_u)_{u\in E'}$ est continue.*

Remarque 1.2 *[3]*

Puisque $E \subset E''$, il est claire que la topologie faible étoile $\sigma(E', E)$ est plus faible que la topologie $\sigma(E', E'')$.

Théorème 1.1 *Soit E un espace de Banach réflexif, alors toute suite bornée dans E admet au moins une sous-suite faiblement convergente.*

Définition 1.11 *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans E est converge faiblement vers u si et seulement si*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u)\,, \text{ pour tout } f \in E',$$

cela noté par

$$u_n \rightharpoonup u.$$

Remarque 1.3 *[3]*

1) Si la limite faible existe, elle est unique.
2) Si $u_n \to u$ (fortement), alors $u_n \rightharpoonup u$ (faiblement).
3) Si $\dim E < +\infty$, alors la convergence faible implique la convergence forte.

Proposition 1.2 *[3]*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de E'. On a
1) $[f_n \rightharpoonup^* f \text{ dans } \sigma(E', E)] \Leftrightarrow [f_n(u) \to f(u)\,, \forall u \in E]\,.$
2) Si $f_n \to f$ (fortement), alors $f_n \rightharpoonup f$, dans $\sigma(E', E'')\,.$
3) Si $f_n \rightharpoonup f$ dans $\sigma(E', E'')\,,$ alors $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)\,.$
4) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)\,,$ alors $\|f_n\|$ est borné et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|\,.$
5) Si $f_n \rightharpoonup^* f$ dans $\sigma(E', E)$ et $u_n \to u$ (fortement) dans E, alors $f_n(u_n) \to f(u)\,.$

1.3 Espace de Hilbert

Définition 1.12 *Soit E un espace vectoriel, on appelle application de $E \times E$ dans le corp*

$K = \mathbb{C}$ définit par $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire si :
1) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, pour tout $u, v \in E$,
2) $\langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle\,,$ pour tout $u, v \in E$, et $\lambda \in \mathbb{C}$,
3) $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle\,,$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,
4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ et $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$.

Définition 1.13 *Un espace de **Hilbert** est un espace de Banach ($(E, \|.\|_E)$ espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée :*

$$\|u\|_E = \langle u, u \rangle^{1/2} \text{ (i.e) } \|u\|_E^2 = \langle u, u \rangle\,.$$

Définition 1.14 ***(Système orthonormé)***

Soit E un espace de Hilbert, la suite $\{e_n\}_{n\geq 1} \subset E$ est appelée un système orthonormé si

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & \text{si } n = m, \\ 0, & \text{si } n \neq m. \end{cases}$$

1) Si $e_n \perp e_m$ on dit que le système $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est orthogonal.
2) Si le système $\{e_n\}_{n\geq 1}$est orthogonal alors le système $\left\{ \dfrac{e_n}{\|e_n\|} \right\}_{n\geq 1}$ est orthonormé.

Définition 1.15 ***(Base Hilbertienne)***

Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$. On appelle base Hilbertienne (dénombrable) de E une famille dénombrable $\{e_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de E qu'est orthonormée pour le produit scalaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E.

Définition 1.16 ***(Espace séparable)***

Un espace vectoriel normé qui contient une partie dénombrable dense est dit espace séparable.

Exemple 1.1 *Les espaces $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont séparables (par exemple, $\mathbb{Q}$ est un sous-ensemble dénombrable dense dans $\mathbb{R}$).*

Théorème 1.2 *Tout espace de Hilbert séparable admet une base Hilbertienne.*

Proposition 1.3 *Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$, soit $(e_n)_{n\geq 1}$ une base Hilbertienne de E, il existe une suite unique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$u_n = (u, e_n) \,,$$

telle que la somme partielle $\sum_{n=1}^{p} u_n e_n$ converge vers u quand p tends vers l'infinie.

De plus on a

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{n\geq 1} |(u, e_n)|^2 \,.$$

alors, on écrit

$$u = \sum_{n\geq 1} (u, e_n)\, e_n.$$

Théorème 1.3 *[17]*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans l'espace de Hilbert E, alors on peut extraire une sous-suite converge dans la topologie faible.

Théorème 1.4 *[17]*
Dans l'espace de Hilbert, toute suite converge dans la topologie faible est bornée.

Théorème 1.5 *[17]*

Soit $(u_n)_{n\in N^*}$ une suite convergente vers u dans la topologie faible et $(v_n)_{n\in N*}$ une autre suite converge faiblement vers v, alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle v_n, u_n\rangle = \langle v, u\rangle .$$

Théorème 1.6 *[17]*

Soit E un espace normé, alors la boule d'unité

$$B' = \{u \in E' : \|u\| \leq 1\},$$

de E' est compact dans la topologie faible $\sigma(E, E')$.

Proposition 1.4 *[17]*

Soit E et F deux espaces de Hilbert, $(u_n)_{n\in N^*} \in E$ une suite qui converge faiblement vers $u \in E$, soit $A \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors la suite $(A(u_n))_{n\in N^*}$ converge vers $A(u)$ dans la topologie faible de F.

1.4 Espaces des fonctions

1.4.1 L'espace $L^p(\Omega)$

Définition 1.17 *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$. On définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par :*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < +\infty \right\}.$$

Pour $p \in \mathbb{R}$ et $1 \leq p \leq \infty$, la norme est notée par :

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

Si $p = \infty$, on a

$$L^{\infty}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{c} u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ est mesurable et il existe une constante positive } C, \text{ telle que} \\ |u(x)| < C \quad \text{p.p sur } \Omega. \end{array} \right\}.$$

Il sera muni de la norme du **sup-essentielle** :

$$\|u\|_{\infty} = ess \sup_{x\in\Omega} |u(x)| = \inf_{x\in\Omega} \{C; \quad |u(x)| < C \quad \text{p.p sur } \Omega\}.$$

Définition 1.18 *On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^1_{loc}(\Omega)$ si $f\ |_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$*

Proposition 1.5 *$L^p(\Omega)$ muni de sa norme $\|.\|_{L^p}$ est un espace de **Banach**, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Théorème 1.7 *$L^p(\Omega)$ est **séparable** pour $1 < p < \infty$.*

Proposition 1.6 *$L^{\infty}(\Omega)$ est un espace de **Banach non séparable**.*

Théorème 1.8 *[17]*

$L^p(\Omega)$ est un espace **réflexif**, pour $1 < p < \infty$.

Lemme 1.1 *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,$(1 \leq p \leq \infty)$ et soient u_n, u sont des fonctions de $L^p(\Omega)$ telles que u_n converge fortement vers u dans $L^p(\Omega)$ alors*

$$u_n \to u \quad \textit{p.p dans } \Omega.$$

Lemme 1.2 *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$,$(1 \leq p \leq \infty)$ et soit u_n une suite bornée dans $L^p(\Omega)$ converge presque partout vers u, alors*

1) u dans $L^p(\Omega)$.
2) u_n converge faiblement vers u dans $L^p(\Omega)$.

Remarque 1.4 *Supposons que $(1 \leq p \leq \infty)$ et E est un espace de Banach réflexif alors la convergence faible étoile équivalent à la convergence faible.*

Théorème 1.9 *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergente dans $L^p(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite convergente presque partout dans Ω.*

Si $u \in L^{\infty}(\Omega)$ alors

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^{\infty}} \text{ p.p sur } \Omega.$$

Remarque 1.5

1) La limite forte ou faible d'une suite de fonction est toujours unique.
2) Dans le cas $p = \infty$ la symbole * est posée pour montrer que la définition de convergence faible dans L^{∞} n'est pas entièrement la même que dans les espaces $L^{p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. En effet, le dual de $L^{\infty}(\Omega)$ est strictement plus grand que $L^{1}(\Omega)$.
3) La convergence forte dans L^{p} (Ω) implique la convergence faible dans $L^{p}(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$.
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n}$
1) Si $u_n \rightharpoonup^{*} u$ dans $L^{\infty}(\Omega)$, alors $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^{p}(\Omega)$, $\forall p \geq 1$.
2) Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^{p}(\Omega)$, alors $\|u_n\|_{L^{p}(\Omega)} \rightharpoonup \|u\|_{L^{p}(\Omega)}$ dans $\mathbb{R}$, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.
3) Si $1 \leq p < \infty$ et si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^{p}(\Omega)$, alors $\exists K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^{p}(\Omega)} \leq K$ et
$\|u\|_{L^{p}(\Omega)} \leq \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf \|u_n\|_{L^{p}(\Omega)}$.
Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et $u_n \rightharpoonup^{*} u$ dans $L^{\infty}(\Omega)$.
4) Si $1 < p < \infty$ et si $\exists K > 0$ tel que $\|u_n\|_{L^{p}} \leq K$, alors il existe une sous-suite u_{n_i} et $u \in L^{p}(\Omega)$ tels que $u_{n_i} \longrightarrow u \in L^{p}(\Omega)$.
Le résultat est aussi vrai si $p = \infty$ et on a alors $u_n \rightharpoonup^{*} u$ dans $L^{\infty}(\Omega)$.
5) Si $1 \leq p \leq \infty$ et $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^{p}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite u_{n_i} telle que $u_{n_i} \rightharpoonup u$ **p.p** et $|u_{n_i}| \leq h$ **p.p** avec $h \in L^{p}(\Omega)$ .Nous allons montrer l'explosion de la solution en temps fini.
soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}$, u_m et u des fonctions de $L^{p}(\Omega), 1 < p < \infty$, telles que

$$\|u_m\|_{L^{p}(\Omega)} \leq C \quad , u_m \rightarrow u \text{ p.p dans } \Omega.$$

Alors $u_m \rightarrow u$ dans $L^{p}(\Omega)$ faiblement.

Lemme 1.3 *$L^{2}(\Omega)$ est un espace de **Hilbert**, avec le produit scalaire :*

$$\langle u, v\rangle_{L^{2}(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x)\, v(x)\, dx, \text{ pour tout } u, v \in L^{2}(\Omega).$$

1.4.2 L'espace $L^{p}((0,T), E)$.

Définition 1.19 *Soit E un espace de **Banach**, $1 \leq p \leq \infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de **Lebesgue** à valeurs dans E et on note $L^{p}((0,T), E)$ l'espace des fonctions $u :]0,T[\rightarrow E$, mesurable qui vérifient :*

$$\textbf{i) } \text{Si } 1 \leq p \leq \infty, \; \|u\|_{L^{p}((0,T),E)} = \left(\int_{0}^{t} |u(x)|^{p}\, dx \right)^{1/p} < \infty,$$

$$\textbf{ii) } \text{Si } p = \infty, \; \|u\|_{L^{\infty}((0,T),E)} = ess \sup_{x \in]0,T[} |u(x)| < \infty.$$

Théorème 1.10 *[17]*

L'espace $L^p((0,T),E)$ est complet.

Définition 1.20 *L'espace des fonctions indéfiniment différentiables $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact inclus dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ est noté par $\mathcal{D}(\Omega)$* ***(espace des fonctions test)****, c'est-à-dire*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)\,; \exists K \subset \Omega,\ K \text{ compact (fermé, borné) ; } u = 0 \text{ sur } K\}.$$

Définition 1.21 *Notons par $\mathcal{D}'((0,T),E)$ l'espace de distribution dans $]0,T[$ à valeurs dans E, et on définie*

$$\mathcal{D}'((0,T),E) = \mathcal{L}(\mathcal{D}\,]0,T[\,,E),$$

où $\mathcal{L}(\phi,\varphi)$ est l'espace des fonctions linéaires continues de ϕ vers φ. Comme $u \in \mathcal{D}'((0,T),X)$, on définie la dérivé au sens de distribution par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(\varphi) = -u\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right),\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[),$$

et comme $u \in L^p((0,T),E)$, on a

$$u(\varphi) = \int_0^t u(t)\,\varphi(t)\,dt,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0,T[).$$

Maintenant, nous allons introduire des résultats importants dans $L^p((0,T),E)$.

Lemme 1.4 *[3]*

Soit $u \in L^p((0,T),E)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in L^p((0,T),E)$, $(1 \leq p \leq \infty)$ alors la fonction u est continue de $[0,T]$ dans E (i.e) $u \in \mathcal{C}^1((0,T),E)$.

1) Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p((0,T),E)$ est un espace de Banach et en particulier $L^2((0,T),E)$ est un espace de Hilbert, lorsque E est un espace de Hilbert.

2) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et si E réflexif, alors $L^p(0,T,E)$ est aussi réflexif.

3) Pour $1 \leq p \leq \infty$ et si E séparable, alors $L^p((0,T),E)$ est aussi séparable.

Lemme 1.5 *[7]*

Soit $\varphi = \,]0,T[\, \times \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et soit g_μ, g deux fonctions dans $L^q([0,T],L^q(\Omega))$, $1 < q < \infty$ telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q([0,T],L^q(\Omega))} \leq C,\ \ \forall \mu \in \mathbb{N},$$

et

$$g_\mu \longrightarrow g \text{ dans } \varphi,$$

alors

$$g_\mu \rightharpoonup g \text{ dans } L^q(\varphi).$$

Proposition 1.7 *[7]*

L'espace $L^p((0,T),E)$ qui associé à la norme $\|.\|_{L^p((0,T),X)}$, est un espace de Banach.

Proposition 1.8 *([7])*

Soit E un espace de Banach réflexif, de dual E' et $1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ alors le dual de $L^p((0,T),E)$ est définie algébriquement et topologiquement dans $L^q((0,T),E')$.

Proposition 1.9 *([7])*

Soit E, F deux espaces de Banach, $E \subset F$ avec injection continue alors

$$L^p((0,T),E) \subset L^p((0,T),F),$$

avec injection continue.

1.5 Espace de Sobolev

1.5.1 Dérivée faible

Définition 1.22 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq i \leq n$ et $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction a une* ***i-ème*** *dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ on a :*

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx.$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de u au sens des distributions, et on écrit :

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

1.5.2 Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.23 *Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \textit{tel que } \partial_i u \in L^p(\Omega)\}.$$

où ∂_i est la i-ème dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

1.5.3 Espace $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.24 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et $p \in \mathbb{R}, 1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \textit{tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\alpha, |\alpha| \leq m\}.$$

Où $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1}...\partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni par la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \| D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.25 *On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'espace fermé de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Définition 1.26 *Si $p = 2$, on note par $W^{m,2}(\Omega) = H^m$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ muni par la norme*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{1/2},$$

tel que $H^m(\Omega)$ espace de Hilbert, avec le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx,\ \text{pour tout } u, v \in H^m(\Omega).$$

Proposition 1.10 *[3]*

1) Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.
2) Si $m \geq m'$, $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m'}(\Omega)$, avec injection continue.
3) Si $m = 0$ on a $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Lemme 1.6 *Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, nous identifions un dual $H^{-m}(\Omega)$ de $H_0^m(\Omega)$ dans un sous-espace fermé sur Ω, on trouve*

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega).$$

Lemme 1.7 ***(Inégalité de Sobolev-Poincaré)***

Si

$$2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}, n \geq 3,$$
$$q \geq 2,\ n = 1, 2,$$

alors, il existe une constante $C(p, \Omega)$ telle que :

$$\|u\|_q \leq C(p, \Omega) \|\nabla u\|_2,\ \text{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

Définition 1.27 ***(Intégration par partie)***

Soit $(u,v) \in H^1(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int\limits_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int\limits_{\partial\Omega} u v \eta_i d\sigma,$$

où $\eta_i(x) = \cos(\eta, x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point et l'axe des x_i.

Lemme 1.8 ***(Formule de Green)***

Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$ on a :

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta u v dx = \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

1.6 Quelques inégalités utiles

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n (\Omega \subset \mathbb{R}^n)$.

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Pour tout $u, v \in L^2(\Omega)$

$$\left| \int_{\Omega} u v dx \right| \leq \int\limits_{0}^{t} |uv|\, dx \leq \left(\int\limits_{\Omega} |u|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} |v|^2\, dx \right)^{1/2},$$

(i.e)

$$\|uv\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Hölder

C'est une généralisation des inégalités de Cauchy.

Pour tout $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, $|uv| \in L^1(\Omega)$ et pour tout $1 \leq p \leq \infty$ on note q le conjugué de p $((L^p)^* = L^q)$, c'est à dire $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, et on a l'inégalité :

$$\left| \int\limits_{\Omega} u v dx \right| \leq \int\limits_{\Omega} |uv|\, dx \leq \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p\, dx \right)^{1/p} \left(\int\limits_{\Omega} |v|^p\, dx \right)^{1/q},$$

(i.e)

$$\int_{\Omega} |uv|\, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}\,.$$

Inégalité algébrique de Young

Pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$|ab| \leq \delta\, |a|^2 + \frac{1}{4\delta}\, |b|^2\,, \text{ avec } \delta > 0.$$

Inégalité de Young

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$|ab| \leq \frac{1}{p}\, |a|^p + \frac{1}{q}\, |b|^q\,,$$

où p, q des nombres réels strictement positifs liés par la relation $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1)$.

Chapitre 2

Existance Globale

Dans ce chapitre nous allons démontrer **l'existence globale** en utilisant la méthode de **Faedo-Galerkin** et quelques **estimations de l'énergie.**

Lemme 2.1 *[11]pour tout $g \in C^1$ et $\phi \in H_0^1(0,T)$ on a :*

$$\int_0^t \int_\Omega g(t-s)\phi\phi_t dxds = -\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}(g \circ \phi)(t) - \frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds \, \|\phi\|_{L^2}^2) - \frac{1}{2}g(t)\, \|\phi\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2}(g' \circ \phi)(t), \quad (2.6)$$

où

$$(g \circ \phi)(t) = \int_0^t \int_\Omega g(t-s) \left|\phi(s) - \phi(t)\right|^2 dxds$$

2.1 Position du probléme

Afin de prouver l'existence de solutions au problème (1.1) nous introduisons comme dans [14] l'auxiliaire inconnu

$$z\left(x,\rho,t\right) = u_t\left(x, t-\tau\rho\right), \quad x \in \Omega,\ \rho \in \left(0,1\right), \quad t > 0.$$

Donc, nous prendrons

$$\tau z_t\left(x,\rho,t\right) + z_\rho\left(x,\rho,t\right) = 0,$$

Par conséquent, le problème (1.1) est équivalent à

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - k_0\Delta u(x,t) + \alpha \int\limits_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)ds \\ +\mu_1(t)u_t(x,t) + \mu_2(t)z(x,1,t) = 0, & \text{sur } \Omega \times]0,+\infty[\,, \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, & x \in \Omega, \rho \in (0,1)\,, \quad t > 0, \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \partial\Omega \times]0,+\infty[\,, \\ u(x,0) = u_0, \quad u_t(x,0) = u_1, & \text{sur } \Omega, \\ z(x,\rho,0) = f_0(x,t-\tau)\,, & \text{sur } \Omega \times]0,t[\,, \end{cases} \tag{2.7}$$

Maintenant, nous sommes en mesure d'énoncer notre résultat principal, c'est le théorème de l'existence globale.

Dans ce qui suit, nous donnerons des conditions et des hypothèses suffisantes qui garantissent que le problème 1.1 a une solution globale.

(H1) g est une fonction bornée positive satisfaisant :

$$k_0 - \alpha \int_0^t g(s)ds = l > 0, \quad \alpha > 0,$$

et il existe une fonction positive non croissante η telle que pour $t > 0$, on a

$$g'(t) \leq -\eta(t)g(t), \quad \eta(t) > 0,$$

(H2) μ_1 est une fonction positive de classe C^1 satisfaisant :

$$\mu_1(t) \leq M, \quad M > 0,$$

(H3) μ_2 est une fonction réelle de classe C^1 telle que :

$$|\mu_2(t)| \leq \beta\mu_1(t), \quad 0 < \beta < 1,$$

Nous avons également besoin des Lemmes techniques suivants au cours de notre étude.

Théorème 2.1 *soit* $(u_0, u_1, f_0) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega \times (0,1))$ *être donné. Supposons que les hypothèses (H1) - (H3) sont satisfaites. Alors le problème* (2.7) *admet une solution faible globale unique* (u,z) *satisfaisant*

$$u \in C\left([0,T]\,; H_0^1(\Omega)\right), \; u' \in C\left((0,T); H_0^1(\Omega)\right), \; z \in C\left([0,T]\,; L^2(\Omega \times (0,1)\right)$$

Pour prouver ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant. Tout d'abord, nous définissons l'énergie associée à la solution du problème (2.7) *par :*

$$E(t)=\tfrac{1}{2}\|u_t\|_{L^2}^2+\left(\tfrac{k_0}{2}-\tfrac{\alpha}{2}\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_{L^2}^2 \\ +\tfrac{\alpha}{2}(g\circ\nabla u)(t)+\tfrac{1}{2}\xi(t)\int_\Omega\int_0^1 z^2(x,\rho,t)d\rho dx \tag{2.8}$$

où ξ et une fonction descroissante tell que :

$$\tau\beta<\zeta<\tau(2-\beta),\quad t>0, \tag{2.9}$$

où $\xi(t)=\zeta\mu_1(t)$.

Lemme 2.2 *soit (u,z) une solution régulière du problème (2.7) . Alors, l'énergie fonctionnelle définie par (2.8) satisfait*

$$E'(t)\leq-\left(\mu_1(t)-\tfrac{\xi(t)}{2\tau}-\tfrac{|\mu_2(t)|}{2}\right)\|u_t(x,t)\|^2 \\ -\left(\tfrac{\xi(t)}{2\tau}-\tfrac{\mu_2(t)}{2}\right)\|z(x,1,t)\|^2\leq 0 \tag{2.10}$$

Preuve. En multipliant la première équation de (2.7) par $u_t(x,t)$, en l'intégrant sur Ω, et en utilisant l'identité de Green, nous obtenons

$$\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left(\|u_t\|_{L^2}^2+k_0\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)+\mu_1(t)\|u_t\|_{L^2}^2+\mu_2(t)\int_\Omega u_t z(x,1,t)dx \\ -\alpha\int_0^t g(t-s)\int_\Omega\nabla u(x,s)\nabla u_t(x,t)dxds=0 \tag{2.11}$$

On simplifie le dernier terme de(2.11) en appliquant le lemme 2.2, on trouve

$$-\alpha\int_0^t g(t-s)\int_\Omega\nabla u(x,s)\nabla u_t(x,t)dxds=\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u) \\ -\frac{\alpha}{2}(g'\circ\nabla u)+\frac{\alpha}{2}g(t)\|\nabla u\|_{L^2}^2-\frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)ds\|\nabla u\|_{L^2}^2 \tag{2.12}$$

En remplaçant (2.12) dans (2.11), on obtient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|_{L^2}^2+\left(\frac{k_0}{2}-\frac{\alpha}{2}\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u\|_{L^2}^2-\frac{\alpha}{2}(g\circ\nabla u)\right)=\frac{\alpha}{2}(g'\circ\nabla u)(t) \\ -\frac{1}{2}g(t)\|\nabla u\|_{L^2}^2-\mu_1(t)\|u'\|_{L^2}^2-\mu_2(t)\int_\Omega u_t z(x,1,s)dx. \tag{2.13}$$

En multipliant la deuxième équation de (2.7) par $\dfrac{\xi(t)z}{\tau}$ où $\xi(t)$ satisfait (2.9) et on l'intégre sur $\Omega \times (0,1)$, on obtient

$$\frac{\xi(t)}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\int_{0}^{1} z^2(x,\rho,t)d\rho dx + \frac{\xi(t)}{2\tau}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}\frac{d}{d\rho}z^2(x,\rho,t)d\rho dx = 0 \tag{2.14}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\xi(t)\int_{\Omega}\int_{0}^{1} z^2(x,\rho,t)d\rho dx &= \frac{\xi'(t)}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{1} z^2(x,\rho,t)d\rho dx \\ -\frac{\xi(t)}{2\tau}(\int_{\Omega} z^2(x,1,t)dx &+ \frac{\xi(t)}{2\tau}\int_{\Omega} u_t^2(x,t)dx = 0\end{aligned} \tag{2.15}$$

Une combinaison de (2.13) et (2.15), conduit à

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u_t\|_{L^2}^2 + (k_0 - \alpha\int_0^t g(s)ds)\,\|\nabla u\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\alpha(g\circ\nabla u) + \xi(t)\int_{\Omega}\int_{0}^{1} z^2(x,\rho,t)d\rho dx\right)\\ &= \frac{\alpha}{2}(g'\circ\nabla u) - \frac{1}{2}g(s)\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \mu_1(t)\,\|u_t\|_{L^2}^2 - \mu_2(t)\int_{\Omega} u_t z(x,1,s)dx\\ &+\frac{\xi'(t)}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{1} z^2(x,\rho,t)d\rho dx - \frac{\xi(t)}{2\tau}\int_{\Omega} z^2(x,1,t)dx + \frac{\xi(t)}{2\tau}\int_{\Omega} u_t^2(x,t)dx\end{aligned} \tag{2.16}$$

En utilisant la définition (2.8) de $E(t)$, on en déduit que

$$\begin{aligned}E'(t) &= \frac{\alpha}{2}(g'\circ\nabla u) - \frac{1}{2}g(s)\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \mu_1(t)\,\|u_t\|_{L^2}^2\\ &-\mu_2(t)\int_{\Omega} u_t z(x,1,s)dx + \frac{\xi'(t)}{2}\int_{\Omega}\int_{0}^{1} z^2(x,\rho,t)d\rho dx\\ &-\frac{\xi(t)}{2\tau}\int_{\Omega} z^2(x,1,t)dx + \frac{\xi(t)}{2\tau}\int_{\Omega} u_t^2(x,t)dx\end{aligned} \tag{2.17}$$

En appliqant l'inégalité de Young, nous avons

$$\begin{aligned}E'(t) \le \frac{\alpha}{2}(g'\circ\nabla u) - \frac{1}{2}g(s)\,\|\nabla u\|_{L^2}^2 - \left(\mu_1(t) - \frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\mu_2(t)|}{2}\right)\|u_t(x,t)\|^2\\ -\left(\frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\mu_2(t)|}{2}\right)\|z(x,1,t)\|^2\end{aligned} \tag{2.18}$$

En utilisant l'hypothèse (2.9) pour $\xi(t)$, nous voyons que

$$C_1 = \left(\mu_1(t) - \frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\mu_2(t)|}{2}\right) > 0, \qquad C_2 = \left(\frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\mu_2(t)|}{2}\right) > 0,$$

alors on en déduit facilement que

$$E'(t) \leq -\left(\mu_1(t) - \frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\mu_2(t)|}{2}\right)\|u_t(x,t)\|^2 - \left(\frac{\xi(t)}{2\tau} - \frac{|\mu_2(t)|}{2}\right)\|z(x,1,t)\|^2 \leq 0, \tag{2.19}$$

Ceci complète la preuve du lemme. ■

2.2 Existence Globale

Nous utiliserons la méthode Faedo-Galerkin pour prouver l'existence globale de solutions.
La méthode **Faedo-Galerkin** se compose de trois étapes :

Etape 1 : Approximation de Faedo-Galerkin

Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$une base dans H_0^1 et W_n soit l'espace généré par $w_1, ..., w_n$, $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, on définit pour $1 \leq i \leq n$ la suite $\phi_i(x,\rho)$ comme suit $\phi_i(x,0) = w_i(x)$ .Ensuite, on étend $\phi_i(x,0)$ par $\phi_i(x,\rho)$ plus de $(L^2 \times [0,1])$ et notons V_n l'espace généré par $\phi_1, ..., \phi_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Nous considérons la solution approchée $(u_n(t), z_n(t))$ comme suit pour tout i donné

$$u_n(t) = \sum_{i=0}^{n} c_{in}(t)\, w_i(x)\,; \qquad z_n(t) = \sum_{i=0}^{n} r_{in}(t)\, \varphi_i,$$

qui satisfait

$$\begin{gathered}\int_\Omega (u_n''(t)\, w_i dx - k_0 \int_\Omega \Delta u_n(t)\, w_i dx + \alpha \int_0^t g(t-s) \int_\Omega \Delta u_n(s)\, w_i ds dx \\ \mu_1(t) \int_\Omega u_n'(t) w_i dx + \mu_2(t) \int_\Omega z_n(x,1,t) w_i dx = 0,\end{gathered} \tag{2.20}$$

et

$$\int_\Omega (\tau z_{nt}(x,\rho,t) + z_{n\rho}(x,\rho,t))\, \varphi_i dx = 0, \tag{2.21}$$

Le système est complété par les conditions initiales :

$$\begin{aligned} u_n(0) &= \sum_{i=0}^{n} c_{in}(0) w_i \to u_0 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty \\ u_n'(0) &= \sum_{i=0}^{n} c_{in}'(0) w_i \to u_1 \quad \text{dans} \quad H_0^1(\Omega) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty \\ z_n(0) &= \sum_{i=0}^{n} r_{in}(0) \phi_i \to f_0 \quad \text{dans} \quad (L^2 \times [0,1]) \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty \end{aligned} \tag{2.22}$$

Alors le problème (2.7) peut être réduit à un système **EDO** du second ordre et on en déduit que ce problème admet une solution locale unique $(u_n(t), z_n(t))$ dans $[0, t_n[$ où $0 < t_n < T$. Cette solution peut être étendue à $[0,T[$, $0<T<+\infty$. Dans l'étape suivante, nous prouverons que cette solution est globale.

Deuxiéme étape : Les estimation de Faedo-Galerkin

Première estimation

En multipliant l'équation de (2.20) par $c'_{in}(t)$ et integrant sur Ω on obtient

$$\int_\Omega u''_n(t)\, u'_n(t)dx + k_0\int_\Omega \nabla u_n(t)\,\nabla u'_n(t)\,dx - \alpha\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\,\nabla u'_n(t)dxds$$
$$+\mu_1(t)\int_\Omega u'^2_n(t)dx + \mu_2(t)\int_\Omega z_n(x,1,t)\,u'_n(t)dx = 0.$$

ensuite

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|u''_n\|^2_{L^2} + \frac{k_0}{2}\|\nabla u_n\|^2_{L^2}\right) + \mu_1(t)\,\|u'_n\|^2_{L^2} + \mu_2(t)\int_\Omega z_n(x,1,t)\,u'_n(t)dx \\ -\alpha\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\,\nabla u'_n(t)dxds = 0\end{gathered} \tag{2.23}$$

Nous utilisons le lemme 2.2 pour simplifier le dernier terme de (2.23)

$$\begin{gathered}-\alpha\int_0^t g(t-s)\int_\Omega \nabla u_n(s)\,\nabla u'_n(t)dxds = \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\nabla u_n)(t) \\ -\frac{\alpha}{2}(g'\circ\nabla u_n)(t) + \frac{\alpha}{2}g(t)\,\|\nabla u_n\|^2_{L^2} - \frac{\alpha}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g(s)ds\,\|\nabla u_n\|^2_{L^2}\end{gathered} \tag{2.24}$$

En remplaçant (2.24) dans (2.23) et en intégrant sur Ω on arrive à

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\|u'_n\|^2_{L^2} + \left(\frac{k_0}{2} - \frac{\alpha}{2}\int_0^t g(s)ds\right)\|\nabla u_n\|^2_{L^2} - \frac{\alpha}{2}(g\circ\nabla u_n)(t) \\ +\frac{\alpha}{2}\int_0^t (g'\circ\nabla u_n)(s)ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^t g(s)\,\|\nabla u_n\|^2_{L^2}\,ds + \int_0^t \mu_1(s)\,\|u'_n\|^2_{L^2}\,ds \\ +\int_0^t \mu_2(s)\int_\Omega z_n(x,1,s)\,u'_n(t)dxds = \frac{1}{2}\|u_{1n}\|^2_{L^2} + \frac{k_0}{2}\|\nabla u_{0n}\|^2_{L^2}\end{gathered} \tag{2.25}$$

En multipliant l'équation (2.21) par $r_{in}(t)\dfrac{\xi(t)}{2\tau}$, et en intégrant sur $\Omega\times(0,1)$, on obtient

$$\frac{\xi(t)}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega\int_0^1 z_n^2(x,\rho,t)\,d\rho dx + \frac{\xi(t)}{2\tau}\int_\Omega\int_0^1 z_n^2(x,\rho,t)\,d\rho dx = 0. \tag{2.26}$$

ce qui donne

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left[\frac{d}{dt}\xi(t)\int_\Omega\int_0^1 z_n^2(x,\rho,t)\,d\rho dx - \xi'(t)\int_\Omega\int_0^1 z_n^2(x,\rho,t)\,d\rho dx\right] \\ +\frac{\xi(t)}{2\tau}\int_\Omega z_n^2(x,1,t)\,dx - \frac{\xi(t)}{2\tau}\int_\Omega u'^2_n(x,t)\,dx = 0\end{gathered} \tag{2.27}$$

En intégrant (2.27) sur $(0,t)$ on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left[\xi(t)\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{1} z_n^2\left(x,\rho,t\right)d\rho dx-\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{1}\xi'(t)z_n^2\left(x,\rho,s\right)d\rho dxds\right]+\frac{1}{2\tau}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}\xi(s)z_n^2\left(x,1,t\right)dxds\\
&-\frac{1}{2\tau}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{t}\xi(s)u_n'^2\left(x,t\right)dxds \qquad (2.28)\\
=\;&\frac{\xi(0)}{2}\left\|f_0\right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

En combinant $(2,25)$ et (2.28), nous trouvons

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\|u_n'\right\|_{L^2}^2+\left(\frac{k_0}{2}-\frac{\alpha}{2}\int\limits_{0}^{t}g(s)ds\right)\left\|\bigtriangledown u_n\right\|_{L^2}^2+\frac{\xi(t)}{2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{1}z_n^2\left(x,\rho,t\right)d\rho dx\\
&-\frac{\alpha}{2}(g\circ\nabla u_n)(t)-\frac{\alpha}{2}\int\limits_{0}^{t}(g'\circ\nabla u_n)(s)ds+\frac{\alpha}{2}\int\limits_{0}^{t}g(s)\left\|\bigtriangledown u_n\right\|_{L^2}^2ds\\
&+\int\limits_{0}^{t}\mu_1(s)\left\|u_n'\right\|_{L^2}^2ds+\int\limits_{0}^{t}\mu_2(s)\int\limits_{\Omega}z_n\left(x,1,s\right)u_n'(t)dxds \qquad (2.29)\\
&-\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{1}\xi'(t)z_n^2\left(x,\rho,s\right)d\rho dxds+\frac{1}{2\tau}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\Omega}\xi(s)z_n^2\left(x,1,t\right)dxds\\
&-\frac{1}{2\tau}\int\limits_{\Omega}\xi(s)u_n'^2\left(x,t\right)dxds=\frac{1}{2}\left\|u_{1n}\right\|_{L^2}^2+\frac{k_0}{2}\left\|\bigtriangledown u_{0n}\right\|_{L^2}^2+\frac{\xi(0)}{2}\left\|f_0\right\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

En utilisant les inégalités de H¨older et de Young sur le huitième terme de (2.29), ce qui donne

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{0}^{t}\mu_2(s)\int\limits_{\Omega}z_n\left(x,1,s\right)u_n'(t)dxds\\
&\leq\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\mu_2(s)\int\limits_{\Omega}z_n^2\left(x,1,s\right)dxds+\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{t}\mu_2(s)\int\limits_{\Omega}u_n'^2(t)dxds
\end{aligned} \qquad (2.30)$$

Alors l'équation (2.29) prend la forme

$$\begin{aligned}
&E_n(t) - \frac{\alpha}{2}\int_0^t (g' \circ \nabla u_n)(s)ds + \frac{\alpha}{2}\int_0^t g(s) \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 \, ds \\
&+\int_0^t \left(\mu_1(s) - \frac{\xi(s)}{2\tau} - \frac{\mu_2(s)}{2}\right) \|u_n'\|_{L^2}^2 \, ds \\
&+\frac{1}{2}\int_0^t \int_\Omega \int_0^1 \xi'(t) z_n^2 (x,\rho,s)\, d\rho dx ds \\
&\frac{1}{2}\int_0^t \left(\frac{\xi(s)}{2\tau} - \frac{\mu_2(s)}{2}\right) \int_\Omega z_n^2 (x,1,s)\, dx ds \leq E_n(0),
\end{aligned} \tag{2.31}$$

où

$$\begin{aligned}
E_n(t) &= \frac{1}{2}\|u_n'\|_{L^2}^2 + \left(\frac{k_0}{2} - \frac{\alpha}{2}\int_0^t g(s)ds\right) \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 \\
&-\frac{\alpha}{2}(g \circ \nabla u_n)(t) + \frac{\xi(t)}{2}\int_\Omega \int_0^1 z_n^2 (x,\rho,t)\, d\rho dx,
\end{aligned} \tag{2.32}$$

et

$$E_n(0) = \frac{1}{2}\|u_{1n}\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{2}\|\nabla u_{0n}\|_{L^2}^2 + \frac{\xi(0)}{2}\|f_0\|_{L^2}^2 \tag{2.33}$$

Puisque u_{0n}, u_{1n}, f_0 convergent, on peut trouver une constante $L_1 > 0$ indépendante de n telle que

$$\begin{aligned}
&+\left(\frac{k_0}{2} - \frac{\alpha}{2}\int_0^t g(s)ds\right) \|\nabla u_n\|_{L^2}^2 \\
&+\frac{\alpha}{2}(g \circ \nabla u_n)(t) + \frac{1}{2}\xi(t)\int_\Omega \int_0^1 z_n^2 (x,\rho,t)\, d\rho dx \leq L_1
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Donc cette estimation donne

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,\infty; H_0^1(\Omega)\right),$$

$$(u_n')_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,\infty; L^2(\Omega)\right),$$

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,\infty; L^2(\Omega)\times(0,1)\right).$$

Deuxiéme estimation :

En multipliant la première équation de (2.7) par $u_n''(t)$ et en additionnant par rapport à i on obtient

$$\begin{aligned}&\|u_n''(t)\|_{L^2}^2 + k_0\int_{\Omega} \bigtriangledown u_n''(t) \bigtriangledown u_n(t)dx \\ &-\alpha\int_0^t g(t-s)\int_{\Omega} \bigtriangledown u_n''(s) \bigtriangledown u_n(s)dxds \\ &+\mu_1(t)\left\|u_n'\right\|_{L^2}^2 + \mu_2(t)\int\limits_{\Omega} z_n\left(x,\rho,t\right)u_n''(t)dx = 0\end{aligned} \tag{2.35}$$

En exploitant les inégalités de Holder, Young et Poincaré et l'hypothèse (H1), (H2), nous avons les estimations suivantes

$$\left|k_0\int_{\Omega} \bigtriangledown u_n''(t) \bigtriangledown u_n(t)dx\right| \leq k_0\eta\left\|\bigtriangledown u_n''\right\|_{L^2}^2 + \frac{k_0}{4\eta}\left\|\bigtriangledown u_n\right\|_{L^2}^2 \tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}\left|-\alpha\int_0^t g(t-s)\int_{\Omega} \bigtriangledown u_n''(s) \bigtriangledown u_n(s)dxds\right| &\leq \alpha\eta\left\|\bigtriangledown u_n''\right\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{(k_0-l)}{4\eta}\int_0^t \left\|\bigtriangledown u_n(s)\right\|_{L^2}^2 ds\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\left|\mu_2(t)\int\limits_{\Omega} z_n\left(x,\rho,t\right)u_n''(t)dx\right| \leq C_s\eta\left\|\bigtriangledown u_n''(t)\right\|_{L^2}^2 + \frac{\beta M}{4\eta}\int_{\Omega} z_n^2(x,1,t)dx \tag{2.38}$$

En substituant ces trois estimations dans (2.35) et en utilisant (2.34), nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\left\|\bigtriangledown u_n''(t)\right\|_{L^2}^2 + \mu_1(t)\int_0^t \left\|u_n'\right\|_{L^2}^2 ds &\leq \eta(k_0+\alpha+C_s)\left\|\bigtriangledown u_n''(t)\right\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{(2k_0-l)}{4\eta}L_1 + \frac{\beta M}{4\eta}\int_{\Omega} z_n^2(x,1,t)dx\end{aligned} \tag{2.39}$$

On obtient facilement l'estimation

$$\begin{aligned}\left\|u_n''(t)\right\|_{L^2}^2 \leq &\left(\frac{2k_0-l}{4\eta} + M - \frac{\beta M}{4\eta}\right)L_1 \\ &+ \eta(k_0+\alpha+C_s)\left\|\bigtriangledown u_n''(t)\right\|_{L^2}^2\end{aligned} \tag{2.40}$$

En choisissant $\eta > 0$ assez petit dans (2.40), on obtient la deuxième estimation ci-dessous

$$\left\|u_n''(t)\right\|_{L^2}^2 \leq L_2. \tag{2.41}$$

où L_2 est une constante positive indépendante de $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0,T]$. On observe pour les estimations (2.34) et (2.41) que

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,\infty; H_0^1\left(\Omega\right)\right),$$

$$(u_n')_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^2\left(0,\infty; H_0^1\left(\Omega\right)\right),$$

$$(u_n'')_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^{\infty}\left(0,\infty;L^2(\Omega)\right),$$
$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée dans } L^{\infty}(0,\infty;L^2\left(\Omega\right)\times(0,1)).$$

Troixiéme étape : Passage à la limite

En appliquant le théorème de Dunford Pettis, on en déduit qu'il existe une sous-séquence (u_i,z_i) de (u_n,z_n) et on peut remplacer la sous-séquence (u_i,z_i) par la suite (u_n,z_n) telle que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ faiblement}^* \text{ dans } \; L^{\infty}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right),$$
$$u_n' \rightharpoonup u' \text{ faiblement}^* \text{ dans } L^{\infty}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right),$$
$$u_n'' \rightarrow u'' \text{ faiblement dans } L^{\infty}\left(0,T;H_0^1\left(\Omega\right)\right),$$
$$z_n \rightharpoonup z \;\text{ faiblement}^*\text{dans } L^{\infty}\left(0,T;L^2\Omega)\times(0,1)\right).$$

De plus u_n'' est borné dans $L^{\infty}(0,T;H_0^1(\Omega))$ alors u''est borné dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. La même méthode est utilisée pour prouver que u_n' est borné dans $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$.

Par conséquent u_n' est borné dans $H^1(0,T;H_0^1(\Omega))$. De plus, par le théorème ubins-Lions [5], il existe une sous-séquence (u_j) toujours représentée par la même notation telle que

$$u_j' \rightarrow u' \quad \text{fortement dans} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} u_j' &\rightarrow u' \quad \text{p.p sur} \quad \Omega\times(0,T). \\ z_j &\rightarrow z \quad \text{p.p sur} \quad \Omega\times(0,T). \end{aligned}$$

Et nous avons pour chaque $w_i\in L^2(\Omega)$, $v_i\in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega}\left(u_j''-k_0\Delta u_j+\alpha\int_{\Omega}g(t-s)\Delta u_j ds+\mu_1 u_j'+\mu_2 z_j\right)w_i dx \\ \rightarrow &\int_{\Omega}\left(u''-k_0\Delta u+\alpha\int_{\Omega}g(t-s)\Delta u ds+\mu_1 u'+\mu_2 z\right)w_i dx, \end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega}\tau(z_{jt}+z_{jp})v_i dx \rightarrow \int_{\Omega}\tau(z_t+z_p)v_i dx$$

Lorsque $j\rightarrow\infty$. Le problème, (1.1) admet une solution faible globale u.

Chapitre 3

La stabilité

Dans ce chapitre, nous étudierons la stabilitè de notre problème.

Lemme 3.1 *soit $E : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction descroissante et $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction strictement croissante de classe C^1 telle que*

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(t) \to +\infty, \text{ lorsque } t \to +\infty$$

Supposons qu'il existe $p > 0$ et $\omega > 0$ tels que :

$$\forall S \geq 0, \quad \int_S^{+\infty} E^{p+1}(t)\phi'(t)dt \leq \frac{1}{\omega}\left[E(0)\right]^p E(S),$$

alors E a les propriétés de désintégration suivantes :

$$\text{si } p = 0 \text{ alors } E(t) \leq E(0)e^{1-\omega\phi(t)}, \ \forall t \geq 0,$$

$$\text{si } p > 0 \text{ alors } E(t) \leq E(0)\left(\frac{1+p}{1+\omega\phi(t)}\right), \ \forall t \geq 0,$$

Notre résultat de stabilité, ce qu'on appelle aussi la décroissance exponentielle de l'énergie, est obtenu par le théorème suivant.

Théorème 3.1 *soit $(u_0, u_1, f_0) \in (H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega \times (0,1)))$ être donné. Supposons que les hypothèses (H1) - (H3) soient remplies. Alors pour certaines constantes positives K, k on obtient la propriété de désintégration suivante*

$$E(t) \leq E(0)e^{1-k\phi(t)}$$

Preuve. Soit $0 \leq S < T < \infty$ arbitrairement. On multiplie la première équation de (2.7) par $E^p\phi\prime u$, $p \in \mathbb{R}$ où ϕ est une fonction sera choisie plus tard satisfaisant toutes les hypothèses du lemme 2.1 et nous intégrons sur $(S,T) \times \Omega$, on obtient

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S^T E^p\phi' \int_\Omega u u_{tt}(x,t)dxdt - k_0 \int_S^T E^p\phi' \int_\Omega u\Delta u(x,t)dxdt \\
&+\alpha \int_S^T E^p\phi' \int_\Omega \int_0^t g(t-s)\Delta u(x,s)udsdxdt \\
&+\int_S^T E^p\phi'\mu_1(t)\int_\Omega uu_t(x,t) + E^p\phi'\mu_2(t)\int_\Omega uu_t(x,t-\tau)dxdt \\
&= \left[E^p\phi'\int_\Omega uu_t dx\right]_S^T - \int_S^T (E^p\phi')'\int_\Omega uu_t dxdt - \int_S^T E^p\phi'\int_\Omega u_t^2 dxdt \qquad (3.1)\\
&+k_0\int_S^T E^p\phi'\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt + \alpha\int_S^T E^p\phi'(g\circ\nabla u(x,t))dt \\
&-\frac{\alpha}{2}\int_S^T E^p\phi'\left\|\nabla u\right\|^2\int_0^t g(s)dsdt - \frac{\alpha}{2}\int_S^T E^p\phi'\int_0^t g(s)\left\|\nabla u\right\|^2 dsdt \\
&+\int_S^T E^p\phi'\mu_1(t)\int_\Omega uu_t(x,t) + \int_S^T E^p\phi'\mu_2(t)\int_\Omega uz(x,1,t)dxdt
\end{aligned}$$

En multipliant la deuxième équation de (2.7) par $E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho}z$ et en intégrant sur $(S,T) \times \Omega \times (0,1)$, on trouve :

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_S^T\int_0^1 \tau E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho}\int_\Omega zz_t dxd\rho dt + \int_S^T E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho}\int_\Omega\int_0^1 zz_\rho d\rho dxdt \\
&= \frac{\tau}{2}\left[\int_0^1 E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho}\int_\Omega z^2 dxd\rho\right]_S^T - \frac{\tau}{2}\int_S^T\int_0^1\int_\Omega (E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho})'z^2 dxd\rho dt \\
&\quad + \int_S^T E^p\phi'\int_\Omega\int_0^1 \xi(t)(\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}(e^{-2\tau\rho}z^2) + \tau e^{-2\tau\rho}z^2)d\rho dxdt \qquad (3.2) \\
&= \frac{\tau}{2}\left[\int_0^1 E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho}\int_\Omega z^2 dxd\rho\right]_S^T - \frac{\tau}{2}\int_S^T\int_0^1\int_\Omega (E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho})'z^2 dxd\rho dt \\
&\quad + \tau\int_S^T E^p\phi'\xi(t)\int_0^1\int_\Omega e^{-2\tau\rho}z^2 dxd\rho + \frac{1}{2}\int_S^T E^p\phi'\xi(t)\int_\Omega (e^{-2\tau}z^2(x,1,t) - z^2(x,0,t))dxdt.
\end{aligned}
$$

En combiner (3.1) et (3.2) et en prenant $A = \min(1, \tau e^{-2\tau})$ on obtient

$$
\begin{aligned}
A\int_S^T E^{P+1}\phi' dt \leq & -\left[E^p\phi'\int_\Omega uu_t dx\right]_S^T + \int_S^T (E^p\phi')'\int_\Omega uu_t dxdt \\
& + \frac{\alpha}{2}\int_S^T E^p\phi'\int_0^t g(s)\left\|\bigtriangledown u\right\|^2 dsdt - \int_S^T E^p\phi'\mu_1(t)\int_\Omega uu_t(x,t)dxdt \\
& - \int_S^T E^p\phi'\mu_2(t)\int_\Omega uz(x,1,t)dxdt - \frac{\tau}{2}\left[\int_0^1 E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho}\int_\Omega z^2 dxd\rho\right]_S^T \qquad (3.3) \\
& + \frac{\tau}{2}\int_S^T\int_0^1\int_\Omega e^{-2\tau\rho}(E^p\phi'\xi(t))'z^2 dxd\rho dt + \frac{3}{2}\int_S^T E^p\phi'\int_\Omega u_t^2 dxdt \\
& - \frac{1}{2}\int_S^T E^p\phi'\xi(t)\int_\Omega (e^{-2\tau}z^2(x,1,t) - z^2(x,0,t))dxdt.
\end{aligned}
$$

Supposons maintenant que ϕ est une fonction concave strictement croissante. Donc ϕ' est une fonction bornée sur $\mathbb{R}^+$. Notons λ le maximum de ϕ'. Par les inégalités de Cauchy Schwarz, Young et Poincaré et le fait que ϕ' est borné et que E est une fonction croissante, on a

$$
\left|E^p\phi'\int_\Omega uu_t(x,t)dx\right| \leq \lambda c_1 E^{p+1}(t), \qquad (3.4)
$$

où $c_1 = \max(1, \frac{c_s^2}{l})$. De (3.4) nous déduisons les estimations suivantes

$$\begin{aligned}\left|\int_S^T (E^p\phi')' \int_\Omega uu_t(x,t)dxdt\right| &= \int_S^T pE'E^{p-1}\phi' \int_\Omega uu_t(x,t)dxdt + \int_S^T E^p\phi'' \int_\Omega uu_t(x,t)dxdt \\ &\leq \lambda c_1 p \int_S^T E^p(-E')dt + c_1 E^{p+1}(S) \int_S^T \phi''(t)dt \qquad (3.5) \\ &\leq \lambda c_2 E(S)^{p+1},\end{aligned}$$

où $c_2 = c_1 \max(p,1)$, et

$$\left|\frac{\alpha}{2}\int_S^T E^p\phi' \int_0^t g(s)\left\|\nabla u\right\|^2 dsdt\right| \leq \lambda c_3 E(S)^{p+1}, \tag{3.6}$$

où $c_3 = \frac{k_0 - l}{l}$. Par l'hypothèse (H2), les inégalités de Young et de Poincaré et (3.4), on a

$$\begin{aligned}\left|\int_S^T E^p\phi'\mu_1(t) \int_\Omega uu_t(x,t)dxdt\right| &\leq \lambda M\beta E^{p+1} + \lambda \int_S^T E^p(-E')dt \qquad (3.7) \\ &\leq \lambda c_4 E^{p+1}(S),\end{aligned}$$

où $c_4 = Mc_1$, et

$$\left|\int_S^T E^p\phi'\mu_2(t) \int_\Omega uz(x,1,t)dxdt\right| \leq \lambda c_5 E^{p+1}(S), \tag{3.8}$$

où $c_5 = \max(\beta M \frac{c_s^2}{l}, 1)$, et

$$\frac{\tau}{2}\int_S^T \int_0^1 E^p\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho} \int_\Omega z^2 dxd\rho dt \leq \tau\lambda E^{p+1}(S), \tag{3.9}$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{2}\int_S^T\int_0^1\int_\Omega e^{-2\tau\rho}(E^p\phi'\xi(t))'z^2dxd\rho dt \\
= \; & \frac{\tau}{2}\int_S^T\int_0^1 pE'E^{p-1}\phi'\xi(t)e^{-2\tau\rho}\int_\Omega z^2dxd\rho dt + \frac{\tau}{2}\int_S^T\int_0^1\int_\Omega\int_\Omega e^{-2\tau\rho}E^p\phi''\xi(t)z^2dxd\rho dt \\
&+\frac{\tau}{2}\int_S^T\int_0^1\int_\Omega e^{-2\tau\rho}E^p\phi'\xi'(t)z^2dxd\rho dt \qquad (3.10)\\
\leq \; & \lambda\tau p\int_S^T E^p(-E')dt + \tau E^{p+1}(S)\int_S^T\phi''(t)dt + \tau\lambda E^{p+1}(S) \\
\leq \; & \lambda c_6 E^{p+1}(S),
\end{aligned}$$

où $c_6 = \tau\max(1,p)$, et

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_S^T E^p\xi(t)\int_\Omega e^{-2\tau}z^2(x,1,t)dxdt \; &\leq \; \lambda\int_S^T E^p\xi(t)\int_\Omega z^2(x,1,t)dxdt \\
&\leq \; \lambda\int_S^T E^p(-E')dt \qquad (3.11)\\
&\leq \; \lambda E^{p+1}(S),
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_S^T E^p\phi'\xi(t)\int_\Omega z^2(x,0,t)dxdt \\
= \; & \frac{1}{2}\int_S^T E^p\phi'\xi(t)\int_\Omega u_t^2(x,t)dxdt \qquad (3.12)\\
\leq \; & \tau\lambda(2-\beta)E^{p+1}(S),
\end{aligned}$$

$$\frac{3}{2}\int_S^T E^p\phi'\xi(t)\int_\Omega u_t^2(x,t)dxdt \leq 3\lambda E^{p+1}(S). \qquad (3.13)$$

À partir de (3,3) et les estimations (3,5), (3,6), (3,8), (3,2), (3,9), (3,12), nous obtenons

$$\int_S^T E^{p+1}(t)\phi' dt \leq CE^{p+1}(S), \qquad (3.14)$$

où $C = \lambda \max(c_i, 3, \tau(2-\beta)), i = 1, ..., 6.$
En appliquant le lemme 3.1, nous obtenons la propriété de décroissance. Ce qu'il fallait démontrer.
■

Bibliographie

[1] A. Benaissa, A.Benguessoum and S. A. Messaoudi : Energy decay of solutions for a wave equation with a constant weak delay and a weak internal feedback, Electronic Journal of Qualitative Theoryof

[2] Differential Equations, No. 11, (2014), 1-13.

[3] H. Brézis, "Analyse Fonctionnelle- Théorie et applications," Dunod, Paris (1999).

[4] T. Cazenave et A. Hareaux, Introduction aux Problèmes d'évolution semi-linéaires, El-lipses, socété de mathématiques appliquées et industrielles.

[5] R. Dacto, J. Lagnese and M. P. Polis : An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations, SIAM J. Control Optim, 24(1986), 152–156.

[6] V. Georgiev, G. Todorova, Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms,J.Differential Equations 109,(1994) 295–308.

[7] J. L. Lions, "quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non lineaires," Dunod, Gaulthier-Villars, Paris (1969)66.

[8] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires, Dunod, Paris, 2002.

[9] Wenjun Liu : General Decay Rate Estimate For The Energy Of A Weak Viscoelastic Equation With An Internal Time-Varying Delay Term, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 17, (6), (2013), 2101–2115.

[10] Mahdi Houcine, Allouani Abderafik, Mémoire de fin d'étude Pour l'obtention du diplôme de MASTER Existence et Stabilité Asymptotique d'une Equation d'Onde Viscoélastique avec Retard 2017-2018

[11] P. Martinez : A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems, ESAIM Control Optim. Calc. Var, 4(1999), 419–444.

[12] Melouka Remil University of Sidi-Bel-Abbes GLOBAL EXISTENCE AND ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS TO THE VISCOELASTIC WAVE EQUATION WITH A CONSTANT DELAY TERM

[13] S. Nicaise and C. Pignotti : Interior Feedback Stabilization Of Wave Equation With Time Dependent Delay, Electronic Journal of Differential Equations, Vol 2011, (41), (2011), 1-20.

[14] S. Nicaise and C. Pignotti : Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks, SIAM J. Control Optim, 45(2006), 1561– 1585.

[15] S. Nicaise and J. Valein : Stabilization of second order evolution equations with un- bounded feedback with delay, ESAIM Control Optim. Calc. Var, 16(2010), 420–456.

[16] B. Said-Houari, "Etude de l'interaction enter un terme dissipatif et un terme d'explosion pour un problème hyperbolique," Mémoire de magister (2002), Université de Annaba.

[17] R. E. Showalter, "Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Diferential.

[18] F. Tahamtani and A. Peyravi : Asymptotic Behavior And Blow-Up Of Solutions For A Nonlinear Viscoelastic Wave Equation With Boundary Dissipation, Taiwanese Journal of Mathematics, Vol. 17, No. 6, (2013), 1921–1943.

[19] Z. Y. Zhang and X. J. Miao : Global existence and uniform decay for wave equation with dissipative term and boundary damping, Comput. Math. Appl.59(2),(2010), 1003–1018.

[20] Z. Y. Zhang, X. J. Miao and D. M. Yu : On solvability and stabilization of a class of hyperbolic hemivariational inequalities in elasticity, Funkcialaj Ekvacioj 54, (2011), 297–314.

[21] Zai-Yun Zhang, Zhen-Hai Liu and Xiang-Yang Gan : Global existence and general decay for a nonlinear viscoelastic equation with nonlinear localized damping and velocity-dependent material density, Applicable Analysis, 2012, 2021–2048.

[22] Zai-Yun Zhang and Jian-Hua Huang : On solvability of the dissipative Kirchhoff equation with nonlinear boundary damping, Bulletin of the Korean Mathematical Society, 51(1), (2014), 189–206.

[23] Z. Y. Zhang, Z. H. Liu, X. J. Miao and Y. Z. Chen : Global existence and uniform stabi- lization of a generalized dissipative Klein-Gordon equation type with boundary damping, Journal of Mathematics and Physics, 52 (2011), no. 2, 023502.