



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche
Scientifique

Université Larbi Tébessi -Tébessa-
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et
de la Vie*

Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....

Série :.....

THÈSE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

DOCTORAT 3ÈME CYCLE LMD

Option : *Physique de la Matière Condensée*

INTITULÉE

L'influence de la dépendance du potentiel avec l'énergie sur les propriétés physiques des oscillateurs relativistes à une dimension (1D)

par :

Labidi Malika

Devant le jury

PR. MOHAMED LOUTFI BENKHEDIR	PRÉSIDENT	<i>Univ-Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
PR. ABDELMALEK BOUMALI	RAPPORTEUR	<i>Univ-Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
PR. MAHMOUD MERAD	EXAMINATEUR	<i>Univ-Larbi-BenMhidi, Oum el Bouaghi</i>
PR. MAAMACHE MUSTAFA	EXAMINATEUR	<i>UFA. Sétif 1</i>
DR. AOUNALLAH HOUCINE	EXAMINATEUR	<i>Univ-Larbi-Tébessi, Tébessa</i>

Date de Soutenance : .../.../2021

© *Memoire effectué au*
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique



*L'influence de la dépendance du potentiel avec l'énergie sur les propriétés
physiques des oscillateurs relativistes à une dimension (1D)*

Labidi Malika

17 février 2022

ملخص

في هذا العمل قمنا بدراسة تأثير الكمونات المتعلقة بالطاقة علي بعض الخواص الفيزيائية للهزازات التوافقية النسبية أحادية البعد. حلول هذه الهزازات أمكنتنا من دراسة بعض الخواص الفيزيائية نكاحية تشبع المستويات الطاقوية وتأثير هذه الأخيرة علي الخواص الترموديناميكية الفائقة الإحصائية. أيضا قمنا بدراسة تأثير خاصية تشبع المستويات الطاقوية علي كثافة الاحتمال لهذه الهزازات و من بعدها علي وسائط فيشر و شنون المعرفان جيدا فيما يسمي الاعلام الكوانتي. سبب دراسة هذه الأخيرة يكمن بالتحديد في تعلقها بكثافة الاحتمال لهذه الهزازات. في الأخير قمنا بدراسة الخواص الفائقة الإحصائية لمثل هذا النوع المسائل.

Abstract

In the present thesis, we have studied the effect of energy-dependent potentials on some physical properties of one-dimensional relativistic harmonic oscillators. The solutions of these oscillators allowed us to study some physical properties such as the saturation of energy levels and its effect on superstatistic properties of these oscillators. We also studied the effect of this saturation on the probability density of these oscillators as well as on the Fisher and Shannon parameters. The reason for studying the latter lies precisely in the close connection of these two parameters to the probability density of these oscillators. Finally, we have studied the superstatistical properties for this type of problem.

RÉSUMÉ

Dans cette thèse, nous avons étudié l'effet des potentiels dépendant de l'énergie sur certaines propriétés physiques des oscillateurs harmoniques relativistes unidimensionnels. Les solutions de ces oscillateurs nous ont permis d'étudier certaines propriétés physiques telles que la saturation des niveaux d'énergie et l'effet de ce dernier sur les propriétés superstatistique. Nous avons également étudié l'effet de cette saturation sur la densité de probabilité de ces oscillateurs ainsi que sur les paramètres de Fisher et de Shannon. La raison d'étudier cette dernière réside précisément dans la liaison étroite de ces deux paramètres à la densité de probabilité de ces oscillateurs. Enfin, nous avons étudiées les propriétés super-statistiques pour ce type problème.

Dédicace

*À mon mari Salmi Farid et mon fils Ahmed Islam
À ma chère mère,
À mes frères, mes sœurs
À l'âme de mon père
À tout mes amis,
À tout mes collègues,
À tout mes enseignants,*

Je dédie cet humble travail.

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier mon directeur de thèse, le Professeur Abdelmalek Boumali. Merci d'avoir accepté d'encadrer cette thèse. Vous avez su être là quand j'avais besoin d'aide, tout en me laissant la place de manœuvrer à ma guise. Le plaisir que j'ai pu éprouver pendant ces années de thèse est en grande partie lié à cette liberté et cette autonomie que vous m'avez laissés.

J'exprime mes remerciements à Mouhamed Benkhedir, Professeur à l'Université de Larbi-Tébessi-Tébessa, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de mon mémoire. Je remercie vivement les professeurs Maamache Mustafa de l'Université de Setif 1, Mahmoud Merad de l'Université Larbi-BenMhidi, Dum el Bouaghi et Aounallah Houcine de l'Université de Larbi-Tébessi-Tébessa- qui ont accepté d'être examinateurs de ce mémoire. Nous tenons également à exprimer notre gratitude aux nombreuses personnes qui nous ont apporté leur aide précieuse avec beaucoup de gentillesse. .

Nous remercions aussi tous ceux qui, tout au long de ces années d'études, nous ont encadrés, observés, aidés, conseillés et même supportés. Enfin, on souhaite exprimer toute notre gratitude à l'ensemble des personnes, qui bien en marche de ce travail, ont contribué largement à son aboutissement. Que ce soit depuis toujours, depuis plusieurs années ou quelques mois seulement, nombreux sont ces et ceux qui ont participé à notre épanouissement. On les remercie sincèrement.

Table des matières

ملخص	i
ABSTRACT	ii
RÉSUMÉ	iii
DÉDICACE	iv
REMERCIEMENTS	v
LISTE DES TABLEAUX	viii
LISTE DES FIGURES	ix
1 Introduction générale	2
2 La densité de probabilités ds équations relativistes en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie	7
2.1 Rappel sur les équations d'ondes	7
2.1.1 L'équation d'onde de Klein-Gordon	7
2.1.2 Le quadri-courant J^μ	9
2.1.3 L'équation d'onde de Dirac	10

2.1.3.1	Le quadri-courant J^μ	12
2.2	Reformulation de la forme de la densité de probabilité en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie	13
2.2.1	L'équation de Schrödinger	13
2.2.2	L'équation de Klein-Gordon	16
2.2.3	L'équation de Dirac	19
3	L'influence du potentiel dépendant de l'énergie sur l'information de Fisher et l'entropie de Shannon : cas de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D	23
3.1	Les solutions propres de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie	23
3.2	L'influence du paramètre γ sur l'information de Fisher et l'entropie de Shannon	28
3.2.1	L'information de Fisher	28
3.2.2	L'entropie de Shannon	31
3.3	Résultats et discussion	31
4	L'influence du potentiel dépendant de l'énergie sur l'information de Fisher et l'entropie de Shannon : cas de l'oscillateur de Dirac à 1D	42
4.1	Les solutions propres de l'oscillateur de Dirac à une dimension en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie	42
4.2	L'influence du paramètre γ sur l'information de Fisher et l'entropie de Shannon	48
4.2.1	L'information de Fisher	48
4.2.2	L'entropie de Shannon	55
4.3	Résultats et discussion	55
5	Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie	61
5.1	Les propriétés thermiques ordinaires de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D . . .	61
5.1.1	Résultats et discussion	62
5.2	Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D	64
5.2.1	La fonction de partition généralisée	64

5.2.2 Résultats et discussion	67
Conclusion	71
A L'information de Fisher et l'entropie de Shannon	81
A.1 L'information de Fisher	81
A.2 L'entropie de Shannon	84
B La Superstatistique	86
B.1 Concept théorique	86
B.2 Distributions possibles de $f(\beta)$	88
C Liste des articles	93

Liste des tableaux

3.1	Résultats numériques pour la relation d'incertitude et les informations de Fisher et l'entropie de Shannon de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en fonction du γ	39
4.1	La constante de normalisation pour certaines niveau dans la configuration $\{x\}$.	45
4.2	La constante de normalisation pour certaines niveau dans la configuration $\{p_x\}$	45
4.3	La condition sur le paramètre γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$ dans la configuration $\{p_x\}$	48
4.4	Résultats numériques pour la relation d'incertitude et les informations de Fisher et l'entropie de Shannon de l'oscillateur de Dirac à une dimension en fonction du γ	59

Liste des Figures

3.1	Le spectre d'énergie E en fonction du nombre quantique n pour certaines valeurs de γ dans les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$	25
3.2	La densité de probabilité ρ_{KG} dans les deux configurations $\{x\}$ et p_x	27
3.3	L'information de Fisher unidimensionnel de l'oscillateur de Klein-Gordon en fonction du γ pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$	31
3.4	Le produit $FxFp$ en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$.	32
3.5	Δx et Δp en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$	32
3.6	$\Delta x \Delta p$ en fonction de γ pour les trois premier niveaux $n = 0, 1, 2$	33
3.7	Entropie de Shannon de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en fonction du paramètre γ pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$	34
3.8	Les densités de l'information de Fisher	35
3.9	Les densités de l'entropie de Shannon	36
3.10	La somme $S_x + S_p$ en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$	37
3.11	$S_x + S_p$ en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$	40
4.1	Le spectre d'énergie E en fonction du nombre quantique n pour certaines valeurs de γ dans les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$	46
4.2	Les densités de probabilités dans les deux espaces de configuration $\{x\}$ et $\{p_x\}$ pour différentes valeurs de n et γ	49

4.3	L'information de Fisher pour l'oscillateur de Dirac unidimensionnel en fonction du γ pour les deux types de configurations	56
4.4	Le produit $FxFp$ en fonction du γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$	56
4.5	L'incertitude de Heisenberg Δx et Δp en fonction du γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$	57
4.6	$\Delta x \Delta p$ en fonction du γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$	57
4.7	L'entropie de Shannon de l'oscillateur de Dirac à une dimension en fonction du γ pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$	58
4.8	La somme $Sx + Sp$ en fonction du γ pour trois niveaux $n = 0, 1, 2$	58
5.1	Les propriétés thermodynamiques des deux oscillateurs en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie	63
5.2	Variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour $\gamma = -0.1$	69
5.3	Variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour $\gamma = -0.3$	69
5.4	Variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour $\gamma = -0.5$	69
5.5	Variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour $\gamma = -0.7$	70
B.1	Les cellules dans le concept de la Superstatistique	87

CHAPITRE 1

Introduction générale

La dépendance des potentiels quantiques avec l'énergie est apparue depuis longtemps dans des équations exactement résolubles. Initialement, Pauli [1], dans son étude sur le mouvement d'un électron en présence d'un champ magnétique, était en face d'un problème d'une équation de Schrödinger (non-relativiste) dont le potentiel dépend explicitement de l'énergie. Cette dépendance a été observée pour le cas relativiste dans l'équation de Klein-Gordon en étudiant le mouvement d'une particule dans des champs scalaires et vectoriels externes [2,3]. Lombard et al [4] ont utilisé des potentiels dépendant de l'énergie dans le but de décrire le phénomène de confinement pour des systèmes du quark lourd. Aussi, ce type de potentiels quantiques a été abordé dans de nombreux domaines de la mécanique quantique et son développement dans ce domaine a été faite. Ces études récentes ont montré que ce type de potentiels a un impact sur le comportement et les propriétés physiques des systèmes physiques par de nombreux auteurs [3,5-11]. Ces systèmes ont été traités au moyen de méthodes élégantes telles que la supersymétrie, solutions analytiques, transformations de Darboux, polynômes orthogonaux et méthode de factorisation, etc. Aussi, les solutions de ces systèmes peuvent également avoir des comportements inhabituels dans leur spectre tel que le phénomène de saturation observer pour le cas des oscillateurs harmoniques relativistes et non relativistes.

Formanek et al [12] ont montré que la présence d'un potentiel dépendant de l'énergie dans la fonction d'onde a des implications non triviales sur le fondement théorique de la mécanique quantique. Parmi ces axiomes, la définition des relations d'orthogonalités et de la norme doit être modifiée afin d'assurer la conservation de la norme. L'orthogonalité des fonctions propres peut ne pas être satisfaite pour ce type des problèmes en question. En conséquence, la présence d'un potentiel dépendant de l'énergie dans une équation d'onde a plusieurs implications non négligeables. La plus évidente est la modification du produit scalaire, nécessaire à la conservation de la norme. Cette modification est aussi requise dans le cadre de la mécanique quantique relativiste [2, 6–8, 13].

Les oscillateurs relativistes sont la version relativiste de l'oscillateur Harmonique habituel. L'oscillateur de Dirac (DO) était pour la première fois étudié par Ito et al [14]. Ils ont estimé une équation de Dirac dans laquelle le moment \vec{p} est remplacé par $\vec{p} - im\omega\gamma^0\vec{r}$, dont \vec{r} étant le vecteur de position, m la masse de la particule, et ω la fréquence de l'oscillateur. L'intérêt pour le problème a été ravivé par Moshinsky et Szczepaniak [15], qui leur donna le nom de l'oscillateur de Dirac (DO) parce que, dans la limite non relativiste, il se transforme à un oscillateur harmonique possédant un terme de couplage spin-orbite très fort. Physiquement, l'interaction (DO) est un système physique, qui peut être interprété comme l'interaction du moment magnétique anomal avec un champ électrique linéaire [16–18]. L'oscillateur de Dirac a attiré beaucoup d'intérêt à la fois parce qu'il constitue l'un des exemples rares qui ont des solutions exactes, et aussi en raison de ses nombreuses applications en physique. En mécanique quantique relativiste, le (DO) a été étudiée à partir de nombreux points de vue (pour plus d'information consulter les références suivantes [10, 19–51]).

La théorie de l'information quantique est un développement de la théorie de l'information de Claude Shannon exploitant les propriétés de la mécanique quantique, notamment le principe de superposition ou encore l'intrication. Ce dernier est un phénomène dans lequel deux particules (ou groupes de particules) forment un système lié, et présentent des états quantiques dépendant l'un de l'autre quelle que soit la distance qui les sépare. Un tel état est dit « intriqué », parce qu'il existe des corrélations entre les propriétés physiques observées de ces particules distinctes. Cette observation est au cœur des discussions philosophiques sur l'interprétation de la mécanique quantique. Ce phénomène quantique a des applications potentielles dans les domaines de

l'information quantique, tels que la cryptographie quantique, la téléportation quantique ou l'ordinateur quantique.

Parmi les paramètres pertinents de l'information quantique, on peut citer l'information de Fisher et l'entropie de Shannon. L'information de Fisher est la qualité d'une procédure de mesure efficace utilisée pour estimer les limites quantiques ultimes. C'est une mesure de la précision intrinsèque de théorie de l'estimation statistique. L'étude des propriétés et des applications de la mesure de l'information de Fisher à divers problèmes de physique théorique est principalement grâce aux travaux pionniers de Frieden et al [52–57] qui ont pu reformuler les lois de la physique bien connues à partir de l'information de Fisher. Ce dernier, à une dimension, a la forme suivante pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x) \left[\frac{d \ln(\rho_n(x))}{dx} \right]^2 dx, \quad (1.1)$$

$$F_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(p) \left[\frac{d \ln(\rho_n(p))}{dp} \right]^2 dp. \quad (1.2)$$

Ces deux équations montrent que l'information de Fisher a un caractère local dû à l'opérateur gradient : plus cette quantité est élevée, plus la densité est concentrée et plus l'incertitude de position de la particule. Ainsi, il est capable de détecter les changements locaux de la densité afin de mieux décrire le système dans une théorie de l'information quantique. La quantité de l'information de Fisher a été utilisée pour une grande variété de concepts et phénomènes mécaniques [52–57].

Concernant le deuxième paramètre qui a des applications dans plusieurs branches de la physique en raison de ses applications possibles dans un large éventail de domaines [58–60] est l'entropie de Shannon. Cette quantité fournit des outils analytiques qui aide à la bonne compréhension des corrélations existant dans des systèmes quantiques. Il a été aussi introduite pour mesurer l'incertitude. Cette quantité est donnée par la relation suivante

$$S_x = - \int \rho_n(x) \ln(\rho_n(x)) dx, \quad (1.3)$$

$$S_p = - \int \rho_n(p) \ln(\rho_n(p)) dp. \quad (1.4)$$

D'après ces deux équations, l'information de Shannon dépend fortement de la probabilité de den-

sité. Elles ont un caractère global dans le sens où elles sont peu sensibles au changement de la distribution sur une région de petite taille, et peut-être utilisé comme mesure de la délocalisation. Récemment, il y a eu un intérêt croissant pour les mesures théoriques de l'information pour des systèmes quantiques. Comme alternative à la relation d'incertitude d'Heisenberg (HUR), l'entropie de Shannon joue un rôle très important dans la mesure de l'incertitude.

L'une des qualités importantes de la thermodynamique statistique est sa capacité à décrire l'évolution des systèmes complexes sans en connaître la dynamique à l'échelle microscopique. Bien que son succès soit remarquable, il n'est pas pour autant sans limites. Ainsi, dans certaines circonstances, les principes de la thermodynamique statistique ne semblent pas être rigoureusement justifiés et cette dernière peine à décrire un certain nombre de phénomènes. Une généralisation de la statistique standard a alors été proposée afin de pallier ces problèmes. Cette théorie est appelée "statistique non-extensive" ou « statistique de Tsallis » [61–65]. Cette nouvelle statistique repose sur une généralisation à un paramètre de l'entropie de Boltzmann-Gibbs (BG). Ce paramètre quantifiant les interactions à longue portée rend possible la description de systèmes complexes. Sa flexibilité permet d'avoir un bon accord entre les prédictions théoriques et les valeurs expérimentales. La superstatistique est une branche de la mécanique statistique ou de la physique statistique consacrée à l'étude des systèmes non linéaires et hors équilibre (Voir Appendice B). Elle est caractérisée par l'utilisation de la superposition de plusieurs modèles statistiques pour obtenir la non-linéarité souhaitée. En termes de idées statistiques ordinaire, la superstatistique est une superposition de différentes statistiques. Ainsi, elle décrit un système hors équilibre pour un état stationnaire dont le paramètre intensif fluctué [66–79].

Maintenant, si E est l'énergie d'un micro-état, le facteur de Boltzmann dans la superstatistique s'écrit par [67]

$$B(E) = \int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta \quad (1.5)$$

dont $B(E)$ est le facteur de Boltzmann généralisé, $f(\beta)$ est la fonction de distribution, enfin $e^{-\beta E}$ est le facteur de Boltzmann ordinaire.

Ainsi, le but principal de cette thèse se résume aux points suivants :

- Étendre la recherche du phénomène de saturation du spectre d'énergie pour le cas relativiste : dans notre case, nous avons choisi les deux oscillateurs relativistes de Klein-Gordon

(spin-0) et de Dirac (spin-1/2) à une dimension.

- Étudier l'influence de cette saturation, si elle existe, sur la densité de probabilité ρ pour le cas des deux oscillateurs relativistes en question. Selon les équations (1.1), (1.3), les deux paramètres de Fisher et Shannon on dépend fortement avec ρ . Aussi, nous allons mettre en épreuve la validité des inégalités de , Fisher, Stam, Cramer-Rao [80] et enfin de BBM (Beckner, Bialynicki-Birula and Mycielski) [81].
- Enfin, introduire le concept de la superstatistique [61–65, 67–73, 79] pour le cas des deux oscillateurs en question.

Ainsi, afin de bien réaliser les buts mentionnés au-dessus, nous discutons tout d'abord l'effet de saturation observé dans le spectre d'énergie sur les deux paramètres de Fisher et Shannon. Ensuite, nous introduisons le concept de la superstatistique sur ces deux oscillateurs. Toutes les propriétés superstatistiques seront obtenues via la méthode d'Euler-Maclaurin [23, 82, 83].

L'organisation de ce manuscrit est la suivante :

Le premier chapitre est consacré sur un bref rappel sur les équations relativistes à une dimension. Une démonstration sur la modification du produit scalaire pour ces équations a été bien établie.

Dans les deux chapitres 2 et 3, nous avons discuté le phénomène de saturation observé pour les oscillateurs relativistes tels que l'oscillateur de Klein-Gordon et de Dirac. Aussi, nous avons testé l'influence de cette saturation sur la densité de probabilité dont les paramètres de Fisher et Shannon en dépendent d'elle.

Enfin, dans le quatrième chapitre, nous avons calculé les propriétés superstatistiques de ces oscillateurs en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie.

La densité de probabilités ds équations relativistes en présence d'un
potentiel dépendant de l'énergie

Dans ce chapitre, nous faisons un petit rappel sur les équations relativistes des particules bosoniques et fermioniques, tels que les deux équations de Klein-Gordon (spin-0) et l'équation Dirac (spin-1/2). Une reformulation de la forme de la densité de probabilité en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie sera aussi abordée.

2.1 Rappel sur les équations d'ondes

2.1.1 L'équation d'onde de Klein-Gordon

L'équation de Schrödinger pour une fonction d'onde ψ est donnée par la relation suivante [84–87]

$$H\psi = E\psi, \tag{2.1}$$

dont H est l'Hamiltonien de la particule.

En s'appuyant sur la règle de la correspondance suivante de la mécanique quantique,

$$E \mapsto i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad p^i \mapsto -i\hbar \frac{\partial}{\partial x^i}, \tag{2.2}$$

on peut aboutir directement à l'équation de Schrödinger.

Ainsi, appliquer ce principe à l'expression de l'énergie d'une particule massive non relativiste donné par l'expression ci-dessous

$$E = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

conduit à l'équation de Schrödinger suivante

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{x}) \right\} \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{x}, t), \quad (2.4)$$

dont $\nabla^2 = \Delta$ est le laplacien.

Suivant le même chemin sur une particule relativiste libre, dont l'énergie est

$$E^2 = P^2 c^2 + m^2 c^4, \quad (2.5)$$

donne l'équation de Klein-Gordon

$$\left(\frac{\hbar^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \hbar^2 \nabla^2 + m^2 c^2 \right) \psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.6)$$

Cette dernière forme peut aussi avoir la forme suivante

$$(\square + \lambda^2) \psi(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.7)$$

avec $\square = \partial_\nu \partial^\nu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ est le d'Alembertien, que l'on écrit aussi sous une forme covariante par $\square = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu$, avec $g_{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ est le tenseur fondamental de l'espace Minkowski [86, 88] et $\lambda = \frac{mc}{\hbar}$.

Enfin la forme covariante de l'équation de Klein-Gordon est

$$(g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu + \lambda^2) \psi(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.8)$$

L'introduction de l'interaction due au champ électromagnétique se fait par le principe de couplage minimal : ce dernier consiste à remplacer les dérivées ∂_μ par une dérivé covariante (covariante vis à vis des transformations de jauge) comme suit :

$$\partial^\mu \mapsto \partial^\mu - ieA^\mu, \quad (2.9)$$

dont le quadri-potentiel A^μ s'écrit par :

$$A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, A \right). \quad (2.10)$$

A partir des équations (2.9) et (2.10), (2.8) se transforme à

$$\{g_{\mu\nu} (\partial - ieA)^\mu (\partial - ieA)^\nu + \lambda^2\} \psi(x) = 0. \quad (2.11)$$

2.1.2 Le quadri-courant J^μ

La détermination du quadri-courant J^μ se fait en suivant les démarches suivantes : le complexe conjugué de l'équation (2.6) est

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \Delta + \lambda^2 \right) \psi^*(\mathbf{x}) = 0. \quad (2.12)$$

En multipliant l'équation (2.6) et l'équation (2.7) respectivement par ψ^* et ψ , on obtient

$$\frac{1}{c^2} \left(\psi^* \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi - \psi \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi^* \right) = \psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*, \quad (2.13)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial t} \psi - \psi \frac{\partial}{\partial t} \psi^* \right) = \nabla (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (2.14)$$

La soustraction de ces deux équations donne

$$\frac{\partial}{\partial t} (\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*) + \nabla (\psi^* (\nabla \psi) - \psi (\nabla \psi)^*) = 0. \quad (2.15)$$

Par comparaison avec l'équation de continuité donnée par

$$\partial_\mu j^\mu = 0, \quad (2.16)$$

où $J^\mu = (j^0, \vec{j})$ est le quadri-courant s'écrivant dans une forme covariante par

$$j^\mu = \psi^* (\partial^\mu \psi) - (\partial^\mu \psi^*) \psi. \quad (2.17)$$

Ainsi, A partir des deux équations (2.16) et (2.17), les deux densités $\rho = \frac{j^0}{c}$ et \vec{J} sont définies respectivement par

$$\rho = \frac{j^0}{c} = (\psi^* \partial_0 \psi - \psi \partial_0 \psi^*), \quad (2.18)$$

$$\vec{j} = \psi^* (\nabla \psi) - \psi (\nabla \psi)^* . \quad (2.19)$$

Remarquons ici, que la densité de charge pour le cas des particules scalaires peuvent donner lieu à des densités négative.

2.1.3 L'équation d'onde de Dirac

L'existence d'une densité de charges négative a incité Dirac de reformuler l'équation de Klein-Gordon dans le but d'avoir toujours une densité positive : essayons de trouver une racine carrée de l'opérateur suivant $p^2 + m^2 = -\Delta + m^2$, en utilisant une représentation matricielle [86-88]

$$H\psi = \left(\frac{1}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m \right) \psi = i \frac{\partial \psi}{\partial t} , \quad (2.20)$$

où ψ et m sont respectivement la fonction d'onde et la masse de la particule relativiste, et α et γ^0 sont des matrices Hermitiennes, de telle façon que l'opérateur $H = \frac{1}{i} \vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \gamma^0 m$ soit lui-même Hermitien. On demande aussi que l'équation (2.20) soit compatible avec l'équation (2.6).

La fonction d'onde dans l'équation de Dirac est un spineur d'ordre 4 ayant la forme suivante

$$\psi(\mathbf{x}, t) = (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)^T . \quad (2.21)$$

Projetons l'équation (2.21) dans l'équation (2.20), on trouve le système suivant

$$\begin{aligned} (-i\alpha_i \nabla + \gamma^0 m)^2 \psi &= \sum_{i=1}^3 \alpha_i \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i^2} - \sum_{i \neq j} \{\alpha_i, \alpha_j\} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{i} m \sum_{i=1}^3 \{\alpha_i, \gamma^0\} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} + (\gamma^0)^2 m^2 \psi \\ &= (-\Delta + m^2) \psi, \end{aligned} \quad (2.22)$$

Ainsi, les matrices α de Dirac prennent la forme suivante

$$\{\alpha_i, \alpha_j\} = \alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 0,$$

$$\{\alpha_i, \gamma^0\} = \alpha_i \gamma^0 + \gamma^0 \alpha_i = 0, \text{ si } (i \neq j), \quad (2.23)$$

$$\alpha_i^2 = (\gamma^0)^2 = I,$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}; \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, i = (1, 2, 3). \quad (2.24)$$

Concernant les matrices γ , dont

$$\gamma^0 = \gamma_0, \quad (2.25)$$

$$\gamma^i = -\gamma_i = \gamma^0 \alpha^i, \quad (2.26)$$

suivent un algèbre dite Algèbre de Clifford défini comme suit [86]

$$\{\gamma^0, \gamma^0\} = 2 (\gamma^0)^2 = 2 \times I_{4 \times 4}, \quad (2.27)$$

$$\{\gamma^0, \gamma^i\} = (\gamma^0)^2 \alpha_i + \gamma^0 \alpha_i \gamma^0 = 0. \quad (2.28)$$

$$\{\gamma^i, \gamma^k\} = \gamma^0 \alpha_i \gamma^0 \alpha_k + \gamma^0 \alpha_k \gamma^0 \alpha_i = -\alpha_i \alpha_k - \alpha_k \alpha_i = -2\delta_{ij}. \quad (2.29)$$

Les équations ci-dessus peuvent être regroupées sous la forme covariante suivante

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}, \quad (2.30)$$

avec $g^{\mu\nu} = \text{diag}(+1, -1, -1, -1)$ est le tenseur métrique de l'espace-temps de Minkowski.

Dans le but d'écrire l'équation de Dirac sous une forme covariante, il faut que les matrices γ prennent la notation covariante suivante

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3),$$

dont

$$\gamma_\mu = g_{\mu\nu} \gamma^\nu = (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = (\gamma^0, -\gamma^1, -\gamma^2, -\gamma^3),$$

alors l'équation de Dirac (2.20) se transforme à

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi = 0, \quad (2.31)$$

ou

$$(i\cancel{\partial} - m) \psi = 0, \quad (2.32)$$

en utilisant la notation slash de Feynman $\cancel{\partial} = a^\mu \gamma_\mu$.

2.1.3.1 Le quadri-courant J^μ

Le conjugué du spineur de Dirac est défini par

$$\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0, \quad (2.33)$$

Suivant le chemin standard utiliser pour le cas de l'équation de Klein-Gordon concernant la détermination du quadri-courant J^μ , on trouve

$$j^\nu = \bar{\psi} \gamma^\nu \psi. \quad (2.34)$$

A partir de cette équation, tout en respectant la condition de continuité suivante $\partial_\mu J^\mu = 0$, la densité de probabilité ainsi que son courant deviennent

$$\rho = \psi^\dagger \psi, \quad (2.35)$$

$$\vec{J} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi. \quad (2.36)$$

La multiplication de la charge de la particule aboutira à la densité du courant électromagnétique.

L'incorporation de l'interaction électromagnétique dans l'équation covariant libre de Dirac se fait par le biais du principe de couplage minimal : soit le quadri-potentiel $A^\nu = (\varphi, \vec{A})$, le couplage minimal se traduit par la transformation ci-dessous

$$p^\nu \mapsto p^\nu - eA^\nu, \quad (2.37)$$

avec p^{mu} est le quadri-impulsion du champ électromagnétique. En appliquant le principe de correspondance dont

$$p_\nu \mapsto i\partial_\nu,$$

l'équation (2.37) devient

$$i\partial^\nu - eA^\nu. \quad (2.38)$$

Enfin, l'introduction de l'interaction électromagnétique dans l'équation de Dirac (2.20) donne

$$\{\gamma^\nu (i\partial_\nu - eA_\nu) - m\} \psi = 0. \quad (2.39)$$

Pour avoir l'Hamiltonien de Dirac, nous suivons les démarches suivantes : multiplions l'équation de Dirac à gauche par γ^0

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - eA_0 + \gamma^0 \gamma^i (i\partial_i - eA_i) - \gamma^0 m \right) \psi = 0. \quad (2.40)$$

L'équation (2.40) peut être écrite sous une forme condensée $H_D \psi = E \psi$

$$\underbrace{i \frac{\partial}{\partial t}}_E \psi = \underbrace{\{ (-\alpha_i \partial_i + \gamma^0 m) + (eA_0 - e\gamma^0 \gamma_i A_i) \}}_{H_D} \psi. \quad (2.41)$$

dont

$$H_D = (-\alpha_i \partial_i + \gamma^0 m) + (eA_0 - e\gamma^0 \gamma_i A_i). \quad (2.42)$$

En l'absence d'interaction, l'Hamiltonien de la particule libre est

$$H_0 = -\alpha_i \partial_i + \gamma^0 m. \quad (2.43)$$

L'équation (2.41) ressemble à l'équation de Schrödinger avec la fonction d'onde est un spineur.

2.2 Reformulation de la forme de la densité de probabilité en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie

2.2.1 L'équation de Schrödinger

Soit une fonctions d'onde $\Psi(r, t)$ d'une particule dans un espace à trois dimensions. L'évolution d'un tel modèle quantique non relativiste, où le potentiel dépend de l'énergie, est régi par l'équation d'onde dépendante du temps

$$i \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{r}, t) = \left[-\frac{\Delta}{2} + V\left(\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \right] \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.44)$$

où le potentiel $V\left(\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ indique une fonction réelle pour les deux variables.

Posons que

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = e^{-iEt} \Psi(\mathbf{r}), \quad (2.45)$$

alors (2.45) se transforme à

$$H\Psi(\mathbf{r}) = \left[-\frac{\Delta}{2} + V(\mathbf{r}, E) \right] \Psi(\mathbf{r}) = E\Psi(\mathbf{r}). \quad (2.46)$$

La première modification des règles habituelles de la mécanique quantique concerne la produit scalaire. Cette question a été étudiée par de nombreux auteurs dans différents articles [4, 6–8, 12, 89].

Considérons comme solutions les deux fonctions d'onde ayant les énergies E et E' :

$$\Phi_\epsilon(\mathbf{r}, t) = e^{-i(E-\epsilon)t} \Phi(\mathbf{r}), \quad (2.47)$$

$$\Psi_\epsilon(\mathbf{r}, t) = e^{-i(E'-\epsilon)t} \Psi(\mathbf{r}), \quad (2.48)$$

avec $\epsilon \rightarrow 0$ est un paramètre infiniment petit.

L'équation de continuité est donnée par :

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t) + \nabla j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.49)$$

dont

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t), \quad (2.50)$$

$$j(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{2} \{ \Psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) - \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) \}. \quad (2.51)$$

En utilisant les deux équation (2.47) et (2.48), les deux quantités ρ et j deviennent :

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \Psi_\epsilon^*(\mathbf{r}, t) \Phi_\epsilon(\mathbf{r}, t), \quad (2.52)$$

$$j(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{2} \{ \Psi_\epsilon^*(\mathbf{r}, t) \nabla \Phi_\epsilon(\mathbf{r}, t) - \nabla \Psi_\epsilon^*(\mathbf{r}, t) \Phi_\epsilon(\mathbf{r}, t) \}. \quad (2.53)$$

En séparant la partie vectorielle de la partie temporelle, on trouve

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e^{-i(E-E')t} \Psi^*(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}), \quad (2.54)$$

$$j(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{2} e^{-i(E-E')t} \{ \Psi^*(\mathbf{r}) \nabla \Phi(\mathbf{r}) - \nabla \Psi^*(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) \}. \quad (2.55)$$

L'évaluation des deux termes $\nabla\Psi^*(\mathbf{r})$, $\nabla\Phi^*(\mathbf{r})$ donne

$$\nabla\Psi^*(\mathbf{r}) = 2 \{V(\mathbf{r}, E') - E\} \Psi^*(\mathbf{r}), \quad (2.56)$$

$$\nabla\Phi^*(\mathbf{r}) = 2 \{V(\mathbf{r}, E') - E\} \Phi^*(\mathbf{r}). \quad (2.57)$$

Le calcul des deux quantités $\nabla j(\mathbf{r}, t)$ et $\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}, t)$ conduit à

$$\nabla j(\mathbf{r}, t) = -ie^{-i(E-E')t} \{ (E' - E) \Psi^*(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) + \Psi^*(\mathbf{r}) (V(\mathbf{r}, E) - V(\mathbf{r}, E')) \Phi(\mathbf{r}) \}, \quad (2.58)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\mathbf{r}, t) = -i(E - E') e^{-i(E-E')t} \Psi^*(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}). \quad (2.59)$$

En Remplaçant (2.58) et (2.59) dans (2.49) on obtient

$$\Psi^*(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) = \Psi^*(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) - \Psi^*(\mathbf{r}) \frac{V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)}{E' - E} \Phi(\mathbf{r}). \quad (2.60)$$

soit

$$\rho_a(\mathbf{r}) = -\Psi^*(\mathbf{r}) \frac{V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)}{E' - E} \Phi(\mathbf{r}), \quad (2.61)$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = -\nabla j(\mathbf{r}, t), \quad (2.62)$$

avec

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) + \rho_a(\mathbf{r}, t). \quad (2.63)$$

Ainsi, dans le cas des potentiels dépendant de l'énergie, la définition de la densité doit être modifiée afin de garantir la validité de l'équation de continuité. La nouvelle définition de la densité est donnée par

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) = \Psi^*(\mathbf{r}) \left\{ 1 - \frac{V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)}{E' - E} \right\} \Phi(\mathbf{r}). \quad (2.64)$$

Pour représenter un système physique, la densité doit être définie positive, ce qui signifie ici

$$\tilde{\rho}(\mathbf{r}, t) > 0 \implies 1 - \frac{V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)}{E' - E} > 0. \quad (2.65)$$

Ainsi le produit scalaire sera alors

$$\langle \Psi \Phi \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)}{E' - E} \right] \Phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}. \quad (2.66)$$

Dans la limite $E' \rightarrow E$, la fonction d'onde $\Psi(\mathbf{r}) \rightarrow \Phi(\mathbf{r})$ et la condition précédente devient

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int \Psi^*(\mathbf{r}) \left[1 - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} \right] \Psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (2.67)$$

où

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

avec

$$\langle \psi | = \langle \Psi(\mathbf{r}) | \mathcal{F}, \quad (2.68)$$

ou

$$\mathcal{F} = \sqrt{1 - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E}}$$

est un facteur similaire au facteur de Perey [9, 90–92]. D'après les travaux de Shimizu et al [93], on peut attribuer la fonction d'onde Ψ à la fonction d'onde non-locale ψ . Le rapport $\left| \frac{\psi}{\Psi} \right|$ forme le facteur de Perey (plus précisément, son écart par rapport à unité) qui mesure la non-localité des interactions originales. La non-localité et la dépendance énergétique de ses potentiels sont bien connues pour leur rôle important dans la production d'un comportement répulsif dans la diffusion à haute énergie des baryons. C'est le plus important caractéristique du potentiel basée sur le modèle des quarks utiliser dans le problème de la diffusion inverse [93].

2.2.2 L'équation de Klein-Gordon

l'équation de Klein-Gordon s'écrit [94, 95]

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) - \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi(\mathbf{r}, t) + V\left(\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.69)$$

Son complexe conjugué est alors

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^*(\mathbf{r}, t) - \Delta \Psi^*(\mathbf{r}, t) + \Psi^*(\mathbf{r}, t) + V\left(\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi^*(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.70)$$

Multiplions ces deux équations avec Ψ^* et Ψ , on obtient

$$\Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi^*(\mathbf{r}, t) V\left(\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.71)$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^*(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi^*(\mathbf{r}, t) + \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^*(\mathbf{r}, t) + \Psi(\mathbf{r}, t) V \left(\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi^*(\mathbf{r}, t) = 0. \quad (2.72)$$

Après une soustraction de (2.72) avec (2.71), nous trouvons

$$\begin{aligned} & \Psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi^*(\mathbf{r}, t) - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi^*(\mathbf{r}, t) + \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) + \\ & + \Psi(\mathbf{r}, t) \Psi^*(\mathbf{r}, t) - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Psi(\mathbf{r}, t) + \Psi(\mathbf{r}, t) V \left(\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi^*(\mathbf{r}, t) - \Psi^*(\mathbf{r}, t) V \left(\mathbf{r}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0, \end{aligned} \quad (2.73)$$

que l'on écrit aussi par

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\Psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] + \nabla [\Psi^*(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi^*(\mathbf{r}, t)] + \\ & + \Psi(\mathbf{r}, t) V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi^*(\mathbf{r}, t) - \Psi^*(\mathbf{r}, t) V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi(\mathbf{r}, t) = 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Utilisons maintenant la propriété suivante

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int ds f(s), \quad (2.75)$$

dans ce cas, l'équation (2.74) devient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\Psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] + \nabla [\Psi^*(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi^*(\mathbf{r}, t)] + \\ & + \frac{\partial}{\partial t} \int ds \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int ds \Psi(\mathbf{r}, s) \left[V \left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s} \right) \Psi^*(\mathbf{r}, s) \right] - \Psi^*(\mathbf{r}, s) \left[V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s} \right) \Psi(\mathbf{r}, s) \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [\Psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}] + \\ & + \int ds \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int ds \Psi(\mathbf{r}, s) \left[V \left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s} \right) \Psi^*(\mathbf{r}, s) \right] - \Psi^*(\mathbf{r}, s) \left[V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s} \right) \Psi(\mathbf{r}, s) \right] \right\} + \\ & + \nabla \{ \Psi^*(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t) \Delta \Psi^*(\mathbf{r}, t) \} = 0. \end{aligned} \quad (2.77)$$

L'équation (2.77) représente l'équation de continuité de Klein-Gordon en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie dont

$$\rho = \frac{1}{i} [\Psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}] + \int^t ds \Psi(\mathbf{r}, t) \left[V\left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s}\right) \Psi^*(\mathbf{r}, s) \right] - \Psi^*(\mathbf{r}, s) \left[V\left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s}\right) \Psi(\mathbf{r}, t) \right], \quad (2.78)$$

$$\vec{j} = \frac{1}{i} \{ \Psi^*(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi(\mathbf{r}, t) - \Psi(\mathbf{r}, t) \nabla \Psi^*(\mathbf{r}, t) \}. \quad (2.79)$$

La condition de normalisation

$$\int d^3r \rho = 1 \quad (2.80)$$

devient

$$\int d^3r \frac{1}{i} [\Psi(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi^*(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \Psi^*(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t}] + \int^t ds \Psi(\mathbf{r}, s) \left[V\left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s}\right) \Psi^*(\mathbf{r}, s) \right] - \Psi^*(\mathbf{r}, s) \left[V\left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s}\right) \Psi(\mathbf{r}, s) \right] = 1 \quad (2.81)$$

L'équation dernière est l'expression correcte de la condition de normalisation.

Posons maintenant que

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int dE a_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt}, \quad (2.82)$$

$$\Psi^*(\mathbf{r}, t) = \int dE' a_{E'}^* \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) e^{+iE't}, \quad (2.83)$$

alors

$$\begin{aligned} i\rho &= \int dE a_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt} \int dE' a_{E'}^* (iE') \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) e^{+iE't} \\ &\quad - \int dE' a_{E'}^* \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) e^{+iE't} \int dE a_E (-iE) \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt} \\ &+ \int^t ds \left[\int dE a_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEs} \int dE' a_{E'}^* V(\mathbf{r}, E') \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) e^{+iE's} \right] \\ &\quad - \int^t ds \left[\int dE' a_{E'}^* \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) e^{+iE's} \int dE a_E V(\mathbf{r}, E) \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEs} \right]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

Donc

$$i\rho = \int \int dE dE' \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) e^{-i(E-E')t} (iE' + iE) + \int \int dE dE' \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) [V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)] \int_0^t ds e^{-i(E-E')s}. \quad (2.85)$$

Enfin,

$$i\rho = i \int \int dE dE' \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) \left[e^{-i(E-E')t} (iE' + iE) - \left(\frac{e^{-i(E-E')t}}{E' + E} + Cte \right) [V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)] \right] \quad (2.86)$$

Soit

$$a_E = \delta(E + E_0), a_{E'} = \delta(E' + E_0). \quad (2.87)$$

Après un développement limite de $V(\mathbf{r}, E')$, soit

$$V(\mathbf{r}, E') = V(\mathbf{r}, E) + (E' - E) \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} + \frac{1}{2} (E' - E)^2 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, E)}{\partial E^2} + \dots, \quad (2.88)$$

l'équation (2.86) se transforme à

$$i\rho = i \int \int dE dE' \delta(E + E_0) \delta(E' + E_0) \times \left. \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) \left\{ e^{-i(E-E')t} \left[(iE' + iE) - \left(\frac{e^{-i(E-E')t}}{E' + E} + Cte \right) [V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)] \right] + \dots \right\} \right\}. \quad (2.89)$$

Finalement, la condition de normalisation se transforma à

$$\rho = \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_E^*(\mathbf{r}) \left\{ 2E - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} \right\} \quad (2.90)$$

2.2.3 L'équation de Dirac

L'équation de Dirac dans un potentiel dépendant de l'énergie s'écrit par

$$\left\{ i\gamma^\mu \partial_\mu - i\gamma^0 V\left(\mathbf{r}, i\frac{\partial}{\partial t}\right) - m \right\} \Psi = 0, \quad (2.91)$$

ou

$$\left\{ i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - i\gamma^0 V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) - m \right\} \Psi = 0. \quad (2.92)$$

Multiplions à gauche (2.92) par Ψ^+ , alors

$$\Psi^+ \left\{ -i\gamma^{+0} \frac{\partial}{\partial t} - i\gamma^{+1} \frac{\partial}{\partial x} - i\gamma^{+2} \frac{\partial}{\partial y} - i\gamma^{+3} \frac{\partial}{\partial z} + i\gamma^{+0} V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) - m \right\} = 0. \quad (2.93)$$

En utilisant les relations suivantes sur les matrices γ

$$\gamma^{+0} = \gamma^0, \gamma^{+1} = \gamma^0 \gamma^1 \gamma^0, \gamma^{+2} = \gamma^0 \gamma^2 \gamma^0, \gamma^{+3} = \gamma^0 \gamma^3 \gamma^0, \quad (2.94)$$

l'équation (2.93) devient

$$\Psi^+ \left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^0 \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^0 \gamma^2 \gamma^0 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^0 \gamma^3 \gamma^0 \frac{\partial}{\partial z} - i\gamma^0 V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) + m \right] = 0. \quad (2.95)$$

Multipliant (2.95) à droite par γ^0 , on trouve

$$\bar{\Psi} \left[i\gamma^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial}{\partial z} - iV \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) \gamma^0 + m \right] = 0, \quad (2.96)$$

dont $\bar{\Psi} = \Psi^+ \gamma^0$. La multiplication par Ψ transforme l'équation (2.96) à

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\Psi} \gamma^0 \Psi) + i \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\Psi} \gamma^1 \Psi) + i \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\Psi} \gamma^2 \Psi) + i \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\Psi} \gamma^3 \Psi) - \\ & i \left[V \left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial t} \right) \bar{\Psi} \right] \gamma^0 \Psi - i \bar{\Psi} \gamma^0 \left[V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) \Psi \right] \gamma^0 \Psi = 0. \end{aligned} \quad (2.97)$$

En Utilisant la propriété suivante

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int^t ds f(s), \quad (2.98)$$

l'équation (2.97) devient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\bar{\Psi} \gamma^0 \Psi - \int^t ds \left\{ \left[V \left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s} \right) \bar{\Psi} \right] \gamma^0 \Psi - i \bar{\Psi} \gamma^0 \left[V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s} \right) \Psi \right] \right\} \right) + \\ & \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\Psi} \gamma^1 \Psi) + \frac{\partial}{\partial y} (\bar{\Psi} \gamma^2 \Psi) + \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\Psi} \gamma^3 \Psi) = 0. \end{aligned} \quad (2.99)$$

L'équation de continuité prendre la forme suivante

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla j = 0, \quad (2.100)$$

dont

$$\rho = \bar{\Psi}\gamma^0\Psi - \int ds \left\{ \left[V\left(\mathbf{r}, -i\frac{\partial}{\partial s}\right)\bar{\Psi} \right] \gamma^0\Psi - i\bar{\Psi}\gamma^0 \left[V\left(\mathbf{r}, i\frac{\partial}{\partial s}\right)\Psi \right] \right\}, \quad (2.101)$$

$$j = \bar{\Psi}\boldsymbol{\gamma}\Psi. \quad (2.102)$$

Soit les deux nouveaux fonctions d'ondes

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \int dE a_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt}, \quad (2.103)$$

$$\bar{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \int dE' a_E^* \bar{\varphi}_{E'}(\mathbf{r}) e^{+iE't} \quad (2.104)$$

Alors (2.101) sera

$$\begin{aligned} \rho &= \int dE' a_E^* (iE') \bar{\varphi}_{E'}(\mathbf{r}) e^{+iE't} \gamma^0 \int dE a_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt} \\ &- \int ds \left\{ \int dE' a_E^* V(\mathbf{r}, E') \bar{\varphi}_{E'}(\mathbf{r}) e^{+iE's} \int dE a_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEs} \right\} \\ &- \int ds \left[\int dE' a_E^* \bar{\varphi}_{E'}(\mathbf{r}) e^{+iE's} \int dE a_E V(\mathbf{r}, E) \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEs} \right]. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Enfin

$$\rho = \int dE' \int dE a_E a_E^* \bar{\varphi}_{E'}(\mathbf{r}) \varphi_E(\mathbf{r}) \left\{ e^{-i(E-E')t} - V(\mathbf{r}, E') \int ds e^{+i(E'-E)s} \right\}, \quad (2.106)$$

avec

$$\int ds e^{+i(E'-E)s} = \frac{e^{+i(E'-E)t}}{i(E'-E)} + \text{cte}, \quad (2.107)$$

et

$$V(\mathbf{r}, E') = V(\mathbf{r}, E) + (E' - E) \frac{\partial V}{\partial E} + \frac{(E' - E)^2}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial E^2} + \dots \quad (2.108)$$

Posons que

$$a_E = \delta(E - E_0), \quad a_E^* = \delta(E' - E_0), \quad (2.109)$$

dans ce cas la forme finale de la densité de probabilité de l'équation de Dirac est

$$\rho = \bar{\varphi}_E(\mathbf{r}) \gamma^0 \left(1 - \frac{\partial V}{\partial E} \right) \varphi_E(\mathbf{r}). \quad (2.110)$$

Enfin, notons que les deux équations (2.90) et (2.110) sont en bons accords avec ceux trouvés par Sazdjian [6–8]. Nous pouvons voir que dans les équations d'ondes relativistes en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie, la probabilité de densité et le produit scalaire sont modifiés par rapport à la définition habituelle et ça pour avoir une norme conservée.

L'influence du potentiel dépendant de l'énergie sur l'information de Fisher et l'entropie de Shannon : cas de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D

3.1 Les solutions propres de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie

L'équation libre de Klein-Gordon est donnée par

$$\{p^2 - (E^2 - 1)\} \psi = 0. \quad (3.1)$$

En présence de l'interaction de l'oscillateur de Dirac dont $p_x \rightarrow p_x - ix$, (3.1) devient [22,24,26–29]

$$\{(p + ix)(p - ix) - (E^2 - 1)\} \psi(x) = 0. \quad (3.2)$$

Dans la présence des potentiels dépendant de l'énergie dont ce type de potentiels possède une constante de couplage dépendant linéairement de l'énergie,

$$p_x \rightarrow p_x - i(1 + \gamma E)^{\frac{1}{2}} x, \quad (3.3)$$

(3.2) se change en

$$\left(\frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \psi(x, E) = \left\{ \frac{E^2 - 1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \gamma E) \right\} \psi(x, E). \quad (3.4)$$

Le paramètre γ n'est ni si petit ni si grand. L'équation (3.4) représente une équation d'un oscillateur harmonique à une dimension [85, 96]. Les solutions propres correspondantes sont

$$\psi(x, E) = C_n H_n(\sqrt{\lambda}x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x^2\right), \quad (3.5)$$

$$E^4 - 2E^2 - 4n^2 - 4n^2\gamma E + 1 = 0, \quad (3.6)$$

où $\lambda = \sqrt{1 + \gamma E}$ et C_n

$$C_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \frac{(1 + \gamma E)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ E - \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + \gamma E}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1}, \quad (3.7)$$

est la constante de normalisation. Ici H_n sont les polynômes d'Hermite [82, 97].

Dans l'espace des moments, l'équation (3.2) prend la forme suivante

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{p^2}{2\lambda^2}\right) \psi(p, E) = \left(\frac{E^2 + \lambda - 1}{2\lambda^2}\right) \psi(p, E). \quad (3.8)$$

Les solutions propres de cette équation sont

$$\psi(p_x, E) = C_n H_n\left(\frac{p_x}{\sqrt{\lambda}}\right) \exp\left(-\frac{p_x^2}{2\lambda}\right), \quad (3.9)$$

$$E^4 - 2E^2 - 4n^2 - 4n^2\gamma E + 1 = 0, \quad (3.10)$$

dont

$$(C'_n)^2 = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi \lambda}} \left\{ E + \frac{\gamma}{2\lambda^3} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1} \quad (3.11)$$

est la constante de normalisation. Les équations (3.6) et (3.10) sont des équations algébriques du degré 4 ayant des solutions réelles et complexes. En omettant les solutions complexes qui ne sont pas physiques, on peut construire le diagramme du spectre d'énergie à partir des deux autres solutions réelles. Dans la Figure. 3.1, nous avons tracé l'énergie E par rapport au nombre quantique n pour différentes valeurs de γ dans les deux configurations $\{x\}$ et $\{p\}$. À partir de cette figure, certains résultats intéressants, qui ne sont pas bien commentés dans la littérature,

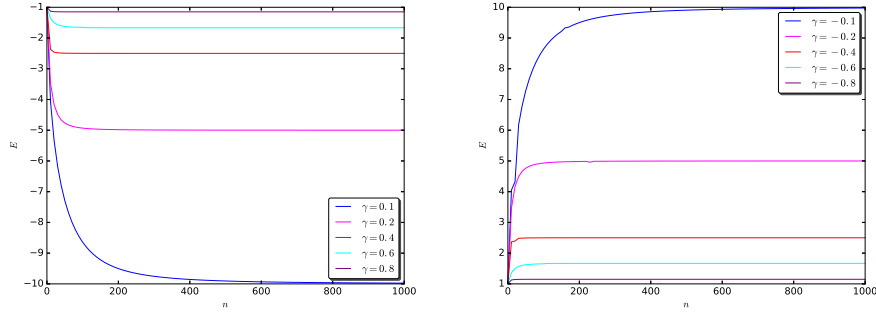


FIG. 3.1 : Le spectre d'énergie E en fonction du nombre quantique n pour certaines valeurs de γ dans les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$

sont prêts à être discutés :

- La limite asymptotique pour les deux formes d'énergies est $\frac{1}{|\gamma|}$ similaire à celle-ci trouvée pour le cas de l'oscillateur Harmonique non relativiste [4, 12, 89].
- Le phénomène de saturation est bien mis en évidence. Le produit scalaire modifié est à l'origine d'avoir un spectre présentant une saturation au lieu de croître indéfiniment.
- Cette saturation apparaît pour les niveaux élevés contrairement à ce qui a été trouvé dans le cas non relativiste,
- Les limites asymptotiques sont bien décrites.
- Le début de la saturation commence à partir d'un nombre quantique spécifique N_{max} . Ce paramètre diminue rapidement lorsque $|\gamma|$ augmente lentement.

Maintenant, après avoir commenté les résultats obtenus sur le spectre d'énergie, nous allons étendre notre étude sur la densité de probabilité. Le but derrière est l'obtention des contraintes sur le paramètre γ .

La nouvelle définition de cette densité en présence du paramètre γ est donnée par

$$\rho_{KG}(x, E) = \psi(x, E)^* \left\{ 2E - \frac{\partial V(x, E)}{\partial E} \right\} \psi(x, E), \quad (3.12)$$

avec

$$V = \frac{\lambda}{2} x^2 \implies \frac{\partial V}{\partial E} = \frac{1}{2} \gamma x^2, \quad (3.13)$$

ainsi

$$\rho_{KG}(x, E) = (2E - \frac{1}{2}\gamma x^2) |\psi(x, E)|^2 . \quad (3.14)$$

Dans l'espace du moment, cette densité probabilité s'écrit par

$$\rho_{KG}(p, E) = \psi(p, E)^* \left\{ 2E - \frac{\partial V(p, E)}{\partial E} \right\} \psi(p, E) , \quad (3.15)$$

dont

$$V = \frac{p_x^2}{2(1 + \gamma E)} \implies \frac{\partial V}{\partial E} = \frac{-\gamma p_x^2}{2(1 + \gamma E)^2} . \quad (3.16)$$

Enfin

$$\rho_{KG}(p, E) = \left\{ 2E + \frac{\gamma}{2(1 + \gamma E)^2} p^2 \right\} |\psi(p, E)|^2 . \quad (3.17)$$

Pour représenter un système physique, on a deux possibilités pouvant être réalisées selon le signe de $\rho_{KG}(p, E)$:

- si $\rho_{KG} < 0$, alors $\gamma < 0$ pour les particules ($E > 0$), et $\gamma > 0$ pour les antiparticules ($E < 0$).
- maintenant, si $\rho_{KG} > 0$, nous obtenons les mêmes conditions que dans le premier cas.

Comme résultats, quel que soit le signe de ρ_{KG} , nous avons deux conditions sur le paramètre γ : $\gamma < 0$ pour les particules et $\gamma > 0$ pour les antiparticules. Ces conditions imposent des contraintes sur la dépendance d'énergie pour que la théorie soit cohérente : une théorie est dite cohérente si elle possède les propriétés suivantes :

- La modification nécessaire de la définition de la densité de probabilité.
- Les vecteurs correspondant aux états stationnaires avec des énergies différentes doivent être orthogonaux.
- La formulation de la règle de fermeture en matières de fonctions d'onde des états stationnaires justifie leur normalisation.
- Enfin, les opérateurs d'observable sont tous autoadjoints (hermitiens).

Dans la Figure 3.2, nous montrons l'influence du paramètre γ sur la densité de probabilité pour les

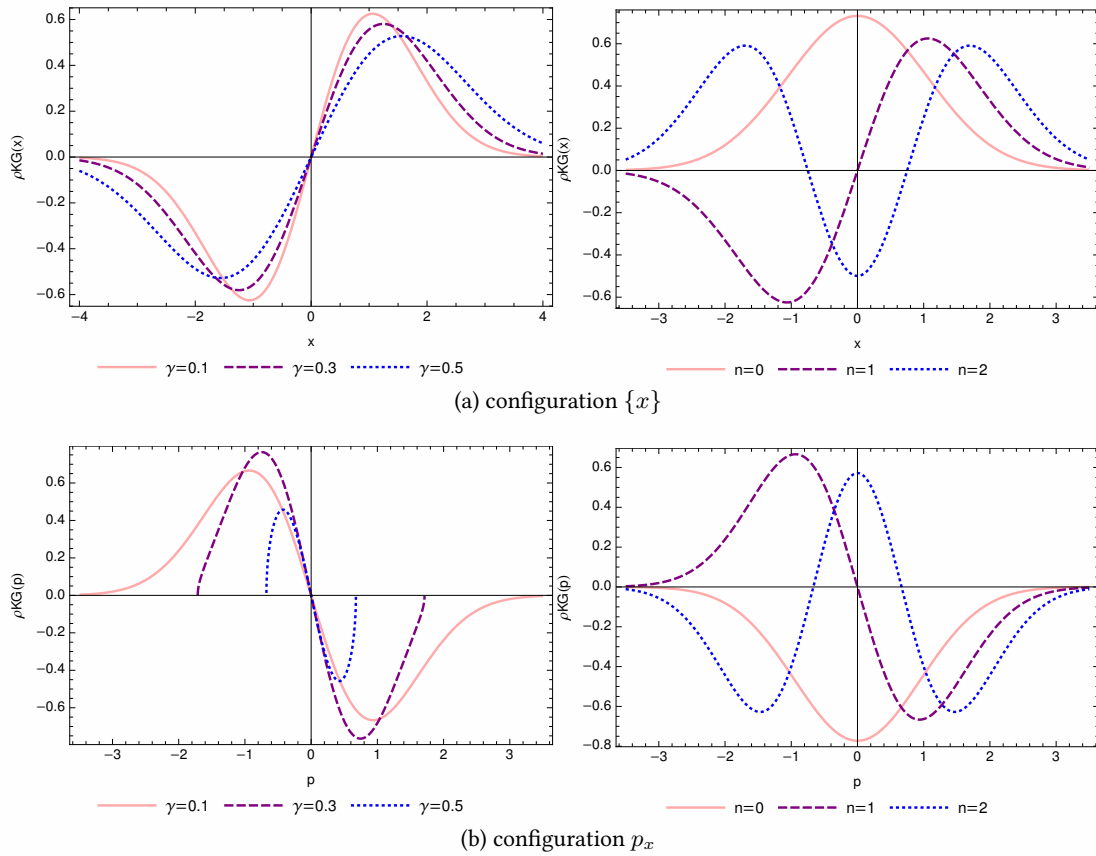


FIG. 3.2 : La densité de probabilité ρ_{KG} dans les deux configurations $\{x\}$ et p_x

deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$: à partir de cette figure, nous observons que le comportement de l'amplitude maximale de $\rho_{KG}(p)$ est contraire à celle de $\rho_{KG}(x)$.

La Figure. 3.2a présente la densité de probabilité $\rho_{KG}(x)$ dans la configuration de la position $\{x\}$ pour les trois valeurs typiques de $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5$ pour le premier niveau excité $n = 1$. Les courbes sont antisymétriques autour de $x = 0$ et les pics se déplacent lorsque γ augmente : ces pics ont à peu près la même intensité. Aussi, nous avons tracé la variation de $\rho_{KG}(x)$ pour trois valeurs $n = 0, 1, 2$ en choisissant $\gamma = 0.1$: cette figure montre que toutes les courbes sont symétriques autour de $x = 0$. En ce qui concerne le nombre de pics, nous avons un pic pour $n = 0$, contrairement au cas où $n = 1$ qui a deux pics et $n = 2$ avec trois pics. Tous les pics sont symétriques sauf pour le cas $n = 0$ où il est antisymétrique.

Dans la figure 3.2b nous avons présenté la densité de probabilité $\rho_{KG}(p)$ dans la configuration du moment $\{p\}$: à partir de cette figure, contrairement au cas où $\gamma = 0.1$, qui a une situation très similaire comme sur la Figure. 3.2a, les autres cas sont limités dans l'intervalle spécifique : par exemple, $x \in [-1, 1]$ pour $\gamma = 0.3$ et $x \in [-2, 2]$ pour $\gamma = 0.5$.

Passons maintenant à l'étude de l'influence du paramètre γ sur L'information de Fisher et l'entropie de Shannon.

3.2 L'influence du paramètre γ sur l'information de Fisher et l'entropie de Shannon

Dans ce qui suit, nous avons étudié l'influence du paramètre γ sur les paramètres de Fisher et Shannon. La validité des relations d'incertitude de Stam, Cramer–Rao et BBM pour ce type de potentiel. seront vérifiées.

3.2.1 L'information de Fisher

L'information de Fisher [52–57, 98] de l'oscillateur de Klein-Gordon unidimensionnel avec un potentiel qui dépend de l'énergie est

$$F_x = \int \rho_n(x, E) \left[\frac{d \ln \{\rho_n(x, E)\}}{dx} \right]^2 dx. \quad (3.18)$$

En utilisant (3.14) ainsi que les propriétés des fonctions d'Hermite [86,87,96], (3.18) se transforme

à :

$$\begin{aligned}
 F_x = & \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 16n^2 E H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_I + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} -(16n\lambda E + 8n\gamma) x H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_{II} \\
 & \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (4\lambda^2 E - 8n^2\gamma + 4\gamma\lambda) x^2 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_{III} + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 8n\lambda\gamma x^3 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_{IV} \\
 & \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} -2\omega_E^2 \gamma x^4 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_V + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2)}{2E - \frac{1}{2}\gamma x^2} dx}_{VI}.
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

L'évaluation de différents termes donne

$$I = C_n^2 16n^2 E 2^n n! \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \tag{3.20}$$

$$II = 0, \tag{3.21}$$

$$III = C_n^2 (4\lambda^2 E - 8n^2\gamma + 4\gamma\lambda) \frac{2^n n!}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left(n + \frac{1}{2}\right), \tag{3.22}$$

$$IV = 0, \tag{3.23}$$

$$V = -C_n^2 2\gamma 2^n n! \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left\{ \frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right\}, \tag{3.24}$$

$$VI = C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2)}{E - \frac{1}{2}\gamma x^2} dx. \tag{3.25}$$

L'équation (3.25) sera calculé numériquement.

En ajoutant les résultats de différents termes dans (3.19), la forme finale du paramètre Fisher est s'écrit alors comme suit :

$$\begin{aligned}
 F_x = & \left\{ E - \frac{\gamma}{2\sqrt{1+\gamma E}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1} \left[16n^2 E + \{4(1 + \gamma E) E - 8n^2\gamma + 4\gamma\sqrt{1 + \gamma E}\} \frac{(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{1+\gamma E}} - 2\gamma \left\{ \frac{(2n+1)^2+2}{4} \right\} \right. \\
 & \left. \frac{1}{2^n n!} \frac{(1+\gamma E)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ E - \frac{\gamma}{2\sqrt{1+\gamma E}} \left(n + \frac{1}{2}\right) \right\}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2)}{E - \frac{1}{2}\gamma x^2} dx \right].
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Dans l'espace de configuration du moment $\{p_x\}$, l'information de Fisher est définie par :

$$F_p = \int \rho_n(p, E) \left[\frac{d \ln \{\rho_n(p, E)\}}{dp} \right]^2 dp. \quad (3.27)$$

En insérant (3.17) dans (3.27), (3.27) devient :

$$\begin{aligned} F_p = & \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 16n^2 E H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_{I} + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\gamma}{\lambda^4} - \frac{4nE}{\lambda} \right) p H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_{II} + \\ & \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{4E}{\lambda^2} + \frac{8n^2\gamma}{\lambda^4} \right) p^2 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_{III} - \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4n\gamma}{2\lambda^5} p^3 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_{IV} + \\ & \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\gamma}{2\lambda^6} p^4 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_{V} + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\gamma^2 p^2 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right)}{\lambda^4 (2E\lambda^4 + \gamma p^2)} dp}_{VI}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

L'évaluation des différentes termes conduit aux résultats suivant :

$$I = C_n^2 16n^2 E 2^n n! \sqrt{\lambda \pi}, \quad (3.29)$$

$$II = 0, \quad (3.30)$$

$$III = C_n^2 \left(\frac{4E}{\lambda} + \frac{8n^2\gamma}{\lambda^3} \right) \frac{2^n n! \sqrt{\lambda \pi} (n + \frac{1}{2})}{\lambda}, \quad (3.31)$$

$$IV = 0, \quad (3.32)$$

$$V = C_n^2 \frac{2\gamma 2^n n! \sqrt{\lambda \pi}}{\lambda^4} \left\{ \frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right\}. \quad (3.33)$$

En ajoutant tous ces équations dans (3.28), la forme finale du paramètre de Fisher est :

$$\begin{aligned} F_p = & \left\{ E + \frac{\gamma}{2\lambda^3} (n + \frac{1}{2}) \right\}^{-1} \left[16n^2 E + \left(\frac{4E}{\lambda} + \frac{8n^2\gamma}{\lambda^3} \right) (n + \frac{1}{2}) + \frac{2\gamma}{\lambda^4} \left\{ \frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right\} \right] \\ & + \frac{1}{2^n n! \sqrt{\lambda \sqrt{\pi}}} \left\{ E + \frac{\gamma}{2\lambda^3} (n + \frac{1}{2}) \right\}^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\gamma^2 p^2 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right)}{\omega_E^4 (2E\lambda^4 + \gamma p^2)} dp. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Le dernier terme sera aussi calculé numériquement.

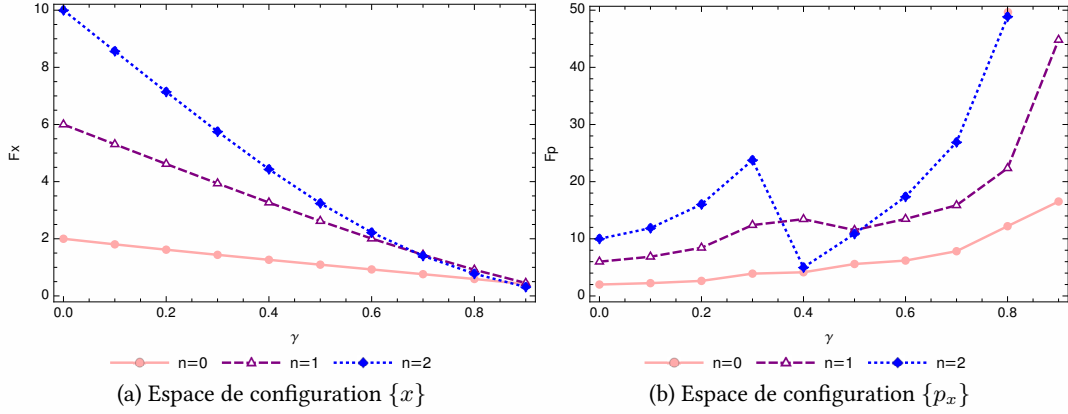


FIG. 3.3 : L'information de Fisher unidimensionnel de l'oscillateur de Klein-Gordon en fonction du γ pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$

3.2.2 L'entropie de Shannon

Maintenant nous allons étudier l'influence du paramètre γ sur l'entropie de Shannon. Dans l'espace de position $\{x\}$ on a

$$S_x = - \int \rho_{KG}(x, \gamma) \ln \rho_{KG}(x, \gamma) dx. \quad (3.35)$$

alors que dans la configuration $\{p_x\}$, (3.35) devient

$$S_p = - \int \rho_{KG}(p, E) \ln \rho_{KG}(p, E) dp. \quad (3.36)$$

avec $\rho_{KG}(x, \gamma)$ et $\rho_{KG}(p, \gamma)$ sont donnés par les deux équations (3.14) et (3.17).

En général, les dérivations explicites de l'entropie d'informations sont assez difficiles. En particulier, la dérivation d'une expression analytique pour S_x et S_p est presque impossible : nous devons reconnaître qu'il n'est pas facile de calculer exactement les entropies de Shannon ou les relations d'incertitude entropique dues aux facteurs logarithmiques dans les intégrales. Pour surmonter ces difficultés, nous allons évaluer ces intégrales numériquement.

3.3 Résultats et discussion

Dans cette section, nous allons présenter les différents résultats obtenus avec leur discussion.

Dans les deux figures. 3.3 et 3.4,

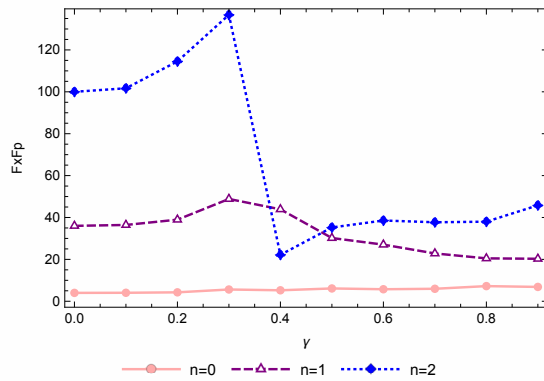
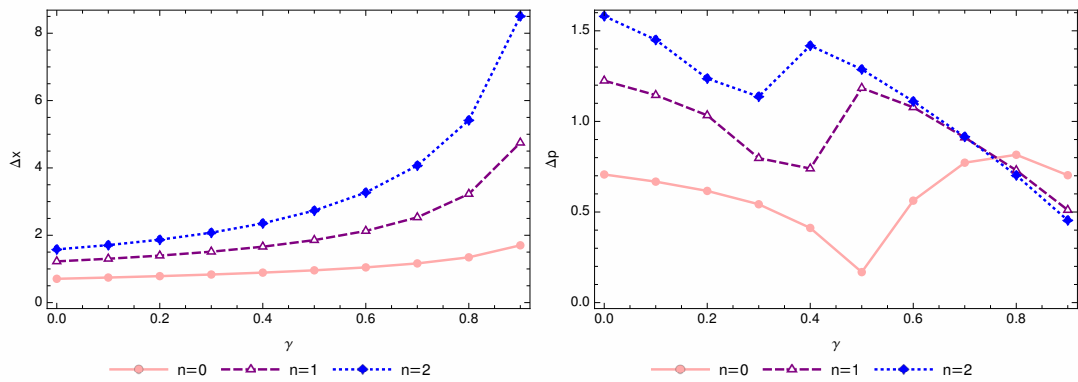


FIG. 3.4 : Le produit $F_x F_p$ en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$



(a) Δx en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$
 (b) Δp en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$

FIG. 3.5 : Δx et Δp en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$

nous avons tracé F_x , F_p et le produit $F_x F_p$ en fonction du paramètre γ pour les trois premiers niveaux ($n = 0, 1, 2$) : ces courbes montrent que lorsque γ augmente F_x diminue (Figure.3.3a) tandis que F_p augmente (Figure. 3.3b). Néanmoins, la relation $F_x F_p \geq 4$ reste toujours valable pour les produits d'incertitude de Cramer-Rao (Figure.3.4).

Pour mieux comprendre ces résultats, nous analysons d'abord le comportement des variances standard. Rappelons ici que l'information de Fisher et les variances sont liées par l'inégalité de Cramer-Rao comme suit :

$$F_x \geq \frac{1}{\Delta x^2}, F_p \geq \frac{1}{\Delta p^2}. \quad (3.37)$$

Dans la Figure.3.5, nous avons tracé les deux incertitudes Δx et Δp pour les trois premiers niveaux $n = (0, 1, 2)$ en termes du γ . Cette figure montre comment l'incertitude pour x peut

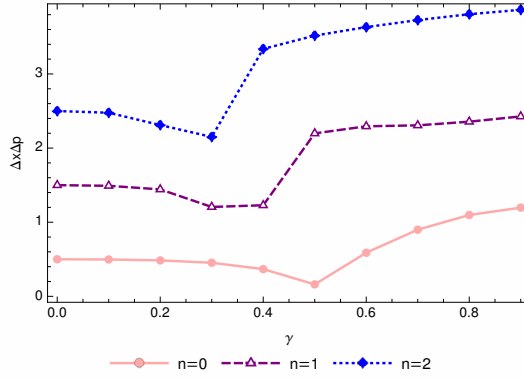


FIG. 3.6 : $\Delta x \Delta p$ en fonction de γ pour les trois premier niveaux $n = 0, 1, 2$

changer avec le paramètre γ . Les traitements de l'incertitude du moment p sont présentés sur la même figure : nous pouvons voir que Δx augmente avec (i) en augmentant γ pour une valeur fixe de n , et (ii) avec le nombre quantique n pour une valeur fixe de γ . Cependant, l'incertitude dans la quantité de mouvement Δp diminue avec (i) l'augmentation de γ pour la valeur fixe de n et (ii) avec le nombre quantique n pour la valeur fixe de γ . Ainsi, la précision dans la prédiction de la localisation de la particule augmente tandis que la précision dans la prédiction de l'impulsion décroît avec l'augmentation de γ pour les trois niveaux ($n = 0, 1, 2$). Selon la Figure. 3.5a, Δx augmente avec γ , contrairement au cas de Δp qui diminue lorsque γ augmente : ainsi, dans ce système, la précision de la prédiction de la localisation de la particule diminue tandis que la précision pour prévoir l'élan augmente avec l'augmentation de γ .

Aussi, à partir de (3.37), la relation entre le paramètre de Fisher et le principe d'incertitude est très proche : théoriquement, lorsque $\Delta x \Delta p$ augmente, $F_x F_p$ diminue et vice-versa. Cette situation est bien observée dans notre cas : la diminution du F_x indique une augmentation de la précision de la prévision de la position. D'autre part, lorsque F_p augmente, cela signifie que la précision de la prévision de la quantité de mouvement diminue. Pour les valeurs intermédiaires de γ , il existe une ressemblance dans la variation des deux figures. (3.5b) et (3.5a). Cette similarité observée dans cet intervalle ne change pas nos résultats car nous nous intéressons au comportement de deux produits suivants qui donnent à la fois la relation d'incertitude d'Heisenberg ($\Delta x \Delta p$) et sa version en information quantique ($F_x F_p$). Les deux relations d'incertitude sont présentées par les deux figures. (3.4) et (3.6). Dans le tableau. 3.1, nous présentons les résultats numériques des informations Fisher F_x et F_p et leur produit $F_x F_p$ pour différentes valeurs de n

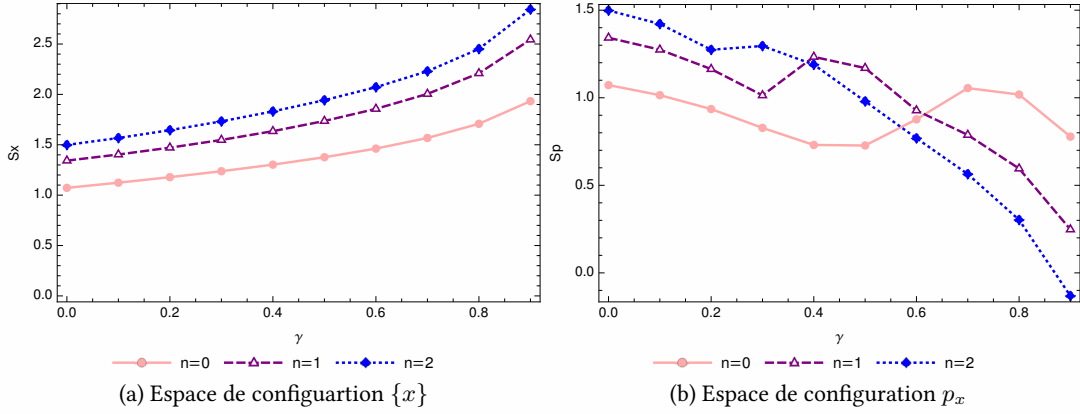


FIG. 3.7 : Entropie de Shannon de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en fonction du paramètre γ pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$

et γ . Il est clair de voir que la relation d'incertitude de Fisher ($F_x F_p \geq 4$) ainsi que la relation d'incertitude d'Heisenberg ($\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}$) sont très bien satisfaits.

L'entropie de Shannon pour les deux configurations est bien présentée dans la Figure 3.7. Cette figure décrit l'entropie de Shannon en fonction du paramètre γ pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$. Nous pouvons voir que le paramètre de Shannon augmente dans la configuration $\{x\}$ (Figure 3.7a), alors qu'il diminue dans la configuration $\{p\}$ (Figure 3.7b). Ce comportement est identique pour les deux types de particules. Notons ici qu'avec la diminution de S_p , S_x augmentent, mais seulement dans la mesure où leur somme reste au-dessus de la limite inférieure stipulée de la valeur $(1 + \ln \pi)$ (Figure 3.11).

Pour comprendre les caractéristiques essentielles des entropies, nous centrons notre étude sur l'entropie et sa densité : ces deux derniers sont définis par

$$(\rho_F)_{\{a\}} = \rho_{KG}(a, E) \left[\frac{d \ln \{\rho_{KG}(a, E)\}}{da} \right]^2, \quad (3.38)$$

pour l'information de Fisher, et

$$(\rho_S)_{\{a\}} = \rho_{KG}(a, E) \ln \rho_{KG}(a, E), \quad (3.39)$$

pour l'entropie de Shannon : ici, $\{a\}$ indique la configuration appropriée. Ces densités jouent un rôle similaire à la densité de probabilité ρ_{KG} en mécanique quantique. Le comportement de

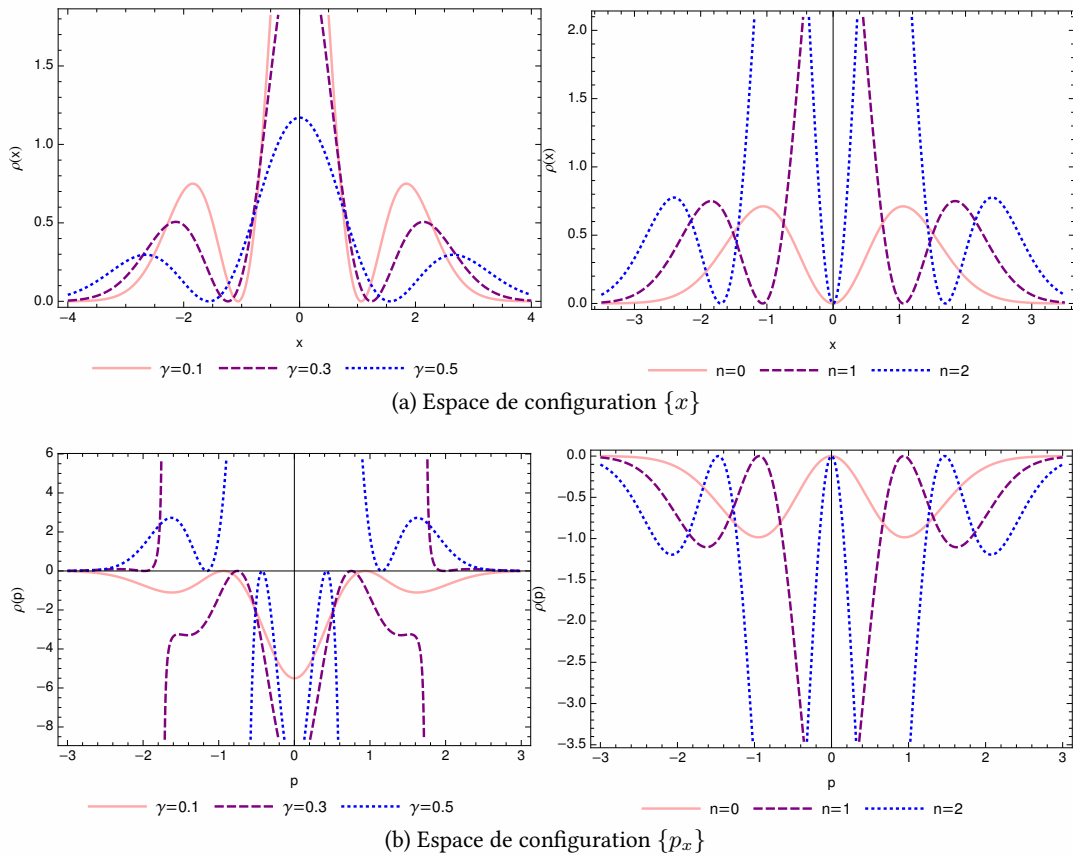


FIG. 3.8 : Les densités de l'information de Fisher

$(\rho_F)_{\{a\}}$ et $(\rho_S)_{\{a\}}$ est illustré dans les deux Figures. 3.8 et 3.9 pour les trois premiers niveaux $n = (0, 1, 2)$ et pour différentes valeurs de γ .

Analysons d'abord les propriétés de l'information densités de Fisher.

Dans la Figure.3.8 , nous avons représenté la densité de Fisher en fonction de la variable x (ou p) pour (i) le premier niveau $n = 1$ où le paramètre γ prend les valeurs suivantes 0.1, 0.3,, et ,0.5 et (ii) avec $\gamma = 0.1$ pour les trois premiers niveaux $n = (0, 1, 2)$. Dans le premier cas, pour l'espace de coordonnées, la densité se délocalise dans l'espace x avec l'augmentation de γ , contrairement au cas où la densité est localisée dans l'espace du moment p avec l'augmentation de γ . Le second cas montre la densité de Fisher en fonction de la variable x (ou p) pour $\gamma = 0.1$, selon les trois premiers niveaux : dans l'espace x , la densité est toujours localisée avec l'augmentation du nombre quantique n . La situation dans l'espace p est inversement symétrique par rapport à l'espace de coordonnées et l'argument sera le même que dans le cas de l'espace x .

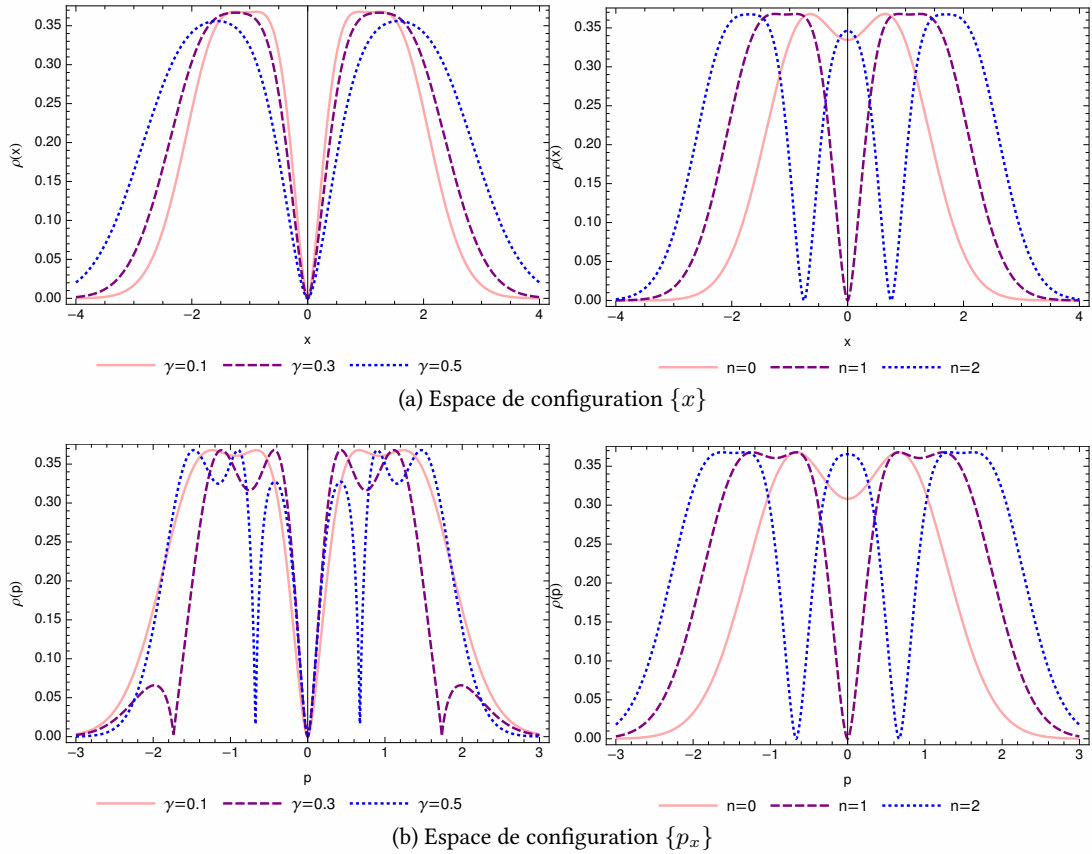


FIG. 3.9 : Les densités de l'entropie de Shannon

La Figure. 3.9 présente la densité de Shannon en fonction de la variable x (ou p) pour (i) le premier niveau $n = 1$ où le paramètre γ prend les valeurs suivantes 0.1 ,0.3et 0.5 et (ii) avec $\gamma = 0, 1$ selon les trois premiers niveaux $n = (0, 1, 2)$. Dans le premier cas, pour la configuration $\{x\}$, la densité se délocalise de la même manière ou γ augmente, contrairement au cas de la configuration $\{p_x\}$, où la densité se délocalise dans l'espace- p lorsque γ croit. Le second cas montre la densité de Shannon en fonction de la variable x (ou p) pour $\gamma = 0.1$, selon les trois premiers niveaux : dans l'espace x , la densité se délocalise avec l'augmentation de n : le niveau $n = 2$ est plus délocalisé par rapport au niveau $n = 0$. La situation dans l'espace p est inversement symétrique par rapport à l'espace de coordonnées et l'argument sera le même que dans le cas de l'espace x .

Song et al [99] ont étudié l'entropie d'un système unidimensionnel doté du potentiel de Landau [96]. Ils ont montré que les distributions multi-pics apparaissent dans les courbes de densité

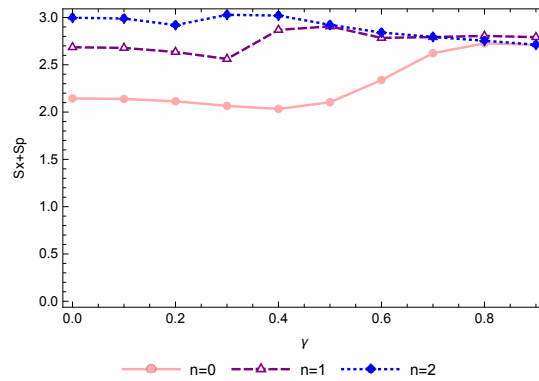


FIG. 3.10 : La somme $S_x + S_p$ en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$

par rapport à la position et que les densités d'entropie du moment peuvent être une signature de l'existence d'une transition de phase quantique. Ils ont constaté que le comportement de transition de phase du système peut être bien exprimé par l'évolution de l'entropie quantique : cette transition a été observée dans les courbes de S_x et S_p où les deux quantités présentent une variation abrupte autour d'un même point critique. Cette transition a la nature d'une transition de phase de second ordre. Dans notre cas, malgré l'existence de distributions multi-pics, (voir les Figures. (3.8) et (3.9)), il n'y a pas de transition probable : ce résultat peut être argumenté par l'absence d'un changement significatif dans les courbes de S_x et S_p . Néanmoins, leur somme $S_x + S_p$ pour un nombre quantique donné n reste une constante indépendante du paramètre γ (Figure.3.10) .

Nous sommes maintenant prêts à discuter la relation d'incertitude d'Heisenberg et de son analogue dans le cadre de l'information quantique : l'incertitude d'Heisenberg en mécanique quantique est une inégalité entre position et moment : il indique précisément que le produit en position et en moment peut être exprimé comme suit $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}$: cela signifie que plus la position de la particule est déterminée avec précision, moins la quantité de mouvement est connue, et inversement. Rudnicki [100] a reformulé l'incertitude d'Heisenberg , dans le sens lié aux relations d'incertitude entropique, comme suit : "*plus nous disposons d'informations sur la position, moins nous pouvons obtenir d'informations sur le momentum et vice-versa*".

Ces dernières années, de nouveaux principes d'incertitude, provenant de la théorie de l'information, ont été introduits : mentionnons que cette quantité théorique et son extension quantique, pas encore suffisamment connues des physiciens, ont été utilisées pour constituer un nombre

d'inégalités telles que les inégalités de Stam et Cramer–Rao. L'inégalité de Cramer-Rao appartient à une famille naturelle d'inégalités de la théorie de l'information qui jouent un rôle important dans une grande variété de domaines scientifiques et technologiques, allant de la théorie des probabilités à la théorie de la communication, du traitement du signal et de la théorie de l'approximation à la physique quantique des systèmes à D dimensions avec un nombre fini de particules. L'information de Fisher sur les systèmes à une seule particule n'a été que récemment déterminée sous forme fermée en termes de nombres quantiques caractérisant l'état physique impliqué pour les espaces de position et d'impulsion. Ces inégalités pertinentes impliquant les informations de Fisher dans un espace donné (Cramer–Rao) ou dans l'espace conjugué (Stam).

D'après les travaux de Saha et al [101], le produit $F_x F_p \geq 4$, parfois appelé relation d'incertitude basée sur l'information de Fisher, a souvent été conjecturé comme présentant une limite inférieure non triviale telle que pour les systèmes unidimensionnels. Dans la littérature, il existe de nombreux systèmes quantiques pour lesquels la relation est valide. D'autre part, il existe également un nombre infini de contre-exemples qui permettent de démontrer qu'il n'est pas toujours possible d'obtenir une relation d'incertitude universelle comme borne inférieure de cette relation [58, 60].

Le Tableau. 3.1 montre des résultats numériques concernant la relation d'incertitude et la mesure de l'information de Fisher de l'oscillateur Klein-Gordon à une dimension pour les trois niveaux ($n = 0, 1, 2$) pour différents choix du paramètre γ . Après ce tableau, nous observons que :

- Les inégalités de Stam, et les inégalités de Cramer – Rao sont remplies,
- La relation suivante

$$F_x F_p \geq 4, \quad (3.40)$$

est bien établie et, par conséquent, l'équation (3.40) est valable pour le cas des trois niveaux : $n = 0, 1, 2$ (voir figure.3.4),

- Enfin, la somme des entropies est en cohérence avec l'inégalité BBM où

$$S_x + S_p \geq 1 + \ln\pi \simeq 2.14447. \quad (3.41)$$

TAB. 3.1 : Résultats numériques pour la relation d'incertitude et les informations de Fisher et l'entropie de Shannon de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension en fonction du γ

n	γ	$\langle x^2 \rangle$	Δx	$\langle p_x^2 \rangle$	Δp	$\Delta x \Delta p$	F_x	F_p	$F_x F_p$	S_x	S_p	$S_x + S_p$	$1 + \ln \pi$	S_0
	0	0.5000	0.7071	0.5000	0.7071	0.5000	2.0000	2.0000	4.0000	1.0724	1.0724	2.1448	2.1447	2.5969
	0.16	0.5918	0.7693	0.4080	0.638	0.4908	1.69165	2.4516	4.1472	1.1561	0.9707	2.1268	2.1447	2.5788
	0.32	0.7136	0.8447	0.2737	0.5232	0.4419	1.4026	3.7700	5.2878	1.2501	0.8054	2.0555	2.1447	2.45732
0	0.48	0.8912	0.9440	0.0188	0.1371	0.1295	1.1276	6.9355	7.8205	1.3608	0.7162	2.0770	2.1447	2.2613
	0.64	1.1842	1.0882	0.4410	0.6641	0.7227	0.8607	8.2659	7.1145	1.5014	0.9599	2.4613	2.1447	2.3089
	0.80	1.8090	1.3450	0.6658	0.8160	1.0975	0.5927	12.2000	7.2311	1.7082	1.0184	2.7266	2.1447	2.3008
	0	1.5000	1.2247	1.5	1.2247	1.5000	6.0000	6.0000	36.0000	1.3427	1.3427	2.6854	2.1447	1.04612
	0.16	1.8392	1.3562	1.17526	1.0842	1.4704	4.8935	7.6593	37.4804	1.4434	1.2167	2.6601	2.1447	1.02597
	0.32	2.3685	1.5390	0.480699	0.6933	1.0670	3.8012	13.4774	51.2303	1.5644	1.0148	2.5792	2.1447	0.869711
1	0.48	3.2837	1.8121	1.36547	1.1685	2.1175	2.7485	6.2457	17.1663	1.7147	1.2308	2.9455	2.1447	1.4164
	0.64	5.1536	2.2702	1.02251	1.0112	2.2956	1.7716	13.5291	23.9682	1.9122	0.8693	2.7815	2.1447	1.24951
	0.80	10.4112	3.2266	0.533192	0.7302	2.3561	0.9166	22.3000	20.4402	2.2096	0.5957	2.8053	2.1447	1.32913
	0	2,5	1.5811	2.5000	1.5811	2.5000	10.0000	10.0000	100.0000	1.4986	1.4986	2.9972	2.1447	0.535292
	0.16	3,23687	1.7991	1.7994	1.3414	2.4133	7.7103	13.8006	106.4068	1.6128	1.3503	2.9631	2.1447	0.504242
	0.32	4,51644	2.1252	0.9625	0.9811	2.0850	5.4827	17.7237	97.1737	1.7513	1.3525	3.1038	2.1447	0.549627
2	0.48	7,00704	2.6471	1.7410	1.3195	3.4928	3.4664	9.8800	34.2480	1.9195	1.0208	2.9403	2.1447	1.07106
	0.64	12,5885	3.5480	1.0710	1.0349	3.6718	1.8689	19.9000	37.1911	2.1301	0.6893	2.8194	2.1447	1.02984
	0.80	29,3421	5.4168	0.4937	0.7026	3.8085	0.7776	48.9000	38.0261	2.2452	0.3027	2.5479	2.1447	1.01874

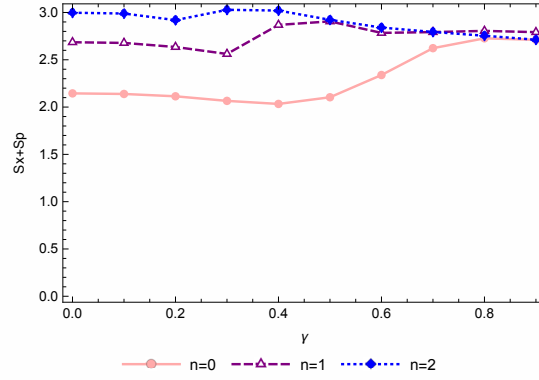


FIG. 3.11 : $S_x + S_p$ en fonction du γ pour les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$

Comme le montre clairement le tableau. L'inégalité de BBM et la relation d'incertitude d'Heisenberg sont valables pour l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension, et la somme des entropies $S_x + S_p$ est supérieur à la valeur $1 + \ln\pi$ (Figure.3.11). L'inégalité BBM stipule que la somme de $S_x + S_p$ reste supérieur à la limite inférieure de $(1 + \ln\pi)$. En particulier, nous trouvons que la somme de S_x et S_p pour l'état fondamental (avec $\gamma = 0$) est très proche de la valeur limite $(1 + \ln\pi)$. D'après les résultats numériques présentés dans le Tableau. 3.1, nous observons que la somme d'entropie $S_x + S_p \geq 1 + \ln\pi$ tend à être saturée à la valeur-limite définie par l'inégalité BBM pour les trois niveaux .

En conclusion, on observe que l'inégalité BBM est satisfaite comme le montre le Tableau. 3.1. En effet, on observe une augmentation de l'entropie de position pour tout γ , ce qui suffit à compenser la réduction de l'entropie du moment . Ainsi, nous pouvons également affirmer que, comme le mentionnent Dong et Gonzalez [102,103], « *il n'existe pas d'états physiques violant l'inégalité BBM* ».

Considérons à nouveau le Tableau. 3.1 : un résultat important apparaît pour le cas de l'état fondamental $n = 0$: si $\gamma = 0$, alors $\Delta x = \Delta p = 0.7071$ et $\Delta x \Delta p_x = \frac{1}{2}$ qui correspond au cas le plus simple de l'état fondamental pour l'oscillateur harmonique. Quand γ augmente, $\Delta x > 0.7071$, $\Delta p < 0.7071$ et $\Delta x \Delta p > \frac{1}{2}$ [59]. Ces résultats montrent qu'il existe un phénomène de compression du moment pour l'état fondamental $n = 0$: en physique, un état cohérent comprimé est un état quelconque de l'espace d'Hilbert en mécanique quantique telle que le principe d'incertitude est saturé. Notez qu'un tel effet de compression a été observé par Dong et al [102] lors de l'étude des entropies de l'information quantiques pour un puits à potentiel

tangent carré, par Aguiar et al [58, 60] pour leur étude sur l'information de Fisher de l'oscillateur Harmonique à amortissement quantique, et enfin par Macedo et al [59] lors de l'inspection de l'information de Fisher et de l'entropie de Shannon des oscillateurs de masse dépendantes de la position. Pour les autres niveaux, ce phénomène disparaît. Selon les travaux de Aguiar et Guedes [58, 60], l'information de Fisher peut également être utilisée pour étudier l'effet de compression (squeezing effect) dans la position ou l'impulsion des systèmes quantiques via Δx ou Δp .

Enfin, notons aussi l'existence d'une relation étroite entre l'entropie de Shannon S et l'information de Fisher F via le principe d'incertitude produit $\Delta x \Delta p$: selon les travaux de Aguiar et al [58, 60], nous avons

$$S \geq 1 + \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(F_x F_p) \equiv S_0. \quad (3.42)$$

L'équation (3.42) est obtenue en utilisant :

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2\pi e} e^S. \quad (3.43)$$

ainsi que (3.37). Ici, e est le nombre d'Euler et le terme S_0 est donné par :

$$S_0 = 1 + \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(F_x F_p). \quad (3.44)$$

Cette équation indique que S diminue lorsque $F_x F_p$ augmente. Cette situation est bien illustrée dans les Figures. (3.3) et (3.7).

L'influence du potentiel dépendant de l'énergie sur l'information de Fisher et l'entropie de Shannon : cas de l'oscillateur de Dirac à 1D

4.1 Les solutions propres de l'oscillateur de Dirac à une dimension en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie

L'équation libre de Dirac en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie s'écrit par :

$$[\alpha (p - i\lambda\gamma^0 x) + \gamma^0] \psi = E\psi, \quad (4.1)$$

avec $\lambda = \sqrt{1 + \gamma E}$, α et γ^0 sont les matrices de Dirac dont

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

A une dimension, ces matrices prennent la forme suivante

$$\alpha_x = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

De l'équation (4.1), on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & p_x + i\lambda x \\ p_x - i\lambda x & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

A partir de (4.4), nous obtenons un ensemble d'équations couplées comme suit :

$$(p_x - i\lambda x) \psi_1 = (E + 1) \psi_2, \quad (4.5)$$

$$(p_x + i\lambda x) \psi_2 = (E - 1) \psi_1. \quad (4.6)$$

En utilisant l'équation (4.6), la composante ψ_2 s'écrit en fonction de ψ_1 par :

$$\psi_2 = \frac{(p_x - i\lambda x)}{(E + 1)} \psi_1. \quad (4.7)$$

En remplaçant l'équation (4.7) dans (4.5), on trouve :

$$(p_x + i\lambda x)(p_x - i\lambda x) \psi_1 = (E^2 + 1) \psi_1, \quad (4.8)$$

où sous une forme détaillée par :

$$\left(\frac{p_x^2}{2} + \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 \right) \psi_1(x, E) = \left(\frac{E^2 - 1 + \lambda}{2} \right) \psi_1(x, E), [x, p_x] = i. \quad (4.9)$$

L'équation (4.9) est l'équation standard d'un oscillateur harmonique à une dimension.

Les solutions propres sont

$$E^4 - 2E^2 - 4\gamma n^2 E - 4n^2 + 1 = 0, \quad (4.10)$$

$$\psi_1(x, E) = C_n H_n(\sqrt{\lambda} x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} x^2\right), \quad (4.11)$$

$$\psi_2(x, E) = \frac{(p_x - i\lambda x)}{(E + 1)} C_n H_n(\sqrt{\lambda} x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} x^2\right). \quad (4.12)$$

La fonction d'onde totale associée sera alors

$$\psi(x, E) = C_n \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{(p_x - i\lambda x)}{(E + 1)} \end{pmatrix} H_n(\sqrt{\lambda} x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} x^2\right). \quad (4.13)$$

où C_n est la constante de normalisation et $H_n(\sqrt{\lambda} x)$ et les polynômes d'Hermite.

La condition de normalisation C_n se calcul en utilisant la condition de normalisation comme suit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, E) \gamma^0 \left(1 - \frac{\partial V}{\partial E}\right) \psi(x, E) dx = 1, \text{ dont } V(x, E) = \frac{\lambda}{2} x^2. \quad (4.14)$$

L'équation (4.14) s'écrit aussi par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \psi_1^*(x, E) & \psi_2^*(x, E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\gamma x^2 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2}\gamma x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(x, E) \\ \psi_2(x, E) \end{pmatrix} dx = 1. \quad (4.15)$$

Un calcul direct donne

$$C_n^2 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left(2^n n! \left(1 - \frac{\gamma}{2\lambda} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)}\right)^2 2^{n-1} (n-1)! \left(1 - \frac{\gamma}{2\lambda} \left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)^{-1}. \quad (4.16)$$

Passons maintenant à la configuration $\{p\}$ où le principe de correspondance exige que

$$p_x \rightarrow p_x, x \rightarrow i \frac{\partial}{\partial p_x}. \quad (4.17)$$

Dans ce cas, (4.9) devient

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{1}{2\lambda^2} p_x^2\right) \psi_1(p, E) = \left(\frac{E^2 - 1 + \lambda}{2\lambda^2}\right) \psi_1(p, E). \quad (4.18)$$

Les solutions propres correspondantes peuvent être résumées comme suit :

$$E^4 - 2E^2 - 4n^2 - 4n^2\gamma E + 1 = 0. \quad (4.19)$$

La fonction d'onde totale associée est

$$\psi(p, E) = \begin{pmatrix} \psi_1(p, E) \\ \psi_2(p, E) \end{pmatrix}, \quad (4.20)$$

avec

$$\psi_1(p, E) = C p_n H_n \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2\lambda}\right), \quad (4.21)$$

$$\psi_2(p, E) = C p_n \frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)} H_{n-1} \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2\lambda}\right), \quad (4.22)$$

et dont constante de normalisation $C p_n$ se calcul aussi en utilisant la condition de normalisation

TAB. 4.1 : La constante de normalisation pour certains niveau dans la configuration $\{x\}$

n	C_n^2
0	$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\gamma}{4\omega_E}\right)^{-1}$
1	$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left(\left(2 - \frac{3\gamma}{2\lambda}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(1 - \frac{\gamma}{4\lambda}\right) \right)^{-1}$
2	$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left(8 - \frac{10\gamma}{\lambda} + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(2 - \frac{3\gamma}{2\lambda}\right) \right)^{-1}$

TAB. 4.2 : La constante de normalisation pour certains niveau dans la configuration $\{p_x\}$

n	C_p^2
0	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{\gamma}{4\lambda^3}\right)^{-1}$
1	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} \left(2 \left(1 + \frac{3\gamma}{4\lambda^3}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(1 + \frac{\gamma}{4\lambda^3}\right) \right)^{-1}$
2	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} \left(8 \left(1 + \frac{5\gamma}{4\lambda^3}\right) + 2 \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(1 + \frac{3\gamma}{4\lambda^3}\right) \right)^{-1}$

comme suit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(p_x, E) \gamma^0 \left(1 - \frac{\partial V}{\partial E}\right) \psi(p_x, E) dp_x = 1, \text{ dont } V = \frac{1}{2\omega_E^2} p_x^2. \quad (4.23)$$

Alors, l'équation suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \psi_1^*(p_x, E) & \psi_2^*(p_x, E) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p_x^2 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p_x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1(p_x, E) \\ \psi_2(p_x, E) \end{pmatrix} dp_x = 1 \quad (4.24)$$

conduit à

$$C_p^2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} \left(2^n n! \left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^3} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 2^{n-1} (n-1)! \left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^3} \left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right)^{-1}. \quad (4.25)$$

Les deux Tableaux. 4.1 et 4.2 donnent quelques formules de la constante de normalisation dans les deux configurations pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$.

Les deux équations (4.10) et (4.19) sont une équation algébrique d'ordre 4 possédants des solutions réelles et complexes. En omettant les solutions complexes qui ne sont pas physiques, on a pu construire l'allure du spectre d'énergie à partir des deux autres solutions réelles. Ce

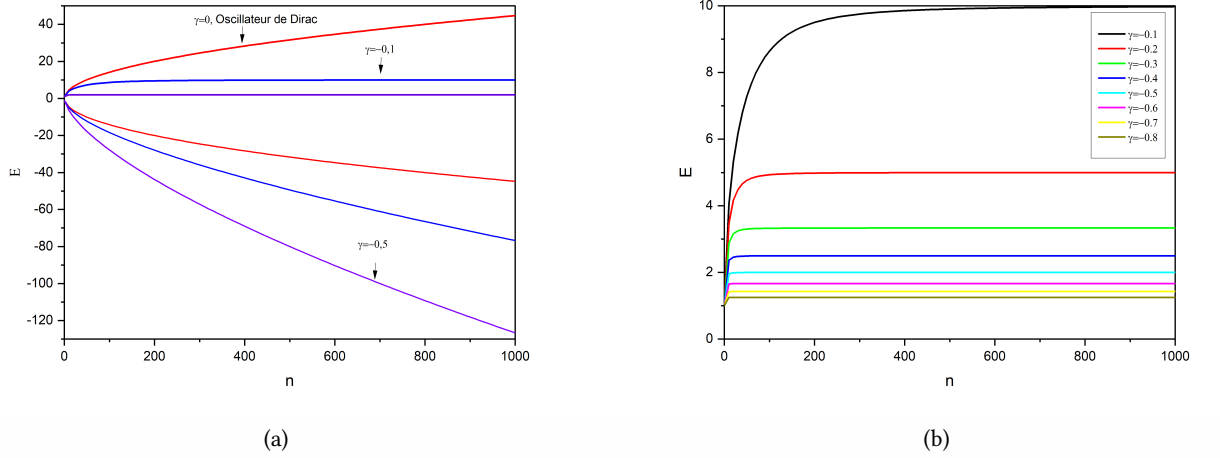


FIG. 4.1 : Le spectre d'énergie E en fonction du nombre quantique n pour certaines valeurs de γ dans les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$

Le spectre est tracé dans la Figure. 4.1 . Cette figure montre le spectre d'énergie E en fonction du nombre quantique n pour différentes valeurs différentes de γ dans les deux configurations $\{x\}$ et $\{p\}$. De cette figure, quelques résultats intéressants, sont prêts à discuter. Sur cette 4.1 (b), seule l'énergie positive est retenue, puisque les négatives ne sont pas normalisables.

- Le produit scalaire modifié est à l'origine de la saturation des spectres d'énergies pour les particules comme dans le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon et l'oscillateur Harmonique. Il y a une saturation d'énergie uniquement pour les particules. Le cas des antiparticules l'énergie croît à l'infini. Ainsi, nous nous consacrons notre étude sur les particules seulement.
- La limite asymptotique pour la forme d'énergie est $\frac{1}{|\gamma|}$.
- Le début de la saturation commence à partir d'un nombre quantique spécifique N_{max} . Ce paramètre diminue rapidement lorsque $|\gamma|$ augmente lentement.

Dans ce qui suit, nous allons étudier l'influence de la modification du produit scalaire sur la densité de probabilité de notre système en question : Sazdjian et al [6-8] ont montré que la définition de la densité doit être modifiée afin de garantir la validité de l'équation de continuité.

La nouvelle définition de la densité de probabilité en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie est donnée par

$$\rho(x, E) = \bar{\psi}(x, E) \gamma^0 \left(1 - \frac{\partial V}{\partial E}\right) \psi(x, E), \quad (4.26)$$

avec

$$\bar{\psi}(x, E) = \psi^*(x, E) \gamma^0. \quad (4.27)$$

Ici

$$V = \frac{\lambda^2}{2} x^2 \implies \frac{\partial V}{\partial E} = \frac{1}{2} \gamma x^2. \quad (4.28)$$

A partir de l'équation (4.26), la densité de probabilité devient

$$\rho(x, E) = \left(1 - \frac{1}{2} \gamma x^2\right) \left(1 + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)}\right)^2\right) \varphi_1^2(x, E), \quad (4.29)$$

avec

$$\varphi_1(x, E) = C_n H_{n-1}(\sqrt{\lambda}x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x^2\right). \quad (4.30)$$

La condition pour que cette densité représente un système physique et qu'elle doit être définie positive. Ainsi, nous avons l'inégalité suivante

$$1 - \frac{1}{2} \gamma x^2 \geq 0. \quad (4.31)$$

L'équation (4.31) mène à la condition suivante : $\gamma < 0$.

Pour l'espace du moment, l'équation de densité de probabilité prend la forme suivante

$$\rho(p, E) = \bar{\psi}(p, E) \gamma^0 \left(1 - \frac{\partial V}{\partial E}\right) \psi(p, E), \quad (4.32)$$

où

$$\rho(p, E) = \left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2\right) \left(1 + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)}\right)^2\right) \varphi_1^2(p, E). \quad (4.33)$$

Comme

$$\bar{\psi}(p, E) = \psi^*(p, E) \gamma^0, \quad (4.34)$$

TAB. 4.3 : La condition sur le paramètre γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$ dans la configuration $\{p_x\}$

n	γ
0	$-0.3 \leq \gamma \leq 0$
1	$-0.2 \leq \gamma \leq 0$
2	$-0.14 \leq \gamma \leq 0$

et

$$\varphi_1(p, E) = C_n H_{n-1} \left(\frac{p}{\sqrt{\omega_E}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2\omega_E} \right), \quad (4.35)$$

alors cette condition dépend de chaque niveau d'énergie : pour bien illustrer ça, nous donnons l'intervalle du paramètre γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$. Dans le Tableau. 4.3, on présente la condition sur le paramètre γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$ pour avoir $\rho(p, E) > 0$.

Dans la Figure. 4.2, nous montrons l'influence du paramètre γ sur les densités de probabilité pour les deux espaces de configuration $\{x\}$ et $\{p_x\}$. La Figure. 4.2a présente la densité $\rho(x, E)$ dans la configuration $\{x\}$: on peut voir que toutes les courbes sont symétriques autour de $x = 0$ et supérieures à zéro. Par contre sur la Figure. 4.2b, dont la densité $\rho(p, E)$ est tracée dans la configuration $\{p\}$, on observe que toutes les courbes sont symétriques autour de $p = 0$ et supérieures à zéro ou $\gamma > -0.2$. Pour la valeur $\gamma = -0.3$ implique que la densité $\rho(p, E) < 0$. Ce résultat est omis à cause de la condition $\rho_D > 0$.

4.2 L'influence du paramètre γ sur l'information de Fisher et l'entropie de Shannon

4.2.1 L'information de Fisher

L'information de Fisher est donnée par

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x, E) \left[\frac{d \ln(\rho_n(x, E))}{dx} \right]^2 dx. \quad (4.36)$$

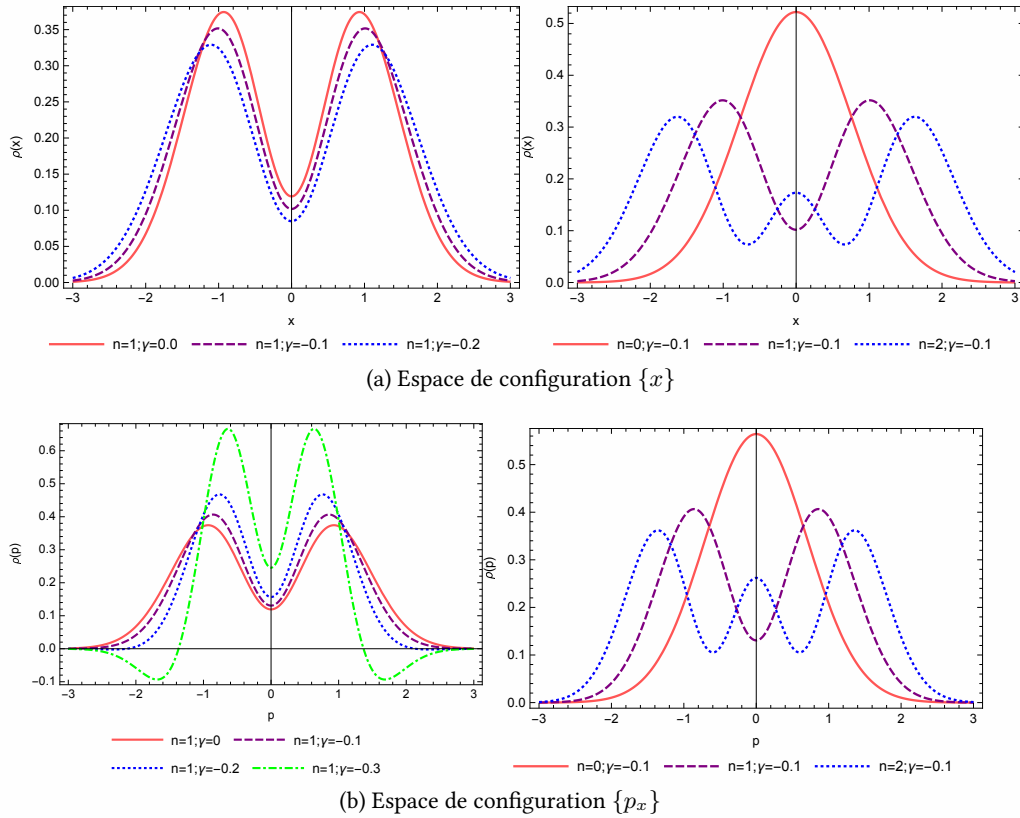


FIG. 4.2 : Les densités de probabilités dans les deux espaces de configuration $\{x\}$ et $\{p_x\}$ pour différentes valeurs de n et γ

dont la forme détaillée de ce dernier est écrite comme suit

$$\begin{aligned}
 F_x &= I + II \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} -(16\lambda + 8\gamma) \sqrt{\lambda} x \left(n + \frac{4n^2(n-1)\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1(x, E) \psi_2(x, E) dx}_{III} \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (4\gamma + 4\lambda) \lambda x^2 \left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1^2(x, E) dx}_{IV} \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 8\gamma\lambda\sqrt{\lambda} x^3 \left(n + \frac{4n^2(n-1)\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1(x, E) \psi_2(x, E) dx}_{V} \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} -2\gamma\lambda^2 x^4 \left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_2^2(x, E) dx}_{VI},
 \end{aligned} \tag{4.37}$$

dont

$$\psi_1(x, E) = C_n H_{n-1} \left(\sqrt{\lambda} x \right) \exp \left(-\frac{\lambda}{2} x^2 \right), \tag{4.38}$$

$$\psi_2(x, E) = C_n H_{n-2} \left(\sqrt{\lambda} x \right) \exp \left(-\frac{\lambda}{2} x^2 \right). \tag{4.39}$$

L'évaluation de différents termes donne

$$III = -\frac{C_n^2 (16\lambda + 8\gamma) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} \left\{ (n-1) \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} 2^{n-2} (n-1)! + n 2^{n-1} n! \right\}, \tag{4.40}$$

$$IV = \frac{C_n^2 (4\gamma + 4\lambda) \sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \left(2^n n! \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{4n^2\lambda 2^{n-1} (n-1)!}{(E+1)^2} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\}, \tag{4.41}$$

$$V = \frac{8\gamma C_n^2 \sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \frac{4n^2\lambda 2^{n-2} (n-1) (n-1)! \left(n - \frac{3}{2} \right)}{(E+1)^2} + n 2^{n-1} n! \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\}, \tag{4.42}$$

$$VI = -\frac{2\gamma\sqrt{\pi} C_n^2}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2^n n! \left[\frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right] + \frac{4n^2\lambda 2^{n-1} (n-1)!}{(E+1)^2} \left[\frac{(2(n-1)+1)^2 + 2}{4} \right] \right\}. \tag{4.43}$$

Les deux premiers termes

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 \left(1 + \frac{4n^2 \lambda}{(E+1)^2}\right) \psi_1^2(x, E)}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right)} dx, \quad (4.44)$$

$$II = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16 \left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right) \lambda \left(n + \frac{4n^2(n-1)\lambda}{(E+1)^2}\right)^2 \psi_1^2(x, E) \psi_2^2(x, E)}{\left(\psi_1^2(x, E) + \frac{4n^2 \lambda}{(E+1)^2} \psi_2^2(x, E)\right)} dx. \quad (4.45)$$

sont calculés numériquement.

En ajoutant les résultats de différents termes dans l'équation (4.37), la forme finale du paramètre Fisher dans l'espace de la position est :

$$\begin{aligned} F_x = I + II &+ \frac{4n^2 \lambda \sqrt{\pi} (n-1) 2^{n-2} (n-1)! C_n^2}{\sqrt{\lambda} (E+1)^2} \left\{ 8\gamma \left(n - \frac{3}{2}\right) - (16\lambda + 8\gamma) \right\} \\ &+ \frac{\sqrt{\pi} C_n^2 n 2^{n-1} n!}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 8\gamma \left(n - \frac{1}{2}\right) - (16\lambda + 8\gamma) \right\} + \frac{\sqrt{\pi} C_n^2 2^n n!}{\sqrt{\lambda}} \left\{ (4\gamma + 4\lambda) \left(n + \frac{1}{2}\right) - 2\gamma \left[\frac{(2n+1)^2 + 2}{4}\right] \right. \\ &\left. - \frac{2\gamma \sqrt{\pi} C_n^2}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2^n n! \left[\frac{(2n+1)^2 + 2}{4}\right] + \frac{4n^2 \lambda 2^{n-1} (n-1)!}{(E+1)^2} \left[\frac{(2(n-1)+1)^2 + 2}{4}\right] \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Dans ce qui suit, nous nous concentrerons uniquement sur les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$.

- Pour le niveau fondamental $n = 0$,

$$F_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 \psi_1^2(x, E)}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right)} dx + \left(1 - \frac{\gamma}{4\omega_E}\right)^{-1} \left(2\gamma + 2\lambda - \frac{3\gamma}{2}\right). \quad (4.47)$$

- Pour le premier niveau excité $n = 1$,

$$\begin{aligned}
 F_1 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 \left(\psi_1^2(x, E) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \psi_1^2(x, E) \right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right)} dx + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right) \left(4\sqrt{\lambda} (\psi_1(x, E) \psi_1(x, E)) \right)^2}{\left(\psi_1^2(x, E) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \psi_1^2(x, E) \right)} dx + \\
 & \left\{ \left(2 - \frac{3\gamma}{2\lambda} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(1 - \frac{\gamma}{4\lambda} \right) \right\}^{-1} \left\{ -4\lambda - 3\gamma + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(\frac{\gamma}{2} + 2\lambda \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.48}$$

- Enfin, pour le deuxième niveau $n = 2$,

$$\begin{aligned}
 F_2 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 \left(1 + \frac{16\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1^2(x, E)}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right)} dx + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right) \left\{ 4\sqrt{\lambda} \left(2 + \frac{16\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1(x, E) \psi_2(x, E) \right\}^2}{\left(\psi_1^2(x, E) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \psi_1^2(x, E) \right)} dx + \\
 & \left\{ 8 - \frac{10\gamma}{\lambda} + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(2 - \frac{3\gamma}{2\lambda} \right) \right\}^{-1} \left\{ 4\gamma - 48\lambda - \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 (4\lambda + 3\gamma) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.49}$$

Maintenant, dans l'espace du moment $\{p_x\}$, on a

$$F_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(p, E) \left[\frac{d \ln(\rho_n(p, E))}{dp} \right]^2 dp, \tag{4.50}$$

dont

$$\psi'_1(p, E) = C'_n H_{n-1} \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2\lambda} \right), \tag{4.51}$$

$$\psi'_2(p, E) = C'_n H_{n-2} \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2\lambda} \right). \tag{4.52}$$

Après quelques étapes d'un calcul direct, on obtient

$$\begin{aligned}
 F_p &= I + II \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{8\gamma}{\lambda^4} - \frac{16}{\lambda} \right) p \left(n + \frac{4n^2\lambda(n-1)}{(E+1)^2} \right) \psi'_1(p, E) \psi'_2(p, E) dp}_{III} \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{4}{\lambda} - \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \frac{p^2}{\lambda} \left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1'^2(p, E) dp}_{IV} \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{8\gamma p^3}{\lambda^5 \sqrt{\lambda}} \left(n + \frac{4n^2\lambda(n-1)}{(E+1)^2} \right) \psi'_1(p, E) \psi'_2(p, E) dp}_V \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\gamma p^4}{\lambda^6} \left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1'^2(p, E) dp}_{VI}. \tag{4.53}
 \end{aligned}$$

L'évaluation de différents termes conduit à :

$$III = C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} \left(\frac{8\gamma}{\lambda^4} - \frac{16}{\lambda} \right) \left\{ n 2^{n-1} n! + \frac{4n^2\lambda(n-1)(2^{n-2})(n-1)!}{(E+1)^2} \right\}, \tag{4.54}$$

$$IV = C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} \left(\frac{4}{\lambda} - \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \left\{ 2^n n! \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{4n^2\lambda 2^{n-1} (n-1)!}{(E+1)^2} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\}, \tag{4.55}$$

$$V = -\frac{8\gamma C_n'^2 p \sqrt{\pi} \lambda}{\lambda^4} \left\{ n 2^{n-1} n! \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{4n^2\lambda(n-1) 2^{n-2} (n-1)!}{(E+1)^2} \left(n - \frac{3}{2} \right) \right\}, \tag{4.56}$$

$$VI = \frac{2\gamma C_n'^2 p \sqrt{\pi} \lambda}{\lambda^4} \left\{ 2^n n! \left[\frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right] + \frac{4n^2 2^{n-1} (n-1)! \lambda}{(E+1)^2} \left[\frac{(2(n-1)n+1)^2 + 2}{4} \right] \right\}, \tag{4.57}$$

Les deux premiers termes

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\gamma^2 p^2}{\lambda^8} \left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1'^2(p, E)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right)} dp \tag{4.58}$$

$$II = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right) \left\{ \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \psi'_1(p, E) \left(n \psi'_1(p, E) + \frac{4n^2\lambda(n-1)}{(E+1)^2} \psi'_2(p, E) \right) \right\}^2}{\left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1'^2(p, E)} dp. \tag{4.59}$$

sont évalués numériquement.

Enfin, la forme finale du paramètre de Fisher dans l'espace du moment est

$$\begin{aligned}
 F_p &= I + II \\
 &+ C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} n 2^{n-1} n! \left\{ \left(\frac{8\gamma}{\lambda^4} - \frac{16}{\lambda} \right) - \frac{8\gamma}{\lambda^4} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 &+ \frac{4n^2 \lambda (n-1) (2^{n-2}) (n-1)! C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda}}{(E+1)^2} \left\{ \left(\frac{8\gamma}{\lambda^4} - \frac{16}{\lambda} \right) - \frac{8\gamma}{\lambda^4} \left(n - \frac{3}{2} \right) \right\} \\
 &+ C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} 2^n n! \left\{ \left(\frac{4}{\lambda} - \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{2\gamma}{\lambda^4} \left[\frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right] \right\} \\
 &+ \frac{4n^2 \lambda C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} 2^{n-1} (n-1)!}{(E+1)^2} \left\{ \left(\frac{4}{\lambda} - \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{2\gamma}{\lambda^4} \left[\frac{(2(n-1)+1)^2 + 2}{4} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

Ici, nous nous concentrons sur les trois premiers niveaux $n = 0, 1, 2$: Ainsi

- Pour le niveau fondamental $n = 0$

$$F_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\gamma^2}{\lambda^8} p^2 \psi_1'^2(p, E)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2\right)} dp + \left(1 + \frac{\gamma}{4\lambda^3}\right)^{-1} \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{\gamma}{2\lambda^4}\right). \tag{4.61}$$

- Pour le premier niveau excité $n = 1$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{\lambda^4} p^2\right)^2 \left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \psi_1'^2(p, E)\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2\right)} dp + \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2\right) \left(\frac{4}{\sqrt{\lambda}} \psi_1'(p, E) \psi_1'(p, E)\right)^2}{\left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \psi_1'^2(p, E)\right)} dp + \\
 &\left\{ 2 \left(1 + \frac{3\gamma}{4\lambda^3}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(1 + \frac{\gamma}{4\lambda^3}\right) \right\}^{-1} \left\{ \frac{3\gamma}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda} + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{\gamma}{2\lambda^4}\right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

- Enfin, pour le deuxième niveau $n = 2$

$$\begin{aligned}
 F_2 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{\lambda^4} p\right)^2 \left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \psi_1'^2(p, E) \right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2\right)} dp + \\
 & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2\right) \left(\frac{4}{\sqrt{\lambda}} \psi_1'(p, E) \left(2\psi_1'(p, E) + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \psi_2'(p, E) \right) \right)^2}{\left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \psi_1'^2(p, E) \right)} dp + \\
 & \left\{ 8 \left(1 + \frac{5\gamma}{4\lambda^3}\right) + 2 \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(1 + \frac{3\gamma}{4\lambda^3}\right) \right\}^{-1} \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} \left\{ \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(\frac{3\gamma}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda}\right) - \left(\frac{48}{\lambda} + \frac{4\gamma}{\lambda^4}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.63}$$

4.2.2 L'entropie de Shannon

L'entropie de Shannon unidimensionnel pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$ est calculée à partir des deux équations suivantes :

$$S_x = - \int \rho_n(x, E) \ln(\rho_n(x, E)) dx, \tag{4.64}$$

$$S_p = - \int \rho_n(p, E) \ln(\rho_n(p, E)) dp, \tag{4.65}$$

dont les deux densités $\rho_n(x, E)$ et $\rho_n(p, E)$ sont définis par les deux équations (4.29) et (4.33).

4.3 Résultats et discussion

La Figure. 4.3 montre l'information de Fisher en fonction du paramètre γ pour les trois niveaux ($n = 0, 1, 2$) dans les deux configurations suivantes : la configuration de l'espace de coordonnées $\{x\}$ et de l'espace de moment $\{p_x\}$. Selon cette figure, F_x augmente avec γ pour différentes valeurs de n (Figure. 4.3a) contrairement dans la configuration du moment où il diminue (4.3b).

Dans la Figure. 4.4, nous avons tracé le produit $F_x F_p$ en fonction du γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$. Suivant cette figure, relation d'incertitude de Fisher $F_x F_p \geq 4$ est bien vérifiée. Pour bien comparer ce dernier résultat avec les relations d'incertitudes d'Heisenberg, nous avons tracé

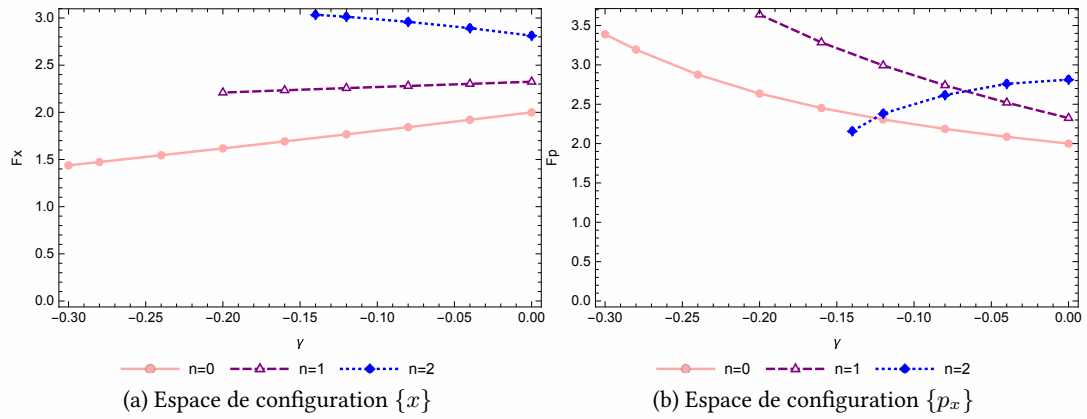


FIG. 4.3 : L'information de Fisher pour l'oscillateur de Dirac unidimensionnel en fonction du γ pour les deux types de configurations

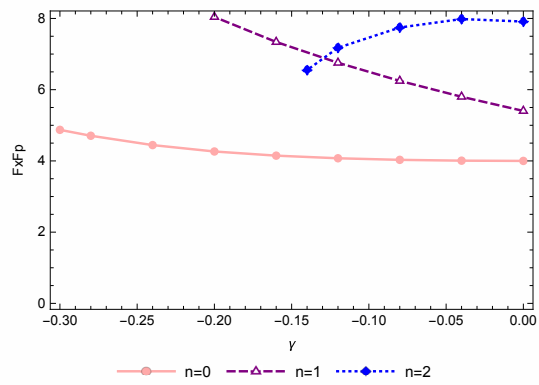


FIG. 4.4 : Le produit $F_x F_p$ en fonction du γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$

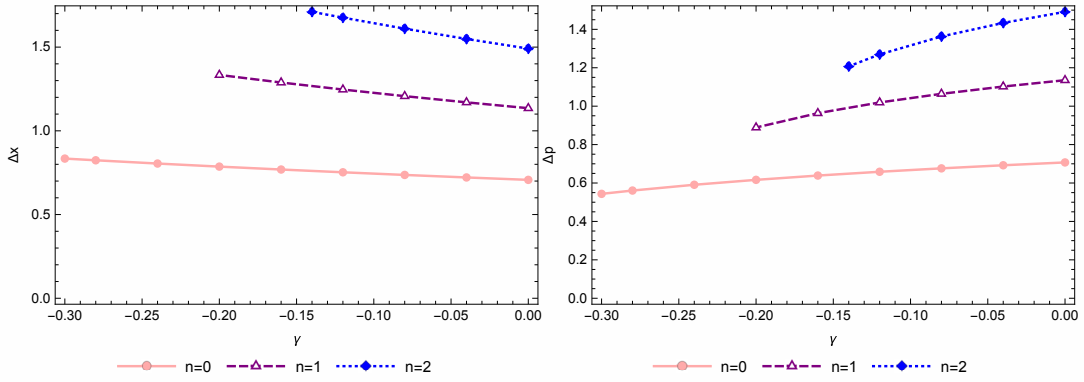


FIG. 4.5 : L'incertitude de Heisenberg Δx et Δp en fonction du γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$

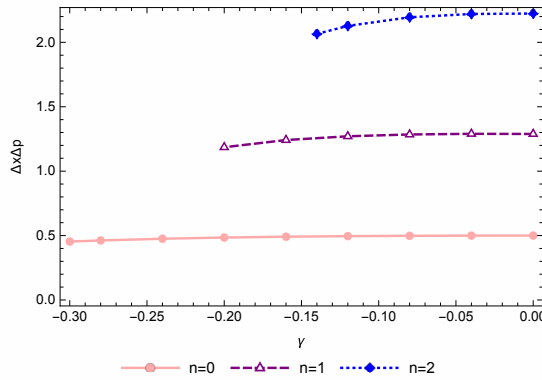


FIG. 4.6 : $\Delta x \Delta p$ en fonction du γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$

l'incertitude de Δx et Δp en fonction de γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$ dans la Figure. 4.5 . Cette Figure montre comment les deux types d'incertitude sur x et p peuvent changer en fonction du paramètre γ . Ainsi, on peut voir que Δx augmente lorsque γ diminue contrairement pour le cas de Δp . Pour comprendre bien ces relations, nous avons tracé $\Delta x \Delta p$ en fonction du paramètre γ pour les trois niveaux $n = 0, 1, 2$ dans la Figure. 4.6 . La relation d'incertitude constitue la propriété de base de la mécanique quantique. En particulier, le principe d'incertitude d'Heisenberg stipulant que le produit des deux incertitudes de position et d'impulsion s'écrit par $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. Cette dernière est très satisfaite dans notre cas.

Passons maintenant aux résultats concernant les calculs de l'entropie de Shannon. Dans la Figure. 4.7 , nous avons étudié l'entropie de Shannon en fonction de γ , dans les deux configurations de l'espace. Ces entropies, S_x et S_p ont été calculées pour les trois niveaux états $n = 0, 1, 2$. Selon cette figure, on peut voir que S_x augmente contrairement (Figure. 4.7a), du paramètre S_p

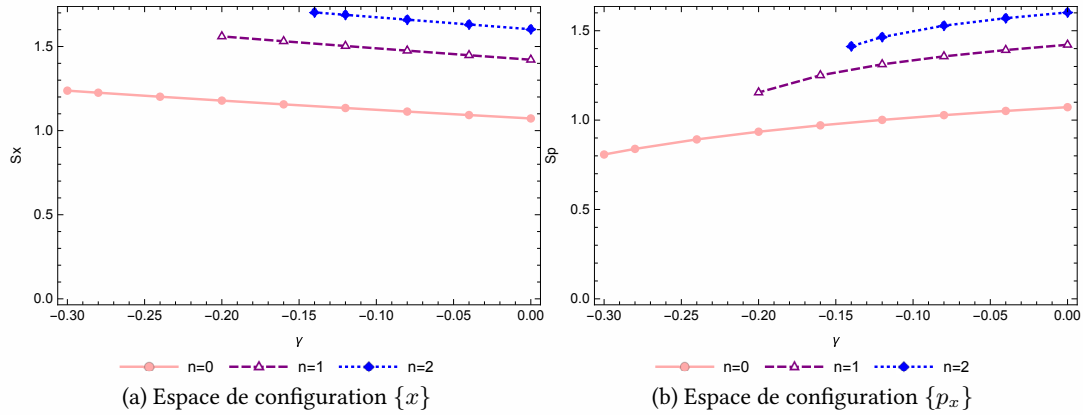


FIG. 4.7 : L'entropie de Shannon de l'oscillateur de Dirac à une dimension en fonction du γ pour les deux configurations $\{x\}$ et $\{p_x\}$

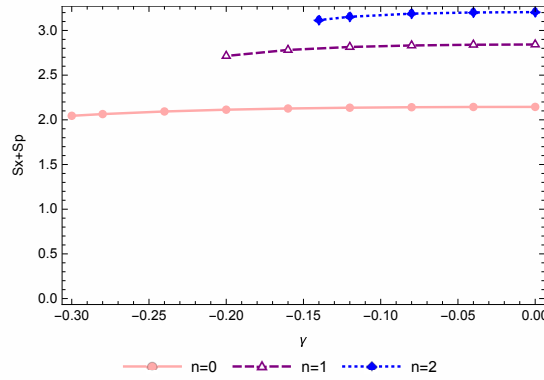


FIG. 4.8 : La somme $S_x + S_p$ en fonction du γ pour trois niveaux $n = 0, 1, 2$

où il diminue (Figure. 4.7b).

Enfin, dans la Figure. , nous présentons les résultats de la somme d'entropie $S_x + S_p$ des trois niveaux $n = 0, 1, 2$ pour diverses valeurs du paramètre γ . On peut voir que la somme des entropies est compatible avec l'inégalité BBM [81], correspond à la limite inférieure stipulée $S_x + S_p \geq 1 + \ln \pi$.

Tous les résultats trouvés au-dessus concernant les relations d'incertitudes sont récapitulés dans le Tableau. 4.4 . Selon, ce tableau nous observons que

- Les inégalités de Stam et de Cramer-Rao sont remplies [58–60, 80].
- La relation d'incertitude $F_x F_p \geq 4$ [58, 60] est bien établie.

TAB. 4.4 : Résultats numériques pour la relation d'incertitude et les informations de Fisher et l'entropie de Shannon de l'oscillateur de Dirac à une dimension en fonction du γ

n	γ	E	Δx	Δp	$\Delta x \Delta p$	F_x	F_p	$F_x F_p$	S_x	S_p	$S_x + S_p$	$1 + \ln \pi$
0	0	1	0.707107	0.707107	0.500000309	2	2	4	1.07236	1.07236	2.14472	2.1447
	-0.02	1	0.71425	0.69989	0.499896433	1.9602	2.04146	4.001669892	1.08242	1.06211	2.14453	2.1447
	-0.04	1	0.721541	0.692365	0.499569734	1.92078	2.08607	4.006881535	1.09257	1.0513	2.14387	2.1447
	-0.06	1	0.728989	0.684502	0.498994428	1.88174	2.13436	4.016310586	1.10284	1.03988	2.14272	2.1447
	-0.08	1	0.736601	0.676269	0.498140422	1.84304	2.18658	4.029954403	1.11323	1.02777	2.141	2.1447
	-0.1	1	0.744386	0.667627	0.496972192	1.80471	2.24359	4.049029309	1.12374	1.01491	2.13865	2.1447
	-0.12	1	0.752354	0.658532	0.495449184	1.7667	2.3061	4.07418687	1.13439	1.00119	2.13558	2.1447
	-0.14	1	0.760514	0.648934	0.493523392	1.72902	2.37509	4.106578112	1.14517	0.986492	2.131662	2.1447
	-0.16	1	0.768877	0.638771	0.49113633	1.69165	2.45189	4.147739719	1.15611	0.970679	2.126789	2.1447
	-0.18	1	0.777456	0.627974	0.488222154	1.65458	2.53818	4.199621864	1.1672	0.953569	2.120769	2.1447
	-0.2	1	0.786262	0.616456	0.484695927	1.6178	2.63607	4.264634046	1.17846	0.934942	2.113402	2.1447
	-0.22	1	0.79531	0.604117	0.480460291	1.5813	2.74799	4.345396587	1.18989	0.914524	2.104414	2.1447
-0.24	1	0.804614	0.590831	0.475390894	1.54506	2.87656	4.444457794	1.20151	0.891988	2.093498	2.1447	
-0.26	1	0.81419	0.576445	0.469335755	1.50909	3.02444	4.56415216	1.21333	0.866947	2.080277	2.1447	
-0.28	1	0.824056	0.560768	0.462104235	1.47337	3.19424	4.706297389	1.22536	0.838957	2.064317	2.1447	
-0.3	1	0.834232	0.543554	0.453450141	1.43788	3.38842	4.87214135	1.23761	0.807509	2.045119	2.1447	
1	0	1.732	1.1352	1.1352	1.28867904	2.32453	2.32453	5.403439721	1.42147	1.42147	2.84294	2.1447
	-0.02	1.722	1.15241	1.11922	1.28980032	2.31308	2.41951	5.596520191	1.43482	1.40729	2.84211	2.1447
	-0.04	1.712	1.17014	1.10222	1.289751711	2.3019	2.52035	5.801593665	1.44827	1.39194	2.84021	2.1447
	-0.06	1.702	1.1884	1.08399	1.288213716	2.2909	2.62765	6.019683385	1.46182	1.37515	2.83697	2.1447
	-0.08	1.691	1.20715	1.0643	1.284769745	2.27936	2.74083	6.247338269	1.47547	1.35663	2.8321	2.1447
	-0.1	1.681	1.22659	1.04289	1.279198445	2.26853	2.86319	6.495232411	1.48924	1.3358	2.82504	2.1447
	-0.12	1.67	1.24657	1.01933	1.270666198	2.25705	2.99303	6.755418362	1.50313	1.31205	2.81518	2.1447
	-0.14	1.659	1.26723	0.9931	1.258486113	2.2455	3.13308	7.09533114	1.51715	1.28423	2.80138	2.1447
	-0.16	1.648	1.2886	0.963462	1.241517133	2.23379	3.28565	7.339452114	1.53132	1.25063	2.78195	2.1447
	-0.18	1.637	1.31075	0.929325	1.218112744	2.22185	3.45412	7.674536522	1.54566	1.20864	2.7543	2.1447
	-0.2	1.626	1.33372	0.889048	1.185741099	2.20959	3.63973	8.042311011	1.56017	1.15469	2.71486	2.1447
	2	0	2.236	1.49117	1.49117	2.223587969	2.8129	2.8129	7.91240641	1.60258	1.60258	3.20516
-0.02		2.216	1.51951	1.46356	2.223894056	2.85412	2.79478	7.976637494	1.61686	1.58722	3.20408	2.1447
-0.04		2.196	1.54876	1.43347	2.220100997	2.89276	2.75967	7.983062989	1.63112	1.57023	3.20135	2.1447
-0.06		2.175	1.57894	1.40022	2.210863367	2.92769	2.70166	7.909622965	1.64538	1.551	3.19638	2.1447
-0.08		2.154	1.61017	1.36289	2.194484591	2.95968	2.61683	7.744979414	1.65967	1.5285	3.18817	2.1447
-0.1		2.133	1.64253	1.32004	2.168205301	2.98853	2.50012	7.471683624	1.67399	1.50093	3.17492	2.1447
-0.12		2.111	1.67599	1.26944	2.127568746	3.01324	2.38176	7.176814502	1.68835	1.46481	3.15316	2.1447
-0.14		2.089	1.71075	1.20734	2.065456905	3.03448	2.15858	6.550167838	1.70279	1.41309	3.11588	2.1447

- Enfin, la somme des entropies est cohérence avec l'inégalité BBM ou $S_x + S_{p_x} \geq 1 + \ln\pi \simeq 2.14447$.

Aussi, le tableau. 4.4 montre que l'inégalité BBM et les relations d'incertitudes d'Heisenberg sont valables pour le cas de l'oscillateur Dirac à une dimension, et la somme des entropies $S_x + S_p$ est plus élevée supérieure à la valeur $(1 + \ln\pi)$ (Figure. 4.8). L'inégalité BBM stipule que la somme de $S_x + S_p$ reste au-dessus de la borne inférieure de $(1 + \ln\pi)$. En particulier, on constate que la somme S_x et S_p pour l'état fondamental (avec $\gamma = 0$) est très proche de la valeur-limite $(1 + \ln\pi)$. A partir des résultats numériques qui sont présentés dans le tableau 2, nous observons que l'entropie somme $S_x + S_{p_x} \geq 1 + \ln\pi$ tend à être saturé à la valeur-limite définie par le Inégalité BBM pour les trois bas niveaux. En conclusion, on constate que la L'inégalité BBM est satisfaite dans tous les cas comme le montre le tableau. 4.4. En effet, une augmentation de l'entropie S_x observée pour les trois niveaux est suffisante pour compenser la réduction de l'entropie S_{p_x} . Ainsi, nous pouvons affirmer aussi comme dans le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension qu'il *n'y a pas états physiques qui violent l'inégalité BBM* [102, 103].

Toujours selon le tableau. 4.4 un résultat important apparaît pour l'état fondamental $n = 0$: si $\gamma = 0$, alors $\Delta x = \Delta p = 0.7071$ et $\Delta x \Delta p = 1/2$ correspondent au cas le plus simple de l'état fondamental pour l'oscillateur Harmonique unidimensionnel. Lorsque γ augmente, $\Delta x > 0,7071$, $\Delta p < 0,7071$ et $\Delta x \Delta p > 1/2$ [59]. Ces résultats montrent aussi l'existence du phénomène de compression sur le moment pour l'état fondamental $n = 0$. Cette situation est similaire à celle rencontrée dans le cas de l'oscillateur de Klein-Gordon : un état cohérent compressé (squeeze state) est un état de l'espace d'Hilbert en mécanique quantique dont le principe d'incertitude est saturé.

Enfin, la conjecture d'applicabilité de la relation d'incertitude de Fisher, $F_x F_p \geq 4$, selon le tableau. 4.4 est absente pour le cas de l'oscillateur de Dirac à une dimension [58, 60, 101].

Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie

5.1 Les propriétés thermiques ordinaires de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D

Dans la section 2, il a été prouvé que la forme du spectre d'énergie suit l'équation séculaire suivante :

$$E^4 - 2E^2 - 4n^2 - 4n^2\gamma E + 1 = 0. \quad (5.1)$$

Les valeurs de ce spectre d'énergie sont évaluées numériquement en fixant le paramètre γ tout en variant les nombres quantiques n jusqu'à avoir le phénomène de saturation observé pour les deux cas.

Maintenant, dans le but d'évaluer les propriétés thermodynamiques des deux oscillateurs, nous passons par la détermination de la fonction de partition Z . Cette dernière est définie par :

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}, \quad (5.2)$$

dont $\beta = \frac{1}{k_B T}$ est la température inverse, k_B la constante de Boltzmann.

En utilisant l'approche utilisée par Boumali [9] pour le cas de l'oscillateur Harmonique à 1D, l'équation (5.2) devient :

$$Z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \simeq \underbrace{\sum_{n=0}^N e^{-\beta E_n}}_I + \text{All levels are in saturations} \simeq \underbrace{\sum_{n=0}^N e^{-\beta E_n}}_{\text{contribution of few levels}} . \quad (5.3)$$

Le premier terme de (5.3) est la contribution de tous les niveaux jusqu'au début de l'apparition de comportement de saturation dans le spectre de l'énergie. Le second est la contribution de tous les niveaux après saturation. L'évaluation de cette fonction se fait en employant la formule d'Euler MacLaurin [9, 23, 82, 83] dont la somme devient intégrale comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x) = \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0), \quad (5.4)$$

où B_{2p} sont les nombres de Bernoulli et $f^{(2p-1)}$ est la dérivée d'ordre $(2p - 1)$. Toutes les propriétés thermodynamiques, telles que l'énergie libre, l'entropie, l'énergie totale et la chaleur spécifique, sont obtenues via la fonction de partition numérique Z . Ces fonctions thermodynamiques sont calculées à partir des expressions suivantes :

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad (5.5)$$

$$\frac{S}{k_B} = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad \frac{C}{k_B} = \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \quad (5.6)$$

Dans ce qui suit, nous nous concentrons sur l'étude de l'influence de la présence d'un potentiel dépendant de l'énergie via le paramètre γ sur ces fonctions pour le cas des deux oscillateurs à une dimension.

5.1.1 Résultats et discussion

La Figure. 5.1 montre la variation de toutes les fonctions thermiques en fonction de l'inverse de la température β pour différentes valeurs de γ . Comme premier résultat, on peut voir que le comportement de ces fonctions n'est pas identique à celui obtenu pour les oscillateurs relativistes standard. La raison est liée à la nature des interactions de ces oscillateurs en présence de ce type de potentiel dépendant linéairement de l'énergie considérée ici.

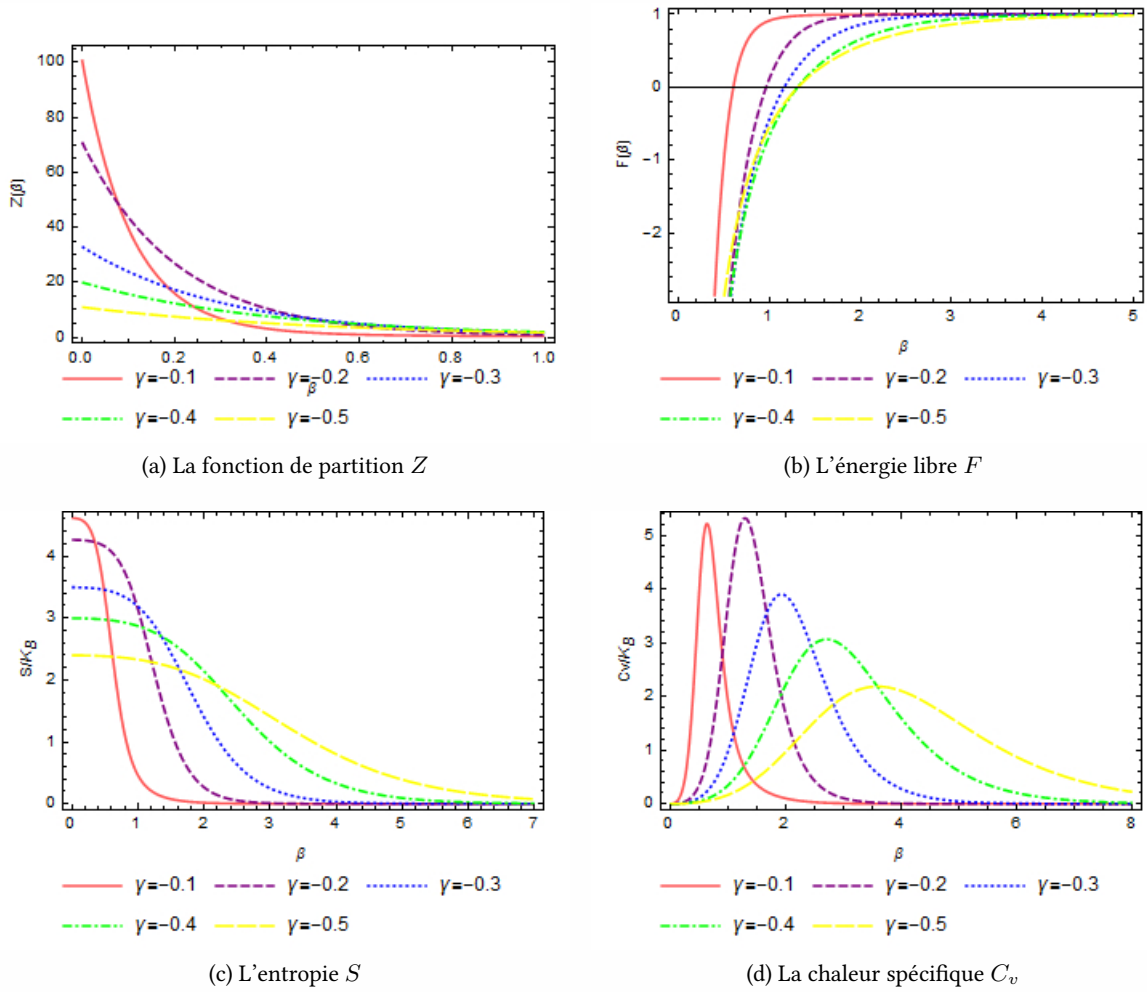


FIG. 5.1 : Les propriétés thermodynamiques des deux oscillateurs en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie

La variation de la fonction de partition Z en fonction du β (Figure. 5.1a) pour différentes valeurs de γ montre que cette dernière augmente avec la diminution de β . L'effet du paramètre γ est visible pour le cas des températures élevées. Dans la Figure. 5.1b, on donne la variation de l'énergie libre F en fonction de β pour différentes valeurs du γ . On observe bien que l'énergie libre F a une limite supérieure pour les basses températures.

Pour le cas de la fonction entropie S , (Figure. 5.1d) nous observons que cette fonction diminue en fonction du β et atteint une limite supérieure pour les températures hautes. Aussi, l'effet du paramètre γ sur l'entropie S est plus apparent pour cet intervalle des températures. A des basses températures, nous obtenons la limite thermodynamique classique $S \rightarrow 0$.

Enfin, dans la Figure. 5.1d nous présentons l'allure la variation de la chaleur spécifique C_v en fonction du β pour différentes valeurs de γ . Selon cette figure, nous observons que, pour chaque valeur spécifique de γ , chaque courbe a un pic symétrisé autour d'une température appropriée β_0 . L'intensité de ces pics augmente avec γ . Pour les valeurs élevées de β , la troisième loi de la thermodynamique, $C_v \rightarrow 0$, est bien remplie.

5.2 Les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D

5.2.1 La fonction de partition généralisée

La superstatistique est une superposition de statistiques différentes (voir appendice B). Elle décrit les systèmes hors équilibre avec un état stationnaire et des fluctuations de paramètres intensifs β .

Si E est l'énergie d'un micro-état, alors le facteur de Boltzmann généralisé du système en question est donné par :

$$B(E_n) = \int_0^\infty f(\beta) e^{-\beta E_n} d\beta. \quad (5.7)$$

La distribution de probabilité stationnaire habituelle

$$p(E) = \frac{e^{-\beta E}}{Z}, \quad (5.8)$$

est remplacée par

$$p(E) = \frac{B(E)}{Z}, \quad (5.9)$$

dont

$$\mathcal{Z}(\beta) = \sum_n B(E_n). \quad (5.10)$$

avec $B(E)$ est le facteur de Boltzmann généralisée.

La fonction $\mathcal{Z}(\beta)$ est la fonction de partition généralisée dans le concept de la superstatistique. Dans ce qui suit, nous avons utilisé la distribution Gamma définie par :

$$f(\beta) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} e^{-\frac{\beta}{b}}, \quad (5.11)$$

ou $b > 0$ et $c > 0$ sont des paramètres aléatoires. Ce choix est justifié par les nombreuses applications utilisant cette distribution [25, 67, 72]

L'équation (5.10) est calculée en adoptant l'approximation asymptotique à faible énergie [79]. Cette approximation représente une correction par rapport à la mécanique statistique ordinaire de notre système pour de petites valeurs de l'énergie E dont le paramètre intensif β subit une fluctuation. Ce comportement asymptotique est universel : cela veut dire que le facteur $B(E)$ est exprimée uniquement en fonction des deux paramètres universels (q, β) comme suit [67–70, 72, 73] :

$$B(E_n) \approx e^{-\beta E_n} \left(1 + \frac{q-1}{2} \langle \beta \rangle^2 E_n^2 + -\frac{(q-1)^2}{3} \langle \beta \rangle^3 E_n^3 + \dots \right). \quad (5.12)$$

Le paramètre q est donné par la relation suivante

$$q = \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\langle \beta \rangle^2}. \quad (5.13)$$

Il mesure le rapport de l'écart type et de la moyenne : S'il n'y a pas de fluctuations sur le paramètre β , alors $q = 1$.

L'injection de (5.12) dans (5.10) conduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \sum_n B(E_n) \\ &= \sum e^{-\beta E_n} \left(1 + \frac{q-1}{2} \beta^2 E_n^2 - \frac{(q-1)^3}{3} \beta^3 E_n^3 \right) \\ &= \left(1 + \frac{q-1}{2} \beta^2 \frac{d^2}{d\langle \beta \rangle^2} - \frac{(q-1)^3}{3} \beta^3 \frac{d^3}{d\langle \beta \rangle^3} \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Enfin

$$\mathcal{Z} = \left(1 + \frac{q-1}{2} \beta^2 \frac{d^2}{d\langle\beta\rangle^2} - \frac{(q-1)^3}{3} \beta^3 \frac{d^3}{d\langle\beta\rangle^3} \right) Z, \quad (5.15)$$

dont la fonction Z est donnée par l'équation (5.3). Ainsi, à partir de l'équation (5.15) toutes les propriétés superstatistiques sont calculées en utilisant bien sur les relations (5.5) et (5.6) déterminant ses propriétés.

A ce stade, une remarque sur la validité de l'applicabilité des équations (5.5) et (5.6) dans le concept de la superstatistique semble important a évoqué ici (voir la référence [25]). L'extension des formules (5.5) et (5.6) connues en mécanique statistique normale [104] pour cas de la superstatistique est limité par les conditions suivantes;

- La superstatistique se caractérise par l'utilisation de la superposition de plusieurs différents modèles statistiques pour atteindre la non-linéarité souhaitée. Plus précisément, la superstatistique suppose que l'ensemble correct n'est pas canonique, mais une superposition d'ensembles canoniques $e^{-\beta E}$ pour différentes températures β pondérées par la distribution $f(\beta)$.
- Le facteur de Boltzmann généralisée $B(E)$ repose sur les trois points cruciaux :
 - un système est partitionné en cellule et chaque cellule est en équilibre thermodynamique caractérisé par le paramètre β
 - le facteur statistique est Gibbsien [104], c-ad, un modèle permettant d'introduire de l'interaction entre les différentes cellules
 - la séparation entre deux cellules est largement suffisant, c'est-à-dire le temps d'approcher à chaque état d'équilibre local est plus rapide que celle pour chaque variant $f(\beta)$. Ce dernier critère signifie que le cadre théorique de la superstatistique considère l'existence d'un équilibre local temporelle dans chacune des cellules qui se subdivisent le système thermodynamique hors équilibre [25, 67–73].

Ainsi, ce formalisme ne peut être appliqué que si nous avons une séparation d'échelle de temps suffisant dans le système complexe, de sorte que ce système ait suffisamment du temps pour trouver son équilibre local dans chaque cellule où les lois de la mécanique statistique standard sont valides.

En conclusion, il est possible de faire de la mécanique statistique ordinaire pour ce type de systèmes hors équilibre avec toutes les formules connues telles que décrites par les équations (5.5) et (5.6). Notez ici que quelques développements théoriques récents, dans le contexte de la théorie de la superstatistique, ont utilisé ces formules connues de la mécanique statistique standard dans leurs investigations de certains problèmes en physique [38,105–111]. Les résultats trouvés ne peuvent être acceptés que dans le cadre des restrictions imposées par le formalisme de la superstatistique.

Passons, maintenant à la discussion des résultats trouvés sur l'influence des deux paramètres (q, γ) sur les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à une dimension.

5.2.2 Résultats et discussion

Dans ce qui suit, nous nous concentrons uniquement sur la fonction principale, telle que l'entropie et la chaleur spécifique afin de mettre en existence le phénomène de saturation observé dans ce type de potentiel. Ensuite, nous discutons la nature de cette saturation et son influence sur les propriétés superstatistiques de l'oscillateur de Klein-Gordon à 1D.

Nos principaux résultats trouvés sont représentés sur les figures 5.2, 5.3, 5.4 et 5.5. Sur ces figures, nous avons tracé la variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour différentes valeurs de (γ, q) . Par ailleurs, ces figures sont subdivisées en quatre canevas suivant le choix du paramètre γ . Nous avons choisi quatre valeurs du $\gamma < -1$. Tout ce choix correspondant au cas des particules possédant une énergie positive $E > 0$. Chaque canevas est présenté par une seule valeur de γ . Il contient les courbes de l'entropie et de la chaleur spécifique pour différentes valeurs du paramètre q . Nous soulignons que le comportement de ces fonctions n'est pas identique d'un canevas à l'autre.

D'après ces figures, trois remarques sur l'influence des deux paramètres γ et q sur les propriétés thermiques des oscillateurs peuvent être faites :

- D'un canevas à l'autre, on peut voir que les nombres de formes gaussiennes dans les courbes de la chaleur spécifique sont différents. Pour une valeur précise du paramètre γ , on observe que (i) ces courbes ont un pic symétrisé autour d'une température β appropriée, (ii) l'intensité de ces pics augmente au fur et à mesure que q diminue et (iii) enfin, elles n'apparaissent lorsque $q \rightarrow 1$. De plus, le nombre de ces pics diminue lorsque

$|\gamma|$ augmente et vice-versa. Ce nombre de pics est maximal dans le cas $\gamma = -1$.

- Ces pics correspondent aux phénomènes de saturation qui apparaissent dans le cas des problèmes d'un potentiel dépendant de l'énergie. Dans ce contexte, nous notons que l'observation des pics dans les courbes de la chaleur spécifique indique qu'il existe un petit nombre de niveaux d'énergie discrètes dominant le comportement de notre système en question. Ce comportement est dû essentiellement à la dépendance du potentiel de notre oscillateur avec l'énergie. Cette situation est très similaire à l'anomalie de Schottky. L'anomalie de Schottky est un effet observé en physique du solide où la capacité thermique spécifique d'un solide à basse température a un pic [112]. On l'appelle anomalie car la capacité calorifique augmente généralement avec la température ou reste constante. Cela se produit dans les systèmes avec un nombre limité de niveaux d'énergie de sorte que $E(T)$ augmente pour chaque niveau d'énergie. À une température nulle, seul le niveau d'énergie le plus bas est occupé. Ainsi, l'entropie est nulle et il y a très peu de probabilité d'une transition vers un niveau d'énergie plus élevé. Au fur et à mesure que la température augmente, il y a une augmentation de l'entropie et donc la probabilité d'une transition entre niveaux augmente. Lorsque l'énergie thermique kT s'approche de la différence entre les niveaux d'énergie, un large pic dans la courbe de la chaleur spécifique apparaît.
- Contrairement à la limite non relativiste, la limite de la chaleur spécifique est égale à zéro dans les très hautes températures, $\beta \rightarrow 0$. A basse température $\beta \rightarrow \infty$, pour différentes valeurs du γ , cette limite dépend de la valeur du paramètre q . Lorsque q est autour de 1, la troisième loi thermodynamique est bien mise en évidence.
- Par contre, dans le domaine des températures élevées $\beta \rightarrow 0$ on a $C \rightarrow 0$. Cette situation peut être due à l'existence de phénomène de saturation du spectre d'énergie pour ce type de potentiel : toutes les courbes présentent une transition de phase entre la phase de croissance et la phase dite de saturation contrairement au cas de l'anomalie de Schottky qui n'est pas une transition de phase.

Récemment, l'étude des propriétés superstatistique de l'oscillateur de Dirac à 1D a été bien exposé dans [25]. Bien que les arguments de la validité de l'extension de la loi thermodynamique

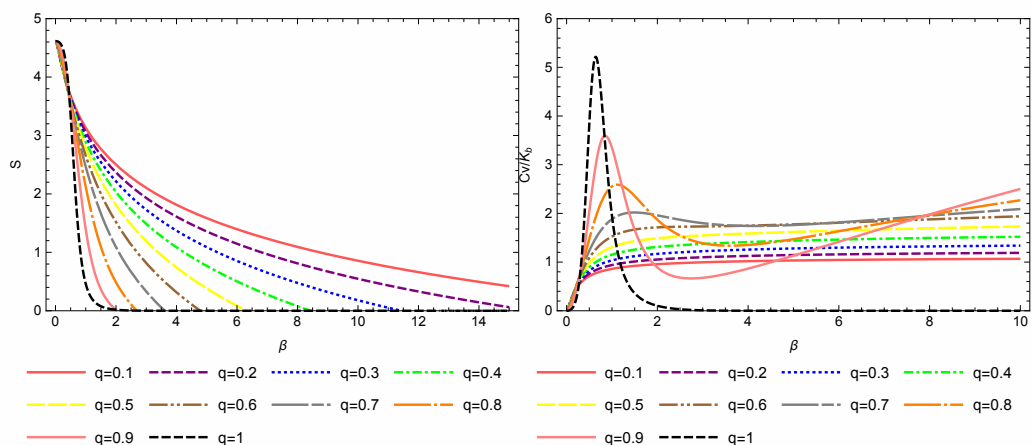


FIG. 5.2 : Variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour $\gamma = -0.1$

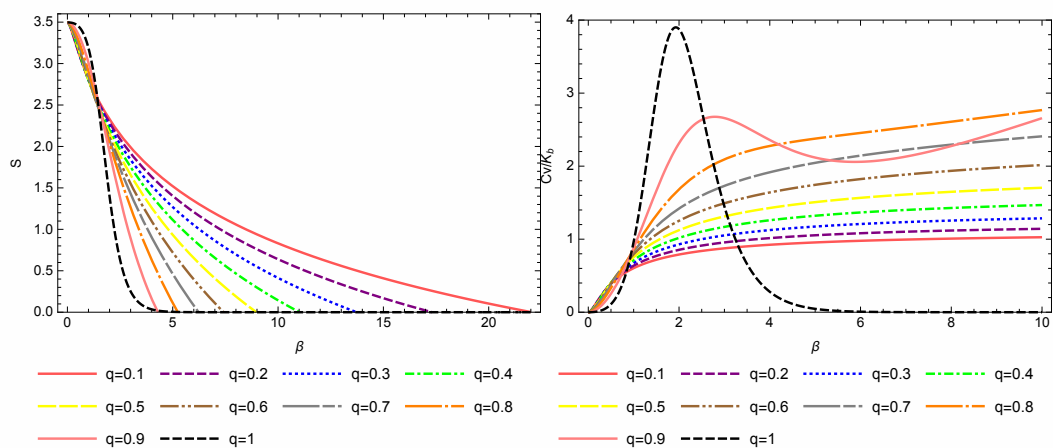


FIG. 5.3 : Variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour $\gamma = -0.3$

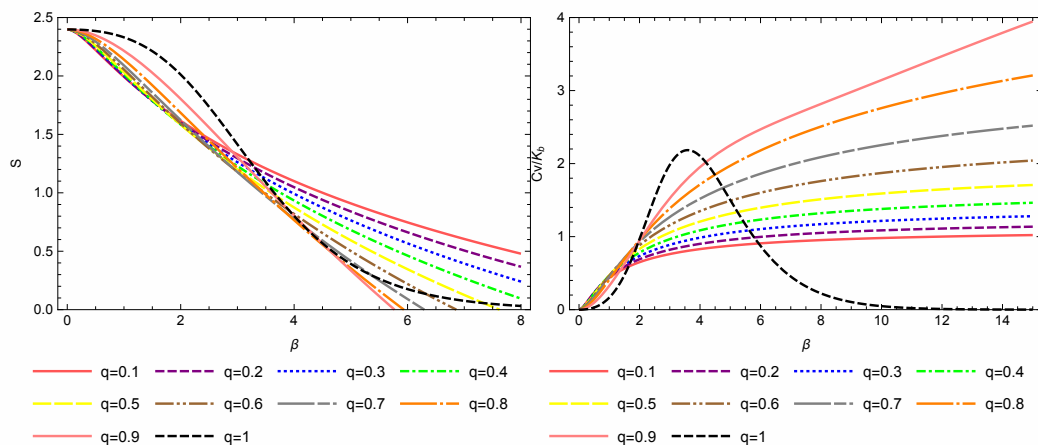


FIG. 5.4 : Variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour $\gamma = -0.5$

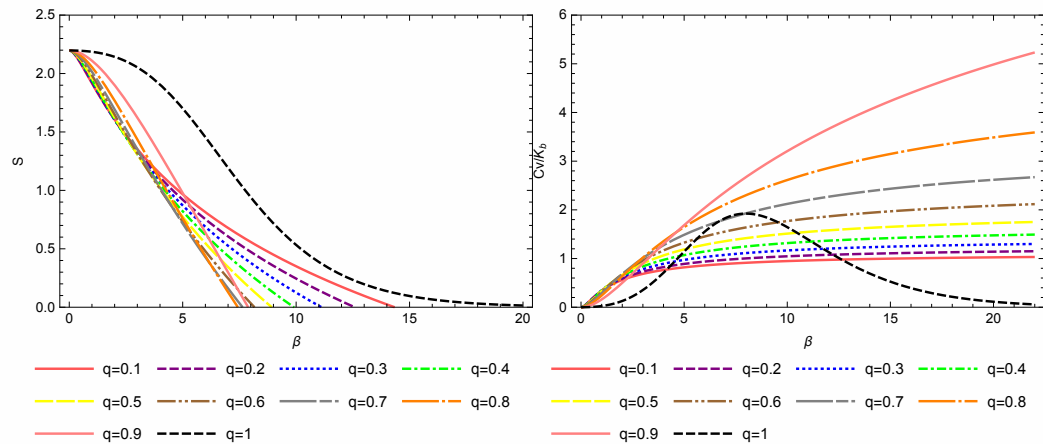


FIG. 5.5 : Variation de l'entropie et de la chaleur spécifique en fonction du β pour $\gamma = -0.7$

en superstatistique pour les deux équations relativistes sont les mêmes, la différence est très nette.

La raison en est double :

- Cette étude en question est consacrée au cas de l'oscillateur de Dirac unidimensionnel décrivant des particules fermioniques.
- Bien que les deux spectres d'énergies des deux oscillateurs aient la même forme, la situation ne l'est pas : la densité de probabilité de l'oscillateur de Dirac ainsi que les restrictions sur le paramètre γ ne sont pas les mêmes pour les deux oscillateurs. Ce point sera traité comme un perspective de notre travail.

Conclusion et perspectives

Durant cette thèse, nous nous sommes consacré aux potentiels dépendant de l'énergie et leurs implications sur les oscillateurs relativistes. Ce type de potentiels conduit à la modification du produit scalaire, nécessaire à la conservation de la norme . Dans ce contexte, nous avons étudié les propriétés physiques des deux oscillateurs relativistes de Klein-Gordon et de Dirac à une dimension en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie. Les résultats obtenus pour ces deux oscillateurs peuvent être récapitulés en trois points comme suit :

1. Le premier point consiste à étudier l'influence de ce type de potentiel sur les valeurs propres des deux oscillateurs. Les résultats trouvés montrent que cette dépendance du potentiel avec l'énergie est l'origine principale du phénomène de saturation observer dans la forme du spectre d'énergie. Cette saturation diffère bien d'un oscillateur à l'autre. Notons ici que le comportement des paramètres de Fisher et Shannon étaient les mêmes pour les deux types des particules et leurs antiparticules.
2. Le deuxième point a comme but l'étude de l'influence de ce type de potentiel mais cette fois sur les fonctions d'ondes propres des deux oscillateurs. Bien que la fonction d'onde en mécanique quantique ne soit pas un observable mais elle est la base de calcul de plusieurs quantités en physique quantique telle que la densité de probabilité ρ . Ainsi, nous avons étudié en premier lieu l'influence de ces potentiels sur la densité de probabilité des deux oscillateurs. Ensuite, nous avons étendu cette étude sur des quantités qui ont une dépendance forte avec ρ . Ainsi, comme choix, nous nous sommes concentré sur les deux

paramètres de l'information quantique suivante : l'information de Fisher et l'entropie de Shannon. Selon les résultats obtenus, on a vu que l'impact du paramètre γ est bien visible sur ces deux quantités. Toutes les quantités entrant dans les formules d'incertitude telles que $F_x, F_{p_x}, \Delta x, \Delta p_x, S_x$ et S_{p_x} ont été déterminés numériquement. En outre, l'influence du paramètre γ sur les relations d'incertitude entre l'entropie de Shannon et l'incertitude des informations de Fisher sont bien vérifiées ainsi que la validité de l'inégalité de BBM, $S_x + S_p \geq 1 + \ln\pi$. On peut donc voir que les relations incertaines données par la théorie de l'information quantique pourraient être étendues normalement au cas des potentiels dépendant de l'énergie.

3. Enfin, le troisième point se focalise sur le calcul des propriétés superstatistique pour ces deux oscillateurs relativistes en présence d'un potentiel dépendant de l'énergie. Par le biais du spectre d'énergie des deux oscillateurs, toutes les propriétés superstatistiques telles que l'énergie libre, l'entropie, l'énergie totale et la chaleur spécifique ont été obtenues et ça dans le cadre de l'applicabilité de ce formalisme qui impose que ce dernier ne peut être appliqué que si le système dispose suffisamment de temps lors de transition entre les cellules que contient le système hors équilibre. Dans notre cas, nous avons utilisé une fonction de distribution $f(\beta)$ suivant une distribution Gamma et discuté tous les résultats en fonction des deux paramètres (q, γ) . Comme résultat, on peut constater que les phénomènes de saturation dans les courbes de la chaleur spécifique n'apparaissent que dans les plus faibles valeurs du paramètre γ .

Enfin, notre étude sur les oscillateurs relativistes dans des potentiels dépendant de l'énergie peut avoir un impact direct dans la physique de la matière condensée. Quimby et Strange [113, 114] montrent que l'oscillateur de Dirac peut décrire un système physique naturel. Plus précisément, cet oscillateur bidimensionnel peut être utilisé pour décrire la dynamique des porteurs de charges dans le composé graphène, et donc déduire ses propriétés électroniques. De plus, selon la Réf. [115], via la notion de masse effective, l'auteur a utilisé le modèle de l'oscillateur de Dirac pour calculer les propriétés thermiques du graphène dans un champ magnétique externe.

Comme perspective, nous nous planifions de faire ce qui suit

- L'étude des propriétés super-statistiques de l'oscillateur de Dirac à une dimension en pré-

sence d'un potentiel dépendant de l'énergie.

- Étendre l'étude de l'influence du paramètre γ , sur les paramètres de Fisher et Shannon pour le cas du système graphène via le modèle de l'oscillateur de Dirac.

- [1] W. Pauli, *Z. Phys* **1927**, *43*, 601–623.
- [2] V. A. Rizov, H. Sazdjian, T. Todorov, *Ann. Phys* **1985**, *165*, 59–97.
- [3] H. Snyder, J. Weinberg, *Phys. Rev* **1940**, *54*, 307–314.
- [4] R. J. Lombard, J. Mares, W. C. Volpe, *J. Phys. G* **2007**, *34*, 1–11.
- [5] . Languueur, M. Merad, B. Hamil, *Commun. Theor. Phys*, *71*, 1069–1074.
- [6] H. Sazdjian, *Phys. Rev. D* **1986**, *33*, 3401.
- [7] H. Sazdjian, *J. Math. Phys* **1988**, *29*, 1620–1633.
- [8] J. Mourad, H. Sazdjian, *J. Math. Phys* **1998**, *35*, 6379–6406.
- [9] A. Boumali, S. Dilmi, S. Zare, H. Hassanabadi, *K. Int. J. Mod. Sci* **2017**, *3*, 191e201.
- [10] H. Benzair, M. Merad, T. Boudjedaa, *Int. J. Mod. Phys* **2018**, *33*, 1850186.
- [11] H. Benzair, T. Boudjeda, M. Merad, *J. Math. Phys* **2012**, *53*, 123516.
- [12] J. Formanek, R. J. Lombard, J. Mares, *Czechoslov. J. Phys* **2004**, *54*, 289–315.
- [13] A. Schulze-Halberg, P. Roy, *J. Math. Phys* **2017**, *58*, 113507.
- [14] D. I. K. Mori, E. Carriere, *Nuovo Cimento A* **1967**, *51*, 1119.

- [15] M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A : Math. Gen* **1989**, 22, L817–L819.
- [16] M. Moreno, A. Zentella, *J. Phys. A* **1989**, 23, L821–LS25.
- [17] R. P. Martinez-yRomero, A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys* **1992**, 33, 1831.
- [18] R. P. MartinezyRomero, H. N. Nunez-Yepe, A. L. Salas-Brito, *Eur. J. Phys* **1995**, 16, 135–141.
- [19] A. Bermudez, M. A. M. Delgado, E. Solano, *Phys. Rev. A* **2007**, 76, 041801(R).
- [20] A. Bermudez, M. A. M. Delgado, A. Luis, *Phys. Rev. A* **2008**, 77, 063815.
- [21] A. Boumali, Ph.D. thesis, Universite d’Annaba, **2006**.
- [22] A. Boumali, A. Hafdallah, A. Toumi, *Phys. Scr* **2011**, 84, 1–2.
- [23] A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **2013**, 128, 124.
- [24] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys* **2014**, 92, 1460–1463.
- [25] A. Boumali, F. Serdouk, S. Dilmi, *Physica. A* **2020**, 553, 124207.
- [26] A. Boumali, *Can. J. Phys* **2007**, 07.
- [27] A. Boumali, *J. Phys. A : Math. Theor* **2009**, 235301.
- [28] A. Boumali, *Phys. Scr* **2007**, 669.
- [29] A. Boumali, *Turk. J. Phys* **2008**, 307.
- [30] H. Hassanabadi, S. S. Hosseini, A. Boumali, S. Zarrinkamar, *J. Math. Phys* **2014**, 55, 033502.
- [31] N. Messai, A. Boumali, *Eur. Phys. J. Plus* **2015**, 130, 1–8.
- [32] B. Mirza, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C* **2004**, 32, 583.
- [33] B. Mirza, R. Narimani, M. Zarei, *Eur. Phys. J. C* **2006**, 48, 641.
- [34] S. K. Moayedi, F. Darabi, *Phys. Lett. A* **2004**, 322, 173–178.
- [35] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *J. Phys. A : Math.Gen* **1998**, 31, 6717–6724.

- [36] M. H. Pacheco, R. R. Landim, C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. A* **2003**, 311, 936–6.
- [37] C. Quesne, M. Moshinsky, *J. Phys. A : Math. Gen* **1990**, 23, 2263–2272.
- [38] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, A. Boumali, *Int. J. Geom. Metho. Mod. Phys* **2017**, 14, 1750112.
- [39] Y. Chargui, A. Dhahbi, *Ann. Phys* **2020**, 423, 168328.
- [40] Y. Chargui, A. Dhahbi, *Ann. Phys* **2021**, 428, 168430.
- [41] Y. Chatgui, *Results. Phys* **2019**, 15, 102538.
- [42] Y. Chargui, *Phys. Lett. A* **2020**, 384, 126484.
- [43] Y. Chargui, A. Dhahbi, B. Cherif, *Eur. Phys. J. Plus* **2018**, 133, 161.
- [44] A. Merad, M. Aouachria, M. Merad, T. Birkandan, *Int. J. Mod. Phys. A* **2019**, 34, 1950218.
- [45] A. Boumali, Z. Selama, *Phys. Part. Nuclei Lett* **2018**, 15, 473–477.
- [46] Z. Selama, A. Boumali, *Rev. Mex. Fis* **2021**, 67, 226–237.
- [47] A. Schulze-Halberg, P. Roy, *Ann. Phys* **2021**, 429, 168534.
- [48] M. Falek, M. Merad, M. Moumni, *J. Math. Phys* **2018**, 60, 013505.
- [49] Z. Hemame, M. Falek, M. Moumni, *J. Math. Phys* **2020**, 61, 102301.
- [50] L. Sek, M. Falek, M. Moumni, *Int. J. Mod. Phys. A*, 36, 2150113.
- [51] J. A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, T. H. Seligman, *Phys. Rev. Lett* **2013**, 111, 170405.
- [52] B. R. Frieden, *Am. J. Phys* **1989**, 57, 1004.
- [53] B. R. Frieden, *Opt. Lett* **1989**, 14, 199.
- [54] B. R. Frieden, *Phys. Rev. A* **1990**, 41, 4265.
- [55] B. R. Frieden, *Physica. A* **1992**, 180, 359.

- [56] B. R. Frieden, B. H. Soffer, *Phys. Rev. E* **1995**, *52*, 2274.
- [57] R. Frieden, R. A. Gatenby, *Exploratory data analysis using fisher Information*, Springer-Verlag, **2007**, chapter 7, p. 219.
- [58] V. Aguiar, I. Guedes, *Physica. A* **2014**, *401*, 159.
- [59] D. X. Macedo, I. Guedes, *Physica. A* **2015**, *434*, 211.
- [60] V. Aguiar, I. Guedes, *Phys. Scr* **2015**, *90*, 045207.
- [61] A. Lavagno, G. Kaniadakis, M. R. Monteiro, P. Quarati, C. Tsallis, *Astrophys. Lett. Commun* **1998**, *35*, 449.
- [62] C. Tsallis, *J. Stat. Phys* **1988**, *52*, 479.
- [63] C. Tsallis, R. S. Mendes, A. R. Plastino, *Physica. A* **1998**, *261*, 534.
- [64] C. Tsallis, A. M. C. Souza, *Phys. Rev. E* **2003**, *67*, 026106.
- [65] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, Springer, **2009**.
- [66] S. Abe, C. Beck, G. D. Cohen, *Phys. Rev. E* **2007**, *76*, 031102.
- [67] C. Beck, *Eur. phys. Lett* **2003**, *64*, 151.
- [68] C. Beck, *Physica. D* **2004**, *193*, 195.
- [69] C. Beck, E. G. D. Cohen, H. L. Swinney, *Phys. Rev. E* **2005**, *72*, 026304.
- [70] C. Beck, *Phys. Rev. Lett* **2007**, *98*, 064502.
- [71] C. Beck, *Eur. Phys. J. A* **2009**, *40*, 267–273.
- [72] C. Beck, *Braz. J. Phys* **2009**, *39*, 357–363.
- [73] C. Beck, *Phil. Trans. R. Soc. A* **2011**, *369*, 453–465.
- [74] C. B. E. Van der Straeten, *Phys. Rev. E* **2008**, *78*, 051101.
- [75] C. B. E. Van-der Straeten, *Physica. A* **2011**, *390*, 951.

- [76] C. B. K. Briggs, *Physica. A* **2007**, 378, 498.
- [77] C. B. L. L. Chen, *Physica. A* **2008**, 387, 3162.
- [78] C. B. L. Leon Chen, *Physica. A* **2008**, 387, 3162.
- [79] H. Touchette, C. Beck, *Phys. Rev. E* **2005**, 71, 016131.
- [80] A. J. Stam, *Inform. Control* **1959**, 2, 101.
- [81] I. B. Birula, J. Mycielski, *Commun. Math. Phys* **1975**, 44, 129.
- [82] G. Andrews, R. Askey, R. Roy, *Special functions*, Cambridge : Cambridge University Press, **1999**.
- [83] A. Boumali, *J. Math. Chem* **2018**, 56, 1656–1666.
- [84] E. Schrödinger, *Ann. Phys* **1926**, 384, 361.
- [85] S. Flugge, *American Journal of Physics* **1973**, 41, 140–140.
- [86] W. Greiner, *Relativistic quantum mechanics wave equations*, Springer-Verlag Berlin, **2000**.
- [87] F. Schwabl, *Advanced Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, **2008**.
- [88] H. Umezawa, *Quantum field theory*, **1965**.
- [89] R. J. Lombard, J. Mares, *Phys. Lett. A* **2009**, 373, 426–429.
- [90] H. Horiuchi, *Prog. Theor. Phys* **1960**, 64, 184.
- [91] J. R. Rook, *Nucl. Phys. A* **1981**, 370, 125.
- [92] T. de Forest, *Nucl. Phys* **1971**, 163, 237.
- [93] K. Shimizu, S. Yamazaki, *Phys. Lett. B* **1997**, 390, 1–6.
- [94] A. Benchikha, L. Chetouani, *Mod. Phys. Lett. A* **2013**, 28, 1350079.
- [95] A. Benchikha, L. Chetouani, *Centr. Eur. J. Phys* **2014**, 12, 392–405.

- [96] S. Flügge, *Practical quantum mechanics*, B. Springer (Ed.), **1974**.
- [97] M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York, **1965**.
- [98] R. Fisher, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **1925**, 22, 700.
- [99] X. D. Song, S. H. Dong, Y. Zhang, *Chinese. Phys. B* **2016**, 25, 050302.
- [100] L. Rudnicki, *J. Russ. Laser. Res* **2011**, 32, 393.
- [101] A. Saha, B. Talukdar, S. Chatterjee, *Eur. J. Phys* **2017**, 38, 125103.
- [102] S. Dong, G. H. Sun, S. H. Dong, J. P. Draayer, *Phys. Lett. A*, 378, 124.
- [103] A. R. Gonzalez, J. A. Vaccaro, S. M. Barnet, *Phys. Lett. A* **1995**, 205, 247.
- [104] H. S. W. Greiner, L. Neise, *Thermodynamique et mécanique statistique*, Springer, **1995**.
- [105] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, W. S. Chung, *Eur. Phys. J. Plus* **2018**, 133, 125.
- [106] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, W. S. Chung, *Mod. Phys. Lett. A* **2018**, 33, 1850060.
- [107] S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, W. S. Chung, *Eur. Phys. J. Plus* **2018**, 133, 157.
- [108] A. N. Ikot, U. S. Okorie, C. A. Onate, M. C. Onyeaju, H. Hassanabadi, *Can. J. Phys* **2019**, 97, 0535.
- [109] U. S. Okorie, A. N. Ikot, G. J. Rampho, R. Sever, *Commun.Theor. Phys* **2019**, 71, 1246–1252.
- [110] H. Sobhani, H. Hassanabadi, W. S. Chung, *Eur. Phys.J. C* **2018**, 78, 106.
- [111] D. Castaño-Yepes, D. A. Amor-Quiro, *Physica. A* **2020**, 548133, 123871.
- [112] C. Kittel, *Introduction to solid state physics*, J. Wiley (Ed.), JohnWiley, **1996**.
- [113] P. S. C. Quimbay, *arXiv :1312.5251* **2013**.
- [114] P. S. C. Quimbay, , *arXiv :1311.2021* **2013**.
- [115] P. S. . . A. Boumali, *Phys. Scr* **2015**, 90, 045702.

- [116] A. R. Plastino, A. Plastino, *Phys. Lett. A* **1993**, 174, 384.
- [117] M. T. Martin, F. Pennini, A. Plastino, *Phys. Lett. A* **1999**, 256, 173.
- [118] A. Boumali, M. Labidi, *Mod. Phys. Lett. A* **2018**, 33, 1850033.
- [119] M. Cover, J. A. Thomas, *Elements of Information Theory*, Wiley, **1991**.
- [120] O. Johnson, *Information theory and the central limit theorem*, Imperial College Press, **2004**.
- [121] C. E. Shannon, *C. E. Shannon, Bell System Technical Journal* 27, 379 (1948). **1948**, 27, 379.
- [122] J. S. Dehesa, R. G. F erez, P. S. Moreno, *J. Phys. A : Math. Theor* **2007**, 40.
- [123] G. Ya nez-Navarro, G. H. Sun, T. Dytrych, K. D. Launey, S. H. Dong, J. P. Draayer, *Ann. Phys* **2014**, 348, 153.
- [124] S. G. Hua, D. Popov, O. C. Nieto, D. S. Hai, *Chinese. Phys. B* **2015**, 24, 100303.
- [125] S. Abe, *Cent. Eur. J. Phys* **2009**, 7, 401–404.
- [126] S. Abe, S. Thurner, *Phys. Rev. E* **2005**, 72, 036102.
- [127] S. Abe, Y. Okamoto, *Nonextensive statistical mechanics and its applications*, Springer, Berlin, **2001**.
- [128] N. Mordant, A. M. Crawford, E. Bodenschatz, *Physica. D* **2004**, 193, 245.

L'information de Fisher et l'entropie de Shannon

A.1 L'information de Fisher

L'information Fisher [98] est une qualité d'une procédure de mesure efficace utilisée pour estimer les limites quantiques ultimes. C'est une mesure de la précision intrinsèque de théorie de l'estimation statistique. L'étude des propriétés et de différentes applications de l'information de Fisher pour divers problèmes en physique théorique est principalement due grâce aux travaux de Frieden et al [52–56]. Ces auteurs ont dévoilé le collecteur applications physiques de l'information de Fisher.

Considérons un système possédant deux paramètres physiques θ et $p(x, \theta)$ [116, 117] :

$$\int dx p(x, \theta) = 1. \quad (\text{A.1})$$

dont $p(x, \theta)$ décrit la densité de probabilité. Dans ce cas, la définition de l'information de Fisher prend la forme suivante

$$F(\theta) = \int \frac{dx}{p(x, \theta)} \left[\frac{dp(x, \theta)}{d\theta} \right]^2. \quad (\text{A.2})$$

Si le système obéit à l'invariance par translation suivante

$$p(x, \theta) \equiv p(x - \theta), \quad (\text{A.3})$$

alors on peut considérer que θ est une constante calculée à partir de l'intégration sur la variable aléatoire x . Comme conséquence, θ ne change pas la forme de la fonction $p(x, \theta)$ et cette invariance par translation ne changera pas l'information. Alors, l'équation (A.2) devient

$$F = \int \frac{dx}{p(x)} \left[\frac{dp(x)}{dx} \right]^2. \quad (\text{A.4})$$

La preuve de cette équation se fait comme suit : l'information de Fisher est un moyen de mesurer la quantité d'information qu'une variable aléatoire observable y porte sur un paramètre inconnu dont dépend la probabilité de y . Soit $p(y|\theta)$ la fonction de densité de probabilité pour avoir y conditionnée par la valeur fixe de θ . Cette fonction décrit la probabilité que nous observions un échantillon donné y , étant donné une valeur connue de θ . Ainsi, l'information de Fisher dont l'observation y d'un paramètre de valeur vraie est définie par [57, 116, 117]

$$F(\theta) = \int \frac{dy}{p(y|\theta)} \left[\frac{p(y|\theta)}{d\theta} \right]^2. \quad (\text{A.5})$$

Soit maintenant les substitutions suivantes

$$y = s, \quad (\text{A.6})$$

$$\theta = \langle s \rangle, \quad (\text{A.7})$$

ou s est un état observable du système. Dans ce cas, l'expression (A.5) devient

$$F(\langle s \rangle) = \int \frac{ds}{p(s|\langle s \rangle)} \left[\frac{p(s|\langle s \rangle)}{d\langle s \rangle} \right]^2. \quad (\text{A.8})$$

Maintenant, si le système obéit à l'invariance par translation suivante

$$p(s|\langle s \rangle) \equiv p(s - \langle s \rangle), \quad (\text{A.9})$$

ce qui signifie que les fluctuations sont indépendantes de la valeur de $\langle s \rangle$, alors nous pouvons considérer que $\langle s \rangle$ est une constante calculée à partir de l'intégration de s sur tout le temps, et

ne change pas la forme de $p(s|\langle s \rangle)$: on remarque aussi que cette invariance par translation ne changera pas l'information.

Définissons maintenant la nouvelle variable \hat{s} tels que

$$\hat{s} = s - \langle s \rangle, \quad (\text{A.10})$$

dont $d\hat{s} = ds - d\langle s \rangle = ds$. Ainsi, l'équation. (A.8) se transforme en

$$F = \int \frac{d\hat{s}}{p(\hat{s})} \left[\frac{dp(\hat{s})}{d\hat{s}} \right]^2. \quad (\text{A.11})$$

Ici $p(\hat{s})$ représente la densité de probabilité pour observer une valeur particulière de la variable \hat{s} . La dernière équation est importante car la dérivée de par rapport à \hat{s} peut être facilement évaluée à partir de données (par différences finies) ou de modèles (par différenciation analytique) [103].

Comme la soustraction définie par (A.10) n'affecte pas le calcul, nous pouvons utiliser la variable s à la place \hat{s} et l'équation (A.11) devient

$$F = \int \frac{ds}{p(s)} \left[\frac{dp(s)}{ds} \right]^2, \quad (\text{A.12})$$

avec $p(s)$ est la densité de probabilité pour s .

Dans ce qui suit, nous nous limiterons à la forme (A.4) de la définition de l'information de Fisher. Par conséquent, la définition de l'information de Fisher unidimensionnelle dans les cas de position et de quantité de mouvement est donnée par les deux équations suivantes

$$F_x = \int \frac{dx}{\rho(x)} \left[\frac{d\rho(x)}{dx} \right]^2, \quad (\text{A.13})$$

$$F_p = \int \frac{dp}{\rho(p)} \left[\frac{d\rho(p)}{dp} \right]^2, \quad (\text{A.14})$$

avec $p \equiv \rho(x)$ ($p \equiv \rho(p)$) dans l'espace de position (dans l'espace de quantité de mouvement).

Éqs. (A.13) et (A.14) montrent que l'information de Fisher a un caractère local dû à l'opérateur gradient. Plus cette quantité est élevée, plus la densité est concentrée et plus l'incertitude de position de la particule est faible. Ainsi, il est capable de détecter les changements locaux de la densité afin de mieux décrire le système de manière théorique de l'information [52–56].

La quantité d'information de Fisher a été utilisée pour une grande variété de concepts et de

phénomènes de mécanique quantique (pour plus d'informations voir La référence suivante [118]).

L'information de Fisher des systèmes à une seule particule n'a été déterminée que récemment sous forme fermée en termes de nombres quantiques caractérisant l'état physique impliqué pour les espaces de position et de quantité de mouvement. Ces inégalités pertinentes qui font intervenir l'information de Fisher dans un espace donné (Cramer-Rao) ou l'espace conjugué (Stam) . Ce sont les relations d'incertitude de Stam [80]

$$F_x \leq 4 \langle p^2 \rangle, F_p \leq 4 \langle x^2 \rangle, \quad (\text{A.15})$$

et les inégalités de Cramer-Rao [119, 120]

$$F_x \geq \frac{1}{\langle x^2 \rangle}, F_p \geq \frac{1}{\langle p^2 \rangle}. \quad (\text{A.16})$$

Suite aux équations. (A.13) et (A.14), nous avons que

$$F_x F_p \geq 4. \quad (\text{A.17})$$

Enfin, l'information de Fisher est le principal outil théorique du principe d'information physique extrême, principe variationnel général qui permet de dériver de nombreuses équations fondamentales de la physique : équations de Maxwell, équations de champ d'Einstein, équations de Dirac et Klein-Gordon, lois diverses. de la physique statistique et de certaines lois régissant les écoulements de fluides turbulents presque incompressibles [52–57].

A.2 L'entropie de Shannon

Passons maintenant au cas de l'entropie de Shannon [121] : les mesures entropiques fournissent des outils analytiques pour nous aider à comprendre les corrélations dans les systèmes quantiques. Shannon a introduit l'entropie pour mesurer l'incertitude. Aujourd'hui, cette quantité est devenue un concept universel en physique statistique. L'entropie de Shannon trouve des applications dans plusieurs branches de la physique en raison de ses applications possibles dans un large éventail de domaines [122].

Récemment, il y a eu un intérêt croissant pour les mesures théoriques de l'information pour certaines système quantiques. Comme alternative à la relation d'incertitude d'Heisenberg, l'in-

certitude entropique a été particulièrement étudiée. Parmi les mesures de l'entropie de l'information, l'entropie de Shannon joue un rôle très important dans la mesure de l'incertitude, qui a été testée pour diverses formes de potentiels. La relation d'incertitude entropique, qui est liée aux espaces de position et de quantité de mouvement, a été donnée par

$$S_x + S_p > D (1 + \ln \pi) . \quad (\text{A.18})$$

où D représente la dimension spatiale. Cette relation est la relation bien connue de Beckner, Bialynicki-Birula et Mycielski (BBM) [81].

Dans un système unidimensionnel, S_x et S_p sont définis, respectivement, par

$$S_x = - \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \ln |\psi(x)|^2 dx, \quad (\text{A.19})$$

$$S_p = - \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(p)|^2 \ln |\phi(p)|^2 dp, \quad (\text{A.20})$$

où $\psi(x)$ est une fonction propre normalisée en coordonnées spatiales et $\phi(p)$ est sa transformée de Fourier normalisée. Notons ici que, à partir de l'équation (A.19), l'information de Shannon dépend de la densité de probabilité correspondant aux changements de certaines observables. Les quantités définies par Shannon ont un caractère global dans le sens où elles sont peu sensibles aux changements de distribution sur une région de petite taille, et peuvent être utilisées comme mesures de la délocalisation [59, 99, 123, 124].

B.1 Concept théorique

La superstatistique constitue un formalisme de la physique statistique, consistant à décrire les propriétés statistiques d'un système par une superposition de plusieurs statistiques, d'où le nom superstatistique .

En général, le formalisme s'applique à un système hors équilibre thermodynamique, où la température exhibe des fluctuations. On peut ainsi assigner une fonction de distribution à la température, ou de manière générale à un paramètre global β dépendant du système, dans notre cas $\beta = \frac{1}{k_B T}$ représente l'inverse de la température. A petite échelle, le système montre un équilibre local décrit par la statistique de Boltzmann habituel $e^{-\beta E}$. A grande échelle, ce système est décrit par une superposition de la statistique de Boltzmann et d'une fonction de distribution $f(\beta)$ caractérisant les fluctuations de la température. Ainsi, elle est définie par la superposition de différentes statistiques (voir Figure. **B.1**) .

Les superstatistiques décrivent des systèmes hors équilibre avec un état stationnaire et fluctuations des paramètres intensifs. Si E est l'énergie d'un micro-état, on peut écrire que

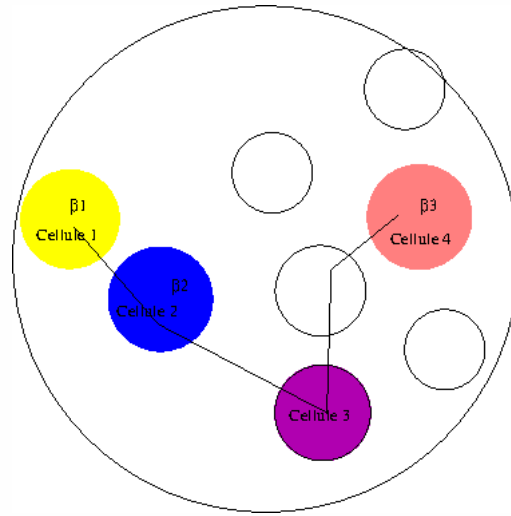


FIG. B.1 : Les cellules dans le concept de la Superstatistique

$$B(E) = \int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta, \quad (\text{B.1})$$

où $B(E)$ est le facteur de Boltzmann générale. Il peut différer de manière significative du facteur de Boltzmann ordinaire, qui est récupéré pour $f(\beta) = \delta(\beta - \beta_n)$. A partir de (2.14), on peut le considérer aussi comme une transformation de Laplace de la probabilité de la densité $f(\beta)$. Bien qu'il existe une infinité de possibilités pour le choix de la fonction $f(\beta)$, certains critères doivent être remplis afin de réduire considérablement ce nombre. Ces critères sont

- La fonction de probabilité $f(\beta)$ doit être une densité de probabilité normalisée.
- L'intégrale $\int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta$ doit exister pour assurer la convergence.
- Dans le cas limite, c-à-d, l'absence des fluctuations des paramètres intensives, les nouvelles statistiques tendent vers des statistiques ordinaires de Boltzmann-Gibbs (BG).

Sous ces conditions, la distribution de probabilité stationnaire habituelle,

$$p(E) = \frac{e^{-\beta E}}{Z}, \quad (\text{B.2})$$

devient

$$p(E) = \frac{B(E)}{Z}, \quad (\text{B.3})$$

avec

$$Z(\beta) = \sum_n B(E_n), \quad (\text{B.4})$$

où $Z(\beta)$ est la constante de normalisation de $e^{-\beta E}$ pour une donnée du paramètre β ou simplement fonction de partition généralisée.

B.2 Distributions possibles de $f(\beta)$

Nous allons exposer maintenant quelques exemples de superstatistiques possibles, en considérant différents exemples de distributions $f(\beta)$. Notez que β prenait des valeurs positives, donc les distributions gaussiennes de β ne conviennent pas [66–68, 79].

- **Distribution Gamma (où Chi-2 χ^2)**

La distribution χ^2 est l'un des choix le plus utiliser dans la littérature. La densité de probabilité de $f(\beta)$ est donné par

$$f(\beta) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} e^{-\frac{\beta}{b}}, \quad (\text{B.5})$$

avec $c > 0$ et $b > 0$ sont des paramètres. La valeur moyenne de β est

$$\beta_0 = \langle \beta \rangle = \int_0^\infty \beta f(\beta) d\beta = bc. \quad (\text{B.6})$$

Dans notre cas, nous utilisons l'approximation asymptotique à basses énergies [68, 69, 79]. Cette approximation représente la correction du premier ordre de la mécanique statistique ordinaire de notre système avec des fluctuations de température. Plus précisément, le comportement asymptotique à basse énergie est universel : cela signifie que le facteur de Boltzmann généralisé pour différents choix de superstatistiques est exprimé en termes des deux paramètre universels q et β_0 comme suit :

$$B(E_n) \approx e^{-\beta_0 E_n} \left(1 + \frac{a}{2} \langle \beta \rangle^2 E_n^2 - \frac{a^2}{3} \langle \beta \rangle^3 E_n^3 + \dots \right). \quad (\text{B.7})$$

Maintenant, en raison de cette universalité, Beck [67–71] a introduit un paramètre universel q pour toute superstatistique, pas seulement pour les statistiques de Tsallis [63–65] : ce paramètre

est donné par la relation suivante

$$q = \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\langle \beta \rangle^2}. \quad (\text{B.8})$$

Ce paramètre q n'est que le coefficient de variation de la distribution $f(\beta)$, défini par le rapport de l'écart-type et de la moyenne. L'absence de la fluctuation de β conduit à la limite habituel $q = 1$.

Selon cette approximation, le facteur de Boltzmann généralisé peut être réécrit comme

$$\begin{aligned} B(E_n) &= e^{-\frac{1}{q-1} \ln(1+(q-1)\langle \beta \rangle E_n)} \\ &\approx e^{-\beta_0 E_n} \left(1 + \frac{a}{2} \langle \beta \rangle^2 E_n^2 - \frac{a^2}{3} \langle \beta \rangle^3 E_n^3 + \dots \right), \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

avec $a = q-1$. L'approximation d'ordre zéro de $B(E_n)$ correspond, comme prévu, aux statistique de Boltzmann-Gibbs (GB)

$$B(E_n) \sim e^{-\langle \beta \rangle E_n}. \quad (\text{B.10})$$

Le facteur de Boltzmann généralisé sera alors :

$$B(E) = \int_0^\infty e^{-\beta E} f(\beta) d\beta = (1 + bE)^{-c}. \quad (\text{B.11})$$

Si nous identifions $c = \frac{1}{(q-1)}$ et $bc = \beta_0$, la distribution (B.11) se réduit à la distribution de Tsallis classique [?, 62-66, 125-127]

$$(1 + (q-1)\beta_0 E)^{-\frac{1}{(q-1)}}. \quad (\text{B.12})$$

Selon les travaux suivants de Tsallis, les statistiques non-extensives sont définies par la fonction q -exponentielle généralisée

$$e_q^{-\beta_0 E} = (1 + (q-1)\beta_0 E)^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (\text{B.13})$$

Cette fonction est définie par [61, 62]

$$e_q(x) = \begin{cases} (1 + (q-1)x)^{-\frac{1}{q-1}} & 0 < q < 1 \\ e^x & q = 1, \end{cases}, \quad (\text{B.14})$$

où le paramètre q est l'indice de la mécanique statistique non-extensive : si on identifie $c = \frac{1}{q-1}$

et $bc = \beta_0$ dont

$$\beta_0 = \langle \beta \rangle = \int_0^{\infty} \beta f(\beta) d\beta = bc, \quad (\text{B.15})$$

est la moyenne de β , l'équation (B.11) donne le facteur de Boltzmann généralisé qui s'écrit par

$$B(E) = (1 + (q-1) \langle \beta \rangle E)^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Dans ce cas, l'équation (B.14) se transforme en

$$e_q^{-\langle \beta \rangle E} = (1 + (q-1) \langle \beta \rangle E)^{-\frac{1}{q-1}}. \quad (\text{B.16})$$

Par conséquent, le facteur $B(E)$ se réduit à

$$B(E) = (1 + (q-1) \langle \beta \rangle E)^{-\frac{1}{q-1}}, \quad (\text{B.17})$$

ou

$$B(E) = e_q^{-\langle \beta \rangle E}. \quad (\text{B.18})$$

Dans le cas limite où $q \rightarrow 1$, on retrouve à la fois (i) la fonction exponentielle habituelle et (ii) la fonction de partition habituelle de la mécanique statistique ordinaire.

• **Distribution inverse Chi-2 χ^2**

Ici, la densité de probabilité $f(\beta)$ est donnée par

$$f(\beta) = \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{n\beta_0}{2} \right)^{\frac{n}{2}} \beta^{-\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{n\beta_0}{2\beta}}, \quad (\text{B.19})$$

Dans ce cas, le facteurs de Boltzmann généralisé

$$B(E) = \int f(\beta) e^{-\beta E}, \quad (\text{B.20})$$

Ici l'intégration se fera dans les zones asymptotiques de l'énergie.

• **Distribution log-normale**

La distribution log-normale suit la relation suivante :

$$f(\beta) = \frac{1}{\beta s \sqrt{2\Pi}} \exp \left\{ -\frac{\left(\log\left(\frac{\beta}{m}\right)\right)^2}{2s^2} \right\}, \quad (\text{B.21})$$

dont m et s sont des paramètres. Dans l'approximation à basse énergie, le facteur $B(E)$ sera alors

$$B = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{1}{2} m^2 w (w-1) E^2 - \frac{1}{6} m^3 w^{\frac{3}{2}} (w^3 - 3w + 2) E^3 + \dots \right) \quad (\text{B.22})$$

• **Distribution F**

La distribution F est donnée par

$$f(\beta) = \frac{\Gamma\left(\frac{v+w}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v}{2}\right)\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)} \left(\frac{bv}{w}\right)^{\frac{v}{2}} \frac{\beta^{\left(\frac{v}{2}\right)-1}}{\left(1 + \left(\frac{vb}{w}\right)\beta\right)^{\frac{v+w}{2}}}. \quad (\text{B.23})$$

Ici w et v sont des entiers positifs et $b > 0$. Dans l'approximation à basses énergie, on aura

$$B(E) = e^{-\beta_0 E} \left(1 + \frac{w^2(v+w-2)}{b^2 v (w-2)^2 (w-4)} E^2 - \frac{4w^3(v+w-2)(2v+w-2)}{3b^3 v^{\frac{3}{2}} (w-2)^3 (w-4)(w-6)} E^3 + \dots \right) \quad (\text{B.24})$$

D'après la littérature on observe que la plupart des situations expérimentales typiques sont décrites par trois classes d'universalité pertinentes ou dans de simples combinaisons d'entre elles, à savoir

- La superstatistique χ^2 dont [67, 128]

$$f(\beta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{1}{2\beta}\right)^{\frac{n}{2}} \beta^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{n\beta}{2\beta_0}}. \quad (\text{B.25})$$

- La superstatistique log-normale [67–69].

$$f(\beta) = \frac{1}{\beta s \sqrt{2\Pi}} \exp \left\{ -\frac{\left(\log\left(\frac{\beta}{m}\right)\right)^2}{2s^2} \right\}. \quad (\text{B.26})$$

- Enfin, la superstatistique inverse χ^2 ou

$$f(\beta) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{n\beta_0}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \beta^{-\frac{n}{2}-2} e^{-\frac{n\beta_0}{2\beta}}. \quad (\text{B.27})$$

Liste des articles

- A. Boumali and **M. Labidi**, *Mod. Phys. Lett. A*, (2018), **33**, 1850033
- **M. Labidi**, A. Boumali and A. N. Ikot, *Rev. Mex. Fis.*, (2020), **66**, 671
- A. Boumali and **M. Labidi**, *J. Low. Temp. Phys.*, (2021), **204**, 24-47

Shannon entropy and Fisher information of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator with energy-dependent potential

Abdelmalek Boumali* and Malika Labidi†

*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique,
Université Larbi-Tébessi-Tébessa, Algeria*

**boumali.abdelmalek@gmail.com*

†labidimalika89@gmail.com

Received 22 September 2017

Revised 10 January 2018

Accepted 30 January 2018

Published 27 February 2018

In this paper, we studied, at first, the influence of the energy-dependent potentials on the one-dimensionless Klein–Gordon oscillator. Then, the Shannon entropy and Fisher information of this system are investigated. The position and momentum information entropies for the low-lying states $n = 0, 1, 2$ are calculated. Some interesting features of both Fisher and Shannon densities, as well as the probability densities, are demonstrated. Finally, the Stam, Cramer–Rao and Bialynicki–Birula–Mycielski (BBM) inequalities have been checked, and their comparison with the regarding results have been reported. We showed that the BBM inequality is still valid in the form $S_x + S_p \geq 1 + \ln \pi$, as well as in ordinary quantum mechanics.

Keywords: Fisher information; Shannon entropy; Stam, Cramer–Rao and Bialynicki–Birula–Mycielski uncertainty relations; Klein–Gordon oscillator.

PACS Nos.: 03.65.Aa, 03.65.Ge, 03.65.Pm

1. Introduction

Wave equations with energy-dependent potentials have been coming into view for long time. They can be seen in Klein–Gordon equation considering particle in an external electromagnetic field.¹ Arising from momentum-dependent interactions, they can also appear in non-relativistic quantum mechanics, as shown by Green² for instance Pauli–Schrödinger equation possess another example.^{3,4} Sazdjian⁵ and Formánek *et al.*⁶ have noted that the density probability, or the scalar product, has to be modified with respect to the usual definition, in order to have a conserved norm. Garcia-Martinez *et al.*⁷ and Lombard⁸ made an investigation on Schrödinger equation with energy-dependent potentials by solving them exactly in one and

three dimensions. Hassanabadi *et al.*⁹ studied the D-dimensional Schrödinger equation for an energy-dependent Hamiltonian that linearly depends on energy and quadratic on the relative distance. They also studied the Dirac equation for an energy-dependent potential in the presence of spin and pseudospin symmetries with arbitrary spin-orbit quantum number. They calculate the corresponding eigenfunctions and eigenvalues of a non-relativistic energy-dependent system was done in Ref. 10. A many-body energy-dependent system was studied by Lombard and Mareš.¹¹ They considered systems of N bosons bounded by two-body harmonic interactions, whose frequency depends on the total energy of the system. Other interesting related works can be found in Refs. 12–17 and references therein. So, the presence of the energy-dependent potential in a wave equation has several non-trivial implications. The most obvious one is the modification of the scalar product, necessary to ensure the conservation of the norm. This modification can modify some behavior or physical properties of a physical system: this fact, to the best of our knowledge, has not been considered in the literature.

The relativistic harmonic oscillator is one of the most important quantum system, as it is one of the very few that can be solved exactly. The Dirac relativistic oscillator (DO) interaction is an important potential both for theory and application. It was for the first time studied by Ito *et al.*¹⁸ They considered a Dirac equation in which the momentum \mathbf{p} is replaced by $\mathbf{p} - im\beta\omega\mathbf{r}$, with \mathbf{r} being the position vector, m the mass of particle, and ω the frequency of the oscillator. The interest in the problem was revived by Moshinsky and Szczepaniak,¹⁹ who gave it the name of DO because, in the non-relativistic limit, it becomes a harmonic oscillator with a very strong spin-orbit coupling term. Physically, it can be shown that the DO interaction is a physical system, which can be interpreted as the interaction of the anomalous magnetic moment with a linear electric field.^{20,21} The electromagnetic potential associated with the DO has been found by Benitez *et al.*²² The DO has attracted a lot of interests both because it provides one of the examples of the Dirac's equation exact solvability and because of its numerous physical applications.^{23–28} Finally, Franco-Villafane *et al.*²⁹ have exposed the proposal of the first experimental microwave realization of the one-dimensional DO.

The Fisher information is a quality of an efficient measurement procedure used for estimating ultimate quantum limits. It is a measure of intrinsic accuracy in statistical estimation theory. The investigation of properties and applications of Fisher's information measure to diverse problems in theoretical physics is mainly due to the pioneering work of Frieden *et al.*^{31–35} who have unveiled the manifold physical applications of Fisher information.

Consider a system with both physical parameters θ and $p(x, \theta)$ whose³⁰

$$\int dx p(x, \theta) = 1, \quad (1)$$

with $p(x, \theta)$ describes the probability density. Then, the Fisher information measure takes the following form:

$$F(\theta) = \int \frac{dx}{p(x, \theta)} \left\{ \frac{dp(x, \theta)}{d\theta} \right\}^2. \quad (2)$$

Let us consider a system that obeys the following shift invariance:

$$p(x, \theta) \equiv p(x - \theta), \quad (3)$$

where θ is a constant computed from integrating x . This consideration does not change the shape of $p(x, \theta)$, and the information.

Now, with the aid of (3), Eq. (2) becomes (see Appendix A for more details)

$$F = \int \frac{dx}{p(x)} \left\{ \frac{dp(x)}{dx} \right\}^2. \quad (4)$$

In what follows, we shall restrict ourselves to the form (4) of Fisher's information definition: the one-dimensional Fisher information definition in both position and momentum cases are given by the two following equations:

$$F_x = \int \frac{dx}{\rho(x)} \left\{ \frac{d\rho(x)}{dx} \right\}^2, \quad (5)$$

$$F_p = \int \frac{dp}{\rho(p)} \left\{ \frac{d\rho(p)}{dp} \right\}^2, \quad (6)$$

with $p = \rho(x)$ ($p = \rho(p)$) in position space (in momentum space). Both equations show that the Fisher information has a local character due to the gradient operator: the higher this quantity, the more concentrated the density and the smaller the position uncertainty of the particle. Thus, it is able to detect local changes of the density in order to better describe the system in an information-theoretical way.^{31–35} Fisher information quantity has been used for a wide variety of quantum-mechanical concepts and phenomena. As an example, we can cite the works on the Fisher information and Shannon entropy of position-dependent mass oscillators,^{36–43} entropy and complexity analysis of Dirac-delta-like quantum potentials,⁴⁴ Fisher information of D-dimensional hydrogenic systems in position and momentum spaces⁴⁵ and other physical applications.^{46–49} Finally, the Fisher information is the main theoretic tool of the extreme physical information principle, a general variational principle which allows one to derive numerous fundamental equations of physics: Maxwell equations, the Einstein field equations, the Dirac and Klein–Gordon equations, various laws of statistical physics and some laws governing nearly incompressible turbulent fluid flows.^{31–35}

The Fisher information of single-particle systems has been only recently determined in closed form in terms of the quantum numbers characterizing the involved physical state for both position and momentum spaces. These relevant inequalities involve the Fisher information in a given space (Cramer–Rao) or the conjugate (Stam) space. They are the Stam uncertainty relations⁴⁶

$$F_x \leq 4\langle p^2 \rangle, \quad F_p \leq 4\langle x^2 \rangle \quad (7)$$

and the Cramer–Rao inequalities

$$F_x \geq \frac{1}{\langle x^2 \rangle}, \quad F_p \geq \frac{1}{\langle p^2 \rangle}. \quad (8)$$

For a general mono-dimensional system, and with the help of Eqs. (7) and (8), we have that

$$F_x F_p \geq 4. \quad (9)$$

Another parameter, that has finding applications in several branches of physics because of its possible applications in a wide range of area (see Ref. 50 and references therein), is the Shannon entropy. This quantity provides analytic tools to help us to understand correlations in quantum systems, and has been introduced to measure the uncertainty. Recently, there has been a growing interest in dealing with information theoretical measures for quantum-mechanical systems. As an alternative to the Heisenberg uncertainty relation (HUR), entropic uncertainty has been particularly examined. Among the measures of information entropy, Shannon entropy plays a very important role in the measure of uncertainty, which has been tested for various forms of potentials. The entropic uncertainty relation, which is related to the position and momentum spaces, was given by

$$S_x + S_p > D(1 + \ln \pi), \quad (10)$$

where D represents the spatial dimension. This relation is the well-known Beckner, Bialynicki-Birula and Mycielski (BBM) uncertainty relation.⁴⁹ Both quantities S_x and S_p appearing in Eq. (10) are defined as

$$S_x = - \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 \ln |\psi(x)|^2 dx, \quad (11)$$

$$S_p = - \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(p)|^2 \ln |\phi(p)|^2 dp \quad (12)$$

with $\psi(x)$ being a normalized eigenfunction in spatial coordinates and $\phi(p)$ its normalized Fourier transform. The Shannon information depends on the probability density corresponding to changes in some observable. The quantities defined by Shannon have a global character in the sense that they are not very sensitive to change in the distribution over a small-sized region, and can be used as a measure of the delocalization.^{36,37,39,40}

The main goal of this paper is to study the effects of the modified scalar product arising in the energy-dependent Klein–Gordon oscillator problem. For this, we are focused on: (i) the form of the spectrum of energy of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator, (ii) the Fisher and Shannon parameters of quantum information and the corresponding solutions, and (iii) finally, the validity of Stam,⁴⁶ Cramer–Rao^{47,48} and BBM⁴⁹ uncertainty relations for this type of potential.

This paper is organized as follows. After an introduction, we study the solutions of the one-dimensional Klein–Gordon oscillator with an energy-dependent potential in Sec. 2. In Sec. 3, some discussions regarding the influence of the γ parameter on the Fisher and Shannon information measures are included, and some expectation values are reported and the related uncertainty principles are investigated. The results are discussed via various figures throughout the text. Finally, Sec. 4 will be a general conclusion.

2. The One-Dimensional Klein–Gordon Oscillator with an Energy-Dependent Potential

2.1. The solutions

The free Klein–Gordon equation is ($\hbar = m = \omega = c = 1$)

$$\{p^2 - (E^2 - 1)\}\psi. \tag{13}$$

In the presence of Dirac oscillator, (13) becomes⁵¹

$$\{(p + ix)(p - ix) - (E^2 - 1)\}\psi(x) = 0. \tag{14}$$

In the presence of a potential with energy-dependent potential, Eq. (14) changes into

$$\left(\frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right)\psi(x, E) = \left\{\frac{E^2 - 1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \gamma E)\right\}\psi(x, E), \tag{15}$$

where the following substitution $p_x \rightarrow p_x + i(1 + \gamma E)x$ was carried out, with the parameter γ neither too small nor too big: Equation (15) represent an equation of a harmonic oscillator in one-dimensional.

The corresponding eigensolutions are

$$\psi(x, E) = C_n H_n(\sqrt{\lambda}x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x^2\right), \tag{16}$$

$$E^4 - 2E^2 - 4n^2 - 4n^2\gamma E + 1 = 0, \tag{17}$$

where $\lambda = \sqrt{1 + \gamma E}$, C_n

$$C_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \frac{(1 + \gamma E)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ E - \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + \gamma E}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1},$$

is the normalization constant, and H_n is the Hermite polynomial.

In momentum space, the equation of Klein–Gordon oscillator takes the following form:

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p^2} + \frac{p^2}{2\lambda^2}\right)\psi(p, E) = \left(\frac{E^2 + \lambda - 1}{2\lambda^2}\right)\psi(p, E). \tag{18}$$

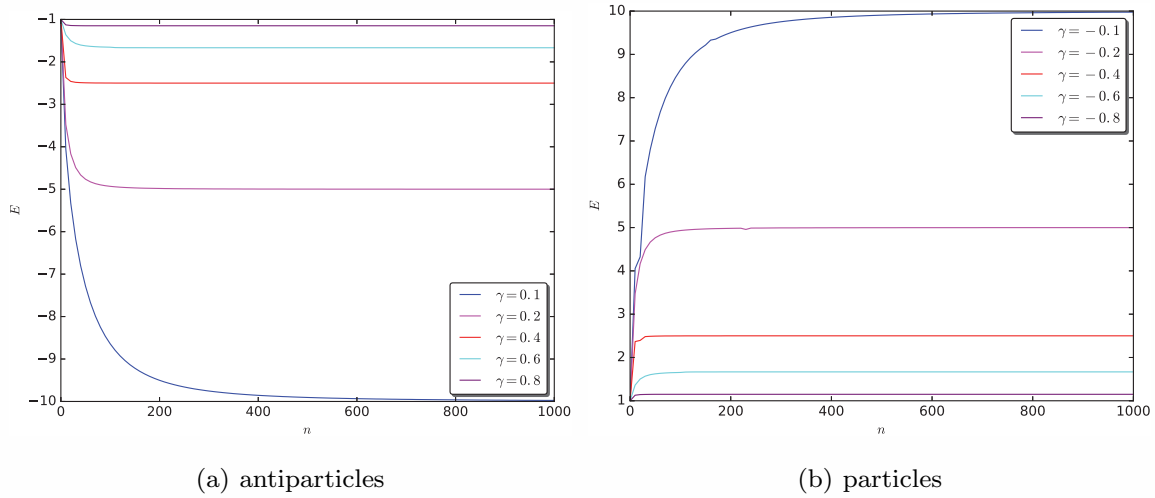


Fig. 1. Spectrum of energy E vs. quantum number n for some different γ values in both coordinate and momentum spaces.

Following the same method used above to solve Eq. (15), the corresponding eigen-solutions can be resume as follows:

$$\psi(p, E) = C'_n H_n \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2\lambda} \right), \quad (19)$$

$$E^4 - 2E^2 - 4n^2 - 4n^2\gamma E + 1 = 0, \quad (20)$$

with

$$(C'_n)^2 = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi \lambda}} \left\{ E + \frac{\gamma}{2\lambda^3} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1}$$

being the normalization constant. Equations (17) and (20) are an algebraic equation of the degree 4 having of the real and complex solutions. The complex solutions which are not physical, and by the two other real solution.

In Fig. 1, we have plotted the energy E versus quantum number n for some different γ values in both $\{x\}$ and $\{p\}$ configurations. From Fig. 1, some interesting results, that are not well commented in the literature, are discussed.

- The asymptotic limits for both form of energies are $\frac{1}{|\gamma|}$ as in the non-relativistic case. These limits have been reproduced for both cases.
- The modified scalar product is the origin of that the spectrum exhibits saturation instead of growing infinitely.
- This saturation appears for the high levels contrary to what has been found in the non-relativistic case.⁵²
- The analytical asymptotic limits are well-depicted.
- The beginning of the saturation starts from a specific quantum number N . This parameter decreases rapidly when $|\gamma|$ increases slowly.

Now, we are able to show the influence of the parameter γ on the density of probability ρ_{KG} . This density, in both position and momentum spaces, are expressed by the following two equations, respectively⁵ (see also Appendix B):

$$\begin{aligned}\rho_{\text{KG}}(x, E) &= \psi(x, E)^* \left\{ 2E - \frac{\partial V(x, E)}{\partial E} \right\} \psi(x, E) \\ &= \left(2E - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right) |\psi(x, E)|^2,\end{aligned}\quad (21)$$

$$\begin{aligned}\rho_{\text{KG}}(p, E) &= \psi(p, E)^* \left\{ 2E - \frac{\partial V(p, E)}{\partial E} \right\} \psi(p, E) \\ &= \left\{ 2E + \frac{\gamma}{2(1 + \gamma E)^2} p^2 \right\} |\psi(p, E)|^2.\end{aligned}\quad (22)$$

In order to represent a physical system, two possibilities, for both coordinate and momentum spaces, can be made according the sign of ρ_{KG} :

- if $\rho_{\text{KG}} < 0$, then we have $\gamma < 0$ for the particles ($E > 0$), and $\gamma > 0$ for the antiparticles ($E < 0$),
- now, when we take $\rho_{\text{KG}} > 0$, we obtain the same conditions for both types of particles.

Thus, regardless of the sign of ρ_{KG} , we have $\gamma < 0$ for particles, and $\gamma > 0$ for antiparticles. These conditions impose constraints on the energy-dependence for the theory to be coherent: by this, we mean a theory that have the following properties: (i) the necessary modification of the definition of probability density, (ii) the vectors corresponding to stationary states with different energies must be orthogonal, (iii) the formulation of the closure rule in terms of wave functions of stationary states justifies their standardization, (iv) finally, the operators of observable are all self-adjoint (Hermitian).

In Fig. 2, we show the influence of the parameter γ on the probability densities for both coordinate and momentum spaces. From Fig. 2, it is found that the behavior of the maximum amplitude of the $\rho_{\text{KG}}(p)$ is contrary to that of $\rho_{\text{KG}}(x)$. In Fig. 2(a) (left curve), we present the position probability density $\rho_{\text{KG}}(x)$ for three typical values of $\gamma = 0.1, 0.3, 0.5$ for the first excited state $n = 1$. The curves are anti-symmetric around $x = 0$, and the peaks shifted when γ increases. These peaks have approximately the same intensity. In addition, for three levels, we have two peaks, which have an anti-symmetric behavior. From Fig. 2(a) (right curve), we have plotted $\rho_{\text{KG}}(x)$ for three values $n = 0, 1, 2$ by choosing $\gamma = 0.1$. Figure 2 shows that all curves are symmetric around $x = 0$. Concerning the number of peaks, we have only one peak for $n = 0$, contrary to the case when $n = 1$ which has two peaks, and $n = 2$ with three peaks. All peaks are symmetric except the case $n = 1$ which are anti-symmetric.

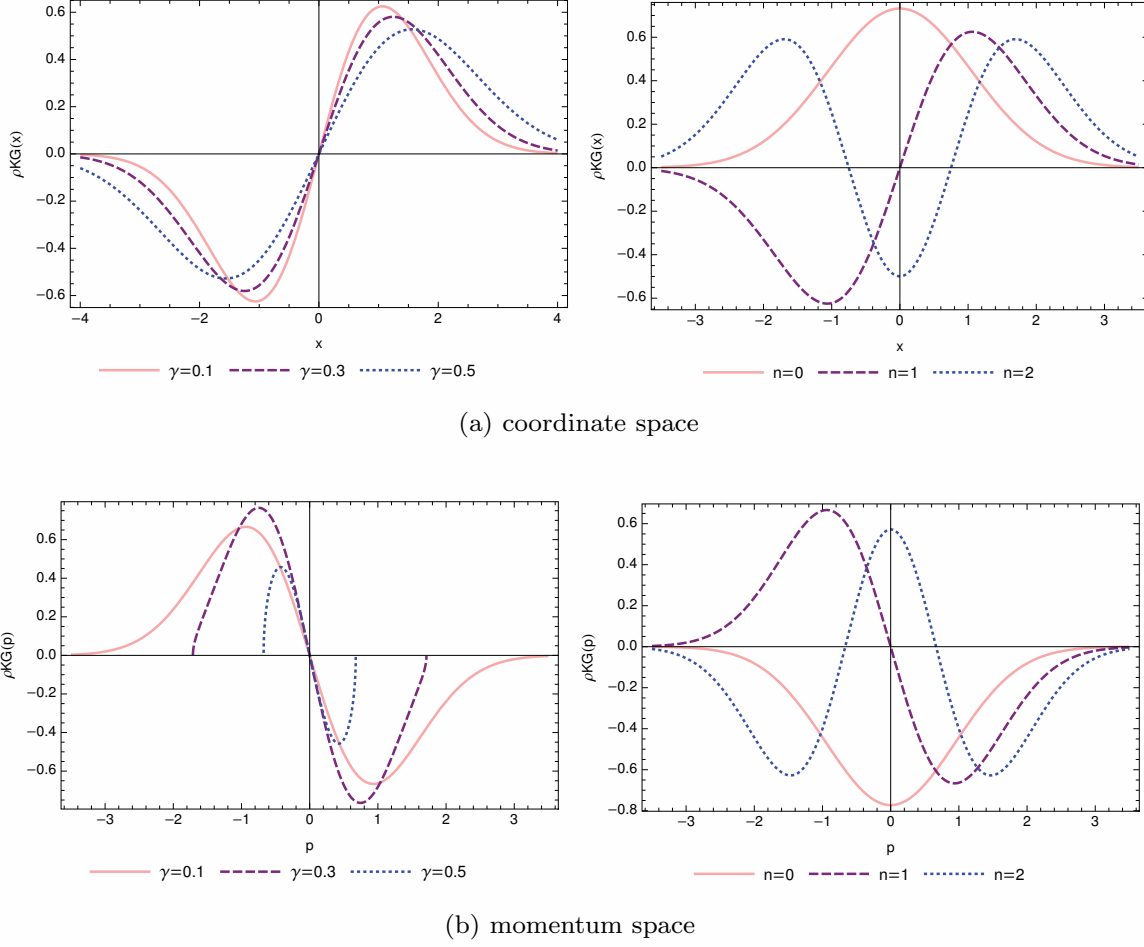


Fig. 2. Probability density distribution, $\rho_{KG}(x)$ (a) and $\rho_{KG}(p)$ (b).

Figure 2(b) presents the momentum space probability densities $\rho_{KG}(p_x)$. From Fig. 2(b), contrary to the case when $\gamma = 0.1$, which has a very similar situation as in Fig. 2(a) (right curve), other cases are limited in the specific interval. For example, $x \in] - 1, 1[$ for $\gamma = 0.3$, and $x \in] - 2, 2[$ for $\gamma = 0.5$.

In what follows, (i) we studied the influence of the parameter γ on the Fisher and Shannon parameters, and (ii) we checked the validity of Stam, Cramer–Rao and BBM uncertainty relations for this type of potential.

3. The Influence of the Parameter γ on the Fisher and Shannon Information Measures

3.1. Fisher information

The Fisher information in one-dimensional Klein–Gordon oscillator with energy-dependent potential is

$$F_x = \int \rho_n(x, E) \left[\frac{d \ln\{\rho_n(x, E)\}}{dx} \right]^2 dx . \quad (23)$$

By using the properties of the Hermite functions, we found that

$$\begin{aligned}
 F_x = & \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 16n^2 E H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_{\text{I}} \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} -(16n\lambda E + 8n\gamma)x H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_{\text{II}} \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} (4\lambda^2 E - 8n^2\gamma + 4\gamma\lambda)x^2 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_{\text{III}} \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 8n\lambda\gamma x^3 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_{\text{IV}} \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} -2\omega_E^2 \gamma x^4 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2) dx}_{\text{V}} \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2)}{2E - \frac{1}{2}\gamma x^2} dx}_{\text{VI}}. \tag{24}
 \end{aligned}$$

The evaluation of different terms gives

$$\begin{aligned}
 \text{I} & \rightarrow C_n^2 16n^2 E 2^n n! \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}, \\
 \text{II} & \rightarrow 0, \\
 \text{III} & \rightarrow C_n^2 (4\lambda^2 E - 8n^2\gamma + 4\gamma\lambda) \frac{2^n n!}{\lambda} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left(n + \frac{1}{2} \right), \\
 \text{IV} & \rightarrow 0, \\
 \text{V} & \rightarrow -C_n^2 2\gamma 2^n n! \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \left\{ \frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right\}.
 \end{aligned}$$

The last term

$$\text{VI} \rightarrow C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2)}{E - \frac{1}{2}\gamma x^2} dx,$$

is calculated numerically. By adding the results of different terms in Eq. (24), the final form of the Fisher parameter is then written as

$$\begin{aligned}
 F_x = & \left\{ E - \frac{\gamma}{2\sqrt{1+\gamma E}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1} \left[16n^2 E + \{4(1+\gamma E)E - 8n^2\gamma \right. \\
 & + 4\gamma\sqrt{1+\gamma E}\} \frac{(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{1+\gamma E}} - 2\gamma \left\{ \frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right\} \left. \right] \\
 & + \frac{1}{2^n n!} \frac{(1+\gamma E)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ E - \frac{\gamma}{2\sqrt{1+\gamma E}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1} \\
 & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 H_n^2(\sqrt{\lambda}x) \exp(-\lambda x^2)}{E - \frac{1}{2}\gamma x^2} dx. \tag{25}
 \end{aligned}$$

In the momentum space, where

$$F_p = \int \rho_n(p, E) \left[\frac{d \ln \{ \rho_n(p, E) \}}{dp} \right]^2 dp \tag{26}$$

and after some calculations, we obtain

$$\begin{aligned}
 F_p = & \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} 16n^2 E H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_I \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\gamma}{\lambda^4} - \frac{4nE}{\lambda} \right) p H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_II \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{4E}{\lambda^2} + \frac{8n^2\gamma}{\lambda^4} \right) p^2 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_III \\
 & - \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4n\gamma}{2\lambda^5} p^3 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_IV \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4\gamma}{2\lambda^6} p^4 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right) dp}_V \\
 & + \underbrace{C_n^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\gamma^2 p^2 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right)}{\lambda^4 (2E\lambda^4 + \gamma p^2)} dp}_VI. \tag{27}
 \end{aligned}$$

When the following terms, which appear in Eq. (27),

$$\begin{aligned} \text{I} &\rightarrow C_n^2 16n^2 E 2^n n! \sqrt{\lambda \pi}, \\ \text{II} &\rightarrow 0, \\ \text{III} &\rightarrow C_n^2 \left(\frac{4E}{\lambda} + \frac{8n^2 \gamma}{\lambda^3} \right) \frac{2^n n! \sqrt{\lambda \pi} \left(n + \frac{1}{2} \right)}{\lambda}, \\ \text{IV} &\rightarrow 0, \\ \text{V} &\rightarrow C_n^2 \frac{2\gamma 2^n n! \sqrt{\lambda \pi}}{\lambda^4} \left\{ \frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right\}, \end{aligned}$$

are evaluated, we arrive at the final form of Fisher parameter. This form is written as

$$\begin{aligned} F_p = & \left\{ E + \frac{\gamma}{2\lambda^3} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1} \left[16n^2 E + \left(\frac{4E}{\lambda} + \frac{8n^2 \gamma}{\lambda^3} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{2\gamma}{\lambda^4} \left\{ \frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right\} \right] + \frac{1}{2^n n! \sqrt{\lambda} \sqrt{\pi}} \left\{ E + \frac{\gamma}{2\lambda^3} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1} \\ & \times \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\gamma^2 p^2 H_n^2 \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{\lambda} \right)}{\omega_E^4 (2E\lambda^4 + \gamma p^2)} dp. \end{aligned} \quad (28)$$

The last term is also evaluated numerically.

3.2. Shannon entropy

The position space information entropies for the one-dimensional can be calculated by using

$$S_x = - \int \rho_{\text{KG}}(x, \gamma) \ln \rho_{\text{KG}}(x, \gamma) dx. \quad (29)$$

Moreover, the momentum space information entropies are written as

$$S_p = - \int \rho_{\text{KG}}(p, E) \ln \rho_{\text{KG}}(p, E) dp \quad (30)$$

with $\rho_{\text{KG}}(x, \gamma)$ and $\rho_{\text{KG}}(p, E)$ are defined by Eqs. (21) and (22).

In general, explicit derivations of the information entropy are quite difficult. In particular, the derivation of analytical expression for the S_x and S_p is almost impossible. We should recognize that it is not easy to exactly calculate Shannon entropies or the entropic uncertainty relations due to the logarithmic factors in the integrals. To overcome these difficulties, (i) we use a numerical calculation of this integral, and (ii) we represent the Shannon and Fisher information entropy densities, respectively.

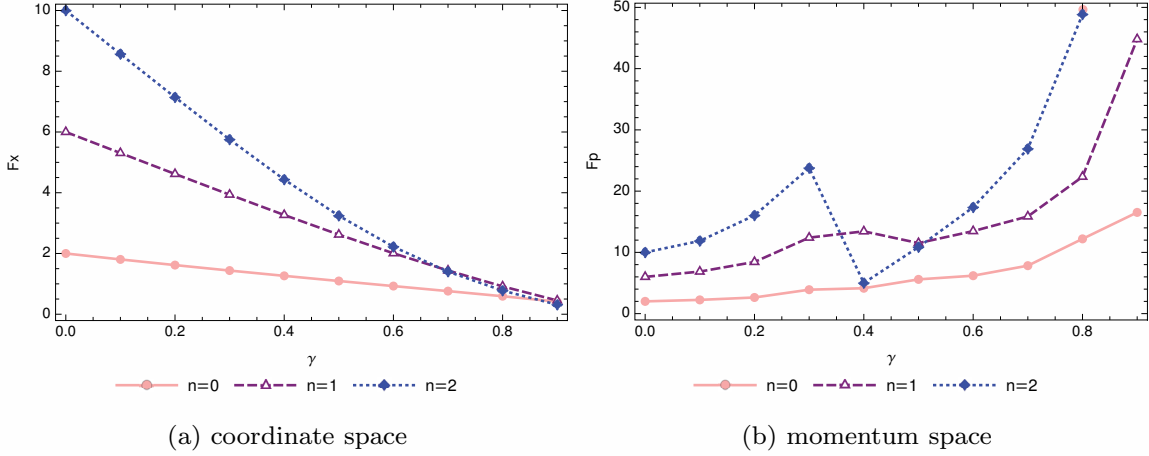


Fig. 3. Fisher information of one-dimensional Klein–Gordon oscillator vs. γ for both coordinate and momentum spaces.

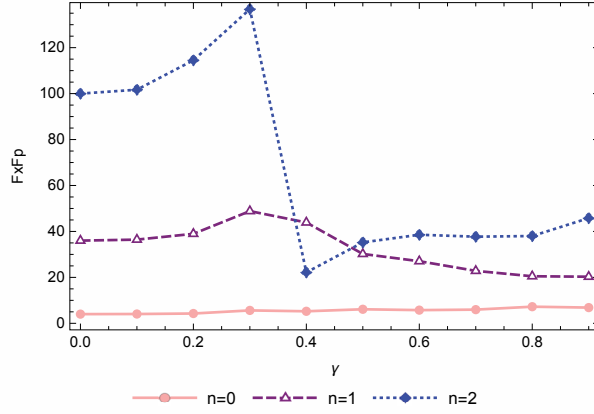


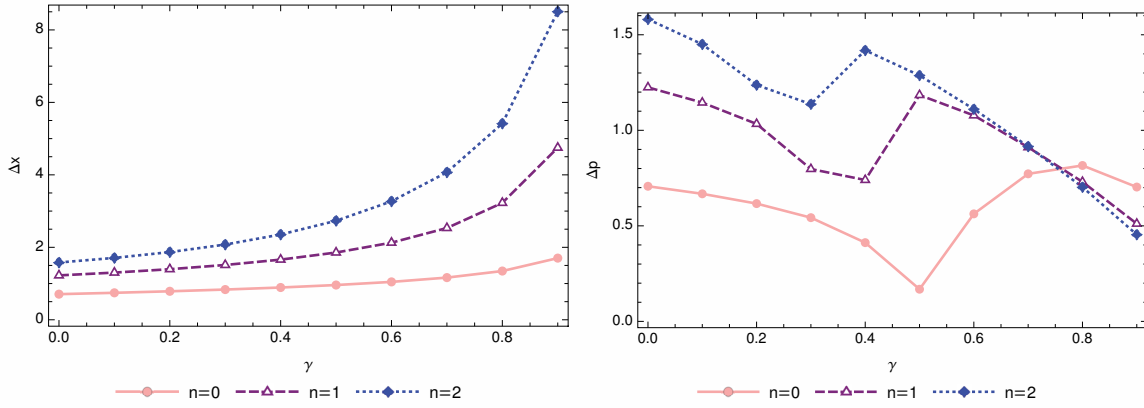
Fig. 4. The product $F_x F_p$ vs. γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$.

3.3. Results and discussions

In Figs. 3 and 4, we show plots of F_x , F_p and $F_x F_p$ versus γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$. As γ increases F_x decreases (Fig. 3(a)) while F_p increases (Fig. 3(b)). Nevertheless, the relation $F_x F_p \geq 4$ holds for Cramer–Rao uncertainty products (Fig. 4). Now, in order to understand these results, we first analyze the behavior of the standard variances. Recall here that the Fisher information and the variances are related by the Cramer–Rao inequality:

$$F_x \geq \frac{1}{\Delta x^2}, \quad F_p \geq \frac{1}{\Delta p^2}. \quad (31)$$

In Fig. 5, we have plotted the uncertainty for x , p and the uncertainty principle for three levels $n = (0, 1, 2)$ in terms of γ . Figure 5 shows how uncertainty for x can change with the parameter γ . The treatments of uncertainty in momentum are shown in the same figure. We can see that Δx increases with (i) increasing γ for fixed value of n , and (ii) with the quantum number n for fixed value of γ . However, the uncertainty in momentum Δp decreases with (i) increasing γ for fixed value



(a) Δx vs. γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$ (b) Δp vs. γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$.

Fig. 5. Both Δx and Δp_x vs. γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$.

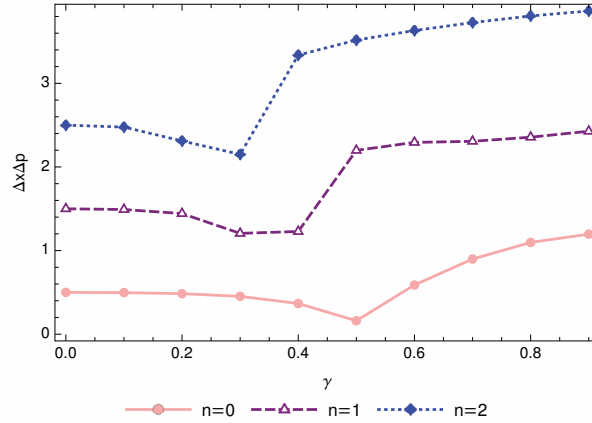


Fig. 6. $\Delta x \Delta p$ vs. γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$.

of n , and (ii) with the quantum number n for fixed value of γ . Thus, accuracy in predicting the localization of the particle increases while the accuracy in predicting momentum decreases with increasing γ for the first three levels $n = 0, 1, 2$.

According to Fig. 5(a), Δx increases with γ , contrarily to the case of Δp which decreases when γ increases. Thus, in this system the accuracy in predicting the localization of the particle decreases while the accuracy in predicting momentum increases with increasing γ .⁴¹ Also, from Eq. (31), the relation between Fisher parameter and the uncertainty principle is very close. Theoretically, when $\Delta x(\Delta P)$ increases, $F_x(F_p)$ decreases and vice versa. This situation is well-observed in our case. Thus, the decrease in the F_x indicates that the accuracy in predicting position decreases. On the other hand, when F_p increases, that means the accuracy in predicting momentum increases. Note here that for the intermediate values of γ there is a resemblance in the variation Figs. 3(b) and 5(a). The similarity observed in this interval does not change our results because we are interested in the behavior of two following products that give both Heisenberg uncertainty relation ($\Delta x \Delta P$)

and its version in quantum information ($F_x F_p$). Both the uncertainty relations are presented by Figs. 4 and 6.

In Table 1, we give the numerical results of information Fisher F_x and F_p and their product $F_x F_p$ with different n numbers and γ values. It is clearly seen from Table 1 that the Fisher uncertainty relation as well as Heisenberg uncertainty relation are satisfied very well in all cases. Particularly, for the intermediate values of γ , F_p shows a similar pattern for Δp , but the product $\Delta x \Delta p$ and $F_x F_p$ verified the following equations $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}$ and $F_x F_p \geq 4$.

Figure 7 depicted the Shannon entropy versus γ for both coordinate and momentum spaces. We can see that the Shannon parameter increases in the $\{x\}$ configuration, whereas it decreases in the $\{p\}$ configuration. This behavior is the same for the particles and antiparticles. Note that with the decreasing S_p , S_x increases but only to the extent that their sum stays above the stipulated lower bound of the value $(1 + \ln \pi)$ (Fig. 10).

To understand the essential features of the entropies, we focus our study on the entropy and Fisher densities which are defined by

$$(\rho_F)_{\{a\}} = \rho_{\text{KG}}(a, E) \left[\frac{d \ln \{ \rho_{\text{KG}}(a, E) \}}{da} \right]^2, \quad (32)$$

for Fisher information, and

$$(\rho_S)_{\{a\}} = \rho_{\text{KG}}(a, E) \ln \rho_{\text{KG}}(a, E), \quad (33)$$

for the Shannon entropy: $\{a\}$ denotes the appropriate configuration.^{53,56–65} These densities play a similar role to the probability density ρ_{KG} in quantum mechanics. The behavior of $(\rho_F)_{\{a\}}$ and $(\rho_S)_{\{a\}}$ is illustrated in Figs. 8 and 9 for three lowing-states $n = (0, 1, 2)$, and for several values of the γ .

Let us first analyze the properties of the information Fisher densities. In Fig. 8, we depicted the Fisher densities versus the variable x (or p) for (i) the first level $n = 1$ where the parameter γ takes the following values 0.1, 0.3 and 0.5, and (ii) with $\gamma = 0.1$ and for three lowing-states $n = (0, 1, 2)$. For the first case, in the coordinate space, the density delocalizes in x -space with increasing γ , contrarily in the momentum case where the density is localized in p -space with increasing γ . The second case shows the Fisher densities versus the variable x (or p) for $\gamma = 0.1$, according to the three first levels. In the x -space, the density localize with increasing the quantum number n . The situation in p -space is symmetrically inverted compared to the coordinate space, and the argument will be the same as in the x -space case.

Figure 9 presented the Shannon densities versus the variable x (or p) for (i) the first level $n = 1$, where the parameter γ takes the following values 0.1, 0.3 and 0.5, and (ii) with $\gamma = 0.1$ according to the three lowing-states $n = (0, 1, 2)$. For the first case, in the coordinate space, the density delocalizes in the same manner where increasing γ , contrarily in the momentum case where the density is delocalized in

Table 1. Numerical results for the uncertainty relation and Fisher information and Shannon entropy of 1D Klein-Gordon oscillator with energy-dependent potential.

n	γ	$\langle x^2 \rangle$	Δx	$\langle p_x^2 \rangle$	Δp	$\Delta x \Delta p$	F_x	F_p	$F_x F_p$	S_x	S_p	$S_x + S_p$	$1 + \ln \pi$	S_0
0	0	0.5000	0.7071	0.5000	0.7071	0.5000	2.0000	2.0000	4.0000	1.0724	1.0724	2.1448	2.1447	2.5969
	0.16	0.5918	0.7693	0.4080	0.638	0.4908	1.69165	2.4516	4.1472	1.1561	0.9707	2.1268	2.1447	2.5788
	0.32	0.7136	0.8447	0.2737	0.5232	0.4419	1.4026	3.7700	5.2878	1.2501	0.8054	2.0555	2.1447	2.45732
	0.48	0.8912	0.9440	0.0188	0.1371	0.1295	1.1276	6.9355	7.8205	1.3608	0.7162	2.0770	2.1447	2.2613
	0.64	1.1842	1.0882	0.4410	0.6641	0.7227	0.8607	8.2659	7.1145	1.5014	0.9599	2.4613	2.1447	2.3089
1	0.80	1.8090	1.3450	0.6658	0.8160	1.0975	0.5927	12.2000	7.2311	1.7082	1.0184	2.7266	2.1447	2.3008
	0	1.5000	1.2247	1.5	1.2247	1.5000	6.0000	6.0000	36.0000	1.3427	1.3427	2.6854	2.1447	1.04612
	0.16	1.8392	1.3562	1.17526	1.0842	1.4704	4.8935	7.6593	37.4804	1.4434	1.2167	2.6601	2.1447	1.02597
	0.32	2.3685	1.5390	0.480699	0.6933	1.0670	3.8012	13.4774	51.2303	1.5644	1.0148	2.5792	2.1447	0.869711
	0.48	3.2837	1.8121	1.36547	1.1685	2.1175	2.7485	6.2457	17.1663	1.7147	1.2308	2.9455	2.1447	1.4164
2	0.64	5.1536	2.2702	1.02251	1.0112	2.2956	1.7716	13.5291	23.9682	1.9122	0.8693	2.7815	2.1447	1.24951
	0.80	10.4112	3.2266	0.533192	0.7302	2.3561	0.9166	22.3000	20.4402	2.2096	0.5957	2.8053	2.1447	1.32913
	0	2.5	1.5811	2.5000	1.5811	2.5000	10.0000	10.0000	100.0000	1.4986	1.4986	2.9972	2.1447	0.535292
	0.16	3.23687	1.7991	1.7994	1.3414	2.4133	7.7103	13.8006	106.4068	1.6128	1.3503	2.9631	2.1447	0.504242
	0.32	4.51644	2.1252	0.9625	0.9811	2.0850	5.4827	17.7237	97.1737	1.7513	1.3525	3.1038	2.1447	0.549627
2	0.48	7.00704	2.6471	1.7410	1.3195	3.4928	3.4664	9.8800	34.2480	1.9195	1.0208	2.9403	2.1447	1.07106
	0.64	12.5885	3.5480	1.0710	1.0349	3.6718	1.8689	19.9000	37.1911	2.1301	0.6893	2.8194	2.1447	1.02984
	0.80	29.3421	5.4168	0.4937	0.7026	3.8085	0.7776	48.9000	38.0261	2.2452	0.3027	2.5479	2.1447	1.01874

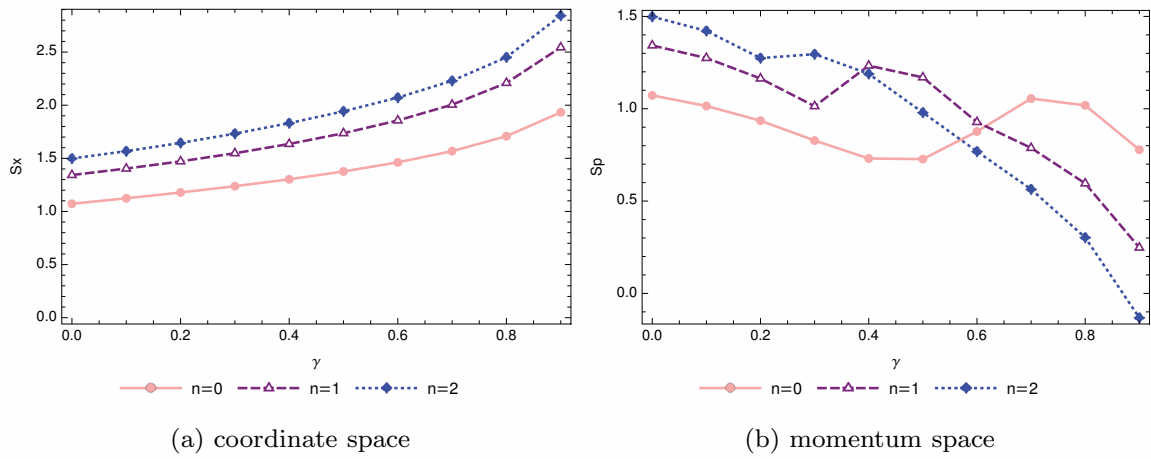


Fig. 7. Shannon entropy of one-dimensional Klein-Gordon oscillator vs. γ for both coordinate and momentum spaces.

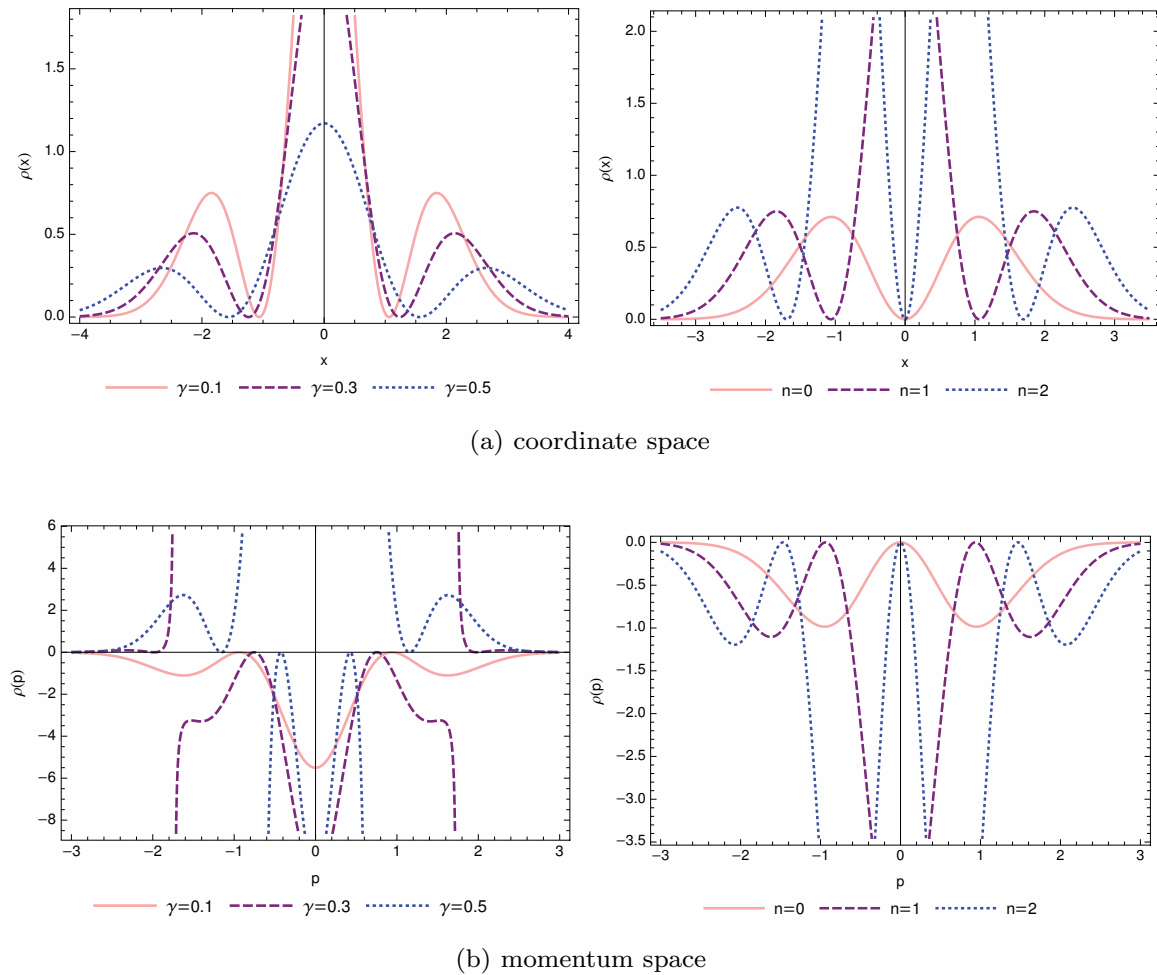
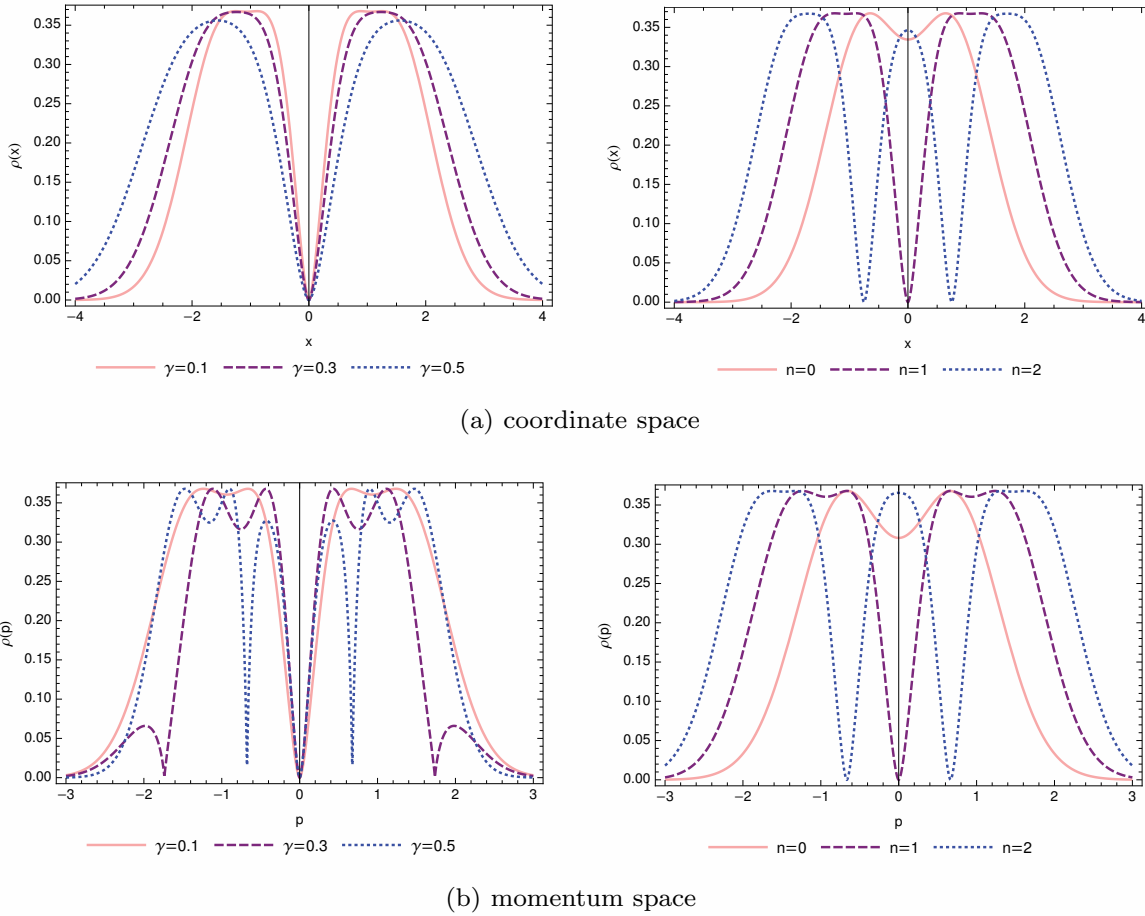


Fig. 8. Fisher densities vs. x .


 Fig. 9. Shannon densities vs. p .

p -space with increasing γ . The second case shows the Shannon densities versus the variable x (or p) for $\gamma = 0.1$, according to the three first levels. In the x -space, the density delocalizes with increasing n -level where $n = 2$ is more delocalized than $n = 0$. The situation in p -space is symmetrically inverted compared to the coordinate space, and the argument will be the same as in the x -space case.

Song *et al.*³⁷ investigated the information entropy for a one-dimensional system with a schematic ‘‘Landau’’ potential in a numerical way. They have shown that multi-peak distributions appear in curves of the position and momentum entropy densities may be a signature of a quantum phase transition. They have found that the phase transitional behavior of the system can be well expressed by the evolution of quantum information entropy. This transition has been observed in the curves of S_x and S_p where both the quantities present an abrupt variation around the same critical point. This transition has a nature of a second-order transition. In our case, despite the existence of multi-peak distributions appearing in Figs. 8 and 9, there is no probable phase transition for this problem. This result can be argued by the absence of a significant change in curves of S_x and S_p versus γ . Nevertheless their sum $S_x + S_p$ for a given n number remain as a constant independent of the parameter γ (Fig. 10).

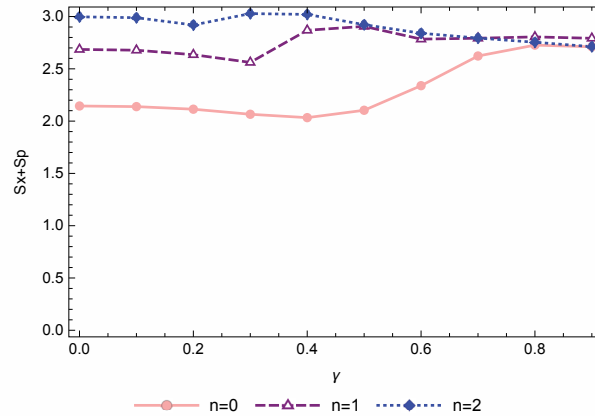


Fig. 10. The sum $S_x + S_{p_x}$ vs. γ for three lowest states $n = 0, 1, 2$.

Now, we are ready to discuss the HUR and its analogue in the framework of quantum information. The HUR in quantum mechanics is an inequality between position and momentum. Precisely, it states that the product of the uncertainties in position and momentum can be expressed as follows: $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}$, that means that the more precisely the position of the particle is determined, the less precisely the momentum is known, and vice versa. Rudnicki⁶⁷ rephrased the Heisenberg sentence, in the sense related to entropic uncertainty relations, as follows “the more information we have about the position, the less information we can acquire about the momentum and vice versa”.

In recent years, new uncertainty principles are introduced, and they are originated from the information theory. Let us mention that this information-theoretic quantity and its quantum extension, not yet sufficiently well-known for physicists, has been used to set up a number of relevant inequalities such as Stam and Cramer–Rao and uncertainty relations. The Cramer–Rao inequality belongs to a natural family of information-theoretic inequalities which play a relevant role in a great variety of scientific and technological fields ranging from probability theory, communication theory, signal processing and approximation theory to quantum physics of D-dimensional systems with a finite number of particles.^{68–73} The Fisher information of single-particle systems has only been recently determined in closed form in terms of the quantum numbers characterizing the involved physical state for both position and momentum spaces. These relevant inequalities which involve the Fisher information in a given space (Cramer–Rao) or the conjugate (Stam) space (Eqs. (7) and (8)). For a general mono-dimensional system we have

$$F_x F_p \geq 4. \tag{34}$$

According to Saha *et al.*,⁶⁸ the product $F_x F_p \geq 4$, which is sometimes called a Fisher information-based uncertainty relation, has often been conjectured to exhibit a nontrivial lower bound such that for one-dimensional systems. In literature, there are many quantum systems for which the relation is valid. On the other hand, there are also an infinite number of counter examples which forward to demonstrate that

it is not always possible to obtain a universal uncertainty relation as a lower bound to this relation.^{54,55}

Table 1 shows a numerical result for the uncertainty relation and Fisher information measure of 1D Klein–Gordon oscillator for the three low-lying states ($n = 0, 1, 2$) with different choice of the parameter γ . Following Table 1, we observe that

- the Stam inequalities, and Cramer–Rao ones are fulfilled,
- the following relation

$$F_x F_p \geq 4, \quad (35)$$

is well-established, and consequently, the Fisher information-based uncertainty relation (Eq. (34)) for the 1D Klein–Gordon oscillator with energy-dependent potential holds in our case for three lowing-states $n = 0, 1, 2$ (see Fig. 4),

- finally, the sum of the entropies is in consistency with BBM inequality where

$$S_x + S_p \geq 1 + \ln \pi \simeq 2.14447. \quad (36)$$

As seen from Table 1, the BBM inequality and Heisenberg uncertainty relation hold for the 1D Klein–Gordon oscillator, and the sum of entropies $S_x + S_p$ is higher than $(1 + \ln \pi)$ value (Fig. 10). The BBM inequality stipulated that the sum of $S_x + S_p$ stays above the lower bound of $(1 + \ln \pi)$. Particularly, we find that the sum of the S_x and S_p for the ground state (with $\gamma = 0$) is very close to the limit value $(1 + \ln \pi)$. From numerical results which are shown in Table 1, we observe that the entropy sum $S_x + S_p \geq 1 + \ln \pi$ tends to be saturated to the boundary value defined by the BBM inequality for the three lowing-states.^{58,66} In conclusion, it is observed that the BBM inequality is satisfied in all cases for the states displayed in Table 1. Indeed, an increase in the position entropy is observed for any γ , which is enough to compensate for the reduction in momentum entropy.⁷⁴ Thus, we can also state that, as mentioned by Dong⁶¹ and Gonzalez,⁷⁵ “there are no physical states which violate the BBM inequality”.

Considering Table 1 again, an important result appears for the case of the ground state $n = 0$. If $\gamma = 0$, then $\Delta x = \Delta p = 0.7071$ and $\Delta x \Delta p_x = \frac{1}{2}$ which correspond to the simplest case of the ground state for the Harmonic oscillator. As γ increases, $\Delta x > 0.7071$, $\Delta p < 0.7071$ and $\Delta x \Delta p > \frac{1}{2}$.³⁶ These results show that there exists the squeezing phenomenon in momentum for the ground state $n = 0$. In physics, a squeezed coherent state is any state of the quantum mechanical Hilbert space such that the uncertainty principle is saturated. Note that such a squeezing effect has been observed by Dong *et al.*⁶¹ in studying the quantum information entropies for a squared tangent potential well, and by Aguiar *et al.*^{54,55} for their study on the Fisher information of quantum damped harmonic oscillators, and finally by Macedo *et al.*³⁶ in inspecting the Fisher information and Shannon entropy of position-dependent mass oscillators. For the other levels, this phenomena disappears. According to the works of Aguiar and Guedes,⁵⁴ the Fisher information can also be used to study the squeezing effect in either position or momentum of the systems via Δx or ΔP .

Finally, we note the existence of a close relationship between Shannon entropy S and Fisher information F through uncertainty principle product $\Delta x \Delta P$. According to Refs. 54 and 55, we have

$$S \geq 1 + \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(F_x F_p) \equiv S_0. \quad (37)$$

Equation (37) is obtained by using the following equation:^{36,46,54,55}

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2\pi e} e^S \quad (38)$$

and Eq. (31), where e is Euler's number. The term S_0 appearing in Eq. (37) is

$$S_0 = 1 + \ln 2\pi - \frac{1}{2} \ln(F_x F_p). \quad (39)$$

This equation indicates that S decreases when $F_x F_p$ increases. This situation is well illustrated in Figs. 3 and 7.

4. Conclusion

This work is devoted to energy-dependent potentials. Following Sazdjian,⁵ this type of potentials leads to the modification of the scalar product,^{5,16,17} which was necessary to ensure the conservation of the norm. In this context, we studied the physical characteristics of a 1D Klein–Gordon oscillator with energy-dependent potential. We have at first obtained the wave functions and the energy spectra of the system in an exact analytical manner. The results show that the energy dependence affects essentially the eigensolutions for both particles and antiparticles. The spectrum exhibits saturation instead of growing infinitely. After that, as the Fisher information and Shannon entropy depend strongly with the density of probability, we have tested the impact of the parameter γ on these quantities. For this, the Fisher information and Shannon entropy, some expectation values, and some uncertainty principles were evaluated. Although the eigenfunctions have been determined analytically, F_x , F_{p_x} , Δx , Δp_x , S_x and S_{p_x} were determined numerically. In addition, we have studied the influence of γ on Shannon entropy and Fisher information uncertainty relations, and checked the validity of BBM inequality. The Fisher parameter versus γ for both coordinate and momentum spaces. The case of coordinate space, F_x decreases contrarily, in the momentum space where it increases. For the case of Shannon entropy, we have also plotted these quantities versus γ for both coordinate and momentum spaces. This parameter increases in the $\{x\}$ configuration, whereas it decreases in the $\{p\}$ configuration. We note here that these behaviors of Fisher and Shannon parameters are the same for the particles and antiparticles. Moreover, for some values of parameter γ , we have shown that the numerical results in the Shannon and Fisher information are predicted by the BBM inequality $S_x + S_p \geq 1 + \ln \pi$, and by the Fisher information-based uncertainty relation. In addition, the discussion about squeezing effect in either position or momentum show the existence of a squeezing effect in momentum ($\Delta P < 0.707$).

In conclusion, the uncertainty relations given by quantum information theory, can be extended normally to the case of the potentials which depend with energy.

Appendix A. Definition of Fisher Information

The Fisher information (FI) is a way of measuring the amount of information that an observable random variable y carries about an unknown parameter θ , upon which the probability of y depends. Let $p(y, \theta)$ be the probability density function for y conditional on the value of θ . This is also the likelihood function for θ . It describes the probability that we observe a given sample y , given a known value of θ .

The FI in the observation y of a parameter of true value is defined as⁷⁶

$$I(\theta) = \int \frac{dy}{p(y, \theta)} \left\{ \frac{p(y, \theta)}{d\theta} \right\}^2. \quad (\text{A.1})$$

Here, $p(y|\theta)$ is the probability density for observing a particular measured value of y in the presence of a value of θ . The FI is a measure of the amount or the quality of the information obtainable from the measurement of y .

Now, when we make the following substitutions:

$$y = s,$$

where s is an observable state of the system, and

$$\theta = \bar{s}$$

with $\langle s \rangle$ being the mean of s , the FI expression of Eq. (A.1) becomes

$$I(\bar{s}) = \int \frac{ds}{p(s, \bar{s})} \left\{ \frac{p(s, \bar{s})}{d\bar{s}} \right\}^2. \quad (\text{A.2})$$

If the system obeys the following shift invariance:

$$p(s, \bar{s}) \equiv p(s - \bar{s}), \quad (\text{A.3})$$

which means that the fluctuations are independent of the value of \bar{s} , then we can consider that \bar{s} is a constant computed from integrating s over all time, and do not change the shape of $p(s, \bar{s})$. We remark that this shift invariance will not change the information.

Let us now define a new variable

$$\hat{s} = s - \bar{s}, \quad (\text{A.4})$$

with $d\hat{s} = ds - d\bar{s} = ds$. In this case, Eq. (A.2) transforms into

$$I = \int \frac{d\hat{s}}{p(\hat{s})} \left\{ \frac{dp(\hat{s})}{d\hat{s}} \right\}^2. \quad (\text{A.5})$$

Here, $p(\hat{s})$ represents the probability density for observing a particular value of the variable \hat{s} . The last equation is important because the derivative with respect to \hat{s} can be readily evaluated from either data (by finite differences) or models (by analytical differentiation).⁷⁶

As the subtraction of $\langle s \rangle$ from s does not affect the calculation, we can use the variable s instead \hat{s} and Eq. (A.5) becomes

$$I = \int \frac{ds}{p(s)} \left\{ \frac{dp(s)}{ds} \right\}^2, \quad (\text{A.6})$$

with $p(s)$ being the probability density for s . In our case, putting that $p(s)|_{s \equiv x} \equiv \rho(x)$ ($p(s)|_{s \equiv p} \equiv \rho(p)$) gives both Eqs. (5) and (6) in the Introduction.

Appendix B. Modified Product Scalar in the Klein–Gordon Equation

Let us examine this problem of normalization by considering the Klein–Gordon equation^{16,17}

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi + m^2 \psi + V\left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi = 0 \quad (\text{B.1})$$

and its complex conjugate

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \Delta \psi^* + m^2 \psi^* + V\left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi^* = 0. \quad (\text{B.2})$$

When we multiplied these two equations with ψ^* and ψ , respectively, and after a subtraction we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \\ & + \psi \left\{ V\left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi^* \right\} - \psi^* \left\{ V\left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t}\right) \psi \right\} = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

By using

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int^t ds f(s) \quad (\text{B.4})$$

and in order to obtain the continuity equation $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x} = 0$, with $\mathbf{j} = \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*$, we have

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int^t ds \left[\psi(\mathbf{r}, s) \left\{ V\left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi^*(\mathbf{r}, s) \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. - \psi^*(\mathbf{r}, s) \left\{ V\left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi(\mathbf{r}, s) \right\} \right] \right] + \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Here, the density ρ is written as

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{1}{i} \left\{ \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int^t ds \left[\psi(\mathbf{r}, s) \left\{ V\left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi^*(\mathbf{r}, s) \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. - \psi^*(\mathbf{r}, s) \left\{ V\left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi(\mathbf{r}, s) \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

As we have

$$\int d^3r \rho = 1, \quad (\text{B.7})$$

so

$$\int d^3r \frac{1}{i} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int^t ds \int^t ds \left[\psi(\mathbf{r}, s) \left\{ V\left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi^*(\mathbf{r}, s) \right\} - \psi^*(\mathbf{r}, s) \left\{ V\left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s}\right) \psi(\mathbf{r}, s) \right\} \right] \right] = 1, \quad (\text{B.8})$$

is the exact expression of normalization.

Putting now

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int dE a_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt}, \quad (\text{B.9})$$

$$\psi^*(\mathbf{r}, t) = \int dE' a_{E'}^* \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) e^{+iE't}, \quad (\text{B.10})$$

we have

$$i\rho = i \iint dE dE' a_{E'}^* a_E \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) \left[e^{-i(E-E')t} (E' + E) - \left\{ \frac{e^{-i(E-E')t}}{E' - E} + \text{Cte} \right\} \{V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)\} \right]. \quad (\text{B.11})$$

Now, if we choose

$$a_E = \delta(E - E_0), \quad (\text{B.12})$$

$$a_{E'} = \delta(E' - E_0) \quad (\text{B.13})$$

and after a limit development of V with

$$V(\mathbf{r}, E') = V(\mathbf{r}, E) + (E' - E) \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} + \frac{1}{2} (E' - E)^2 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, E)}{\partial E^2} + \dots, \quad (\text{B.14})$$

Eq. (B.11) becomes

$$i\rho = i \iint dE dE' \delta(E - E_0) \delta(E' - E_0) \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) \left\{ e^{-i(E-E')t} \left[E' + E - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} - \frac{1}{2} (E' - E) \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, E)}{\partial E^2} + \dots \right] + \text{Cte} \left[(E' - E) \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} + \frac{1}{2} (E' - E)^2 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, E)}{\partial E^2} + \dots \right] \right\}. \quad (\text{B.15})$$

After integration on E and E' , we arrive at the final result

$$\rho = \varphi_{E_0}(\mathbf{r})\varphi_{E_0^*}(\mathbf{r}) \left\{ 2E_0 - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E_0)}{\partial E_0} \right\} \quad (\text{B.16})$$

and the condition of normalization becomes

$$\int d^3r \varphi_{E_0}(\mathbf{r})\varphi_{E_0^*}(\mathbf{r}) \left\{ 2E_0 - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E_0)}{\partial E_0} \right\} = 1. \quad (\text{B.17})$$

Acknowledgments

The authors would like to thank Prof. Lyazid Chetouani, University of Constantine, Algeria, for his personal communication about the modified product scalar in the Klein–Gordon equation, and Prof. Hassan Hassanabadi, Shahrood University of Technology, Iran, for his helpful discussions about Fisher and Shannon information.

References

1. H. Snyder and J. Weinberg, *Phys. Rev.* **57**, 307 (1940); I. Schiff, H. Snyder and J. Weinberg, *ibid.* **57**, 315 (1940).
2. A. M. Green, *Nucl. Phys.* **33**, 218 (1962).
3. W. Pauli, *Z. Phys.* **601**, 43 (1927).
4. H. A. Bethe and E. E. Salpeter, Quantum theory of one- and two-electron systems, in *Atome I*, Handbuch der Physik, Band XXXV (Springer-Verlag, 1957).
5. H. Sazdjian, *J. Math. Phys.* **29**, 1620 (1988).
6. J. Formánek, J. Mareš and R. Lombard, *Czech. J. Phys.* **54**, 289 (2004).
7. J. Garcia-Martinez, J. Garcia-Ravelo, J. J. Pena and A. Schulze-Halberg, *Phys. Lett. A* **373**, 3619 (2009).
8. R. Lombard, *An-Najah-Univ. J. Res. (N. Sc.)* **25**, 49 (2011).
9. H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar and A. A. Rajabi, *Commun. Theor. Phys.* **55**, 541 (2011).
10. H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, R. Oudi, S. Zarrinkamar and H. Rahimov, *Eur. Phys. J. Plus* **127**, 120 (2012).
11. R. J. Lombard and J. Mareš, *Phys. Lett. A* **373**, 426 (2009).
12. R. Yekken and R. J. Lombard, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43**, 125301 (2010); R. Yekken, Ph.D. thesis, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene d'Alger, Algeria, 2009.
13. A. Schulze-Halberg, *Cent. Eur. J. Phys.* **9**, 57 (2011).
14. R. J. Lombard, J. Mareš and C. Volpe, arXiv:hep-ph/0411067v1.
15. H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, H. Hamzavi and A. A. Rajabi, *Arab. J. Sci. Eng.* **37**, 209 (2012).
16. A. Benchikha and L. Chetouani, *Mod. Phys. Lett. A* **28**, 1350079 (2013).
17. A. Benchikha and L. Chetouani, *Cent. Eur. J. Phys.* **12**, 392 (2014).
18. D. Itô, K. Mori and E. Carriere, *Nuovo Cimento A* **51**, 1119 (1967).
19. M. Moshinsky and A. Szczepaniak, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L817 (1989).
20. R. P. Martinez-y-Romero and A. L. Salas-Brito, *J. Math. Phys.* **33**, 1831 (1992).
21. M. Moreno and A. Zentella, *J. Phys. A: Math. Gen.* **22**, L821 (1989).
22. J. Benitez, P. R. Martinez y Romero, H. N. Nunez-Yepez and A. L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1643 (1990).
23. C. Quesne and V. M. Tkachuk, *J. Phys. A: Math. Gen.* **41**, 1747 (2005).

24. A. Boumali and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus.* **128**, 124 (2013).
25. A. Boumali and H. Hassanabadi, *Z. Naturforsch. A* **70**, 619 (2015).
26. A. Boumali, *Electron. J. Theor. Phys.* **12**, 1 (2015).
27. A. Boumali, *Phys. Scripta* **90**, 045702 (2015).
28. P. Strange and L. H. Ryder, *Phys. Lett. A* **380**, 3465 (2016).
29. J. A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne and T. H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 170405 (2013).
30. M. T. Martin, F. Pennini and A. Plastino, *Phys. Lett. A* **256**, 173 (1999).
31. B. R. Frieden, *Am. J. Phys.* **57**, 1004 (1989).
32. B. R. Frieden, *Phys. Rev. A* **41**, 4265 (1990).
33. B. R. Frieden, *Opt. Lett.* **14**, 199 (1989).
34. B. R. Frieden, *Physica A* **180**, 359 (1992).
35. B. R. Frieden and B. H. Soffer, *Phys. Rev. E* **52**, 2274 (1995).
36. D. X. Macedo and I. Guedes, *Physica A* **434**, 211 (2015).
37. X. D. Song, S. H. Dong and Y. Zhang, *Chinese Phys. B* **25**, 050302 (2016).
38. G. H. Sun and S. H. Dong, *Phys. Scripta* **87**, 045003 (2013).
39. G. Yañez-Navarro, G. H. Sun, T. Dytrych, K. D. Launey, S. H. Dong and J. P. Draayer, *Ann. Phys.* **348**, 153 (2014).
40. S. G. Hua, D. Popov, O. C. Nieto and D. S. Hai, *Chinese Phys. B* **24**, 100303 (2015).
41. J. Yu and S. H. Dong, *Phys. Lett. A* **325**, 194 (2004).
42. J. Yu and S. H. Dong, *Phys. Lett. A* **322**, 290 (2004).
43. S. H. Dong, J. J. Pena, C. P. Garcia and J. G. Ravelo, *Mod. Phys. Lett. A* **22**, 1039 (2007).
44. P. A. Bouvrie, J. C. Angulo and J. S. Dehesa, *Physica A* **390**, 2215 (2011).
45. J. S. Dehesa, S. López-Rosa and B. Olmos, *J. Math. Phys.* **47**, 052104 (2006).
46. A. J. Stam, *Inform. Control* **2**, 101 (1959).
47. T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of Information Theory* (Wiley, 1991).
48. O. Johnson, *Information Theory and the Central Limit Theorem* (Imperial College Press, 2004).
49. I. B. Birula and J. Mycielski, *Commun. Math. Phys.* **44**, 129 (1975).
50. J. S. Dehesa, R. G. Férez and P. S. Moreno, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40**, 1845 (2007).
51. A. Boumali, A. Hafdallah and A. Toumi, *Phys. Scripta* **84**, 037001 (2011).
52. A. Boumali, S. Dilmli, S. Zare and H. Hassanabadi, *Karbala Int. J. Mod. Sci.* **3**, 191 (2017).
53. B. J. Falaye, K. J. Oyewumi, S. M. Ikhdair and M. Hamzavi, *Phys. Scripta* **89**, 115204 (2014).
54. V. Aguiar and I. Guedes, *Phys. Scripta* **90**, 045207 (2015).
55. V. Aguiar and I. Guedes, *Physica A* **401**, 159 (2014).
56. B. J. Falaye, F. A. Serrano and S. H. Dong, *Phys. Lett. A* **380**, 267 (2016).
57. J. He, Z. Y. Ding and L. Ye, *Physica A* **457**, 598 (2016).
58. M. Ghafourian and H. Hassanabadi, *J. Korean Phys. Soc.* **68**, 1 (2016).
59. G. H. Sun, S. H. Dong and S. Naad, *Ann. Phys.* **525**, 934 (2013).
60. G. H. Sun, M. A. Aoki and S. H. Dong, *Chinese Phys. B* **22**, 050302 (2013).
61. S. Dong, G. H. Sun, S. H. Dong and J. P. Draayer, *Phys. Lett. A* **378**, 124 (2014).
62. G. H. Sun, S. H. Dong, K. D. Launey, T. Dytrych and J. P. Draayer, *Int. J. Quantum Chem.* **115**, 891 (2015).
63. R. Valencia-Torres, G. H. Sun and S. H. Dong, *Phys. Scripta* **90**, 035205 (2015).
64. B. J. Falaye, F. A. Serrano and S. H. Dong, *Phys. Lett. A* **380**, 267 (2016).
65. J. F. Bercher, *J. Phys. A: Math. Theor.* **45**, 255303 (2012).
66. S. Zare and H. Hassanabadi, *Adv. High Energy Phys.* **2016**, 4717012 (2016).

67. L. Rudnicki, *J. Russ. Laser Res.* **32**, 393 (2011).
68. A. Saha, B. Talukdar and S. Chatterjee, *Eur. J. Phys.* **38**, 025103 (2017).
69. D. Manzano, R. J. Yáñez and J. S. Dehesa, *New J. Phys.* **12**, 023014 (2010).
70. J. Sañudo and R. L. Ruiz, *J. Phys. A: Math. Theor.* **41**, 265303 (2008).
71. P. S. Moreno, R. G. Férrez and J. S. Dehesa, *New J. Phys.* **8**, 330 (2006).
72. S. A. Najafzade, H. Hassanabadi and S. Zarrinkamar, *Can. J. Phys.* **94**, 1085 (2016).
73. J. S. Dehesa, A. R. Plastino, P. Sanchez-Moreno and C. Vignat, *Appl. Math. Lett.* **25**, 1689 (2012).
74. A. Ghasemi, M. R. Hooshmandasl and M. K. Tavassoly, *Phys. Scripta* **84**, 035007 (2011).
75. A. R. Gonzalez, J. A. Vaccaro and S. M. Barnett, *Phys. Lett. A* **205**, 247 (1995).
76. (Eds.) R. Frieden and R. A. Gatenby, *Exploratory Data Analysis Using Fisher Information*, Chap. 7 (Springer-Verlag, 2007), pp. 219–220.

Superstatistics of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator with energy-dependent potentials

M. Labidi, A. Boumali and A. Ndem Ikot*

*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique,
LPAT, Université Larbi-Tébessi, Tébessa, Algeria.*

**University of Port Harcourt, Department of Physics, Theoretical Physics Group, Nigeria.*

**Department of Physics, University of South Africa Florida 1710 Johannesburg- South Africa.*

*e-mail: labidimalika89@univ-tebessa.dz; labidimalika89@gmail.com;
abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz; boumali.abdelmalek@gmail.com;
ndemikotphysics@gmail.com*

Received 15 April 2020; accepted 31 July 2020

In this paper, we investigate the influence of energy-dependent potentials on the thermodynamic properties of the Klein-Gordon oscillator (KGO). With the obtained energy eigenvalues, all the thermal properties of the system have been calculated using the well-known Euler-Maclaurin method. The investigation is extended to the study of the Superstatistics properties of the system. The probability density $f(\beta)$ follows χ^2 Superstatistics (Tsallis statistics or Gamma distribution) for the system. Under the approximation of the low-energy asymptotics of Superstatistics, we calculated partition function and other thermal properties of the system. This approximation leads to a universal parameter q for any Superstatistics, not only for Tsallis statistics. By using the desired partition function, all thermal properties have been obtained in terms of this parameter. Also, the influence of the potentials on the thermal properties, via the parameter γ , are well discussed.

Keywords: Klein-Gordon oscillator; energy-dependent potentials; q-calculus formalism.

PACS: 03.65.Ge; 03.65.-W; 03.65.Ta.

DOI: <https://doi.org/10.31349/RevMexFis.66.671>

1. Introduction

Wave equations such as Schrödinger, Klein-Gordon, and Dirac with energy-dependent potentials have been studied for a long time now. It can be seen in Klein-Gordon and Dirac equations that considering a particle in an external electromagnetic field [1] arising from momentum-dependent interactions and energy-dependent potentials, one can deduce the non-relativistic quantum mechanics, as shown by Green [2]. The presence of the energy-dependent potential in many wave equations has several non-trivial implications because of the complex nature of the problems. For instance, the Klein-Gordon equation is the modification of the scalar product necessary to ensure the conservation of the norm (see appendix A for details).

Following the works of Sazdjian and Formanek [3,4], we observed that the scalar product in the Klein-Gordon equation must be modified concerning the usual definition to have a conserved norm. This modification of the Klein-Gordon equation leads to some good behavior of the physical properties of the system. Many authors have investigated the Schrödinger, Klein Gordon, and Dirac equation with energy-dependent potentials. In recent times, Boumali *et al.*, [5] studied the influence of energy-dependent potentials on the thermal properties of the one-dimensional harmonic oscillator using the Euler-Maclaurin approach. To the best of our knowledge, no relativistic case has been reported on the influence of energy-dependent potentials on the thermal properties of the one-dimensional harmonic oscillator. Therefore the main aim of this paper is to study the effects of the mod-

ified scalar product arising in the energy-dependent Klein-Gordon oscillator problem. The reasons are in two folds: (i) firstly due to the importance of the Klein-Gordon oscillator and its numerous physical applications, and (ii) secondly motivated by the recent study on the effect of energy dependent potentials on the Shannon and Fisher quantities in quantum information theory [6]. After studying the normal thermal properties, we will extend our treatment to study the Superstatistics and its thermal properties of the system. The properties of these systems have become a topic of great interest in the last few years, and it has found many applications in several branches of physics (see Ref. [7] and references therein). It is known that Superstatistics is a branch of statistical mechanics or statistical physics that is devoted to the study of non-linear and non-equilibrium systems. It is characterized by using the superposition of multiple statistical models to achieve the desired non-linearity. In terms of ordinary statistical ideas, this is equivalent to compounding the distributions of random variables and it may be considered as a simple case of a doubly stochastic model. Besides in Superstatistics it is argued that a system where fluctuations of temperature do exist, coarse-grained measurements of energy performed over spatial and temporal scales are larger than those defined by the correlation properties of the temperature will yield statistical distributions that can be written as a superposition of canonical distributions. More precisely, Superstatistics is a superposition of different statistics such as ordinary Boltzmann factor and the fluctuation of the intensive parameter with inverse temperature. Therefore, Superstatist-

tics describes a non-equilibrium system with stationary state and intensive parameter fluctuations. If E is the energy of a microstate, the Boltzmann factor in the Superstatistics is written as,

$$B(E) = \int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta, \quad (1)$$

where $B(E)$ is a kind of effective Boltzmann factor for the non-equilibrium system for the Superstatistics of the system, $f(\beta)$ is the distribution function, $e^{-\beta E}$ is the Boltzmann factor and E is the energy level for the system. $B(E)$ differs significantly from the ordinary Boltzmann factor, which is recovered when $f(\beta) = \delta(\beta - \beta_0)$. From (1), we can recognize that the generalized Boltzmann factor of Superstatistics is given by the Laplace transform of the probability density $f(\beta)$. Although there are many possibilities, certain criteria must be fulfilled for physical relevant of the system:

- The probability function $f(\beta)$ must be a normalized probability density. It may, be a physically relevant density from statistics, say Gaussian, uniform, chi-squared (Gamma distribution), log-normal.
- The integral $\int_0^{\infty} f(\beta) e^{-\beta E} d\beta$ must exist, and consequently, the new statistics must be normalizable.
- The new statistics should reduce to BG-statistics if there are no fluctuations in intensive quantities at all.

In this stage, two remarks seem pertinent: (a) although any $f(\beta)$ is possible in the Superstatistics approach, in practice, one usually observes only a few relevant distributions: (i) χ^2 -Superstatistics (=Tsallis statistics), (ii) inverse χ^2 -Superstatistics, and (iii) log-normal Superstatistics. In our case, we will focus only on χ^2 -Superstatistics or Gamma distribution: this choice is justified by the wider use of this distribution in the literature. As an example, in blinking quantum dots, cosmic ray statistics, and various scattering processes in particle physics. Other recent applications of the Superstatistics are briefly reviewed by Refs. [8, 9]. (b) The applicability of this formalism impose that the Superstatistics formalism can only be applied if you have sufficient time scale separation in the complex system. Beck and Tsallis [10, 11] show the existence of a mapped of the superstatistical non-equilibrium system onto an equilibrium system of ordinary statistical mechanics with an average inverse temperature $\beta_0 \equiv \langle \beta \rangle$.

This mapped allows us to say that it is possible to carry out ordinary statistical mechanics to the Superstatistics of a non-equilibrium system with all the known formulas. Thus, the second task of this work is to use the formalism of Superstatistics to study the one-dimensional Klein-Gordon oscillator and calculate the Superstatistics properties of this oscillator. This study, to the best of our knowledge, is new, novel, and has not been treated and discussed in the available literature. Finally, this paper will also study the effect of the saturation of the spectrum on the thermodynamic properties of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator for both

ordinary statistical mechanics and generalized statistical mechanics for superstatistical systems. Firstly, we will study the effect of the saturation of the spectrum on the thermodynamic properties for this oscillator in ordinary statistical mechanics, and then extend the discussions to the case of generalized statistical mechanics for superstatistical systems. In both cases, the dependence with the gamma parameter of the partition function, and other thermal quantities such as free energy, total energy, entropy and specific heat have been determinate. In our case, we have a choice of a function $f(\beta)$ following a Gamma distribution, which is defined by

$$f(\beta) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} e^{-\frac{\beta}{b}}. \quad (2)$$

where ($b > 0, c > 1$) are real parameters.

This choice is justified by the wider use of its distribution in the literature. Now, by using the function, we will calculate at first the generalized Boltzmann factor, $B(E)$, and consequently the partition function for the system $Z(\beta)$. With the partition function, all other thermodynamic properties, as well as their dependence with the parameter γ , will be obtained.

The paper is organized as follows. We study in Sec. 2, the thermal properties of the oscillator for the case of the potentials dependent on energy in the framework of the statistical mechanics. Then Sec. 3 is devoted to the formalism of Superstatistics. Section 4 will be brief a conclusion.

2. The thermal properties of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator with energy-dependent potentials

2.1. The eigensolutions: review

The free Klein-Gordon equation is ($\hbar = m = \omega = c = 1$) [6]

$$\{p^2 - (E^2 - 1)\} \psi = 0. \quad (3)$$

In the presence of the oscillator interaction, (3) becomes

$$\{(p + ix)(p - ix) - (E^2 - 1)\} \psi(x) = 0, \quad (4)$$

or explicitly, we write

$$\left(\frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \psi(x, E) = \left\{ \frac{E^2 - 1}{2} + \frac{1}{2}(1 + \gamma E) \right\} \psi(x, E). \quad (5)$$

To obtain Eq. (5), we make the substitution $p_x \rightarrow p_x + i(1 + \gamma E)x$, in which the parameter γ is is the energy-dependent term, then Eq. (5) represent an equation of a harmonic oscillator in one-dimension. So, the corresponding eigensolutions are given as [6]

$$\psi(x, E) = C_n H_n(\sqrt{\lambda}x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x^2\right), \quad (6)$$

$$E^4 - 2E^2 - 4n^2 - 4n^2\gamma E + 1 = 0, \tag{7}$$

with $\lambda = \sqrt{1 + \gamma E}$, and C_n is the normalization constant and is calculated as follows

$$C_n^2 = \frac{1}{2^n n!} \frac{(1 + \gamma E)^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{\pi}} \left\{ E - \frac{\gamma}{2\sqrt{1 + \gamma E}} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right\}^{-1},$$

Here H_n is the Hermite polynomials. The Eq. (7) is an algebraic equation of degree 4, which has real and complex solutions. The complex solution does not have any physical meaning except the real solutions. Therefore, some interesting results can be extrapolated directly as follows:

- the modified scalar product is the origin of the spectrum that exhibits saturation instead of growing infinitely,
- this saturation appears for the high levels contrary to what has been found in the non-relativistic case,
- the analytical asymptotic limits are well depicted,
- the beginning of the saturation starts from a specific quantum number N_{max} . These parameters decrease rapidly when $|\gamma|$ increases slowly.

Now, we intend to show the influence of the parameter γ on the probability density ρ_{KG} . The probability density is expressed by the following equation (see Appendix A for details)

$$\begin{aligned} \rho_{KG}(x, E) &= \psi(x, E)^* \left\{ 2E - \frac{\partial V(x, E)}{\partial E} \right\} \psi(x, E), \\ &= \left(2E - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right) |\psi(x, E)|^2, \end{aligned} \tag{8}$$

So that ρ_{KG} represent a physical system, only two possibilities can exist regardless of the sign of ρ_{KG} , i.e., either $\rho_{KG} < 0$ or $\rho_{KG} > 0$. Thus, as a consequence of this, the sign of the parameter γ is negative for particles, and positive for antiparticles (see Ref. [6])

2.2. The thermal quantities in ordinary statistical mechanics via the Euler-MacLaurin formula

To obtain the partition function from the obtained energy spectrum, we adopt the following way, which the partition function Z is defined by [5]:

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}, \tag{9}$$

were $\beta = (1/k_B T)$ with k_b is the Boltzmann constant and T is the temperature in Kelvin. Tto calculate this function, we adopt two approaches: (i) we first fixed the parameter γ , and then varied the values of n until we obtain the saturation phenomena in our spectrum of the energy (Eq. (7)) and so on,

and (ii) via the method used by the authors [5] which is well described in their work. Following this, Eq. (9) becomes

$$\begin{aligned} Z &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n} \simeq \underbrace{\sum_{n=0}^N e^{-\beta E_n}}_I + \text{All levels are} \\ &\text{in saturations} \simeq \underbrace{\sum_{n=0}^N e^{-\beta E_n}}_{\text{contribution of few levels}}. \end{aligned} \tag{10}$$

The first term in (10) is the contribution of all levels until the beginning of a saturation behavior in the spectrum of energy. The second one is the contribution of all saturation levels.

To evaluate the partition function, we use the Euler-Maclaurin formula [13–18]

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f(x) &= \frac{1}{2}f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx \\ &- \sum_{p=1}^{\infty} \frac{B_{2p}}{(2p)!} f^{(2p-1)}(0), \end{aligned} \tag{11}$$

where B_{2p} are the Bernoulli numbers. and $f^{(2p-1)}$ is the derivative of order $(2p - 1)$. In statistical mechanics, the Boltzmann factor $e^{-\beta E}$ is an essential tool used to determine thermodynamic quantities such as the partition function $Z(\beta)$, free energy $F(\beta)$, total energy $U(\beta)$, entropy $S(\beta)$, and specific heat $C(\beta)$, for a given system. These quantities are defined as

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \tag{12}$$

$$\frac{S}{k_B} = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad \frac{C}{k_B} = \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \tag{13}$$

In what follows we will focus our study on the influence of the parameter γ on these quantities for the case of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator.

2.3. Results and discussions

We give our basic results in Figs. 1, 2, 3, and 4, where we plot the variation of all thermal functions versus the inverse of the temperature β for different values of γ . We emphasize that the behavior of the partition function, specific heat, free energy, and entropy are not identical to those obtained for the relativistic oscillators. The reason for this is fundamentally related to the nature of the interactions of KG oscillator and the potential that are linearly depends on the energy considered here. We must mention that all these results found here about the thermal properties in our problem can be extended to the case of 1D Dirac oscillator (both Eqs. (7) and (B.8)).

In Fig. 1, we plot the variation of the partition function Z concerning β for different values of γ . Figure 1 shows that partition function increases with decreases values of β . Besides the effect of the parameter γ on the partition function is more apparent for nearly high temperatures.

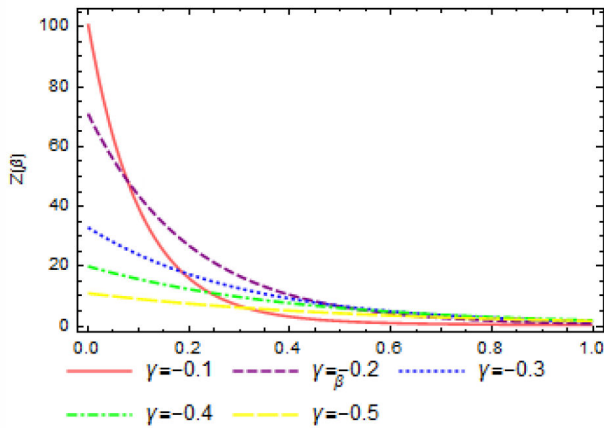


FIGURE 1. The partition function Z versus β with different parameters of γ .

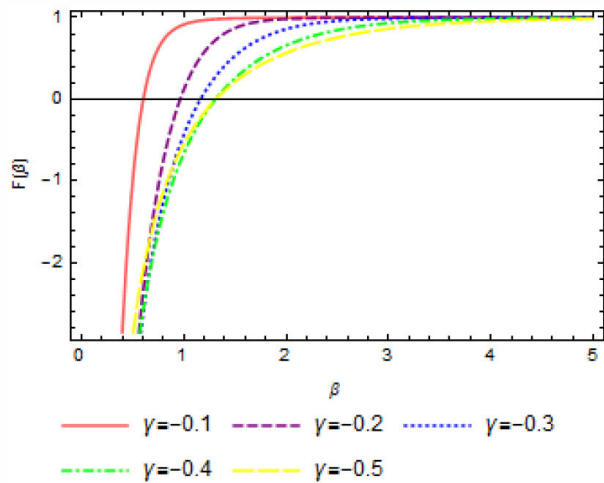


FIGURE 2. The free energy F versus β with different parameters of γ .

In Fig. 2, we give the variation of the free energy F as a function of the parameter β for different values of γ : we can see that the free energy F has an upper limit for the low temperatures.

In Fig. 3 we observe that the entropy decreases with parameter β and has an upper limit for the high temperatures: The effect of γ on the entropy S is more apparent for the high temperatures. For the low temperatures, we have $S \rightarrow 0$.

In Fig. 4 the specific heat C_v versus the temperature inverse β for different values of γ values have been well depicted. We observe that, for each specific value of γ , each curve has a peak symmetry around a suitable temperature β . The intensity of these peaks increases as γ increases. For the high values of β we have $C_v \rightarrow 0$: the third law of thermodynamics is well fulfilled.

Now, we are ready to extend our discussions to the case of Generalized statistical mechanics for a superstatistical framework.

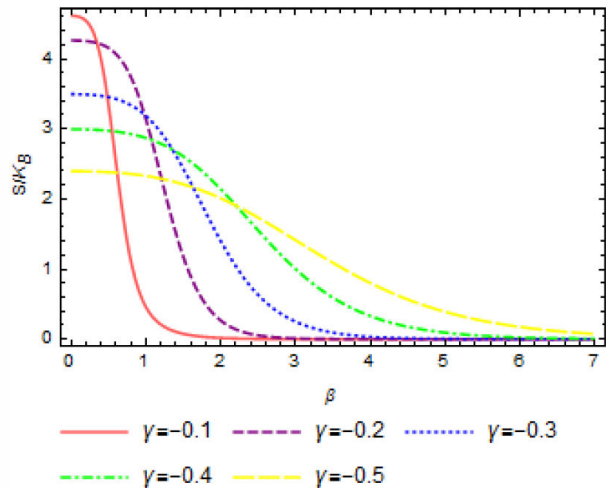


FIGURE 3. The entropy S versus β with different parameters of γ .

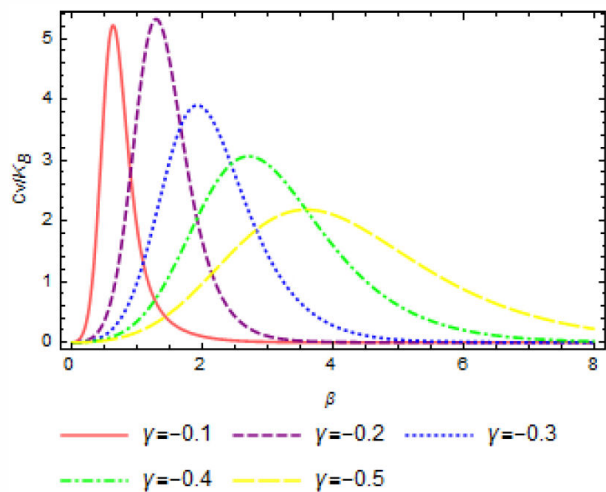


FIGURE 4. Specific heat versus β with different parameters of γ .

3. Superstatistical properties of the one-dimensional Klein-Gordon oscillator with energy-dependent potentials

3.1. Partition function in Superstatistics

Instead to use the habitual stationary probability distribution

$$\frac{e^{-\beta E}}{Z}, \tag{14}$$

we have

$$p(E) = \frac{B(E)}{Z}, \tag{15}$$

with

$$Z(\beta) = \sum_n B(E_n),$$

where $Z(\beta)$ is the normalization constant of $e^{-\beta E}$ for a given β (or partition function).

In what follows we use the χ^2 -distribution or Gamma distribution: the probability density function reads as

$$f(\beta) = \frac{1}{b\Gamma(c)} \left(\frac{\beta}{b}\right)^{c-1} e^{-\frac{\beta}{b}}. \tag{16}$$

Note here that in the superstatistics approach, only a few possible distributions $f(\beta)$ are relevant: (i) χ^2 -superstatistics (=Tsallis statistics), (ii) inverse χ^2 -superstatistics, and (iii) log-normal superstatistics. In our case, we are focused on Gamma distribution defined by Eq. (16): this choice is justified by the wide use of this distribution in the literature: as an example, we can cite the following: in blinking quantum dots, cosmic ray statistics, various scattering processes in particle physics [9], one-dimensional Dirac oscillator [7] and the thermo-magnetic properties of a system of 2D GaAs quantum dots [34]. Other recent applications of the superstatistics are briefly reviewed by Refs. [8, 25, 26] and references therein.

The integration over β yields the generalized Boltzmann factor

$$B(E_n) = \{1 + bE_n\}^{-c}. \tag{17}$$

Now, according to the following works of Tsallis [19–23], the non-extensive statistics of Tsallis defined by the so-called q -exponential function

$$e_q^{-\beta_0 E} = (1 + (q - 1)\beta_0 E)^{-\frac{1}{q-1}}, \tag{18}$$

with the q -exponential function is defined by [22, 23]

$$e_q(x) = \begin{cases} (1 + (1 - q)x)^{-\frac{1}{q-1}} & 0 < q < 1 \\ e^x & q = 1 \end{cases}, \tag{19}$$

and where the parameter q is the index of non-extensive statistical mechanics: if we identify $c = 1/q - 1$ and $bc = \beta_0$ where β_0

$$\beta_0 \equiv \langle \beta \rangle = \int_0^\infty \beta f(\beta) d\beta = bc, \tag{20}$$

is the average of β , Eq. (17) becomes the generalized Boltzmann factor $[(1 + (q - 1)\langle \beta \rangle E_n)^{-(1/q-1)}]$ of non-extensive statistical mechanics. In this case, Eq. (17) is transformed into

$$B(E) = e_q^{-\langle \beta \rangle E_n}. \tag{21}$$

Note here that in the limit where $q \rightarrow 1$, we recover both (i) the habitual exponential function and (ii) the ordinary statistical mechanics.

In our case, to seek simplicity, we use the approximation of the low-energy asymptotics (for more detail, see Ref. [7]). This approximation represents the leading order correction to ordinary statistical mechanics in our system with temperature fluctuations for small values of the energy E . More precisely, the low-energy asymptotics behavior is universal: that means that the generalized Boltzmann factor for a different choice

of Superstatistics is expressed in terms of the universal parameters q and β_0 as follows:

$$B(E_n) \approx e^{-\beta_0 E_n} \left(1 + \frac{a}{2} \langle \beta \rangle^2 E_n^2 + g(q) \langle \beta \rangle^3 E_n^3 + \dots\right), \tag{22}$$

where the function $g(q)$ depends on the Superstatistics chosen, e , on the choice of $f(\beta)$. In our case (Gamma distribution), $g(q) = -(a^2/3)$.

Now, due to this universality, Beck [24] introduced a universal parameter q for any Superstatistics, not only for Tsallis statistics: this parameter is given by the following relation

$$q = \frac{\langle \beta^2 \rangle}{\langle \beta \rangle^2}. \tag{23}$$

The physical meaning of the parameter q is just the coefficient of variation of the distribution $f(\beta)$, defined by the ratio of standard deviation and mean. If there are no fluctuations of β at all, we obtain $q = 1$ as required.

So, according to this approximation, the generalized Boltzmann factor, can be rewritten as

$$B(E_n) = e^{-\frac{1}{q-1} \ln(1+(q-1)\langle \beta \rangle E_n)} \approx e^{-\beta_0 E_n} \times \left(1 + \frac{a}{2} \langle \beta \rangle^2 E_n^2 - \frac{a^2}{3} \langle \beta \rangle^3 E_n^3 + \dots\right), \tag{24}$$

with $a = q - 1$. The zeroth-order approximation to $B(E_n)$ corresponds, as is expected, to the “pure” Boltzmann statistics

$$B(E_n) \sim e^{-\langle \beta \rangle E_n}. \tag{25}$$

3.2. Generalized statistical mechanics for superstatistical systems

As we know in statistical mechanics, the habitual Boltzmann factor $e^{-\beta E}$ is an essential tool used to determine thermodynamic quantities such as the partition function $Z(\beta)$, free energy $F(\beta)$, total energy $U(\beta)$, entropy $S(\beta)$ and specific heat $C(\beta)$, for a given system. These quantities are defined as

$$F = -\frac{1}{\beta} \ln Z, \quad U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \tag{26}$$

$$\frac{S}{k_B} = \ln Z - \beta \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}, \quad \frac{C}{k_B} = \beta^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}. \tag{27}$$

Recently, a remark about the validity of the applicability of the Eqs. (26) and (27) to the case of Superstatistics seems important has been treated. To extend all well-known formulae of normal statistical mechanics to the case of Superstatistics, are restricted by the following conditions; First, Superstatistics is characterized by using the superposition of multiple different statistical models to achieve the desired non-linearity. In terms of ordinary statistical ideas, this is equivalent to compounding the distributions of random variables.

More precisely, Superstatistics assumes that the correct ensemble is not canonical, but a superposition of canonical ensembles at different (inverse) temperatures weighted by a factor $f(\beta)$. So, the Superstatistics denoted by symbol $B(E)$, allows the infinite types of system's distribution with respect to E , once the fluctuating distribution $f(\beta)$ is given. This factor is based on three crucial premises; (i) a system is partitioned into cells that can be considered to be reached an equilibrium locally, which is characterized by a single β , (ii) its statistical factor is Gibbsian and (iii) the separation between two time scales is adequate, that is, the time for approaching to each local equilibrium state is much faster than that for varying $f(\beta)$. This last criterion means that the framework of the theory of Superstatistics regards the existence of temporally local equilibrium within each of the cells that subdivide a non-equilibrium thermodynamic system. Thus, this formalism can only be applied if we have sufficient time scale separation in the complex system, so that the system has enough time to find local equilibrium in the local cells with a given β . In the local cells, local equilibrium statistical mechanics is then valid for the given β in that cell (for more detail see Ref. [7] and references therein). In conclusion, and following these arguments, it is possible to do ordinary statistical mechanics for this superstatistical non-equilibrium system, with all the known formulae such as described by Eqs. (12 and 13)). Note here that some recent theoretical developments, in the context of the theory of superstatistics, have used the known formulae of normal statistical mechanics in their investigation on some problems in physics [27–33]. Their results can be accepted only in the framework of the above arguments about the applicability of the habitual thermodynamics laws in the superstatistics formalism.

In the recent paper of Castaño *et al* [34], the authors used the q -algorithm of the q -calculus formalism [22, 23] to discuss thermo-magnetic properties of a system of 2D GaAs quantum dots. Here we can mention two remarks about this formalism:

- When we use a q -logarithm, the algebra of our problem is deformed, and it follows the theory of q -calculus formalism with the following q -sum and q -product definitions [22, 23]

$$x \otimes_q y = (x^{1-q} + y^{1-q} - 1)_{+}^{\frac{1}{1-q}}, \quad (x >, y > 0) \quad (28)$$

$$x \oplus_q y = x + y + (1 - q)xy. \quad (29)$$

- Following this algebra, the q -derivative definition, in the framework of the q -calculus formalism, is given by [35–39]

$$\begin{aligned} D_q f(x) &\equiv \lim_{x \rightarrow y} \frac{f(x) - f(y)}{x \ominus_q y} \\ &= \{1 + (1 - q)x\} \frac{df(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (30)$$

Although the superstatistics is a non-equilibrium process, the authors (i) do not give the arguments of the validity of applicability of habitual law thermodynamics in superstatistics for their case, and (ii) they have not used Eq. (30) in their calculations.

Now, when we starting with the following generalized Boltzmann factor defined by E. (24), the partition function is

$$\begin{aligned} Z &= \sum_n B(E_n) = \sum_n e^{-\langle\beta\rangle E_n} \\ &\times \left(1 + \frac{a}{2} \langle\beta\rangle^2 E_n^2 - \frac{a^3}{3} \langle\beta\rangle^3 E_n^3\right), \\ &= \left(1 + \frac{a}{2} \langle\beta\rangle^2 \frac{d^2}{d\langle\beta\rangle^2} + \frac{a^3}{3} \langle\beta\rangle^3 \frac{d^3}{d\langle\beta\rangle^3}\right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\langle\beta\rangle E_n}, \\ &= \left(1 + \frac{a}{2} \langle\beta\rangle^2 \frac{d^2}{d\langle\beta\rangle^2} + \frac{a^3}{3} \langle\beta\rangle^3 \frac{d^3}{d\langle\beta\rangle^3}\right) Z. \end{aligned} \quad (31)$$

To evaluate this partition function, we calculate at first the term Z with the same method used above. Thus, we found That

$$\begin{aligned} Z(\langle\beta\rangle) &= \left(1 + \frac{a}{2} \langle\beta\rangle^2 \frac{d^2}{d\langle\beta\rangle^2} + \frac{a^3}{3} \langle\beta\rangle^3 \frac{d^3}{d\langle\beta\rangle^3}\right) \\ &\times \underbrace{\sum_{n=0}^N e^{-\langle\beta\rangle E_n}}_{\text{contribution of few levels}} \end{aligned} \quad (32)$$

So, Z is an essential tool used to determine thermodynamic quantities such as the partition function $Z(\beta)$, free energy $F(\beta)$, total energy $U(\beta)$, entropy $S(\beta)$, and specific heat $C(\beta)$, for a given system. These quantities are defined by replacing β by $\langle\beta\rangle$ in Eqs. (12) and (13).

3.3. Results and discussions

Now, after this discussion about (26) and (27) in the case of the Superstatistics formalism, we are ready to discuss our numerical simulations found. In our case, we concentrate only on the main function, such the entropy, and the specific heat to seek the existence of saturation and the nature of this saturation.

Our basic results are plotted in Figs. 5, 6, 7 and 8, in these figures, we plot the variation of the entropy and the specific heat versus the inverse of the temperature β for different values of γ and q : recall that these parameters denote the parameter of the dependence of the potential with energy and the parameter of deformation respectively.

Besides these figures are subdivided into four canvas following the choice of the parameter γ . Here we have selected four values of $\gamma < -1$ [6], which correspond the case of particles ($E > 0$). Each canvas is presented and specified by a value of the parameter γ . It contains the curves of the

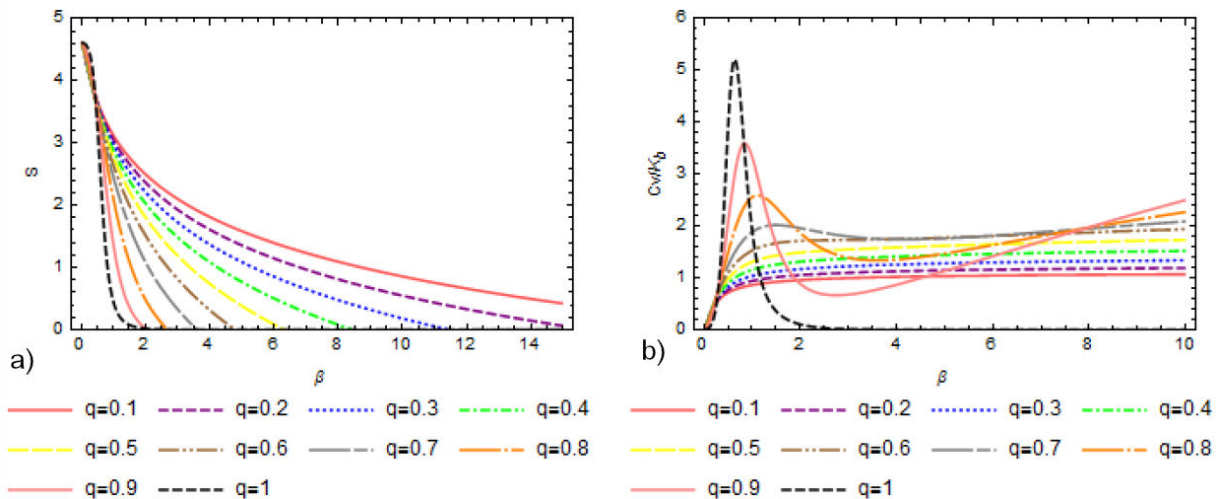


FIGURE 5. Thermal quantities of 1D (KGO) for $\gamma = -0.1$ and different values of q .

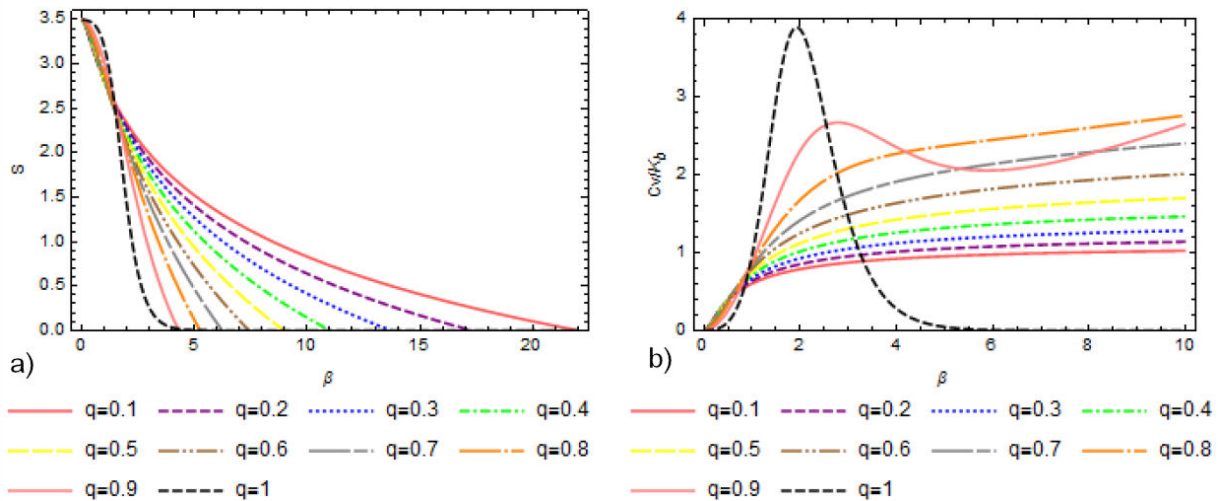


FIGURE 6. Thermal quantities of 1D (KGO) for $\gamma = -0.3$ and for different values of q .

entropy and the specific heat for different values of the parameter of deformation q . We emphasize that the behavior of these functions is not identical from canvas to another.

Now, from these canvases, three remarks can be made about the influence of both parameters γ and q on the thermal properties of our oscillator:

- From canvas to another, we can see that the number of Gaussian-like shape in specific heat curves is different. For a specific value of the parameter γ , we observe that (i) these curves have a peak symmetry around a suitable temperature β , (ii) the intensity of these peaks increases as q decreases and (iii) finally, they appear when $q \rightarrow 1$. Also, the number of these peaks decreases when $|\gamma|$ increases, and they increase when γ decreases: in our case, we have a maximum number of these peaks when $\gamma = -0.1$.

- These peaks correspond to the phenomena of saturation that appear in the case of the problems with the potentials dependence energy. In this context, we note that the observation of peaks in the curves of specific heat indicates that there are a small number of discrete energy levels dominating the behavior of our system in question. This behavior is due essentially to the dependence of the potential of our oscillator with the energy: as argued in [5], this situation is very similar to the case of Schottky peak (Schottky anomaly) which is a broad maximum in the specific heat observed in systems with several discrete energy levels, and not a phase transition.
- Contrarily to the non-relativistic limit (see Ref. [5]), the limit of specific heat is equal zero only in very high-temperatures ($\beta \rightarrow 0$). In very low-temperatures ($\beta \rightarrow \infty$), for different values of γ , this limit depends

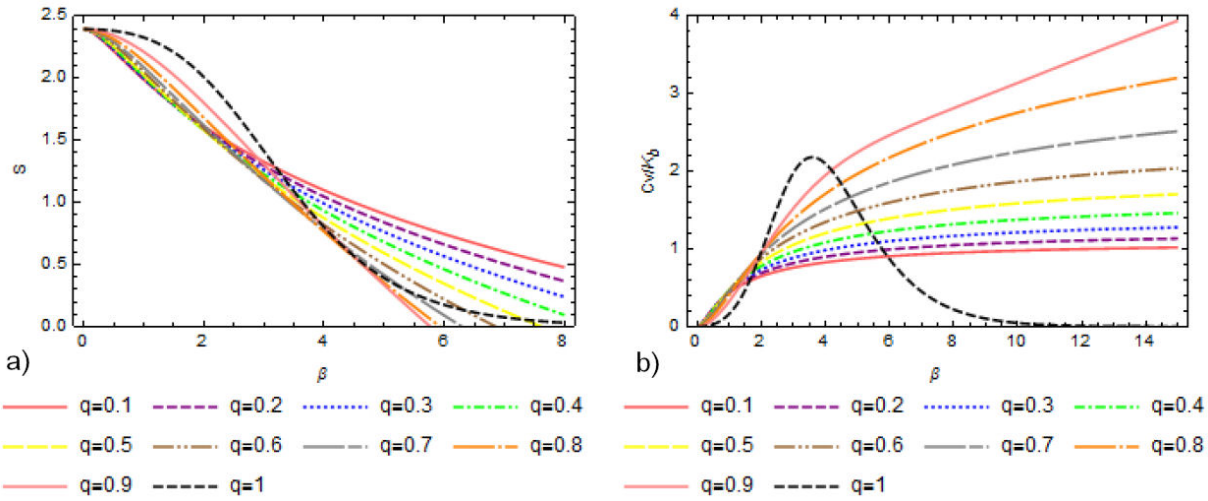


FIGURE 7. Thermal quantities of 1D (KGO) for $\gamma = -0.5$ and for different values of q .

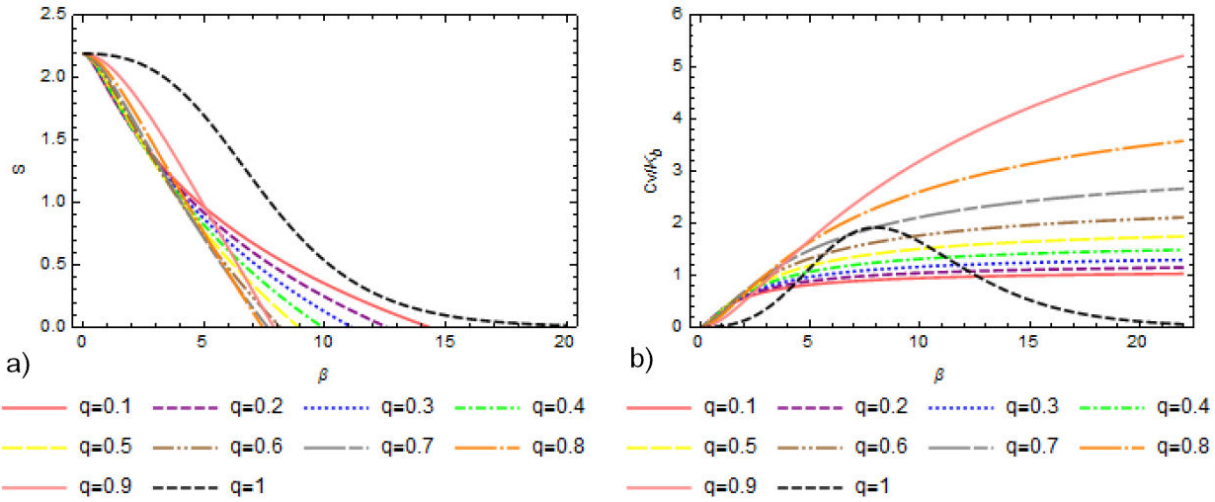


FIGURE 8. Thermal quantities of 1D (KGO) for $\gamma = -0.7$ and for different values of q .

on the value of the parameter q . When q is around 1, we obtain the well know third thermodynamic law.

- On the other hand, in the range of high temperatures ($\beta \rightarrow 0$), we have $C \rightarrow 0$: this situation, for all canvas, can be argued to the existence of saturation of spectrum of energy for this type of potential, *i.e.*, the energy-dependent potential. So, all curves, exhibit a transition phase between the growth phase, and the so-called saturation phase. In our best knowledge, this phenomena do not treated and discussed in the literature.

Recently, the superstatistical of the one-dimensional Dirac oscillator has been well studied [7]. Although arguments of the validity of applicability of law thermodynamics in superstatistics for both Dirac and Klein-Gordon equations are

the same, the difference is very clear. The reason for this is twofold:

- This study in question is devoted to the case of the one-dimensional Dirac oscillator describing fermionic particles without energy-dependent potentials.
- Although the eigenvalues of one-dimensional Dirac oscillator with energy-dependent potentials have the same form of energy as those for our considered case, the situation is not the same: the probability density, in this case, is given by [3]

$$\rho = \bar{\psi} \gamma^0 \left(1 - \frac{\partial V}{\partial E} \right) \psi. \quad (33)$$

which ψ is a spinor, not a scalar. This definition is very different from the case of the Klein-Gordon equation

(see Eq. (A.17)), which describing the bosonic particles.

In conclusion, in order to understand well the influence of the parameter of q of our Superstatistics formalism on the thermal properties of our oscillator, we choose the lowest values of the parameter γ . This parameter contains all information about the potentials which depend on energy.

4. Conclusion

In this work, we studied the influence of energy-dependent potentials on the thermodynamic quantities of a one-dimensional Klein-Gordon oscillator. The variation of these functions vs β have been given in the figures. We have obtained the variation of thermal functions such as the free energy, the entropy, and the specific heat with β , and also discussed the results for high temperatures for different values of γ .

Also, we considered the Superstatistics of the statistical mechanics of 1D-(KGO). We derived, by using the form of the energy spectrum of this oscillator, the partition function of our problem in question. In the framework of the applicability of this formalism, which imposes that the Superstatistics formalism can only be applied if you have sufficient time scale separation in the complex system. So, we show the existence of a mapped of the superstatistical non-equilibrium system onto an equilibrium system of ordinary statistical mechanics exists. This mapped allows us to tell that it is possible to do ordinary statistical mechanics for this superstatistical non-equilibrium system, with all the known formulas.

In our case, we have used (i) this mapping to determinate the Superstatistics of our problem in question, and (ii) choice a function $f(\beta)$ following a Gamma distribution which is defined by Eq. (2). Now, by using this function, we have calculated at first the generalized Boltzmann factor, $B(E)$, and consequently the desired partition function for our problem $\mathcal{Z}(\beta)$. According to this function, all thermodynamic properties such as mean energy, Helmholtz free energy, entropy, and the specific heat have been determinate: as a result we observe that phenomena of saturation in the curve of specific heat appear only in the lowest values of γ (in our case $\gamma = -0.1$) and when the parameter of our Superstatistics formalism $q \rightarrow 1$. Finally, the limit of specific heat is equal to zero only in very high-temperatures $\beta \rightarrow 0$. In very low-temperatures ($\beta \rightarrow \infty$), for different values of γ , this limit depends on the value of the parameter q . When q is around 1, we obtain the well-known third thermodynamic law. In the range of high temperatures ($\beta \rightarrow 0$), we have ($C \rightarrow 0$). This situation, can be argued to the existence of saturation of the spectrum of energy for this type of potential, *i.e.*, the energy-dependent potential. So, all curves, as in the non-relativistic limit, exhibit a transition phase between the growth phase and the so-called saturation phase.

Appendix

A. Modified product scalar in the Klein-Gordon equation

Let us examine this problem of normalization by considering the Klein-Gordon equation [3]

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \Delta \psi + m^2 \psi + V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi = 0, \tag{A.1}$$

and its complex conjugate

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} - \Delta \psi^* + m^2 \psi^* + V \left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^* = 0 \tag{A.2}$$

When we multiply these two equations multiplied by ψ^* and ψ respectively, and after a subtraction we obtain

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) + \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) \\ & + \psi \left\{ V \left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi^* \right\} \\ & - \psi^* \left\{ V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi \right\} = 0. \end{aligned} \tag{A.3}$$

By using that

$$f(t) = \frac{\partial}{\partial t} \int ds f(s), \tag{A.4}$$

and to obtain the continuity equation $(\partial \rho / \partial t) + (\partial j / \partial x) = 0$, with $j = \psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*$, we have

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int ds \right. \\ & \times \left[\psi(\mathbf{r}, s) \left\{ V \left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi^*(\mathbf{r}, s) \right\} \right. \\ & \left. \left. - \psi^*(\mathbf{r}, s) \left\{ V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi(\mathbf{r}, s) \right\} \right] \right] \\ & + \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) = 0. \end{aligned} \tag{A.5}$$

Here the density ρ is written as

$$\begin{aligned} \rho = & \frac{1}{i} \left\{ \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int ds \right. \\ & \times \left[\psi(\mathbf{r}, s) \left\{ V \left(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi^*(\mathbf{r}, s) \right\} \right. \\ & \left. \left. - \psi^*(\mathbf{r}, s) \left\{ V \left(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s} \right) \psi(\mathbf{r}, s) \right\} \right] \right\}. \end{aligned} \tag{A.6}$$

As we have that

$$\int d^3 r \rho = 1, \tag{A.7}$$

so

$$\int d^3r \frac{1}{i} \left[\psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \int ds \int ds \right. \\ \times \left[\psi(\mathbf{r}, s) \left\{ V(\mathbf{r}, -i \frac{\partial}{\partial s}) \psi^*(\mathbf{r}, s) \right\} \right. \\ \left. \left. - \psi^*(\mathbf{r}, s) \left\{ V(\mathbf{r}, i \frac{\partial}{\partial s}) \psi(\mathbf{r}, s) \right\} \right] \right] = 1, \quad (A.8)$$

is the exact expression of normalization.

Putting now that

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int dE a_E \varphi_E(\mathbf{r}) e^{-iEt}, \quad (A.9)$$

$$\psi^*(\mathbf{r}, t) = \int dE' a_{E'}^* \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) e^{+iE't} \quad (A.10)$$

so we have

$$i\rho = i \int \int dE dE' a_E^* a_E \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) \\ \times \left[e^{-i(E-E')t} (E' + E) \right. \\ \left. - \left\{ \frac{e^{-i(E-E')t}}{E' - E} + \text{Cte} \right\} \right. \\ \left. \times \{V(\mathbf{r}, E') - V(\mathbf{r}, E)\} \right]. \quad (A.11)$$

Now, if we choose that

$$a_E = \delta(E - E_0), \quad (A.12)$$

$$a_{E'} = \delta(E' - E_0), \quad (A.13)$$

and after a limit development of V with

$$V(\mathbf{r}, E') = V(\mathbf{r}, E) + (E' - E) \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} \\ + \frac{1}{2} (E' - E)^2 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, E)}{\partial E^2} + \dots, \quad (A.14)$$

Eq. (A.11) becomes

$$i\rho = i \int \int dE dE' \delta(E - E_0) \delta(E' - E_0) \varphi_E(\mathbf{r}) \varphi_{E'}^*(\mathbf{r}) \\ \times e^{-i(E-E')t} \left[E' + E - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} - \frac{1}{2} (E' - E) \right. \\ \times \left. \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, E)}{\partial E^2} + \dots \right] + \text{Cte} \left[(E' - E) \frac{\partial V(\mathbf{r}, E)}{\partial E} \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (E' - E)^2 \frac{\partial^2 V(\mathbf{r}, E)}{\partial E^2} + \dots \right] \quad (A.15)$$

After integration on E and E' , we arrive at the final result

$$\rho = \varphi_{E_0}(\mathbf{r}) \varphi_{E_0}^*(\mathbf{r}) \left\{ 2E_0 - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E_0)}{\partial E_0} \right\}, \quad (A.16)$$

and the condition of normalization becomes

$$\int d^3r \varphi_{E_0}(\mathbf{r}) \varphi_{E_0}^*(\mathbf{r}) \left\{ 2E_0 - \frac{\partial V(\mathbf{r}, E_0)}{\partial E_0} \right\} = 1. \quad (A.17)$$

B. The eigensolutions of 1D Dirac oscillator with energy-dependent potential

The free Dirac equation is:

$$[\alpha(p - i\lambda\gamma^0 x) + \gamma^0] \psi = E\psi. \quad (B.1)$$

where $\lambda = \sqrt{1 + \gamma E}$, $\alpha = \sigma_x$ and γ^0 are the Dirac matrices. These matrices are given by

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^0 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (B.2)$$

From (B.1) we get a set of coupled equations as follows:

$$(p_x - i\lambda x) \psi_1 = (E + 1) \psi_2, \quad (B.3)$$

$$(p_x + i\lambda x) \psi_2 = (E - 1) \psi_1. \quad (B.4)$$

Using (B.4) we have

$$\psi_2 = \frac{(p_x - i\lambda x)}{(E + 1)} \psi_1 \quad (B.5)$$

Putting (B.5) into (B.3), we get

$$(p_x + i\lambda x)(p_x - i\lambda x) \psi_1 = (E^2 + 1) \psi_1 \quad (B.6)$$

In the presence of a potential with energy-dependent potential, (B.6) changes into

$$\left(\frac{p_x^2}{2} + \frac{1}{2} \lambda^2 x^2 \right) \psi_1(x, E) \\ = \left(\frac{E^2 - 1 + \lambda}{2} \right) \psi_1(x, E) \quad (B.7)$$

the Eq. (B.7) is the standard equation of a harmonic oscillator in one-dimensional. The energy levels are well-known, and are given by

$$E^4 - 2E^2 - 4\gamma n^2 E - 4n^2 + 1 = 0, \quad (B.8)$$

and the wave functions is

$$\psi_1(x, E) = C_n H_n(\sqrt{\lambda} x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} x^2\right). \quad (B.9)$$

The total associated wave function is

$$\psi(x, E) = C_n \left(\frac{1}{(E+1)} \right) \\ \times H_n(\sqrt{\lambda} x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2} x^2\right) \quad (B.10)$$

where C_n is the normalization constant, and H_n is the Hermite polynomial

$$C_n^2 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left(2^n n! \left(1 - \frac{\gamma}{2\lambda} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \right) \times 2^{n-1} (n-1)! \left(1 - \frac{\gamma}{2\lambda} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right)^{-1}. \quad (\text{B.11})$$

Acknowledgments

The authors would like to thank Prof Lyazid Chetouani, University of Constantine, Algeria, for his communication about the modified product scalar in the Klein-Gordon equation. It is a great pleasure for the authors to thank the referee for helpful comments. This work was fully supported by the "Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique (DGRSDT)" of Algeria as a part of PRFU B00L02UN120120200001.

1. H. Snyder and J. Weinberg, *Phys. Rev.* **57** (1940) 307; I. Schiff, H. Snyder and J. Weinberg, *Phys. Rev.* **57** (1940) 315. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.57.307> <https://doi.org/10.1103/PhysRev.57.315>
2. A. M. Green, *Nucl. Phys.* **33** (1962) 218. [https://doi.org/10.1016/0029-5582\(62\)90521-7](https://doi.org/10.1016/0029-5582(62)90521-7)
3. H. Sazdjian, *J. Math. Phys.* **29** (1988) 1620. <https://doi.org/10.1063/1.527910>
4. J. Formanek, J. Mares and R. Lombard, *Czech. J. Phys.* **54** (2004) 289. <https://doi.org/10.1023/B:CJOP.0000018127.95600.a3>
5. A. Boumali, S. Dilmi, S. Zare and H. Hassanabadi, *K. Int. J. Mod. Sci* (2017) 191. <https://doi.org/10.1016/j.kijoms.2017.09.001>
6. A. Boumali, and M. Labidi, *Mod. Phys. Letters A* **33** (2018) 1850033. <https://doi.org/10.1142/S0217732318500335>
7. A. Boumali, F. Serdouk and S. Dilmi, *Physica A* **553** (2020) 124207. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2020.124207>
8. H. Touchette, and C. Beck, *Phys. Rev. E* **71** (2005) 016131. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.71.016131>
9. C. Beck, *Braz. J. Phys.* **39** (2009) 357. <http://dx.doi.org/10.1590/S0103-97332009000400003>
10. C. Tsallis, Andre, and M.C. Souza, *Phys. Rev. E* **67** (2003) 026106. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.67.026106>
11. C. Beck, *Phil. Trans. R. Soc. A* **369** (2011) 453. <https://doi.org/10.1098/rsta.2010.0280>
12. G. Andrews, R. Askey, and R. Roy, *Special Functions* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
13. M. H. Pacheco, R. R. Landim and C. A. S. Almeida, *Phys. Lett. A* **311** (2003) 93. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(03\)00467-5](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(03)00467-5)
14. M. H. Pacheco, R. Valuf, C. A. S. Almeida and R.R. Landim, *Eur. Phys. Lett.* **108** (2014) 10005. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/108/10005>
15. V. Santos, R. V. Maluf, and C. A. S. Almeida, *Ann. Phys.* **349** (2014) 402. <https://doi.org/10.1016/j.aop.2014.07.005>
16. A. Arda, C. Tezcan and R. Sever, *Pramana J. Phys* **39** (2017) 88. <https://doi.org/10.1007/s12043-016-1347-y>
17. A. Arda, C. Tezcan and R. Sever, *Few-Body Syst* **57** (2016) 93. <https://doi.org/10.1007/s00601-015-1031-7>
18. A. Boumali and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **128** (2013) 124. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2013-13124-y>
19. C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52** (1988) 479. <https://doi.org/10.1007/BF01016429>
20. C. Tsallis, R.S. Mendes, and A.R. Plastino, *Physica A* **261** (1998) 534. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(98\)00437-3](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(98)00437-3)
21. C. Tsallis, *Braz. J. Phys.* **29** (1999) 1. <https://doi.org/10.1590/S0103-97331999000100002>
22. C. Tsallis, in: S. Abe, and Y. Okamoto (Eds.), *Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications*, Springer, Berlin, 2001.
23. C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, (Springer, 2009).
24. C. Beck and E.G.D. Cohen, *Physica A* **322** (2003) 267. [https://doi.org/10.1016/S0378-4371\(03\)00019-0](https://doi.org/10.1016/S0378-4371(03)00019-0)
25. E. G. D. Cohen, *Physica D.* **139** (2004) 35.
26. S. Abe, *Cent. Eur. J. Phys.* **7** (2009) 401. <https://doi.org/10.2478/s11534-008-0149-3>
27. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi, and W.S. Chung, *Eur. Phys. J. Plus* **133** (2018) 157. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2018-12006-2>
28. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W. S. Chung, *Mod. Phys. Lett A* **33** (2018) 1850060.
29. U. S. Okorie, A. N. Ikot, G. J. Rampho and R. Sever, *Commun. Theor. Phys.* **71** (2019) 1246-1252.
30. A.N. Ikot, U.S. Okorie, C.A. Onate, M.C. Onyeaju, and H. Hassanabadi, *Can. J. Phys.* **1-6** (2018).
31. H. Sobhani, H. Hassanabadi, and W.S. Chung, *Eur. Phys. J. C.* **78** (2018) 106. <https://doi.org/10.1088/0253-6102/71/11/1301>
32. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, *Eur. Phys. J. Plus* **133** (2018) 125. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2018-11962-7>

33. S. Sargolzaeipor, H. Hassanabadi and W.S. Chung, *Eur. Phys. J. Plus* **133** (2018) 5. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2018-11827-1>
34. J. David. Castaño-Yepes and D. A. Amor-Quiro, *Physica, A* **548** (2020) 123871. <https://doi.org/10.1016/j.physa.2019.123871>
35. S. Kim, W. S. Chung and H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus* **134** (2019) 572. <https://doi.org/10.1140/epjp/i2019-13082-4>
36. W. S. Chung and H. Hassanabadi, *Mod. Phys. Lett. A* (2019) 2050074. <https://doi.org/10.1142/S0217732320500741>
37. W. S. Chung and H. Hassanabadi, *Mod. Phys. Lett. A* (2020) 2050147. <https://doi.org/10.1142/S0217732320501473>
38. W. S. Chung and H. Hassanabadi, *Fortschr. Phys.* (2019) 1800111. <https://doi.org/10.1016/j.physletb.2019.04.063/> <https://doi.org/10.1140/epjc/s10052-019-6718-3>
39. A. Guha and K. D. Prasanta, *Phys. A* **495** (2018) 18.



The Solutions on One-Dimensional Dirac Oscillator with Energy-Dependent Potentials and Their Effects on the Shannon and Fisher Quantities of Quantum Information Theory

Abdelmalek Boumali¹ · Malika Labidi¹

Received: 13 February 2021 / Accepted: 23 April 2021 / Published online: 12 May 2021

© The Author(s), under exclusive licence to Springer Science+Business Media, LLC, part of Springer Nature 2021

Abstract

In this paper, we focus, at first, on the exact solutions on the one-dimensional Dirac oscillator with the energy-dependent potentials. Then, the influence of these solutions on the Shannon entropy and Fisher information, well-known in quantum information, has been studied. In this direction, we concentrated on the determination of the position and momentum information entropies for the low-lying states $n=0,1,2$. Some interesting features of both Fisher and Shannon densities as well as the probability densities are demonstrated. Finally, the Fisher uncertainty relation, Stam, Cramer–Rao and Bialynicki–Birula–Mycielski (BBM) inequalities have been checked and their comparison with the regarding results have been reported. We showed that the BBM inequality is still valid in the form $S_x + S_p \geq 1 + \ln\pi$.

Keywords Dirac oscillator · Energy-dependent-potentials · Fisher information · Shannon entropy

1 Introduction

Wave equations with energy-dependent potentials are known since the early days of relativistic quantum mechanics. They appeared (1) in the case of relativistic quantum mechanics with the Klein-Gordon equation for different situations [1, 2]. In the non-relativistic quantum mechanics case, they arise from

✉ Abdelmalek Boumali
abdelmalek.boumali@univ-tebessa.dz; boumali.abdelmalek@gmail.com

Malika Labidi
labidimalika89@univ-tebessa.dz; labidimalika89@gmail.com

¹ Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université Larbi-Tébessi- Tébessa, Tébessa, Algeria

momentum-dependent interactions [3], in the case of the Pauli-Schrödinger equation [4, 5], and finally with the problems that are studying nonlinear effects [6].

A Hilbert space formulation of the relativistic quantum mechanical two-body problem was studied by Rizov et al. [7]. The authors have mentioned that the habitual scalar product is not appropriate for the space of states describing the center-of-mass relative motion of two relativistic particles whose interaction is given by an energy-dependent quasipotential. They derived an algorithm for a perturbative calculation of the energy eigenvalues in the case of a general energy-dependent quasipotential. Thus, the presence of the energy-dependent potential in a wave equation has several non-trivial implications. The most obvious one is the modification of the scalar product, necessary to ensure the conservation of the norm. This modification can modify some behaviors or physical properties of a physical system [8, 9]. The authors have studied the properties of the wave equations with an energy-dependent potential were investigated, together with the necessary conditions to be imposed for such a theory to be coherent. By this, we mean a theory that has the following properties: (1) the necessary modification of the definition of probability density, (2) the vectors corresponding to stationary states with different energies must be orthogonal, (3) the formulation of the closure rule in terms of wave functions of stationary states justifies their standardization, (4) finally, the operators of observable are all self-adjoint (Hermitian).

Recently, the study of energy-dependent potentials (in both relativistic and non-relativistic regime) has given rise to great interest in the literature: as an example, we can cite the following: (1) the exact solutions of Schrodinger equation in one and three dimensions [10, 11], (2) the study of the D-dimensional Schrodinger equation [12, 13], (3) in the case of a many-body system [14]. (4) for both Harmonic and Klein-Gordon oscillators in one dimension [15, 16], and finally (5) in other interesting related works [17–21].

The relativistic harmonic oscillator is one of the most important quantum systems, as it is one of the very few that can be solved exactly. The Dirac relativistic oscillator (DO) interaction is an important potential both for theory and application. It was for the first time studied by Ito et al. [22]. They considered a Dirac equation in which the momentum \mathbf{p} was replaced by $\mathbf{p} - im\beta\omega\mathbf{r}$, with \mathbf{r} being the position vector, m the mass of the particle, and ω the frequency of the oscillator. The interest in the problem was revived by Moshinsky and Szczepaniak [23], who gave it the name of DO because, in the non-relativistic limit, it became a harmonic oscillator with a very strong spin-orbit coupling term. Physically, it can be shown that the DO interaction is a physical system, which can be interpreted as the interaction of the anomalous magnetic moment with a linear electric field [24, 25]. The electromagnetic potential associated with the DO has been found by Benitez et al. [26]. The DO has attracted a lot of interests both because it provides one of the examples of the Dirac's equation exact solvability and because of its numerous physical applications [27–32]. Finally, Franco-Villafane et al. [33] have exposed the proposal of the first experimental microwave realization of the one-dimensional DO.

In the present work, we will focus on the following points:

- First off, we study the effects of the modified scalar product on the eigensolutions of the one-dimensional Dirac oscillator. This effect is a consequence of the presence of the energy-dependent potential.
- Then, we seek the possibility of the existence of the phenomena of saturation well observed in the case of the 1D Klein-Gordon oscillator [16]. This saturation will have a direct impact on the density of probability of the 1D Dirac oscillator.
- Finally, we discuss the effects of saturation on a concrete case concerning the two well-known parameters in quantum information: these parameters are the Fisher information and the Shannon entropy. The reason is that these quantities depend strongly on the density of probability as we will see in the Sect. 3.

The information theory is a branch of mathematical physics that deals with the quantification and storage of information with a view to using them for communication purposes. Studies in information theory are particularly important because it is widely believed that observable physical effects are expressions of information. The Fisher information is a quality of an efficient measurement procedure used for estimating ultimate quantum limits. It is a measure of intrinsic accuracy in statistical estimation theory. The investigation of properties and applications of Fisher's information measure to diverse problems in theoretical physics is mainly due to the pioneering work of Frieden et al. [34–39] who have unveiled the manifold physical applications of Fisher information. Finally, one important feature of the Fisher information is that it has a local character due to the gradient operator [40–54].

Besides the Fisher parameter, we can cite another pertinent quantity called the Shannon entropy. This choice is justified because of (1) its possible applications in a wide range of area, (2) it provides an analytic tool to understand well the phenomena of correlations in quantum systems, (3) it has a global character in the sense that they are not very sensitive to change in the distribution over a small-sized region and can be used as a measure of the delocalization, and (4) finally it has been introduced to measure the uncertainty [53]. In our case, the principal goals of introducing this parameter are because these parameters depend strongly on the probability density.

In this stage, the aim was to build an example with analytical solutions if possible, in order to get acquainted with the effect of the energy dependence of the potential. For this, we are motivated to study this effect on (1) both Fisher and Shannon parameters and (2) the validity of Stam uncertainty relations [50], Cramer–Rao inequalities [51], the Fisher uncertainty relation, and the (BBM) inequalities.

In conclusion, our strategy to reach these goals is recapitulated in the following:

- Firstly, we will study the influence of the energy-dependent potentials on the one-dimensional Dirac oscillator. Especially, we seek the conditions that may be imposed on the parameter γ in order to have a positive probability density.
- Secondly, the Shannon entropy and Fisher information of this system will be investigated.
- Finally, the validity of the three uncertainty relations such as Fisher uncertainty relation, Stam, Cramer–Rao and Bialynicki–Birula–Mycielski (BBM) inequalities will be tested.

This article is organized as follows. After an introduction, we will study the solutions of the one-dimensional Dirac oscillator with an energy-dependent potential in Sect. 2. Section 3 is devoted to studying the influence of the parameter γ on both the Fisher and Shannon information measures. Finally, Sect. 4 will be a general conclusion.

2 The Solutions in Both Space and Momentum Representations

2.1 In Coordinate Representation $\{x\}$

The $(1+1)$ -DO with an energy-dependent potential is written as ($\hbar = m = c = \omega = 1$)

$$\{c\sigma_x(p_x - i\lambda\gamma^0 x) + \gamma^0\}\psi = E\psi, \quad (1)$$

with $\lambda = \sqrt{1 + \gamma E}$, $\psi = (\psi_1 \ \psi_2)^T$ and

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \gamma^0 = \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

are the Pauli matrices [55].

Using Eqs. (2), (1) becomes

$$(p_x - i\lambda x)\psi_1 = (E + 1)\psi_2, \quad (3)$$

$$(p_x + i\lambda x)\psi_2 = (E - 1)\psi_1. \quad (4)$$

From Eq. (4), we have

$$\psi_2 = \frac{(p_x - i\lambda x)}{(E + 1)}\psi_1. \quad (5)$$

Putting Eq. (5) into Eq. (3) we obtain

$$(p_x + i\lambda x)(p_x - i\lambda x)\psi_1 = (E^2 + 1)\psi_1, \quad (6)$$

or

$$\left(\frac{p_x^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2}x^2\right)\psi_1 = \epsilon\psi_1, \quad (7)$$

where $\epsilon = \frac{E^2 - 1 + \lambda}{2}$.

Eq. (7) is the standard equation of a one-dimensional Harmonic oscillator where the eigensolutions can be written as [56]

$$\epsilon = \frac{E^2 - 1 + \lambda}{2} = n + \frac{1}{2}, \quad (8)$$

$$\psi_1(x, E) = C_n H_n(\sqrt{\lambda}x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x^2\right), \quad (9)$$

The total associated wave function is

$$\psi(x, E) = C_n \left(\frac{1}{(E+1)} \right) H_n(\sqrt{\lambda}x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x^2\right), \quad (10)$$

with

$$C_n^2 = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left[2^n n! \left(1 - \frac{\gamma}{2\lambda} \left(n + \frac{1}{2}\right)\right) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)}\right)^2 2^{n-1} (n-1)! \left(1 - \frac{\gamma}{2\lambda} \left(n - \frac{1}{2}\right)\right) \right]^{-1}.$$

is the normalization constant and H_n is the Hermite polynomial.

By Substituting the expression of $\lambda = \sqrt{1 + \gamma E}$ into Eq. (8) we get the following equation of the eigenvalues

$$E^4 - 2E^2 - 4\gamma n^2 E - 4n^2 + 1 = 0. \quad (11)$$

Eq. (11) represents an algebraic equation of the degree 4 having of the real and complex solutions. The complex solutions are rejected because they are not physical and we only consider the real solutions.

Now, we are ready to extend our study to the case of momentum representation.

2.2 In Momentum Representation $\{p_x\}$

In this representation, the one-dimensional Dirac oscillator is written as [56]

$$\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_x^2} + \frac{1}{2\lambda^2} p_x^2\right) \psi_1(p, E) = \left(\frac{E^2 - 1 + \lambda}{2\lambda^2}\right) \psi_1(p, E). \quad (12)$$

Following the same procedure used in the coordinate representation, the corresponding eigensolutions can be resumed as follows: the total associated wave function is

$$\psi(p, E) = \begin{pmatrix} \psi'_1(p, E) \\ \psi'_2(p, E) \end{pmatrix}, \quad (13)$$

with

$$\psi'_1(p, E) = C'_n p H_n\left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}}\right) \exp\left(-\frac{p^2}{2\lambda}\right), \quad (14)$$

$$\psi'_2(p, E) = C'_n p \frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)} H_{n-1} \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2\lambda} \right). \tag{15}$$

Here

$$C'^2_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} \left(2^n n! \left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^3} \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 2^{n-1} (n-1)! \left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^3} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right) \right)^{-1}, \tag{16}$$

is the normalization constant and H_n is the Hermite polynomial.

As we know, the spectrum of energy does not depend on the configuration that the problem has been solved. So, the expected form of our energy spectrum is

$$E^4 - 2E^2 - 4\gamma n^2 E - 4n^2 + 1 = 0. \tag{17}$$

The same general conclusions regarding Eq. (11) are drawn here as well.

In what follows, our principal aim is to discuss the influence of the parameter γ on (1) the spectrum of energy and (2) the density of probability.

2.3 Results and Discussion

At first, we show, in Table 1, the expression of normalization constant for low-lying states $n = 0, 1, 2$ in both $\{x\}$ and $\{p\}$ configurations.

After this, we have plotted the energy E versus quantum number n for some different values of γ In Fig. 1. From this Figure, some interesting results are recapitulated as follows :

Table 1 Expression of normalization constant for low-lying states $n = 0, 1, 2$

n	C^2_n
0	$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{\gamma}{4\omega_E} \right)^{-1}$
1	$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left(\left(2 - \frac{3\gamma}{2\lambda} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(1 - \frac{\gamma}{4\lambda} \right) \right)^{-1}$
2	$\frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\pi}} \left(8 - \frac{10\gamma}{\lambda} + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(2 - \frac{3\gamma}{2\lambda} \right) \right)^{-1}$
n	C'^2_n
0	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} \left(1 + \frac{\gamma}{4\lambda^3} \right)^{-1}$
1	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} \left(2 \left(1 + \frac{3\gamma}{4\lambda^3} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(1 + \frac{\gamma}{4\lambda^3} \right) \right)^{-1}$
2	$\frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{\pi}} \left(8 \left(1 + \frac{5\gamma}{4\lambda^3} \right) + 2 \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(1 + \frac{3\gamma}{4\lambda^3} \right) \right)^{-1}$

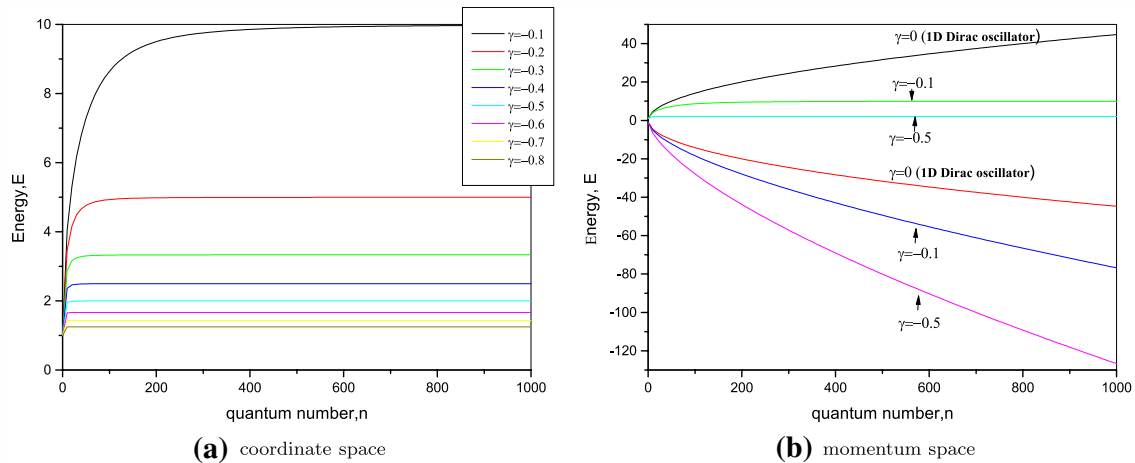


Fig. 1 Spectrum of energy E versus quantum number n for some different γ values in both coordinate and momentum spaces

- The direct impact of the energy-dependent potential is the appearance of the phenomena the saturation of the spectrum of energy for the case of particles, contrarily to the case of anti-particle where the energy has grown to infinity. This impact is shown by the modification of the scalar product.
- In the case of particles, the asymptotic limit form of energies is $\frac{1}{|\gamma|}$: this limit has been also obtained in the case of non-relativistic Harmonic oscillator [6, 8]
- Finally, the beginning of the saturation starts from a specific quantum number N_{max} : this parameter decreases rapidly when $|\gamma|$ increases slowly.

Now, we will focus on the influence of the parameter γ on the density of probability of the system in question. This density must be modified in order to guarantee the validity of the continuity equation(see Refs. [5, 6, 8]). To do this, we construct Fig. 1. The role of this Figure is to obtain the constraint on the parameter γ that leaves our probability always to be positive. After this, we discuss its influence on both Fisher and Shannon information. Thus,

- In the $\{x\}$ configuration,we have

$$\rho(x, E) = \bar{\psi}(x, E)\gamma^0\left(1 - \frac{\partial V}{\partial E}\right)\psi(x, E), \text{ with } \bar{\psi}(x, E) = \psi^*(x, E)\gamma^0. \tag{18}$$

The final form of $\rho(x, E)$ is written as

$$\rho(x, E) = \left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right) \left\{ \psi_1^2(x, E) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \psi_1^2(x, E) \right\}, \tag{19}$$

with

$$\psi_1(x, E) = C_n H_{n-1}(\sqrt{\lambda}x) \exp\left(-\frac{\lambda}{2}x^2\right). \tag{20}$$

In order that $\rho(x, E)$ represents a physical system, the density has to be positive definite: this constraint leads to the following relation

$$\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right) \geq 0. \tag{21}$$

As a result, we have $\gamma < 0$. Fig. 2a has been constructed by regarding this condition on the parameter γ . It shows the probability density distribution in both coordinate and momentum spaces for different values of n and γ .

- Now, In momentum space $\{p_x\}$, equation of density is given by

$$\rho(p, E) = \overline{\psi}'(p, E)\gamma^0 \left(1 - \frac{\partial V}{\partial E}\right) \psi'(p, E), \text{ with } \overline{\psi}'(x, E) = \psi'^*(x, E)\gamma^0, \tag{22}$$

or the final expression is written as

$$\rho(p, E) = \left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4}p^2\right) \left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)}\right)^2 \psi_1'^2(p, E) \right), \tag{23}$$

with

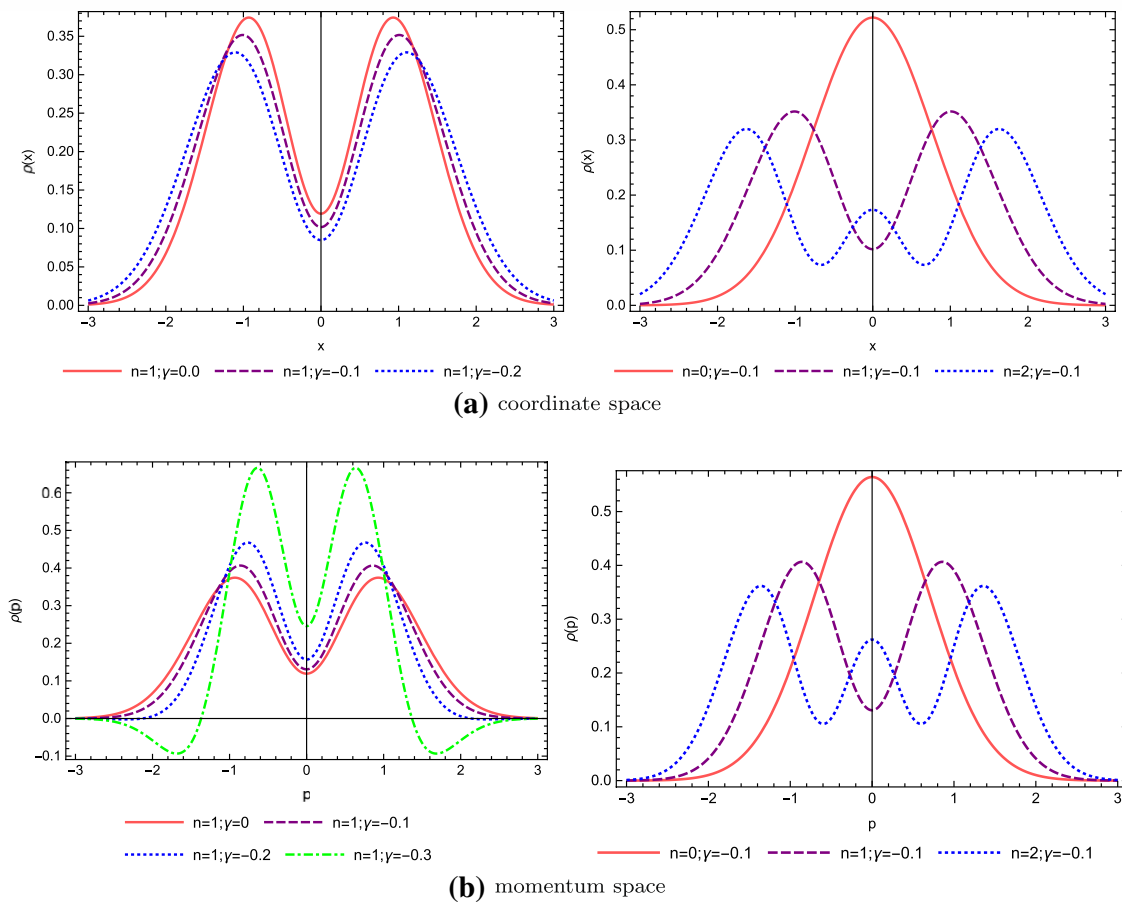


Fig. 2 Probability density distribution in both coordinate and momentum spaces for different values of n and γ

$$\psi'_1(p, E) = C_n H_{n-1} \left(\frac{p}{\sqrt{\omega_E}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2\omega_E} \right). \quad (24)$$

Following Eq. (23), it seems that it is difficult to obtain a condition on the parameter γ similar to the case of coordinate space. To overcome this difficulty, we have plotted Fig. 2b. From this figure, we can see that the parameter γ is negative ($\gamma < 0$), and it is restricted to an interval. In our case, for three low-lying states $n = 0, 1, 2$, we have the following interval: $-0.3 \leq \gamma \leq 0$, $-0.2 \leq \gamma \leq 0$ and $-0.14 \leq \gamma \leq 0$, respectively. So, regardless of the sign of ρ , we have two conditions: (1) $\gamma < 0$ for coordinate space, and (2) restricted values of γ for momentum space [11].

Now, we are ready to discuss the influence of this parameter on both Fisher and Shannon information measures well-known in quantum information.

3 The Influence of the Parameter γ on the Fisher and Shannon Information Measures

3.1 The Fisher information

3.1.1 In the Coordinate Representation $\{x\}$

The Fisher information of one-dimensional Dirac oscillator in the presence of the energy-dependent potential reads as

$$F_x = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x, E) \left[\frac{d \ln(\rho_n(x, E))}{dx} \right]^2 dx. \quad (25)$$

Using Eq. (19) and some properties of the Hermite functions, Eq. (25) is transformed into

$$\begin{aligned}
 F_x &= I + II \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} -(16\lambda + 8\gamma)\sqrt{\lambda}x \left(n + \frac{4n^2(n-1)\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1(x, E)\psi_2(x, E)dx}_{III} \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (4\gamma + 4\lambda)\lambda x^2 \left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1^2(x, E)dx}_{IV} \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} 8\gamma\lambda\sqrt{\lambda}x^3 \left(n + \frac{4n^2(n-1)\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1(x, E)\psi_2(x, E)dx}_{V} \\
 &+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} -2\gamma\lambda^2x^4 \left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_2^2(x, E)dx}_{VI}.
 \end{aligned} \tag{26}$$

The first two terms in Eq. (26) which are given by

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2x^2 \left(1 + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1^2(x, E)}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right)} dx \\
 II &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{16 \left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2 \right) \lambda \left(n + \frac{4n^2(n-1)\lambda}{(E+1)^2} \right)^2 \psi_1^2(x, E)\psi_2^2(x, E)}{\left(\psi_1^2(x, E) + \frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2}\psi_2^2(x, E) \right)} dx
 \end{aligned}$$

are calculated numerically. The other are written as

$$III \equiv -\frac{C_n^2(16\lambda + 8\gamma)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} \left\{ (n-1)\frac{4n^2\lambda}{(E+1)^2}2^{n-2}(n-1)! + n2^{n-1}n! \right\}, \tag{27}$$

$$IV \equiv \frac{C_n^2(4\gamma + 4\lambda)\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \left(2^n n! \left(n + \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{4n^2\lambda 2^{n-1}(n-1)!}{(E+1)^2} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\}, \tag{28}$$

$$V \equiv \frac{8\gamma C_n^2\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}} \left\{ \frac{4n^2\lambda 2^{n-2}(n-1)(n-1)! \left(n - \frac{3}{2} \right)}{(E+1)^2} + n2^{n-1}n! \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\}, \tag{29}$$

$$VI \equiv -\frac{2\gamma\sqrt{\pi}C_n^2}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2^n n! \left[\frac{(2n+1)^2+2}{4} \right] + \frac{4n^2\lambda 2^{n-1}(n-1)!}{(E+1)^2} \left[\frac{(2(n-1)+1)^2+2}{4} \right] \right\}. \quad (30)$$

Now, by adding the results of different terms in Eq. (56), the final form of the Fisher parameter is written as

$$F_x = I + II$$

$$+ \frac{4n^2\lambda\sqrt{\pi}(n-1)2^{n-2}(n-1)!C_n^2}{\sqrt{\lambda}(E+1)^2} \left\{ 8\gamma\left(n-\frac{3}{2}\right) - (16\lambda+8\gamma) \right\}$$

$$+ \frac{\sqrt{\pi}C_n^2 2^{n-1}n!}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 8\gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) - (16\lambda+8\gamma) \right\} + \frac{\sqrt{\pi}C_n^2 2^n n!}{\sqrt{\lambda}} \left\{ (4\gamma+4\lambda)\left(n+\frac{1}{2}\right) - 2\gamma \left[\frac{(2n+1)^2+2}{4} \right] \right\}$$

$$- \frac{2\gamma\sqrt{\pi}C_n^2}{\sqrt{\lambda}} \left\{ 2^n n! \left[\frac{(2n+1)^2+2}{4} \right] + \frac{4n^2\lambda 2^{n-1}(n-1)!}{(E+1)^2} \left[\frac{(2(n-1)+1)^2+2}{4} \right] \right\}. \quad (31)$$

In what follow, we will concentrate only on three low-lying states $n = (0, 1, 2, \dots)$:

- For $n = 0$,

$$F_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 \psi_1^2(x, E)}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right)} dx + \left(1 - \frac{\gamma}{4\omega_E}\right)^{-1} \left(2\gamma + 2\lambda - \frac{3\gamma}{2}\right). \quad (32)$$

- For $n = 1$,

$$F_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 \left(\psi_1^2(x, E) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \psi_1^2(x, E) \right)}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right)} dx +$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right) \left(4\sqrt{\lambda}(\psi_1(x, E)\psi_1(x, E))\right)^2}{\left(\psi_1^2(x, E) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \psi_1^2(x, E)\right)} dx + \quad (33)$$

$$\left\{ \left(2 - \frac{3\gamma}{2\lambda}\right) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(1 - \frac{\gamma}{4\lambda}\right) \right\}^{-1} \left\{ -4\lambda - 3\gamma + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{E+1}\right)^2 \left(\frac{\gamma}{2} + 2\lambda\right) \right\}.$$

- Finally, for $n = 2$

$$\begin{aligned}
F_2 = & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma^2 x^2 \left(1 + \frac{16\lambda}{(E+1)^2}\right) \psi_1^2(x, E)}{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right)} dx + \\
& \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{2}\gamma x^2\right) \left\{4\sqrt{\lambda} \left(2 + \frac{16\lambda}{(E+1)^2}\right) \psi_1(x, E) \psi_2(x, E)\right\}^2}{\left(\psi_1^2(x, E) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)}\right)^2 \psi_1^2(x, E)\right)} dx + \\
& \left\{8 - \frac{10\gamma}{\lambda} + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)}\right)^2 \left(2 - \frac{3\gamma}{2\lambda}\right)\right\}^{-1} \left\{4\gamma - 48\lambda - \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)}\right)^2 (4\lambda + 3\gamma)\right\}.
\end{aligned} \tag{34}$$

3.1.2 In the Momentum Representation $\{p_x\}$

In this case, the Fisher information is given by

$$F_p = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(p, E) \left[\frac{d \ln(\rho_n(p, E))}{dp} \right]^2 dp, \tag{35}$$

with

$$\psi_1'(p, E) = C_n' H_{n-1} \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2\lambda} \right), \tag{36}$$

$$\psi_2'(p, E) = C_n' H_{n-2} \left(\frac{p}{\sqrt{\lambda}} \right) \exp \left(-\frac{p^2}{2\lambda} \right). \tag{37}$$

After some calculations, we obtain

$$\begin{aligned}
F_p &= I + II \\
&+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{8\gamma}{\lambda^4} - \frac{16}{\lambda} \right) p \left(n + \frac{4n^2 \lambda (n-1)}{(E+1)^2} \right) \psi'_1(p, E) \psi'_2(p, E) dp}_{III} \\
&+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{4}{\lambda} - \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \frac{p^2}{\lambda} \left(1 + \frac{4n^2 \lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1'^2(p, E) dp}_{IV} \\
&+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{8\gamma p^3}{\lambda^5 \sqrt{\lambda}} \left(n + \frac{4n^2 \lambda (n-1)}{(E+1)^2} \right) \psi'_1(p, E) \psi'_2(p, E) dp}_{V} \\
&+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\gamma p^4}{\lambda^6} \left(1 + \frac{4n^2 \lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1'^2(p, E) dp}_{VI}.
\end{aligned} \tag{38}$$

The first two terms in Eq. (38)

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\gamma^2 p^2}{\lambda^8} \left(1 + \frac{4n^2 \lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1'^2(p, E)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right)} dp \tag{39}$$

$$II \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right) \left\{ \frac{4}{\sqrt{\lambda}} \psi'_1(p, E) \left(n \psi'_1(p, E) + \frac{4n^2 \lambda (n-1)}{(E+1)^2} \psi'_2(p, E) \right) \right\}^2}{\left(1 + \frac{4n^2 \lambda}{(E+1)^2} \right) \psi_1'^2(p, E)} dp. \tag{40}$$

are calculated numerically. The evaluation of the other terms gives

$$III \equiv C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} \left(\frac{8\gamma}{\lambda^4} - \frac{16}{\lambda} \right) \left\{ n 2^{n-1} n! + \frac{4n^2 \lambda (n-1) (2^{n-2}) (n-1)!}{(E+1)^2} \right\}, \tag{41}$$

$$IV \equiv C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} \left(\frac{4}{\lambda} - \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \left\{ 2^n n! \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{4n^2 \lambda 2^{n-1} (n-1)!}{(E+1)^2} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\}, \tag{42}$$

$$V \equiv -\frac{8\gamma C_n'^2 p \sqrt{\pi} \lambda}{\lambda^4} \left\{ n 2^{n-1} n! \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{4n^2 \lambda (n-1) 2^{n-2} (n-1)!}{(E+1)^2} \left(n - \frac{3}{2} \right) \right\}, \tag{43}$$

$$VI \equiv \frac{2\gamma C_n'^2 p \sqrt{\pi} \lambda}{\lambda^4} \left\{ 2^n n! \left[\frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right] + \frac{4n^2 2^{n-1} (n-1)! \lambda}{(E+1)^2} \left[\frac{(2(n-1)n+1)^2 + 2}{4} \right] \right\}, \tag{44}$$

Finally the final form of the Fisher parameter is written as

$$\begin{aligned}
 F_p &= I + II \\
 &+ C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} n 2^{n-1} n! \left\{ \left(\frac{8\gamma}{\lambda^4} - \frac{16}{\lambda} \right) - \frac{8\gamma}{\lambda^4} \left(n - \frac{1}{2} \right) \right\} \\
 &+ \frac{4n^2 \lambda (n-1) (2^{n-2}) (n-1)! C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda}}{(E+1)^2} \left\{ \left(\frac{8\gamma}{\lambda^4} - \frac{16}{\lambda} \right) - \frac{8\gamma}{\lambda^4} \left(n - \frac{3}{2} \right) \right\} \\
 &+ C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} 2^n n! \left\{ \left(\frac{4}{\lambda} - \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \left(n + \frac{1}{2} \right) + \frac{2\gamma}{\lambda^4} \left[\frac{(2n+1)^2 + 2}{4} \right] \right\} \\
 &+ \frac{4n^2 \lambda C_n'^2 p \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} 2^{n-1} (n-1)!}{(E+1)^2} \left\{ \left(\frac{4}{\lambda} - \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \left(n - \frac{1}{2} \right) + \frac{2\gamma}{\lambda^4} \left[\frac{(2(n-1)+1)^2 + 2}{4} \right] \right\}.
 \end{aligned} \tag{45}$$

In this stage, we only consider the three low-lying state $n = (0, 1, 2, \dots)$: thus,

- For $n = 0$

$$F_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\frac{\gamma^2}{\lambda^8} p^2 \psi_1'^2(p, E)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right)} dp + \left(1 + \frac{\gamma}{4\lambda^3} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{\gamma}{2\lambda^4} \right). \tag{46}$$

- For $n = 1$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{\lambda^4} p^2 \right)^2 \left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \psi_1'^2(p, E) \right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right)} dp + \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right) \left(\frac{4}{\sqrt{\lambda}} \psi_1'(p, E) \psi_1'(p, E) \right)^2}{\left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{2n\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \psi_1'^2(p, E) \right)} dp + \\
 &\left\{ 2 \left(1 + \frac{3\gamma}{4\lambda^3} \right) + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(1 + \frac{\gamma}{4\lambda^3} \right) \right\}^{-1} \left\{ \frac{3\gamma}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda} + \left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(\frac{2}{\lambda} - \frac{\gamma}{2\lambda^4} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{47}$$

- Finally, for $n = 2$

$$\begin{aligned}
 F_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(\frac{\gamma}{\lambda^4} p^2 \right)^2 \left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \psi_1'^2(p, E) \right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right)} dp + \\
 &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left(1 + \frac{\gamma}{2\lambda^4} p^2 \right) \left(\frac{4}{\sqrt{\lambda}} \psi_1'(p, E) \left(2\psi_1'(p, E) + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \psi_2'(p, E) \right) \right)^2}{\left(\psi_1'^2(p, E) + \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \psi_1'^2(p, E) \right)} dp + \\
 &\left\{ 8 \left(1 + \frac{5\gamma}{4\lambda^3} \right) + 2 \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(1 + \frac{3\gamma}{4\lambda^3} \right) \right\}^{-1} \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} \left\{ \left(\frac{4\sqrt{\lambda}}{(E+1)} \right)^2 \left(\frac{3\gamma}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda} \right) - \left(\frac{48}{\lambda} + \frac{4\gamma}{\lambda^4} \right) \right\}.
 \end{aligned} \tag{48}$$

3.2 The Shannon Entropy

The position space information entropy for the one-dimensional cases is calculated from

$$S_x = - \int \rho_n(x, E) \ln(\rho_n(x, E)) dx. \quad (49)$$

Moreover, the momentum space information entropies are written as

$$S_p = - \int \rho_n(p, E) \ln(\rho_n(p, E)) dp, \quad (50)$$

with $\rho_n(x, E)$ and $\rho_n(p, E)$ is defined by equations (19) and (23).

In general, explicit derivations of the information entropy are quite difficult. In particular, the derivation of an analytical expression for the S_x and S_p are almost impossible: we should recognize that it is not easy to exactly calculate Shannon entropies or the entropic uncertainty relations due to the logarithmic factors in the integrals. To overcome this difficulty, we use a numerical calculation of this integral.

3.3 Results and Discussion

In Figs. 3 and 4, we show plots of F_x , F_p and $F_x F_p$ versus the parameter γ for three lowing-states ($n = 0, 1, 2$): as γ increases F_x decreases (Fig. 3a) while F_p increases (Fig. 3b). Nevertheless, the relation $F_x F_p \geq 4$ holds for Cramer–Rao uncertainty products (Fig. 4). In order to understand these results, we first analyze the behavior of the standard variances: recall here that the Fisher information and the variances are related by the Cramer-Rao inequality. For this, we have constructed Fig. 5 where we have plotted the uncertainty for x , p and the uncertainty principle for three levels $n = (0, 1, 2)$ in terms of γ . It shows how uncertainty for x can change with the parameter γ .

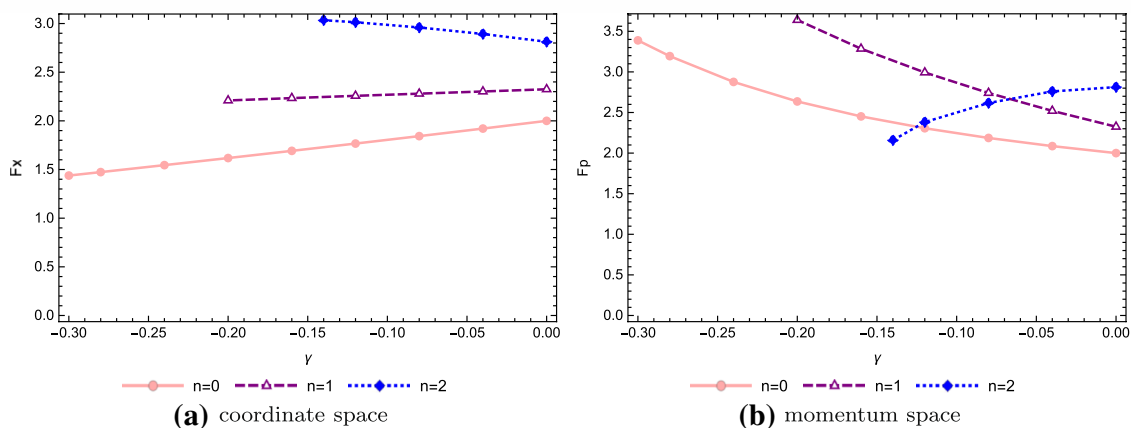


Fig. 3 Fisher information of one-dimensional Dirac oscillator versus γ for both coordinate and momentum spaces

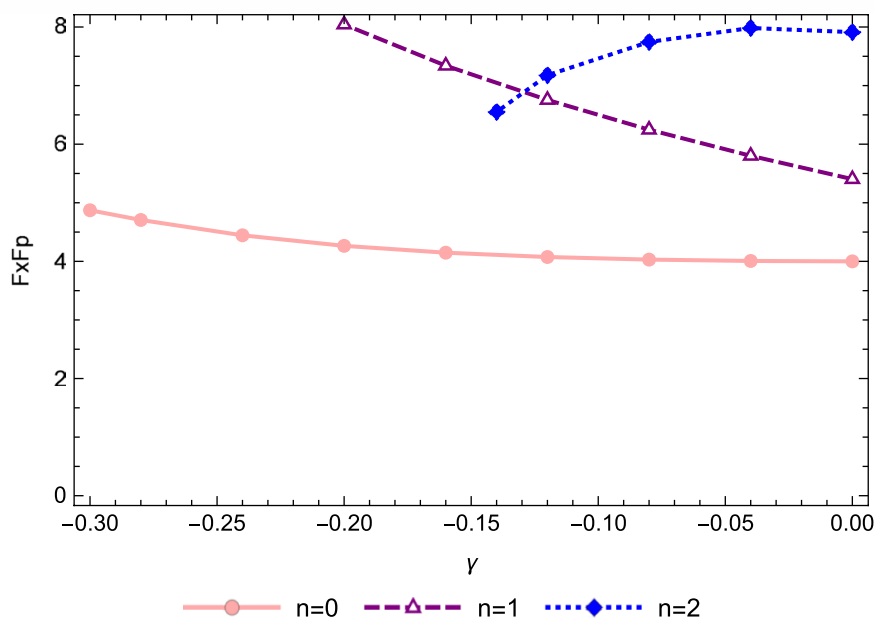
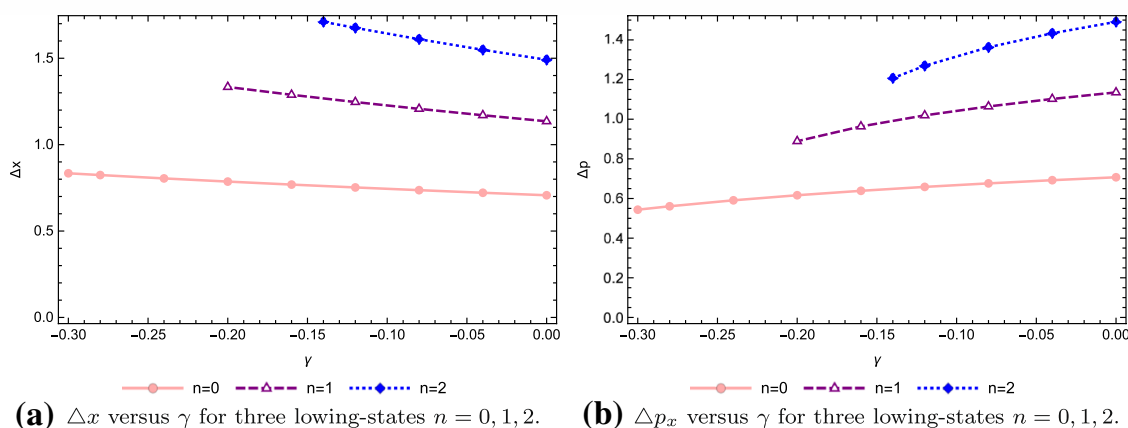


Fig. 4 The product $F_x F_p$ versus γ for three lowing-states $n = 0;1;2$



(a) Δx versus γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$. (b) Δp_x versus γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$.

Fig. 5 Both Δx and Δp versus γ for three lowing-states $n = 0, 1, 2$

The treatments of uncertainty in momentum are shown in the same figure: we can see that Δx increases with increasing γ for a fixed value of n . However, the uncertainty in momentum Δp decreases with increasing γ for a fixed value of n . Thus accuracy in predicting the localization of the particle increases while the accuracy in predicting momentum decreases with increasing γ for three lowing-states ($n = 0, 1, 2$). In this system the accuracy in predicting the localization of the particle decreases, while the accuracy in predicting momentum increases with increasing γ . In addition, according to Eq. (51), the relation between Fisher parameter and the uncertainty principle is very close: theoretically, when $\Delta x(\Delta P)$ increases, $F_x(F_p)$ decreases and vice versa. This situation is well observed in our case: the decrease in the F_x indicates that the accuracy in predicting position increases. On the other hand, when F_p increases that mean that the accuracy in predicting momentum decreases. This similarity which was observed do not change our results because we

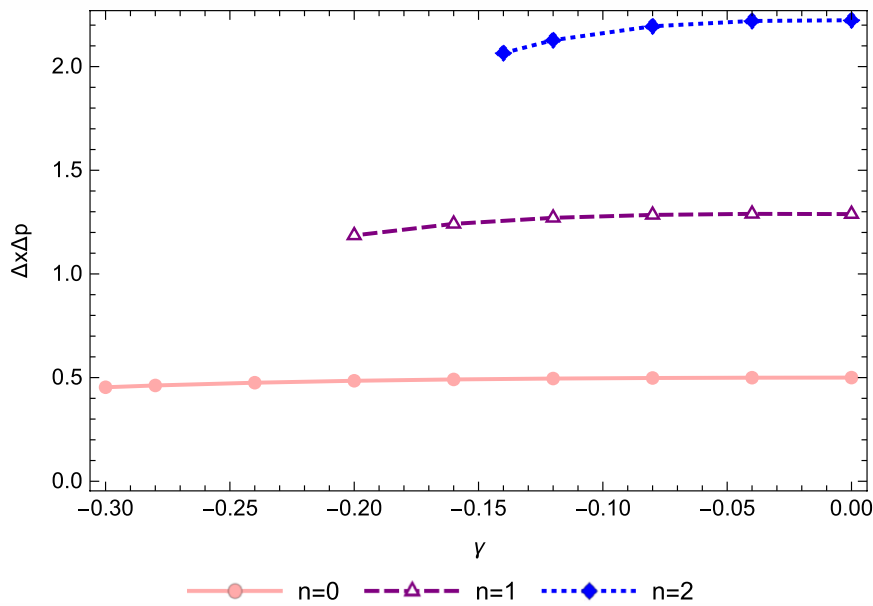


Fig. 6 $\Delta x \Delta p$ versus γ for three lowest-states $n = 0, 1, 2$

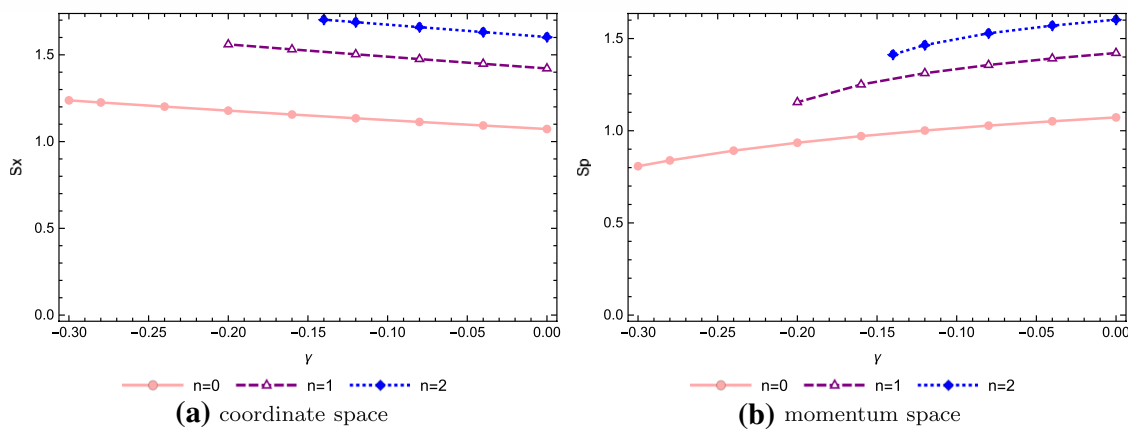


Fig. 7 Shannon entropy of one-dimensional Dirac oscillator versus γ for both coordinate and momentum spaces

are interested in the behavior of two following products that give both Heisenberg uncertainty relation ($\Delta x \Delta P$) and its version in quantum information ($F_x F_p$). Both uncertainty relation are presented by two (Figs. 4 and 6).

$$F_x \geq \frac{1}{\Delta x^2}, F_p \geq \frac{1}{\Delta p^2}. \tag{51}$$

In Fig. 7, we studied Shannon’s entropy versus γ in both coordinates and momentum spaces. Entropies of position information S_x and momentum S_p were calculated for $n = 0, 1, 2$ states. We find that the parameter Shannon increases in the $\{x\}$ configuration (Fig. 7a), whereas it decreases in the $\{p\}$ configuration (Fig. 7b): these behaviors S_x and S_p have been shown through the Table below.

In Fig. 8, we have presented the results of the entropy sum $S_x + S_p$ of the lowest-states ($n = 0, 1, 2$) for various values of parameter γ . It should be noted that

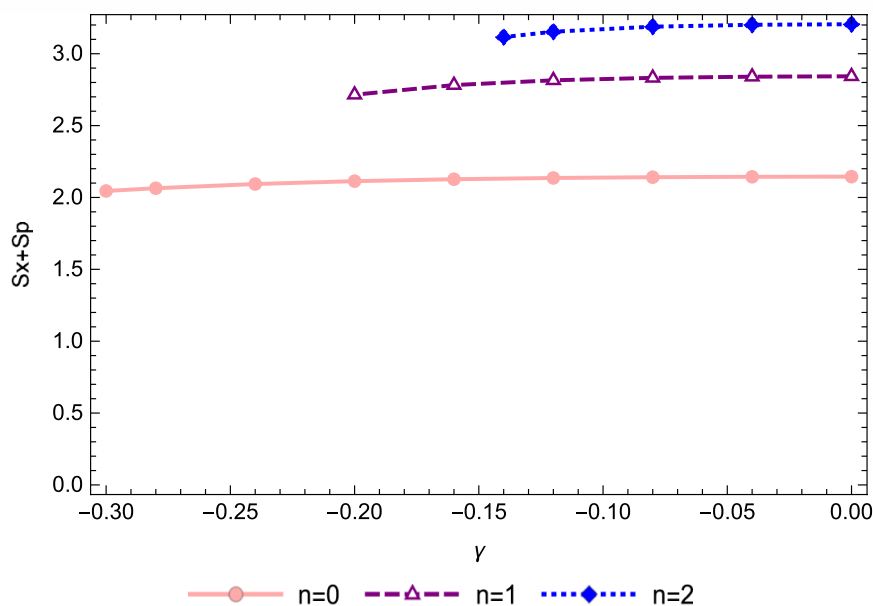


Fig. 8 The sum $S_x + S_p$ versus γ for three lowering-states $n = 0, 1, 2$

the sum of the entropies, consistent with the BBM inequality, has the lower limit stipulated $S_x + S_p \geq 1 + \ln \pi$

Song et al. [41] investigated the information entropy for a one-dimensional system with a schematic “Landau” potential in a numerical way. They have shown that multi-peak distributions appear in curves of the position and momentum entropy densities may be a signature of a quantum phase transition. They have found that the phase transitional behavior of the system can be well expressed by the evolution of quantum information entropy: this transition has been observed in the curves of S_x and S_p where both quantities present an abrupt variation around a same critical point. This transition has the nature of a second order transition. In our case, there is no existence of a probable phase transition: this result can be argued by the absence of a significant change in curves of S_x and S_p vs γ . Nevertheless, their sum $S_x + S_p$ for a given n number remains as a constant independent of the parameter γ (Fig. 8).

In this stage, as we know, the Heisenberg uncertainty relation (HUR), $\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2}$, and its analogue in the framework of quantum information: the HUR in quantum mechanics is an inequality between position and momentum: it states that the more precisely the position of the particle is determined, the less precisely the momentum is known, and vice versa. Now, in the sense related to entropic uncertainty relations, it becomes “the more information we have about the position, the less information we can acquire about the momentum and vice versa.”

In recent years, new uncertainty principles have been introduced, and they originate from the information theory: let us mention that this information-theoretic quantity and its quantum extension, not yet sufficiently well known for physicists, have been used to set up a number of relevant inequalities such as Stam and Cramer–Rao and uncertainty relations. These relevant inequalities which involve the Fisher information, in a given space, are the Stam uncertainty relations

$$F_x \leq 4\langle p^2 \rangle, F_p \leq 4\langle x^2 \rangle, \quad (52)$$

and the Cramer–Rao inequalities

$$F_x \geq \frac{1}{\langle x^2 \rangle}, F_p \geq \frac{1}{\langle p^2 \rangle}. \quad (53)$$

For a general one-dimensional systems, with the help of Eqs. (52) and (53), we have that

$$F_x F_p \geq 4. \quad (54)$$

This product, which sometimes is called a Fisher information based uncertainty relation, has often been conjectured to exhibit a non-trivial lower bound such that for one-dimensional systems. In the literature, there are many quantum systems for which the relation is valid. On the other hand, there is also an infinite number of counterexamples which forward to demonstrate that it is not always possible to obtain a universal uncertainty relation as a lower bound to this relation. Table 2 shows numerical results for the uncertainty relation and Fisher information measure of 1D Dirac oscillator for the three low-lying states ($n = 0, 1, 2$) with a different choice of the parameter γ .

Following this Table, we observe that

- The Stam inequalities and Cramer–Rao ones are fulfilled,
- The following relation

$$F_x F_p \geq 4, \quad (55)$$

is well-established, and consequently, Eq. (55) holds in our case for three low-lying states $n = 0, 1, 2$,

- Finally, the sum of the entropies is in consistency with BBM inequality where

$$S_x + S_p \geq 1 + \ln\pi \simeq 2.14447. \quad (56)$$

As clearly seen from Table 2, the BBM inequality and Heisenberg uncertainty relation hold for the 1D Dirac oscillator, and the sum of entropies $S_x + S_p$ is higher than $(1 + \ln\pi)$ value (Fig. 8). The BBM inequality stipulate that the sum of $S_x + S_p$ stays above the lower bound of $(1 + \ln\pi)$. Particularly, we find that the sum of the S_x and S_p for the ground state (with $\gamma = 0$) is very close to the limit value $(1 + \ln\pi)$. From numerical results which are shown in Table 2, we observe that the entropy sum $S_x + S_p \geq 1 + \ln\pi$ tends to be saturated to the boundary value defined by the BBM inequality for the three lowing-states. In conclusion, it is observed that the BBM inequality is satisfied in all cases for the states displayed in Table 2. Indeed, an increase in the position entropy is observed for any γ , which is enough to compensate for the reduction in momentum entropy. Thus, we can state that there are no physical states which violate the BBM inequality.

Always according to Table 2 an important result appears about the case of the ground state $n = 0$: if $\gamma = 0$, then $\Delta x = \Delta p = 0.7071$ and $\Delta x \Delta p_x = \frac{1}{2}$ which

Table 2 Numerical results for the uncertainty relation and Fisher information and Shannon entropy of 1D Dirac oscillator with energy-dependent potential

n	γ	E	Δ_x	Δp	$\Delta_x \Delta p$	F_x	F_p	$F_x F_p$	S_x	S_p	$S_x + S_p$	$1 + \ln \pi$
0	0	1	0.707107	0.707107	0.500000309	2	2	4	1.07236	1.07236	2.14472	2.1447
	-0.02	1	0.711425	0.69989	0.499896433	1.9602	2.04146	4.001669892	1.08242	1.06211	2.14453	2.1447
	-0.04	1	0.721541	0.692365	0.499569734	1.92078	2.08607	4.006881535	1.09257	1.0513	2.14387	2.1447
	-0.06	1	0.728989	0.684502	0.498994428	1.88174	2.13436	4.016310586	1.10284	1.03988	2.14272	2.1447
	-0.08	1	0.736601	0.676269	0.498140422	1.84304	2.18658	4.029954403	1.11323	1.02777	2.141	2.1447
	-0.1	1	0.744386	0.667627	0.496972192	1.80471	2.24359	4.049029309	1.12374	1.01491	2.13865	2.1447
	-0.12	1	0.752354	0.658532	0.495449184	1.7667	2.3061	4.074186687	1.13439	1.00119	2.13558	2.1447
	-0.14	1	0.760514	0.648934	0.493523392	1.72902	2.37509	4.106578112	1.14517	0.986492	2.131662	2.1447
	-0.16	1	0.768877	0.638771	0.49113633	1.69165	2.45189	4.147739719	1.15611	0.970679	2.126789	2.1447
	-0.18	1	0.777456	0.627974	0.488222154	1.65458	2.53818	4.199621864	1.1672	0.953569	2.120769	2.1447
	-0.2	1	0.786262	0.616456	0.484695927	1.6178	2.63607	4.264634046	1.17846	0.934942	2.113402	2.1447
	-0.22	1	0.79531	0.604117	0.480460291	1.5813	2.74799	4.345396587	1.18989	0.914524	2.104414	2.1447
1	-0.24	1	0.804614	0.590831	0.475390894	1.54506	2.87656	4.444457794	1.20151	0.891988	2.093498	2.1447
	-0.26	1	0.81419	0.576445	0.469335755	1.50909	3.02444	4.56415216	1.21333	0.866947	2.080277	2.1447
	-0.28	1	0.824056	0.560768	0.462104235	1.47337	3.19424	4.706297389	1.22536	0.838957	2.064317	2.1447
	-0.3	1	0.834232	0.543554	0.453450141	1.43788	3.38842	4.87214135	1.23761	0.807509	2.045119	2.1447
	0	1.732	1.1352	1.1352	1.28867904	2.32453	2.32453	5.403439721	1.42147	1.42147	2.84294	2.1447
	-0.02	1.722	1.15241	1.11922	1.28980032	2.31308	2.41951	5.596520191	1.43482	1.40729	2.84211	2.1447
	-0.04	1.712	1.17014	1.10222	1.289751711	2.3019	2.52035	5.801593665	1.44827	1.39194	2.84021	2.1447
	-0.06	1.702	1.1884	1.08399	1.288213716	2.2909	2.62765	6.019683385	1.46182	1.37515	2.83697	2.1447
	-0.08	1.691	1.20715	1.0643	1.284769745	2.27936	2.74083	6.247338269	1.47547	1.35663	2.8321	2.1447
	-0.1	1.681	1.22659	1.04289	1.279198445	2.26853	2.86319	6.495232411	1.48924	1.3358	2.82504	2.1447
	-0.12	1.67	1.24657	1.01933	1.270666198	2.25705	2.99303	6.755418362	1.50313	1.31205	2.81518	2.1447
	-0.14	1.659	1.26723	0.9931	1.258486113	2.2455	3.13308	7.03533114	1.51715	1.28423	2.80138	2.1447
-0.16	1.648	1.2886	0.963462	1.241517133	2.23379	3.28565	7.339452114	1.53132	1.25063	2.78195	2.1447	
-0.18	1.637	1.31075	0.929325	1.218112744	2.22185	3.45412	7.674536522	1.54566	1.20864	2.7543	2.1447	

Table 2 (continued)

n	γ	E	Δ_x	Δp	$\Delta_x \Delta p$	F_x	F_p	$F_x F_p$	S_x	S_p	$S_x + S_p$	$1 + \ln \pi$
	-0.2	1.626	1.33372	0.889048	1.185741099	2.20959	3.63973	8.042311011	1.56017	1.15469	2.71486	2.1447
	0	2.236	1.49117	1.49117	2.223587969	2.8129	2.8129	7.91240641	1.60258	1.60258	3.20516	2.1447
	-0.02	2.216	1.51951	1.46356	2.223894056	2.85412	2.79478	7.976637494	1.61686	1.58722	3.20408	2.1447
	-0.04	2.196	1.54876	1.43347	2.220100997	2.89276	2.75967	7.983062989	1.63112	1.57023	3.20135	2.1447
2	-0.06	2.175	1.57894	1.40022	2.210863367	2.92769	2.70166	7.909622965	1.64538	1.551	3.19638	2.1447
	-0.08	2.154	1.61017	1.36289	2.194484591	2.95968	2.61683	7.744979414	1.65967	1.5285	3.18817	2.1447
	-0.1	2.133	1.64253	1.32004	2.168205301	2.98853	2.50012	7.471683624	1.67399	1.50093	3.17492	2.1447
	-0.12	2.111	1.67599	1.26944	2.127568746	3.01324	2.38176	7.176814502	1.68835	1.46481	3.15316	2.1447
	-0.14	2.089	1.71075	1.20734	2.065456905	3.03448	2.15858	6.550167838	1.70279	1.41309	3.11588	2.1447

correspond to the simplest case of the ground state for the Harmonic oscillator. As γ increases, $\Delta x > 0.7071$, $\Delta p < 0.7071$ and $\Delta x \Delta p > \frac{1}{2}$ [40]. These results show that there exists the squeezing phenomenon in momentum for the ground state $n = 0$. This situation is similar to the one found in the case of one-dimensional Klein-Gordon oscillator (for more detail see Ref. [16]): a squeezed coherent state is any state of the quantum mechanical Hilbert space such that the uncertainty principle is saturated.

Finally, as a perspective of our study on the one-dimensional Dirac oscillator in the energy-dependent potentials can be understood as follows: Quimby and Strange [57, 58] show that the DO can describe a naturally occurring physical system. Specifically, the case of a two-dimensional DO can be used to describe the dynamics of the charge carriers in Graphene, and hence its electronic properties. In addition, according to Ref. [31], via the concept of the effective mass, the author has used the model of the Dirac oscillator in order to calculate the thermal properties of Graphene in an external magnetic field. So, as a perspective, both works of [31, 57] encourage us to discuss the influence of the parameter γ , which appears in the form of energy-dependent potentials, on the Fisher and Shannon parameters in the Graphene system via the model of the Dirac oscillator.

4 Conclusion

The present work was devoted to energy-dependent potentials: following Sazdjian [8], this type of potentials leads to the modification of the scalar product [8, 20, 21], which was necessary to ensure the conservation of the norm. In this context, we studied the physical characteristics of a 1D Dirac oscillator with energy dependent-potential. We have at first obtained the wave functions and the energy spectra of the system in an exact analytical manner. After that, as the Fisher information and Shannon entropy depended strongly on the density of probability, we have tested the impact of the parameter γ on these quantities: for this, the Fisher information and Shannon entropy, some expectation values, and some uncertainty principles were evaluated. Although the eigenfunctions have been determined analytically, F_x , F_{p_x} , Δx , Δp_x , S_x and S_{p_x} were determined numerically. In addition, we have studied the influence of γ on Shannon entropy and Fisher information uncertainty relations, and checked the validity of BBM inequality: the Fisher parameter versus a γ for both coordinate and momentum spaces: the case of coordinate space, F_x decreased contrarily, in the momentum space where it increases. For the case of Shannon entropy, we have also plotted this quantity versus γ for both coordinate and momentum spaces: this parameter increased in the $\{x\}$ configuration, whereas it decreased in the $\{p\}$ configuration. Moreover, for some values of parameter γ , we have shown that the numerical results in the Shannon and Fisher information were predicted by the BBM inequality $S_x + S_p \geq 1 + \ln \pi$, and by the Fisher information based uncertainty relation. In addition, the discussion about the squeezing effect in either position or momentum showed the existence of a squeezing effect in momentum ($\Delta P < 0.707$).

Acknowledgements The authors would like to thank Prof Lyazid Chetouani, University of Constantine, Algeria, for his personal communication about the modified product scalar in the Dirac equation. This work was fully supported by the “ Direction Générale de la Recherche Scientifique et du Développement Technologique (DGRSDT)” of Algeria.

References

1. H. Snyder, J. Weinberg, *Phys. Rev.* **57**, 307 (1940)
2. I. Schiff, H. Snyder, J. Weinberg, *Phys. Rev.* **57**, 315 (1940)
3. A.M. Green, *Nucl. Phys.* **33**, 218 (1962)
4. W. Pauli, *Z. Physik.* **601**, 43 (1927)
5. H.A. Bethe, E.E. Salpeter, *Quantum theory of One- and Two-Electron Systems, Handbuch der Physik, Band XXXV, Atome I* (Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1957)
6. R. Yekken, R.J. Lombard, *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** (2010)
7. V.A. Rizov, H. Sazdjian, I.T. Todorov, *Ann. Phys.* **165**, 59 (1985)
8. H. Sazdjian, *J. Math. Phys.* **29**, 1620 (1988)
9. J. Formanek, J. Mares, R. Lombard, *Czech. J. Phys.* **54**, 289 (2004)
10. J. Garcia-Martinez, J. Garcia-Ravelo, J.J. Pena, A. Schulze-Halberg, *Phys. Lett. A.* **373**, 3619 (2009)
11. R. Lombard, An-Najah-Univ. *J. Res. (N. Sc.)* **25**, 49 (2011)
12. H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, A.A. Rajabi, *Commun. Theor. Phys.* **55**, 541 (2011)
13. H. Hassanabadi, E. Maghsoodi, R. Oudi, S. Zarrinkamar, H. Rahimov, *Eur. Phys. J. Plus.* **127**, 120 (2012)
14. R.J. Lombard, J. Mares, *Phys. Lett. A.* **373**, 426 (2009)
15. A. Boumali, S. Dilmi, S. Zare, H. Hassanabadi, *Karbala Intl. J. Mod. Sci.* **3**, 191 (2017)
16. A. Boumali, M. Labidi, *Mod. Phys. Lett. A* **33**, 1850033 (2018)
17. A. Schulze-Halberg, *Cent. Eur. J. Phys.* **9**, 57 (2011)
18. R.J. Lombard, J. Mares, C. Volpe, arXiv:hep-ph/0411067v1
19. H. Hassanabadi, S. Zarrinkamar, H. Hamzavi, A.A. Rajabi, *Arab. J. Sci. Eng.* **37**, 209 (2012)
20. A. Benchikha, L. Chetouani, *Mod. Phys. Lett. A* **28**, 1350079 (2013)
21. A. Benchikha, L. Chetouani, *Cent. Eur. J. Phys.* **12**, 392–405 (2014)
22. D. Itô, K. Mori, E. Carriere, *Nuovo Cimento A* **51**, 1119 (1967)
23. M. Moshinsky, A. Szczepaniak, *J. Phys. A Math. Gen.* **22**, L817 (1989)
24. R.P. Martinez-y-Romero, A.L. Salas-Brito, *J. Math. Phys.* **33**, 1831 (1992)
25. M. Moreno, A. Zentella, *J. Phys. A Math. Gen.* **22**, L821 (1989)
26. J. Benitez, P.R. Martinez y Romero, H.N. Nunez-Yepe, A.L. Salas-Brito, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1643 (1990)
27. C. Quesne, V.M. Tkachuk, *J. Phys. A Math. Gen* **41**, 1747–65 (2005)
28. A. Boumali, H. Hassanabadi, *Eur. Phys. J. Plus.* **128**, 124 (2013)
29. A. Boumali, H. Hassanabadi, *Z. Naturforschung A.* **70**, 619–627 (2015)
30. A. Boumali, *EJTP* **12**(32), 1–10 (2015)
31. A. Boumali, *Phys. Scr.* **90** (2015)
32. P. Strange, L.H. Ryder, *Phys. Lett. A* **380**, 3465–3468 (2016)
33. A. Franco-Villafane, E. Sadurni, S. Barkhofen, U. Kuhl, F. Mortessagne, T.H. Seligman, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 170405 (2013)
34. B.R. Frieden, *Am. J. Phys.* **57**, 1004 (1989)
35. B.R. Frieden, *Phys. Rev. A.* **41**, 4265 (1990)
36. B.R. Frieden, *Opt. Lett.* **14**, 199 (1989)
37. B.R. Frieden, *Phys. A.* **180**, 359–385 (1992)
38. B.R. Frieden, B.H. Soffer, *Phys. Rev. E.* **52**, 2274–2286 (1995)
39. M.T. Martin, F. Pennini, A. Plastino, *Phys. Lett. A* **256**, 173–180 (1999)
40. D.X. Macedo, I. Guedes, *Phys. A.* **434**, 211–219 (2015)
41. X.D. Song, S.H. Dong, Y. Zhang, *Chin. Phys. B* **25** (2016)
42. G.H. Sun, S.H. Dong, *Phys. Scr.* **87** (2013)
43. G. Yañez-Navarro, G.H. Sun, T. Dytrych, K.D. Launey, S.H. Dong, J.P. Draayer, *Ann. Phys.* **348**, 153–160 (2014)

44. S.G. Hua, D. Popov, O.C. Nieto, D.S. Hai, *Chin. Phys. B* **24** (2015)
45. J. Yu, S.H. Dong, *Phys. Lett. A* **325**, 194–198 (2004)
46. J. Yu, S.H. Dong, *Phys. Lett. A* **322**, 290–297 (2004)
47. S.H. Dong, J.J. Pena, C.P. Garcia, J.G. Ravelo, *Mod. Phys. Lett. A* **22**, 1039–1045 (2007)
48. P.A. Bouvrie, J.C. Angulo, J.S. Dehesa, *Phys. A* **390**, 2215–2228 (2011)
49. J.S. Dehesa, S. López-Rosa, B. Olmos, R.J. Yáñez, *J. Math. Phys.* **47** (2006)
50. A.J. Stam, *Inf. Control* **2**, 101 (1959)
51. T.M. Cover, J.A. Thomas, *Elements of Information Theory* (Wiley, New York, 1991)
52. O. Johnson, *Information Theory and the Central Limit Theorem* (Imperial College Press, London, 2004)
53. I.B. Birula, J. Mycielski, *Commun. Math. Phys.* **44**, 129–132 (1975)
54. J. S. Dehesa, R. G-Férez, P. S-Moreno, *J. Phys. A Math. Theor.* **40**, 1845 (2007)
55. W. Greiner, *Relativistic Quantum Mechanics Wave Equations*, 3rd edn. (Springer, 2000)
56. S. Flugge, *Practical Quantum Mechanics* (Springer, Berlin, 1974)
57. C. Quimbay, P. Strange, arXiv:1311.2021 (2013)
58. C. Quimbay, P. Strange, arXiv:1312.5251 (2013)

Publisher's Note Springer Nature remains neutral with regard to jurisdictional claims in published maps and institutional affiliations.