

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE CHEKH LAARBI TEBESSI- TEBESSA  
FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES  
DEPARTEMENT DE GENIE CIVIL



**MEMOIRE**  
EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLOME DE  
**MAGISTERE**  
EN GENIE CIVIL  
OPTION: DURABILITE DES OUVRAGES

**THEME**  
**HOMOGENEISATION ANALYTIQUE ET MODELISATION**  
**NUMERIQUE DES STRUCTURES SANDWICHES EN NID**  
**D'ABEILLES**

Présenté par :  
**Chamseddine ABAIDIA**

Soutenu le : 07/05/2014 devant le jury :

Mr. Ali MESSABHIA  
Mr. El Hadi HARKATI  
Mr. Abdelkader HAOUAM  
Mr. Mohammed GUENFOUD  
Mr. M<sup>ed</sup> Reda SOLTANI

MCA. Université de Tébessa  
MCA. Université de Tébessa  
Prof. Université de Tébessa  
Prof. Université de Guelma  
MCB. Université de Tébessa

Président  
Rapporteur  
Examineur  
Examineur  
Examineur (Invité)

# Remerciements

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur Mr. **E. HARKATI**, Docteur au département de génie civil, Faculté des sciences et technologie, Université de Tébessa et directeur du laboratoire de Mine, pour son aide et ses orientations durant la réalisation de ce travail et sa générosité dont il mon fait preuve.

Nous remercions également tous les gens de génie civil, particulièrement nos enseignants, qui nous ont aidés et enrichi nos connaissances, durant les années de notre formation.

Mes remerciements sont également prodigués à Mr. **A. MESSABHIA**, Docteur au département de génie civil, Université de Tébessa, et Président du jury de soutenance de ce mémoire, ainsi qu'aux membres de ce jury : Mr **A. HAOUAM**, Mr M<sup>ed</sup>. **GUENFOUD** et Mr. **Y. DJABARI** qui m'ont fait l'honneur d'accepter d'être les modérateurs de ce travail.

Mes vifs remerciements vont aussi aux membres de ma famille pour leur soutien et leur encouragement et qu'ils trouvent ici mes profondes reconnaissances.

## Dédicace

*Je dédie ce modeste travail à mes chers*

*parents (ma mère et mon père)*

*Mes chers frères et chères sœurs*

*À tous mes amis*

# Homogénéisation analytique et modélisation numérique des structures

## Sandwichs en nid d'abeille

### Résumé

*Les matériaux sandwichs connaissent un essor important, tant dans les applications les utilisant, que dans les technologies les mettant en œuvre. Ils présentent un intérêt pour les applications qui requièrent à la fois rigidité et légèreté, notamment les transports, la marine, le nautisme, l'aéronautique, l'aérospatial, les sports et loisirs, l'industrie lourde, le génie civil et l'armée. Il est intéressant de connaître leurs propriétés mécaniques pour prédire et calculer leur comportement dans des environnements spécifiques. Le but de ce travail dans le thème "Modélisation de structures sandwichs" est la modélisation en flexion de structures sandwichs à âmes en nid-d'abeilles régulière et auxétique. Les étapes principales de cette étude sont :*

*La détermination des constantes élastiques d'une des structures en nid d'abeille régulière par :*

- une homogénéisation numérique à l'aide du logiciel « Ansys »*
- une homogénéisation analytique à l'aide d'un modèle de « Gibson »*

*La comparaison des résultats obtenus lors de l'étude expérimentale du comportement en flexion statique des structures sandwichs par Dr. ElHaddi HARKATI au Laboratoire de Fiabilité Mécanique (LFM) –Metz-, avec ceux obtenus par la simulation numérique.*

*La détermination des constantes élastiques d'une des structures en nid d'abeille auxétique par*

- une homogénéisation numérique à l'aide du logiciel « Ansys »*

*La comparaison des résultats obtenus par la simulation numérique du comportement en flexion quatre (04) points des structures sandwichs à âmes en nid d'abeille auxétique avec ceux obtenus par la simulation numérique et l'expérimental du Nida régulière*

## التجانس التحليلي و النمذجة الرقمية لهياكل ساندويتش عش النحل

### ملخص :

تشهد المواد الساندويتش ( مواد متعددة الطبقات ) نموا كبيرا في كل التطبيقات التي تستخدم هذه التكنولوجيا. فهي مفيدة للتطبيقات التي تتطلب على حد سواء صلابة وخفة الوزن، بما في ذلك النقل، والبحرية، والقوارب، والطيران، والفضاء، والرياضة والترفيه، والصناعة الثقيلة، والهندسة المدنية والجيش. ومن المثير للاهتمام أن نعرف الخواص الميكانيكية من أجل التنبؤ و حساب سلوكها في بيئات محددة. الهدف من هذا العمل الذي يندرج تحت عنوان "نمذجة الهياكل ساندويتش" هو نمذجة إنحاء هياكل ساندويتش لها لب عش النحل عادية ومنمي الحجم . الخطوات الرئيسية لهذه الدراسة هي:

حساب ثوابت المرونة لهياكل ساندويتش لها لب عش النحل عادية بـ:

- التجانس الرقمية باستخدام برنامج "ANSYS"

- التجانس التحليلية باستخدام نموذج "جيبسون"

-المقارنة بين النتائج التي تم الحصول عليها في دراسة تجريبية للسلوك السندويشات في الانحاء

ثابت من قبل الدكتور "حركاتي الهادي" بمختبر LFM ميتر ، مع تلك التي تم الحصول عليها عن طريق المحاكاة الرقمية.

حساب ثوابت المرونة لهياكل ساندويتش لها لب عش النحل منمي الحجم الهيكلي بـ:

- التجانس الرقمية باستخدام برنامج "ANSYS"

-المقارنة بين النتائج التي تم الحصول عليها عن طريق المحاكاة الرقمية لسلوك الانحاء بأربعة (04)

نقاط لهياكل ساندويتش لها لب عش النحل منمي الحجم الهيكلي مع تلك التي تم الحصول عليها عن

طريق المحاكاة العددية والتجريبية لساندويتش عش النحل عادية.

# Tables des matières

<b>INTRODUCTION GENERALE</b> .....	5
------------------------------------	---

## **C**HAPITRE I : COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES PANNEAUX SANDWICHS

I.1. Introduction .....	7
I.2. Intérêt des sandwichs .....	7
I.3. Introduction au comportement mécanique des panneaux sandwichs .....	8
I.4. Matériaux pour la construction sandwich .....	9
I.4.1. Les peaux .....	9
I.4.2. L'âme .....	9
I.4.3. Adhésifs (L'interface) .....	10
I.5. L'âme en Nid d'abeilles .....	10
I.6. Théorie des poutres sandwichs .....	12
I.7. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs .....	12
I.8. Modèle bidimensionnel d'une poutre en flexion simple .....	12
I.9. Comportement des sandwichs en flexion 3 et 4 Points .....	15
I.9.1. Comportement en flexion 3 points .....	16
I.9.2. Comportement en flexion 4 points .....	18
I.10. Modes de dégradations des sandwichs .....	19
I.10.1. Flambement généralisé des peaux .....	19
I.10.2. Rupture des peaux en traction ou en compression .....	19
I.10.3. Modes locaux de rupture .....	19
I.10.4. Rupture de l'âme en cisaillement .....	20
I.10.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping » .....	20
I.10.6. Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling » .....	21
I.10.7. Dégradation de l'adhésive .....	21
I.11. Conclusion .....	22

## **C**HAPITRE II : APPROCHES D'HOMOGENEISATIONS ANALYTIQUES

II.1. Introduction .....	24
II.2. Propriétés mécaniques de l'âme en nid d'abeille .....	24
II.3. Géométrie et notations .....	25
II.4. Hypothèse de Bitzer et Cugnoni .....	26
II.5. hypothèse de Chamis et al .....	27
II.6. Modèle de Gibson et Ashby. ....	27
II.7. Modèle de Grédiac. ....	32
II.8. Conclusion .....	33

# CHAPITRE III : INFLUENCE DES PARAMETRES GEOMETRIQUES DES CELLULES SUR LE COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES SANDWICHS EN NID D'ABEILLES

III.1. Introduction .....	35
III.2. PROCÉDURE DE CALCUL .....	35
III.3. Résultats obtenus .....	36
III.3.1. Effet de l'épaisseur de la paroi. ....	37
III.3.2. Effet du rapport h/l .....	39
III.3.3. Effet du diamètre de la cellule .....	41
III.3.4. Effet de l'angle de la cellule .....	43
III.4. Conclusion .....	46

# CHAPITRE IV : HOMOGENÉISATION NUMÉRIQUE DES STRUCTURES EN NID D'ABEILLE REGULIERE

IV.1. Introduction .....	48
IV.2. Procédures d'homogénéisation .....	48
IV.2.1. Le volume élémentaire représentative .....	48
IV.2.2. La simulation numérique .....	49
IV.2.2.1. simulation des sollicitations en traction .....	50
IV.2.2.2. simulations des sollicitations en cisaillement .....	52
IV.2.3. Résultats .....	53
IV.2.3.1. Module d'élasticité E1 .....	53
IV.2.3.2. Module d'élasticité E2 .....	55
IV.2.3.3. Module d'élasticité E3 .....	57
IV.2.3.4. Module de cisaillement G12 et G21 .....	58
IV.2.3.5. Module de cisaillement G13 et G31 .....	61
IV.2.3.6. Module de cisaillement G23 et G32 .....	63
IV.3. L'essai de flexion .....	67
IV.3.1. L'essai de flexion trois points .....	67
IV.3.2. L'essai de flexion quatre points .....	68
IV.4. Simulation numérique de la flexion trois points .....	69
IV.4.1. Résultats .....	70
IV.5. Simulation numérique de la flexion quatre points .....	70
IV.5.1. Résultats .....	71
IV.6. Conclusion .....	72

# CHAPITRE V : HOMOGENÉISATION NUMÉRIQUE D'UNE STRUCTURE NID D'ABEILLES À COEFFICIENT DE POISSON NÉGATIF.

V.1. Introduction .....	74
V.2. Géométrie et notations .....	74
V.3. Expression générale de la densité relative d'une structure nida auxétique .....	76
V.3.1. Métrique .....	76
V.3.2. La densité relative d'une structure nida .....	77
V.3.2.1. Système hexagonal régulière .....	77
V.3.2.2. Système nida Auxétique général .....	79
V.3.2.3. Système nida Auxétique d'origine régulière .....	80
V.3.3. Évolution de la densité relative en fonction des paramètres géométriques .....	81
V.4. Modèle analytique .....	84
V.5. Approches numériques .....	86
V.5.1. Le volume élémentaire représentatif .....	86
V.5.2. simulation des sollicitations en traction .....	88

V.6.Résultats .....	89
V.6.1. Module d'élasticité E1 .....	89
V.6.2. Module d'élasticité E2 .....	90
V.6.3. Module d'élasticité E3 .....	92
V.6.4. Module de cisaillement G12 et G21 .....	93
V.6.5. Module de cisaillement G13 et G31 .....	95
V.6.6. Module de cisaillement G23 et G32 .....	96
V.6.7. Simulation numérique de la flexion quatre points .....	99
V.6.8. Résultats .....	100
V.7.Conclusion .....	102

<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	103
----------------------------------	-----

ANNEXE .....	105
--------------	-----

BIBLIOGRAPHIE .....	123
---------------------	-----

LISTE DES FIGURES

LISTE DES TABLEAUX



# INTRODUCTION GENERALE

## INTRODUCTION GÉNÉRALE

Les panneaux sandwichs sont aujourd'hui fréquemment employés dans la fabrication de structures complexes telles que les navires, les avions ou encore les transports terrestres, le génie civil et l'armée. Il en existe de nombreux types, mais le principe est toujours le même : placer un matériau léger et très rigide en compression et cisaillement, l'âme, entre deux peaux supportant de grands efforts dans leur plan. De cette manière, le panneau sandwich obtenu constitue un matériau structural à la fois léger et très raide en flexion/torsion du fait de l'utilisation optimisée de la matière.

Les matériaux constitutifs disponibles sont extrêmement variés offrant ainsi de nombreux champs d'applications aux panneaux sandwichs : panneaux de structure, d'isolation acoustique, thermique, d'absorption d'énergie (amortisseurs de chocs). Les peaux peuvent être métalliques : aluminium haute performance, titane ; ou encore composites : stratifiés à fibres de carbone ou de verre noyées dans une résine époxyde par exemple. Les âmes sont en général des matériaux alvéolaires comme des mousses ou des nids d'abeilles métalliques ou plastiques : mousses d'aluminium, de polyuréthane, nid d'abeille aluminium, titane. Un type particulier de sandwichs est également très employé, il s'agit des sandwichs en nid d'abeilles. Ils font l'objet de ces travaux.

Le matériau d'âme retenu dans cette étude est : un nid d'abeille en Aluminium.

Le travail de mémoire présente les principaux résultats obtenus lors de l'étude expérimentale du comportement en flexion statique des structures sandwichs par Monsieur Elhaddi HARKATI le 18 mai 2006 au Laboratoire de Fiabilité Mécanique LFM, les résultats seront confrontés à une approche théorique utilisant le logiciel de simulation ANSYS 13

Le déroulement de ce travail se décompose en sept parties principales. Après une brève introduction, le premier chapitre présente une synthèse bibliographique concernant le comportement mécanique des matériaux sandwichs. Dans le second chapitre, nous présentons les modèles d'homogénéisations analytiques, dans la troisième partie nous explorons la solution basée sur les travaux de Gibson qu'ils s'appuient sur la théorie de l'élasticité pour les différents modules et coefficients du nid d'abeille en fonction des paramètres géométriques et mécaniques pour déterminer l'influence des paramètres géométriques de la cellule sur le comportement général du sandwich. Le quatrième chapitre porte sur la validation des résultats expérimentaux par l'homogénéisation analytique et l'utilisation de méthodes des éléments finis. Le cinquième chapitre est consacré l'homogénéisation numérique d'une autre structure nids d'abeilles auxétique, ainsi que l'étude de leur comportement en flexion quatre points. Une conclusion permettra de proposer une synthèse des principaux résultats obtenus et d'envisager les perspectives découlant de cette étude.

CHAPITRE I

**COMPORTEMENT MECANIQUE DES  
PANNEAUX SANDWICHS**

# CHAPITRE I : COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES PANNEAUX SANDWICHS

## I.1. Introduction

Les structures dites « sandwichs » occupent une place importante dans le domaine de la construction des pièces composites. Elles sont présentes dans pratiquement tous les domaines d'application. Ces structures résultent de l'assemblage par collage ou soudure de deux peaux (ou semelles) minces sur une âme (ou cœur) plus légère et de plus faibles caractéristiques mécaniques qui maintient leur écartement et transmet par cisaillement les actions mécaniques d'une peau à l'autre.

Ce chapitre présente le concept de structure sandwich au travers d'une description de la nature et des propriétés des matériaux constitutifs, de quelques notions relatives à la conception des pièces sandwichs, des principales méthodes de fabrication, des techniques de jonction et finition, et des différentes applications.

## I.2. Intérêt des sandwichs

Les matériaux sandwichs connaissent un essor important, tant dans les applications les utilisant, que dans les technologies les mettant en œuvre. Ils sont ainsi largement utilisés dans tous les secteurs industriels et notamment les transports, la marine, le nautisme, l'aéronautique, l'aérospatial, les sports et loisirs, l'industrie lourde, le génie civil et l'armée. Leur consommation ne cesse d'augmenter.

Les sandwichs présentent un intérêt pour les applications qui requièrent à la fois rigidité et légèreté. Ils sont constitués de deux peaux (ou semelles) éloignées l'une de l'autre par une âme creuse ou pleine (figure 1.1), qui maintient leur écartement. [1]

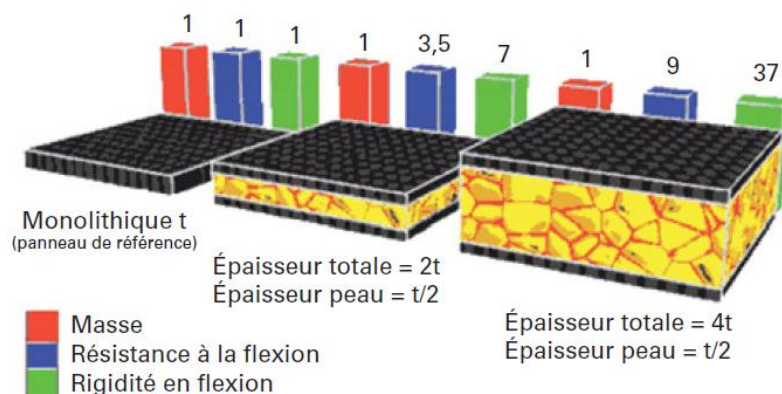


Figure 1.1 : Comparaison des performances mécaniques en flexion entre un panneau de référence et deux panneaux sandwichs

La théorie de la résistance des matériaux montre en effet que la rigidité en flexion d'un panneau est proportionnelle au cube de son épaisseur. De ce fait, le rôle d'une âme dans un composite multicouche est d'accroître le module du stratifié en augmentant de manière significative son moment d'inertie (via l'épaisseur) par adjonction d'un matériau de faible densité. Il peut ainsi en résulter une augmentation considérable de la rigidité pour un accroissement de masse minime.

La figure 1.1 compare les performances mécaniques en flexion entre un panneau monolithique de référence et deux panneaux sandwichs dont les faces sont réalisées avec le matériau du panneau de référence. Si l'on choisit une âme de très faible densité, l'augmentation de son épaisseur ne pénalise pas le poids du panneau et permet d'augmenter fortement les caractéristiques en flexion. [1].

Cette configuration de matériau sandwich peut être assimilée à une poutre en I (poutre IPN), dans laquelle les peaux jouent le rôle des deux ailes de la poutre, et l'âme celui du raidisseur central. Pour ce mode de sollicitation, il apparaît que la peau supérieure est chargée en compression, la peau inférieure en traction, et l'âme en cisaillement.

### **I.3. Introduction au comportement mécanique des panneaux sandwichs**

Les panneaux sandwichs ont donc un comportement structural bien meilleur que celui d'une plaque massive. La contrepartie de cette amélioration est une complexification importante du comportement mécanique de ces objets comme sera évoqué au chapitre 2. Étant donné que la capacité structurelle est un élément déterminant pour les applications utilisant des panneaux sandwichs, la connaissance et la prédiction du comportement d'un panneau est un enjeu important.

On propose ici une introduction au comportement mécanique simplifié des panneaux sandwichs couramment utilisés dans leurs applications.

En effet, même si on a vu que le comportement d'une plaque périodique hétérogène est aujourd'hui un problème ouvert, le fait que les matériaux sandwichs sont composés de plusieurs parties interagissant entre elles, permet une décomposition des rôles mécaniques de l'âme et des peaux. Cette décomposition n'est possible qu'au prix d'une méthode analytique d'homogénéisation. Une exploration numérique de cette question sera effectuée aux Chapitres 4 et 5, et sera appliquée aux panneaux sandwichs à âme en Nid d'abeille. Il sera donc possible d'associer judicieusement les propriétés des peaux ou semelles et celles des matériaux de cœur ou âme. L'assemblage de ces deux parties se réalise par collage, soudage ou brasage en mettant en jeu un autre composé de comportement différent.

La raideur et la résistance de la plaque en flexion sont assurées essentiellement par les peaux. En effet la mise en flexion d'un panneau sandwich génère un effort de traction/compression dans les peaux alors que l'âme, étant plus souple, n'est soumise pratiquement à aucun effort (Figure 1.2.a). La déformation générée par l'effort tranchant est, quant à elle, liée à la mise en cisaillement de l'âme dans toute son épaisseur. Ainsi la raideur et la résistance à l'effort tranchant sont assurées essentiellement par l'âme (Figure 1.2.b).

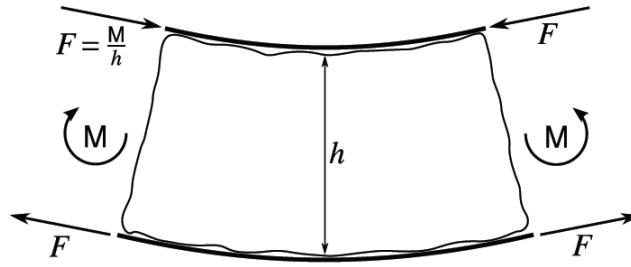


Figure 1.2.a : Effet de la flexion sur les peaux

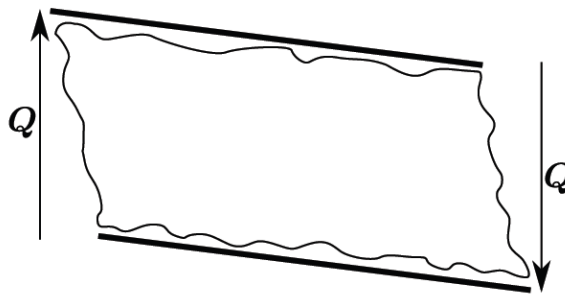


Figure 1.2.b : Effet de l'effort tranchant sur l'âme

Puisqu'on cherche à comparer le module à structure en nid d'abeille utilisé comme âme de panneau sandwich, c'est l'étude de la raideur et de la résistance à l'effort tranchant qui sont pertinentes. Comme on l'a déjà indiqué, la flèche de cisaillement peut devenir prépondérante dans le cas des panneaux sandwich. Mais plus encore, lorsqu'on s'intéresse à la résistance, il est absolument nécessaire de connaître précisément les efforts locaux générés par l'effort tranchant.

En effet, pour la plupart des chargements conventionnels, la ruine d'un panneau sandwich se produit par instabilité élastique. Le nombre de types de ruine observé est assez grand, allant du flambement d'ensemble au micro-voilement des facettes qui constituent l'âme. À titre d'illustration, une étude détaillée dans le cas de panneaux sandwichs à âme en nid d'abeilles est proposée par Petras et Sutcliffe [2], mais aussi par Rammerstorfer et al. [3]. Pour le comportement en grandes transformations du nid d'abeilles seul on pourra aussi se référer aux travaux de Wierzbicki [4] et Mohr and Doyoyo [5]. Cette observation mène à une conclusion est que la qualité géométrique de l'âme qui est produite est cruciale pour obtenir des performances structurelles acceptables. Ainsi, la résistance d'une géométrie donnée dépend fondamentalement du procédé qui a été utilisé pour la produire. Cette observation explique donc l'arbitrage sévère entre prix et capacité structurelle qui fait la spécificité du marché des panneaux sandwichs.

#### I.4. Matériaux pour la construction sandwich

##### Les peaux :

Généralement de faibles épaisseurs, elles sont constituées le plus souvent :

- pour les composites à moyennes et hautes performances, de stratifiés à matrice thermodurcissable (polyesters insaturés, époxydes ou thermoplastique polypropylène...) et d'un renfort fibreux (mat et tissu) de verre et de carbone ou d'aramide;

- pour les structures portantes, de feuilles métalliques (aluminium, acier) ;
- pour des structures de faibles à moyennes performances, de bois, laminé, stratifié, contre-plaqué.

### L'âme :

Légère, l'âme a en général une très faible résistance à la flexion. Son but est de reprendre les efforts de compression et de cisaillement. Les matériaux d'âme les plus utilisés se présentent principalement sous deux formes :

- **âmes pleines** [6], parmi lesquelles on trouve le balsa (ou bois cellulaire), diverses mousses cellulaires et des résines chargées de microsphères creuses de verres (mousses syntactiques) ;
- **âmes creuses** [6], essentiellement de type nid d'abeilles et profilé (réseaux métalliques légers, réseaux en papier enduit ou non, réseaux en polycarbonate et en polypropylène).

### Adhésifs (L'interface) :

Le choix d'un adhésif est principalement guidé, car la recherche de performance de la structure par le biais d'une bonne adhésion entre l'âme et les peaux. Il faudra prendre en compte les contraintes de fonctionnement du sandwich pour le définir et des propriétés comme sa résistance, sa tenue à la fatigue, à la chaleur, au vieillissement, au fluage sont d'un grand intérêt.

Parmi les plus usités, on trouve les époxydes, les phénoliques, les polyuréthanes, les uréthanes acrylates, les polyesters et vinylesters, ...etc.

### I.5. L'âme en Nid d'abeilles

L'âme en nid d'abeilles, connue sous le nom «Nida », est un matériau structural souple constitué de mailles hexagonales, réalisée à partir de différents matériaux par exemple le papier ou l'aluminium.



Figure 1.3 : Structure sandwich à âme Nida et peaux en stratifié

Le Nida étant une structure anisotrope, ses propriétés varient selon le sens transversal ou longitudinal des alvéoles (taille de mailles). De plus, la taille de celles-ci, l'épaisseur des parois du Nida et la méthode de mise en œuvre sont des paramètres qui influencent la résistance au cisaillement transversal et longitudinal du Nida.

Le Nida a des propriétés mécaniques supérieures à celles des mousses. Sa masse volumique peut varier entre 15 et 160 kg/m<sup>3</sup> ; son épaisseur entre 3 et 150 mm.

Lorsque des structures sandwichs constituées d'une âme Nida sont soumises à un chargement, les efforts en flexion sont absorbés par les deux peaux tandis que les efforts en cisaillement se répartissent entre les peaux et l'âme en Nida. L'ensemble confère à cette structure sandwich légèreté, rigidité, stabilité dimensionnelle et résistance à la corrosion (Nidas non métalliques). Parmi les âmes Nida les plus utilisées, nous retrouvons :

### 1) L'âme Nida métallique :

L'aluminium et l'alliage ultra léger sont les matériaux les plus utilisés pour fabriquer les Nidas métalliques. Par exemple, le nid d'abeilles «Aéroweb» est constitué de mailles hexagonales en aluminium. Étant donné la faible densité et les performances physiques et mécaniques élevées du Nida Aéroweb, il est utilisé principalement comme âme destinée à prendre les efforts de cisaillement dans des constructions sandwichs collées légères.

Cependant à température élevée les propriétés mécaniques de tous les types de Nidas métalliques disponibles dépendent des propriétés de l'aluminium et de la tenue à la chaleur de l'adhésif utilisé pour le collage des feuilles.

Propriétés				
Masse volumique du Nida ( $\text{kg/m}^3$ )	29	54	62	83
Épaisseur de la paroi des alvéoles (mm)	0.064	0.038	0.102	0.064
Résistance au cisaillement $t_{xz}$ (MPa)	0.6	1.5	1.8	2.9
Module de cisaillement $G_{xz}$ (MPa)	120	270	310	430
Résistance au cisaillement $t_{yz}$ (MPa)	0.44	1.0	1.2	1.8
Module de cisaillement $G_{yz}$ (MPa)	70	170	200	270
Résistance en compression $s_z$ (MPa)	0.7	2.1	2.9	4.6
Taille des alvéoles (mm)	19	6.3	13	6.3

Tableau 1.1 Propriétés mécaniques et géométriques du nid d'abeille en aluminium [1]

Le nid d'abeille en aluminium a également l'inconvénient de ne pas présenter de mémoire mécanique. En cas de choc, le nid d'abeille se déforme de manière irréversible, tandis que les peaux composites reviennent à leur position d'origine. Il en résulte l'apparition d'une zone de décollement peau/âme avec affaiblissement de propriétés mécaniques.

### 2) L'âme Nida en papier :

Les nids d'abeille peuvent aussi être réalisés à partir de différents types de papier (papier kraft, papier Nomex). Largement utilisé, le papier « Nomex » un produit technique fabriqué de fibres ramides coupées et d'un liant en polymère aramide pour fabriquer des Nidas, procure à l'âme de bonnes propriétés mécaniques. Le tableau 2 présente quelques ordres de grandeur de caractéristiques mécaniques.

Propriétés				
Masse volumique du Nida ( $\text{kg/m}^3$ )	24	32	48	64
Épaisseur de la paroi des alvéoles (mm)	0.05	0.05	0.05	0.08
Résistance au cisaillement $t_{xz}$ (MPa)	0.7	1.1	1.8	2.5
Module de cisaillement $G_{xz}$ (MPa)	25	34	52	70
Résistance au cisaillement $t_{yz}$ (MPa)	0.35	0.6	0.9	1.1
Module de cisaillement $G_{yz}$ (MPa)	14	20	29	35
Résistance en compression $s_z$ (MPa)	0.7	1.1	2.2	3.8
Taille des alvéoles (mm)	6	5	3	5

Tableau 1.2 Propriétés mécaniques et géométriques du nid d'abeille en polyaramide (source Nomex) [1]



Le Nida en «Nomex» par rapport au Nida en aluminium à l'avantage d'être souple et d'avoir une densité inférieure à rigidité égale. De plus, le papier étant non métallique, il a aussi l'avantage d'être un isolant thermique, mais il est plus cher que les autres matériaux d'âme, comme le montre la figure 1.4.

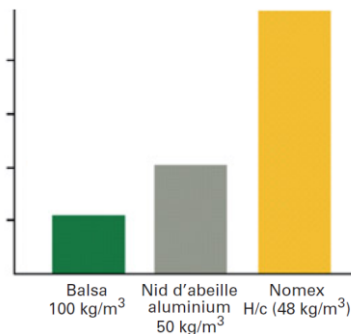


Figure 1.4– Analyse comparée des prix de différents matériaux d'âme (d'après [1])

### 3) L'âme Nida en plastique :

Le Nida en plastique est un nid d'abeilles extrudé en polypropylène utilisé comme âme de structure sandwich (panneaux). Par exemple, les nids d'abeilles «Nidaplast» se présentent sous forme de panneaux ou de blocs. La nature thermoplastique de ces nids d'abeilles facilite leur mise en forme.

Ils sont thermiquement isolants grâce à l'air emprisonné dans les alvéoles et bénéficient de propriétés d'isolation acoustique de part la nature viscoélastique du polypropylène.

Les sandwichs en Nida polypropylène sont moins rigides que ceux en «Nomex» ou en aluminium, mais demeurent plus légers et moins dispendieux.

## I.6. Théorie des poutres sandwichs [6]

La théorie des poutres simples est facilement adaptée aux poutres sandwichs avec quelques modifications mineures. L'utilisation de cette théorie permet de disposer d'une méthode simple permettant de calculer la rigidité en flexion, la rigidité en cisaillement, les contraintes dans les peaux et les contraintes de cisaillement dans l'âme. Cette théorie des poutres s'appelle habituellement la théorie de Timoshenko [7] et est reprise dans de nombreux ouvrages (par exemple Plantema [8] et Zenkert [9]).

## I.7. Hypothèses de la théorie des matériaux sandwichs

La théorie des matériaux sandwichs basée sur les hypothèses suivantes :

- L'épaisseur de l'âme est plus élevée que celle des peaux ( $h_c \gg h_1, h_2$ ).
- Les déplacements du cœur  $u_c$  et  $v_c$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ .
- les déplacements  $u$  et  $v$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse  $W$  est indépendant de la variable  $z$ : la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$ ; les contraintes  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont négligées.

-Les contraintes de cisaillement transverse  $\tau_{xz}$  et  $\tau_{yz}$  sont négligées dans les peaux. Enfin, la théorie traite les problèmes d'élasticités en faibles déformations.

### I.8. Modèle bidimensionnel d'une poutre en flexion simple

La théorie des poutres simples est adaptée aux poutres sandwichs, avec quelques modifications mineures. L'utilisation de cette théorie permet de trouver une méthode simple permettant de calculer la rigidité en flexion, la rigidité en cisaillement, les contraintes dans les peaux et la contrainte de cisaillement dans l'âme.

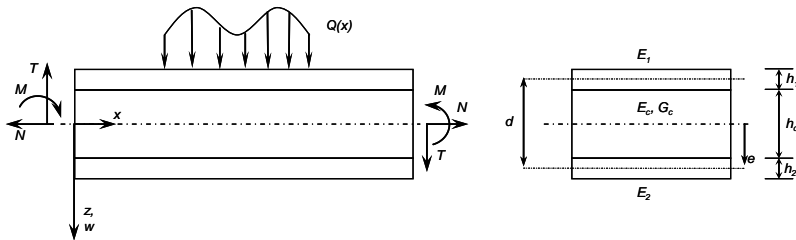


Figure 1.5. Poutre sandwich chargée dans son plan.

#### Rigidité en flexion

Dans le cas général, la répartition des sollicitations dans une structure sandwich est décrite comme sur la Figure 1.5. Dans cette étude on suppose que la poutre sandwich est soumise uniquement, à un moment de flexion  $M_x$  et une force transversale  $T_x$ . La déformation à une distance  $z$  par rapport à l'axe neutre de sandwich est donné par :

$$\varepsilon_x = \frac{M_x z}{D} \quad [1.1]$$

$D$  : désigne la rigidité en flexion du sandwich, et s'écrit :

$$D = \int E z^2 dz = \frac{E_1 b h_1^3}{12} + \frac{E_2 b h_2^3}{12} + \frac{E_c b h_c^3}{12} + E_1 b h_1 (d - e)^2 + E_2 b h_2 e^2 + E_c b t_c \left( \frac{h_c + h_2}{2} - e \right)^2 \quad [1.2]$$

Avec  $e = d/2$

$h_f$ ,  $d$ ,  $e$  et le module d'élasticité  $E_f$  sont ceux représentés dans la Figure 6.1. Dans le cas d'un sandwich à peaux fines, les deux premiers termes du second membre peuvent être négligés et même le troisième et le sixième terme pour une âme à module d'élasticité faible.

Pour un sandwich symétrique (même épaisseur et matériau)  $h_1 = h_2 = h_f$ ,  $E_1 = E_2 = E_f$ , l'équation [1.2] devient :

$$D = \frac{E_f b h_f^3}{6} + \frac{E_f b h_f d^2}{2} + \frac{E_c b h_c^3}{12} \quad [1.3]$$

Dans cette étude, la position de l'axe neutre est celle qui vérifie la condition suivante :

$$\int \sigma_x dz = 0 \quad [1.4]$$

Pour une intégration sur la totalité de la section transversale, la rigidité est donnée :

$$E_1 t_1 \left( \frac{h_1}{2} + h_c + \frac{h_2}{2} \right) + E_c h_c \left( \frac{h_c}{2} + \frac{h_2}{2} \right) = e [E_1 h_1 + E_c h_c + E_2 h_2] \quad [1.5]$$

- Contraintes normales dans les peaux

Pour un sandwich symétrique, la position de l'axe neutre est au milieu du cœur. Les contraintes de traction ou de compression dans les peaux peuvent être calculées en utilisant l'équation 1.1 :

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = E \frac{M_x z}{D} \quad [1.6]$$

- Contrainte de compression dans la peau supérieure :

$$\sigma_1 = -E_1 \frac{M_x (d - e)}{D} \approx -\frac{M_x}{h_f b d} \quad [1.7]$$

- Contrainte de traction dans la peau inférieure :

$$\sigma_2 = \frac{M_x e}{D} E_2 \approx +\frac{M_x}{h_f b d} \quad [1.8]$$

La contrainte de cisaillement est calculée en utilisant une définition plus générale de l'équation d'équilibre.

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{\tau_{xz}}{dz} = 0 \rightarrow \tau_{xz}(z) = \int_z^{(d+h_f)/2} \frac{d\sigma_x}{dx} dz \quad [1.7]$$

Sachant que  $\tau_{xz}$  est nulle pour  $z = \frac{d}{2} + h_f$ , et en utilisant  $\frac{dM_x}{dx} = T_x$ , l'équation [1.7] devient :

$$\tau_{xz} = \frac{T_x}{D} \int_z^{(d+h_f)/2} E z dz = \frac{T_x B(z)}{D} \quad [1.9]$$

Avec  $B(z)$  est le moment surfacique d'ordre 1, calculé par :

$$B(z) = \int_z^{(d+h_f)/2} E z dz \quad [1.9]$$

- Contraintes de cisaillement dans les peaux

Les contraintes de cisaillement dans les peaux et l'âme sont données par :

Dans la peau supérieure pour  $-d + e - \frac{h_1}{2} \leq z \leq -d + e + \frac{h_1}{2}$ .

$$\tau_1(z) = \frac{T_x E_1}{D} \frac{1}{2} \left[ \left( d - e + \frac{h_1}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad [1.10]$$

- Dans la peau inférieure pour  $e - \frac{h_2}{2} \leq z \leq e + \frac{h_2}{2}$ .

$$\tau_2(z) = \frac{T_x E_2}{D} \frac{1}{2} \left[ \left( e + \frac{h_2}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad [1.11]$$

- Contraintes de cisaillement dans le cœur

Dans l'âme pour  $-d + e - \frac{h_1}{2} \leq z \leq 0$ .

$$\tau_c(z) = \frac{T_x}{D} \left[ E_1 h_1 (d - e) + \frac{E_c}{2} \left\{ \left( d - e - \frac{h_1}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad [1.12]$$

Dans l'âme pour  $0 \leq z \leq e - \frac{h_2}{2}$ .

$$\tau_c(z) = \frac{T_x}{D} \left[ E_2 h_2 e + \frac{E_c}{2} \left\{ \left( e - \frac{h_2}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad [1.13]$$

Pour un sandwich symétrique de mêmes peaux fines avec  $E_1 = E_2 = E_p$ ,  $h_1 = h_2 = t$  et  $e = d/2$  et une âme avec un faible module d'élasticité, la contrainte de cisaillement reste constante dans l'âme et donnée par la formule suivante :

$$\tau_c = \frac{T_x}{bd} \quad [1.14]$$

La faible densité, du matériau composant le noyau associé à une contrainte de cisaillement plus ou moins constante dans la section transversale, fait que, dans toute analyse mécanique de ce type de structure, la prise en compte des déformations de cisaillement est primordiale. On peut admettre que la déformation est composée d'une contribution classique due à la flexion notée,  $W_f$  et d'une autre due au cisaillement  $W_s$ . Pour une poutre sandwich de peaux fines, l'analyse mécanique est plus simple et on peut définir la courbure totale comme étant la contribution d'une flexion et d'un cisaillement donnée par l'équation suivante :

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = -\frac{M_x}{D} + \frac{1}{S} \frac{dT_x}{dx} \quad [1.15]$$

S : La rigidité en cisaillement donnée par :

$$S = \frac{Gd^2}{k} \quad [1.16]$$

G, module de cisaillement du cœur, k le facteur de cisaillement égal à 1.2 pour une section transversale rectangulaire homogène. La rigidité en cisaillement peut être calculée pour un sandwich de peaux fines  $t < h_c$  et de cœur de faible module élastique  $E_c < E_f$ , par la relation :

$$S = \frac{G_c b d^2}{h_c} \quad [1.17]$$

### I.9. Comportement des sandwichs en flexion 3 et 4 Points

Les structures sandwichs sont généralement sollicitées en flexion (trois et quatre points). Afin d'optimiser les caractéristiques de leurs constituants (âme et peaux) pour une application donnée, il convient donc de connaître leur comportement pour ces deux types de sollicitation.

$$E_1 = E_2 = E_f, \quad h_1 = h_2 = t \quad \text{et} \quad e = d/2$$

#### ▪ Comportement en flexion 3 points

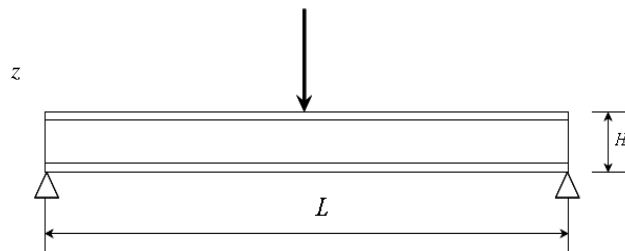


Figure 1.6 Schéma d'un essai de flexion 3 points.

#### ▪ Les contraintes normales dans les peaux :

Dans le cas d'un chargement central d'une poutre sandwich (figure 1.12). Les contraintes de traction ou de compression dans les deux peaux et la contrainte de cisaillement dans le cœur sont alors :

Les contraintes dans les peaux pour  $\frac{h_c}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}$  et  $-\frac{H}{2} \leq z \leq -\frac{h_c}{2}$  :

$$\sigma_f = \frac{Mz}{D} E_f \quad [1.18]$$

Le maximum des contraintes étant obtenu pour  $z = \pm \frac{H}{2}$  et  $x = \frac{L}{2}$ , ce qui nous donne :

$$\sigma_{f,\max} = \pm \frac{PLH}{8D} E_f$$

[1.19]

Les contraintes dans le cœur pour  $-\frac{h_c}{2} \leq z \leq \frac{h_c}{2}$  :

$$\sigma_c = \frac{Mz}{D} E_c \quad [1.20]$$

Les contraintes planes maximales supportées par le cœur sont alors :

$$\sigma_c = \pm \frac{PLh_c}{8D} E_c \quad [1.21]$$

▪ **Les contraintes de cisaillement dans le cœur**

En ce qui concerne la contrainte de cisaillement  $\tau_c$  dans le cœur, du fait de l'hétérogénéité de la structure, il faut tenir compte du changement de module dans une section droite :

$$\tau_c = \frac{T}{Db} \sum SE \text{ Avec } \sum SE = E_f \frac{btd}{2} + E_c \frac{b}{t} \left( \frac{h_c}{2} - z \right) \left( \frac{h_c}{2} + z \right) \quad [1.22]$$

S, moment statique par rapport à l'axe (Oy).

Ce qui donne :

$$\tau_c = \frac{T}{2D} \left[ E_f \frac{btd}{2} + E_c \frac{b}{2} \left( \frac{h_c^2}{2} - z^2 \right) \right] \quad [1.23]$$

Avec un maximum au centre du sandwich d'où :

$$\tau_{c,\max} = \frac{P}{4D} \left( E_f td + E_c \frac{h_c^2}{4} \right) \quad [1.24]$$

De plus sachant que  $E_f \gg E_c$  on peut négliger le terme tenant compte du module de Young de l'âme de sandwich, et de ce fait on obtient :

$$\tau_{c,\max} = \frac{P}{4D} E_f td \quad [1.25]$$

Nous avons déjà vu précédemment que l'expression de la rigidité en flexion D pouvait être réduite au second terme du second membre de son expression globale, ce qui nous donne pour la contrainte maximale de cisaillement dans le cœur :

$$\tau_{c,\max} = \frac{P}{2bd} \quad [1.26]$$

Nous pouvons constater que  $\tau_{c,\max}$  est constante dans l'épaisseur de l'âme.

- Le déplacement  $W$  au point de chargement ( $x=L/2$ )

Le déplacement total de la poutre sandwich soumise à la flexion trois-points, sera la somme d'une contribution classique due à la flexion,  $w_f$ , et d'une autre due au cisaillement de l'âme,  $w_c$ , de sorte que  $w_t = w_f + w_c$  ;

$$w_f = \frac{PL^3}{48D} \text{ et } w_c = \frac{PL}{4S} \quad [1.27]$$

D'où le déplacement total :

$$w_t = \frac{PL^3}{48D} \left( 1 + \frac{12D}{SL^2} \right) \quad [1.28]$$

#### Comportement en flexion 4 points

L'essai de flexion 4 points (figure 1.13)a prouvé une efficacité remarquable dans l'étude de la rupture par cisaillement des structures sandwich, l'avantage inhérent de l'essai flexion 4 points est qu'il n'y a pas de large concentration de contrainte aux points d'application de la charge (entre appuis intérieurs).

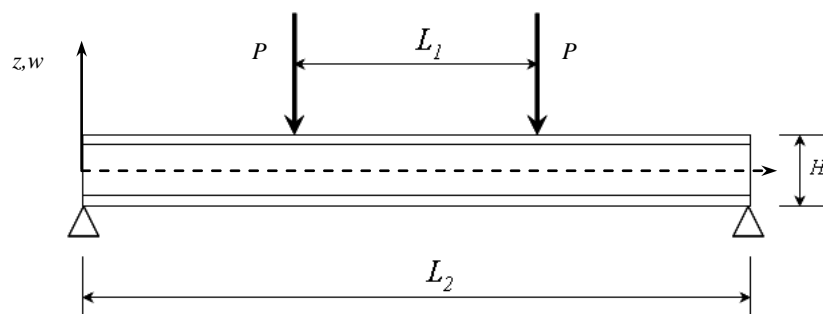


Figure 1.7. Schéma d'un essai de flexion 4 points.

Cet essai offre au milieu de la section du sandwich un moment de flexion maximum constant avec une force transversale nulle. Les contraintes de traction ou de compression dans les deux peaux et la contrainte de cisaillement dans le cœur d'après les équations (1.6), (1.7) et (1.8) sont alors :

- Les contraintes normales dans les peaux :

$$\sigma_f = \frac{P(L_2 - L_1)}{2h_f bd} \quad [1.29]$$

- Les contraintes de cisaillement dans le cœur :

$$\tau_c = \frac{P}{bd} \quad [1.30]$$

- Le déplacement W au point de chargement  $\left(\frac{L_2 - L_1}{2}\right)$  :

$$W\left(\frac{L_2 - L_1}{2}\right) = \frac{P(L_2 - L_1)^2(L_2 + 2L_1)}{24D} + \frac{P(L_2 - L_1)}{2S} \quad [1.31]$$

- La déformation maximale en flexion des peaux :

$$\varepsilon_f = \frac{P(L_2 - L_1)h}{4D} \quad [1.32]$$

- Déformation maximale en cisaillement du cœur

$$\gamma_c = \frac{P}{G_c bd}$$

## I.9. Modes de dégradations des sandwichs

Nous représentons ici les différents modes de rupture des structures sandwichs soumis à la flexion afin de mieux cerner le comportement mécanique de ces structures.

### I.9.1. Flambement généralisé des peaux

Une poutre sandwich soumise à la compression peut céder sous l'effet de conditions d'instabilité concernant toute la poutre (Fig. 1.8). Le flambement généralisé peut également survenir quand les contraintes dans les peaux et dans l'âme sont inférieures à leurs résistances à la rupture respectives. La charge qui cause le flambement du sandwich dépend de paramètres tels que les dimensions du sandwich, le type de sandwich, la rigidité en flexion, l'épaisseur des peaux, l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme.

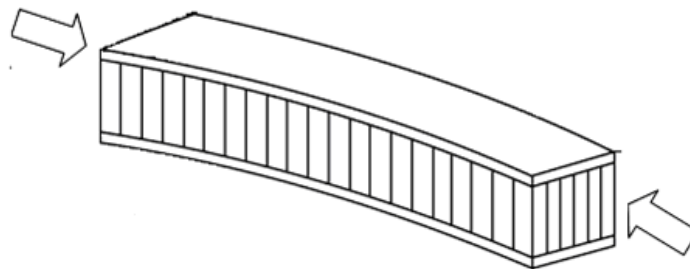


Figure 1.8 Flambement généralisé des peaux du sandwich [1]



### I.9.2. Rupture des peaux en traction ou en compression

Il s'agit du cas où les contraintes dans les peaux sont supérieures aux contraintes admissibles pour le matériau constituant les peaux (Fig.1.9). Ce phénomène peut être évité en utilisant un matériau dont les contraintes à rupture sont plus élevées, en augmentant l'épaisseur des peaux (ce qui réduit les contraintes appliquées), ou en augmentant l'épaisseur de l'âme (ce qui permet également de réduire les contraintes dans les peaux) (relations 1.25 et 1.37). La manière la plus adéquate de résoudre le problème est d'augmenter l'épaisseur de l'âme. Par contre, une âme de plus forte densité (plus rigide) n'affecte pas les contraintes dans la peau.

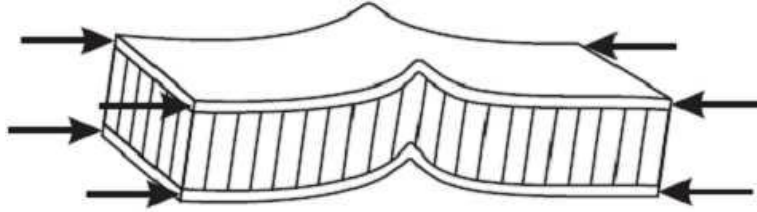


Figure 1.9 : Rupture des peaux en traction ou en compression [20]

### I.9.3. Modes locaux de rupture

L'indentation locale est un mode localisé de rupture dû à une concentration de contraintes résultant, soit de l'application d'une charge localisée, soit de la position d'un appui de type ponctuel ou linéique (Fig. 1.10)

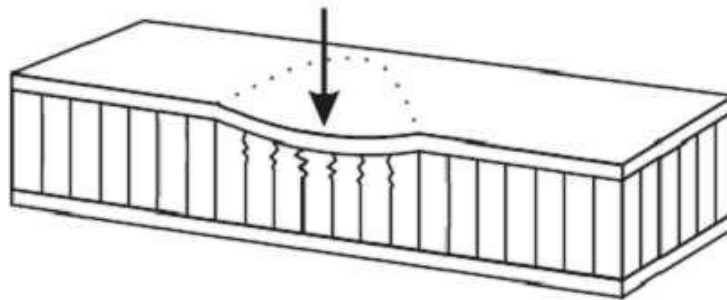


Figure 1.10 Modes locaux de rupture par indentation [1]

### I.9.4. Rupture de l'âme en cisaillement

Si la contrainte de cisaillement (prépondérante dans l'âme) dépasse la résistance au cisaillement du matériau de l'âme, il y a rupture de l'âme (Fig. 1.11). Si l'on se trouve dans ce cas, on peut soit utiliser un matériau d'âme qui possède une résistance au cisaillement plus élevée, soit augmenter l'épaisseur de l'âme (relations 1.31 et 1.38). Par contre, utiliser un matériau différent pour les peaux, ou changer leur épaisseur n'aura pas d'effet.

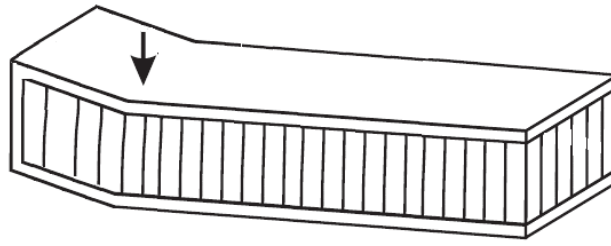


Figure 1.11 Modes locaux de rupture par indentation [1]

### I.9.5. Flambement généralisé de l'âme ou « crimping »

Si le rapport longueur/épaisseur est relativement faible, et que la rigidité de cisaillement est négligeable devant la rigidité de flexion, le flambement généralisé prend la forme du flambement de l'âme. Le flambement de l'âme ne dépend pratiquement pas des propriétés des peaux ; par contre, il augmente de façon linéaire avec l'épaisseur de l'âme et le module de cisaillement de l'âme. Pour augmenter la résistance à cette charge critique, il faut donc soit augmenter l'épaisseur de l'âme, soit utiliser une âme avec un module de cisaillement plus élevé.

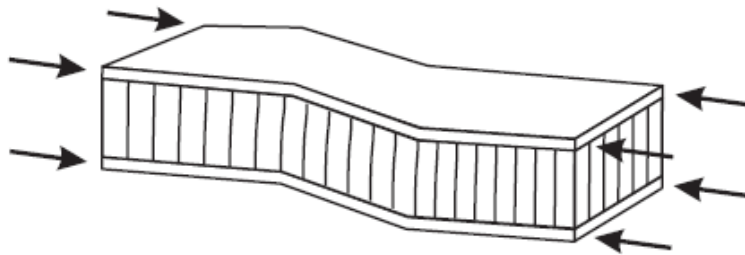


Figure 1.12 Flambement généralisé de l'âme du sandwich [1]

### I.9.6. Flambement localisé, « wrinkling » ou « dimpling »

Les peaux, considérées par elles-mêmes, sans connexion avec l'âme, flambent très facilement à cause de leur faible épaisseur. C'est l'âme qui empêche leur flambement. Cependant, si on atteint la contrainte limite, il se peut que l'âme ne soit plus capable d'empêcher le flambement.

Dans ce cas, le flambement localisé des peaux, ou « wrinkling » (Fig. 1.13), se produit.

Contrairement au flambement généralisé, le flambement localisé peut prendre des configurations différentes qui ne dépendent pas de la géométrie de la structure. Par contre, il est influencé par les modules élastiques des peaux et de l'âme, et le module de cisaillement de l'âme. Si l'on craint un flambement localisé de la peau, on peut soit utiliser pour les peaux, un matériau avec un module élastique plus élevé, soit utiliser pour l'âme, un matériau présentant des propriétés élastiques plus élevées. Dans le cas d'une âme en nid d'abeille, mise à part les ruptures par « wrinkling », il peut survenir aussi un autre mode de rupture par flambement localisé de la peau en fossettes, appelé « dampling » (Fig. 1.14).

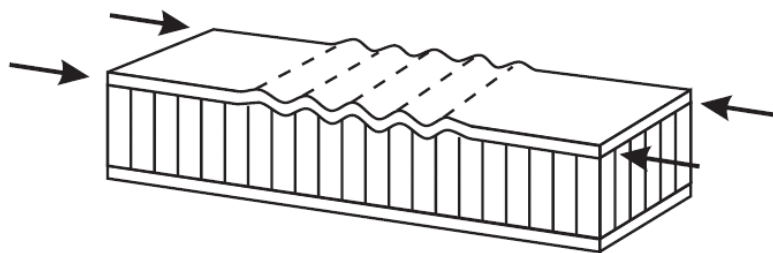


Figure 1.13 Flambement localisé « wrinkling » [1]

### I.1.1. Dégradation de l'adhésive

La dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme en nid d'abeille se fait généralement selon trois types

- dégradation de l'adhésive entre les peaux et l'âme,
- dégradation de l'attachement des cellules de l'âme,
- dégradation de l'attachement du nœud des cellules de l'âme.

La Fig. 1.15 illustre les modes de dégradation de l'adhésif. L'exposition à l'humidité provoque des dégradations remarquables de la résistance de l'adhésif ce qui peut changer le mode de dégradation et causer la ruine avancée du panneau sandwich.

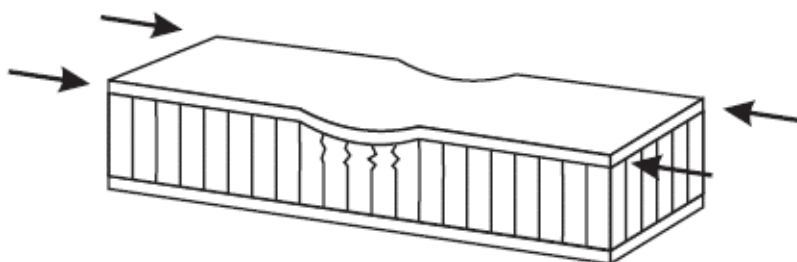


Figure 1.14 Flambement localisé « wrinkling » [1]

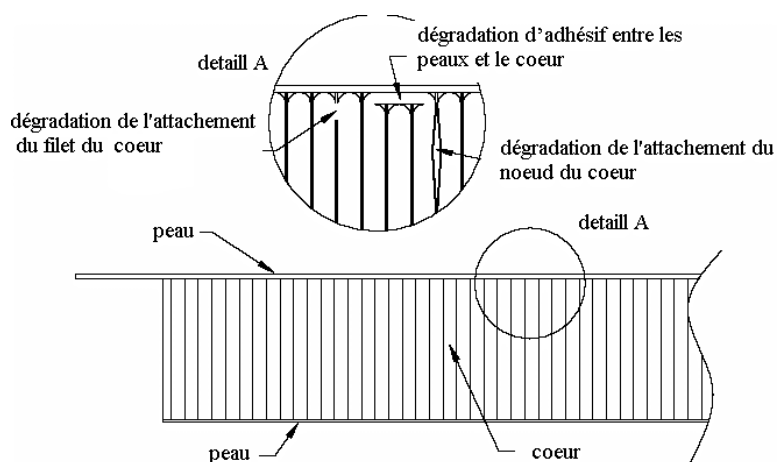


Figure 1.15 Type de dégradation de l'adhésif

## **I.2. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau sandwich. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures sandwichs, les différents modèles permettant de décrire leur comportement en flexion, ainsi que les différents modes d'endommagements. Le chapitre suivant va porter sur la présentation de différentes approches existantes dans la littérature utilisée pour l'étude.

CHAPITRE II

APPROCHE D'HOMOGENEISATIONS  
ANALYTIQUES

## CHAPITRE II : APPROCHES D'HOMOGENEISATIONS ANALYTIQUES

### II.1. Introduction

Les matériaux sandwichs sont composés de plusieurs parties interagissant entre elles. On trouve donc les peaux ou semelles ayant des caractéristiques mécaniques propres et le cœur ou âme pouvant être entre autres du nid d'abeilles (nida) ayant des propriétés mécaniques spécifiques. L'assemblage de ces deux parties se réalise par collage ou soudage mettant en jeu un autre corps de comportement différent.

L'intérêt de l'étude est de pouvoir homogénéiser le nida indépendamment des peaux, c'est-à-dire remplacer le nida de géométrie compliquée par un matériau homogène de propriétés mécaniques similaires dans les modèles analytiques et numériques. Le but de ce chapitre est de présenter les approches d'homogénéisations existantes dans la littérature.

### II.2. Propriétés mécaniques de l'âme en nid d'abeille

Le Nida étant une structure anisotrope, ses propriétés varient selon le sens transversal ou longitudinal des alvéoles, sa matrice de rigidité ou de souplesse est caractérisée par neuf termes indépendants, la loi de Hooke s'écrit suivant l'une des formes matricielles [10] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

La relation d'élasticité (2.2) s'écrit en introduisant les modules de l'ingénieur, sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & -\frac{\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{21}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Le comportement élastique d'un matériau composite orthotrope peut être décrit les neuf modules indépendants :

- 3 modules de Young:  $E_1, E_2, E_3$
- 3 coefficients de Poisson :  $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$
- 3 modules de cisaillement :  $G_{12}, G_{13}, G_{23}$

### II.3. Géométrie et notations

Les caractéristiques géométriques nécessaires aux modélisations :

- Les modules d'élasticité :  $E_X$  où X est la direction de traction.
- Les coefficients de Poisson:  $\nu_{XY}$  où X est la direction de traction et Y la direction de contraction.
- Les modules de cisaillement :  $G_{XY}$  module de cisaillement dans le plan (X, Y)

Les modules sont calculés dans le repère (X, Y, Z) [11], (Fig.2.1).

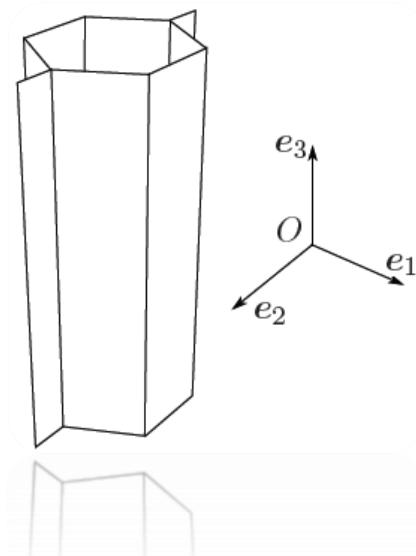


Figure 2.1– Repère d'étude

Les Paramètres géométriques d'une cellule en nid d'abeille sont illustrés en (Fig. 2.2)

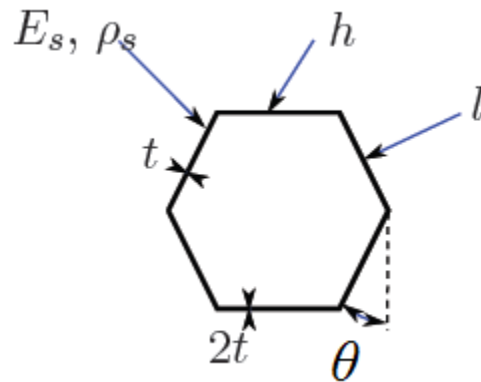


Figure 2.2– Géométrie d'un nid d'abeille

avec :

- $\theta$  : Angle de la cellule
- $h$  : Longueur de la paroi centrale
- $t$  : Épaisseur de la paroi inclinée
- $h_c$  : Hauteur du nid d'abeilles

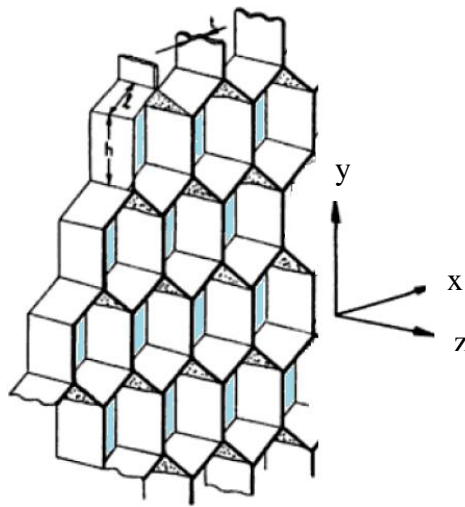


Figure 2.3– Structure en nid d'abeille régulière

#### II.4. Hypothèse de Bitzer [13] et Cugnoni [14]

Cette hypothèse, proposée par Bitzer [13] et Cugnoni [14], est de considérer les deux modules d'élasticité dans le plan  $E_1$ -  $E_2$  égaux à un pour cent du module  $E_3$ , le module de cisaillement  $G_{12}$  égal à 1/100 de la moyenne de  $G_{13}$  et  $G_{23}$ , et tous les coefficients de Poisson égaux à 0.1.



### II.5. Hypothèse de Chamis et al [12]

Cette hypothèse proposée par Chamis et al [36] est de réaliser un modèle en éléments finis tridimensionnels de la structure nids d'abeille dans l'objectif de déterminer les propriétés équivalentes de l'âme pour des chargements spécifiques.

### II.6. Modèle de Gibson et Ashby [11]

Elle s'appuie sur la théorie de l'élasticité pour les différents modules et coefficients du nid d'abeille en fonction des paramètres géométriques et mécaniques :

#### a) PROPRIÉTÉS DANS LE PLAN (X, Y)

Les caractéristiques qui entrent en jeu dans le plan sont:

- les modules  $E_1$  et  $E_2$ ,
- le module de cisaillement  $G_{12}$ ,
- les coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$ .

- **Modules  $E_1$  et  $E_2$**

Les deux modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  sont calculés en exerçant respectivement une pression suivant X et sur Y. On induit ainsi un effort P suivant les axes X et Y et donc des moments de flexion M . On considère le clinquant comme une poutre de longueur l, d'épaisseur t, de profondeur h et de module d'Young  $E_s$  [11] .

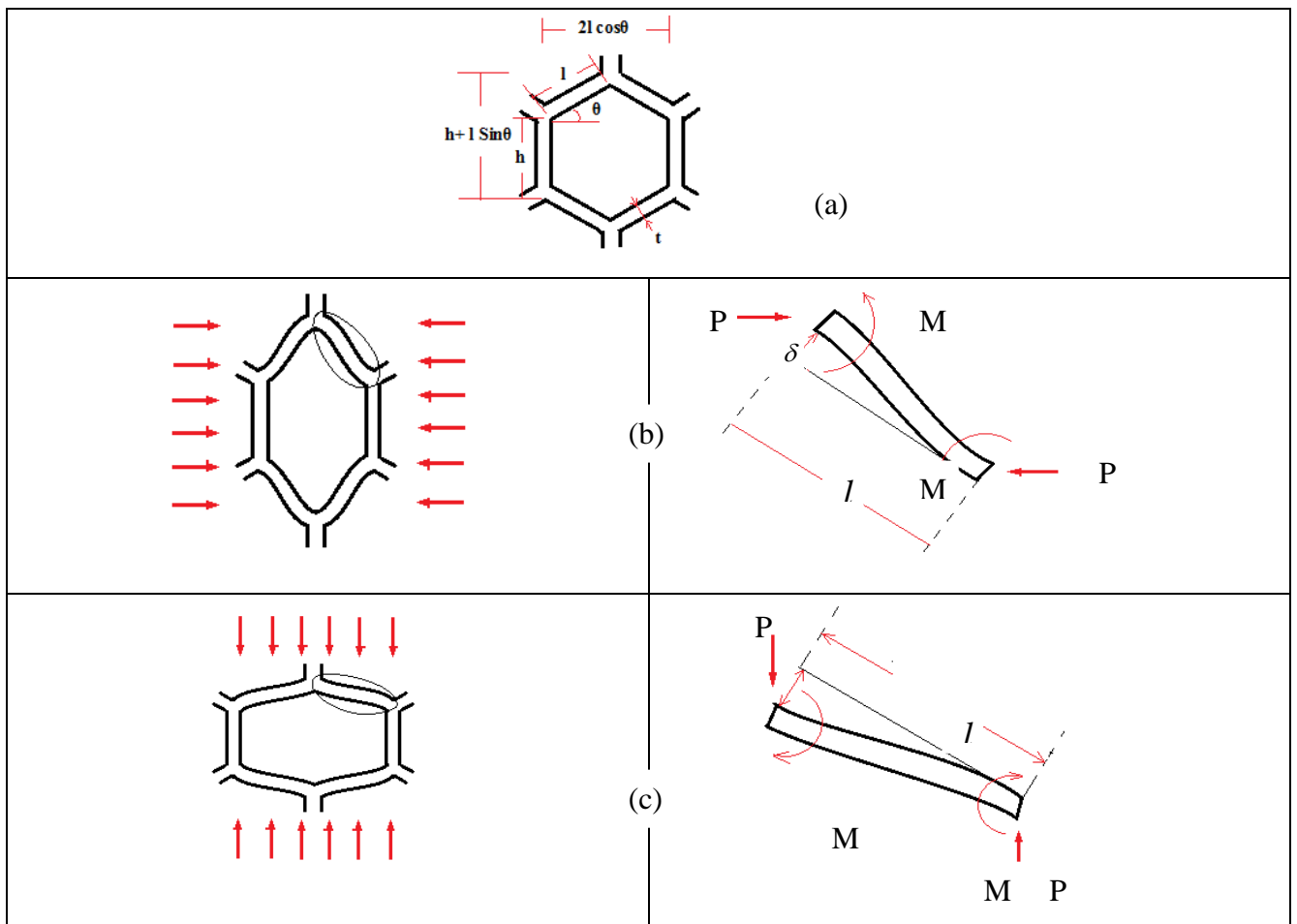


Figure 2.4 - Déformation des parois des cellules sous une charge dirigée suivant X (b) et Y (c) [11]

L'étude de la poutre (Fig. 8) permet d'obtenir l'équation du moment de flexion:

$$M = \frac{Pl \sin \theta}{2} \quad (2.4)$$

Et

$$\sigma_1 = \frac{P}{(h + l \sin \theta) b} \quad (2.5)$$

Le module d'Young  $E_1$  est défini en utilisant les relations suivantes:

$$E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$$

avec

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\delta \sin \theta}{l \cos \theta}, \quad \delta = \frac{Pl^3 \sin \theta}{12 E_s I} \quad (2.6)$$

La déformation  $\varepsilon_{11}$  s'écrit :

$$\varepsilon_{11} = \frac{Pl^2}{12 E_s I} \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}, \quad \text{où} \quad I = \frac{bt^3}{12}$$

Le module d'Young  $E_1$  s'écrit alors:

$$E_1 = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\cos \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin^2 \theta} \quad (2.7)$$

On obtient le module d'Young  $E_2$  de même manière :

$$E_2 = E_s \left( \frac{t}{l} \right)^3 \frac{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)}{\cos^3 \theta}$$

Les coefficients de Poisson sont calculés selon la séquence suivante:

$$\vartheta_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}$$

$$\vartheta_{21} = \frac{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta}{\cos^2 \theta} \quad (2.7)$$

$$\vartheta_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$$

$$\vartheta_{12} = \frac{\cos^2 \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta} \quad (2.8)$$

• **Module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$**

Le module de cisaillement dans le plan est calculé à partir du schéma de la Fig. 9 les points A, B, C n'ont aucun mouvement relatif quand on exerce un état de cisaillement sur le nid d'abeille. Vu la symétrie, la déviation  $u_s$  est uniquement due à la flexion et à la rotation de la paroi (rotation d'angle  $\varphi$ ) autour de B [11].

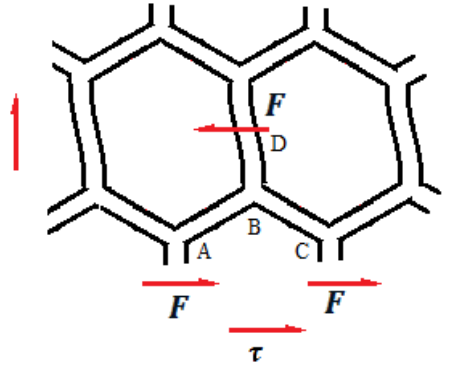


Figure 2.6 - Déformation des parois des cellules sous la flexion et la rotation

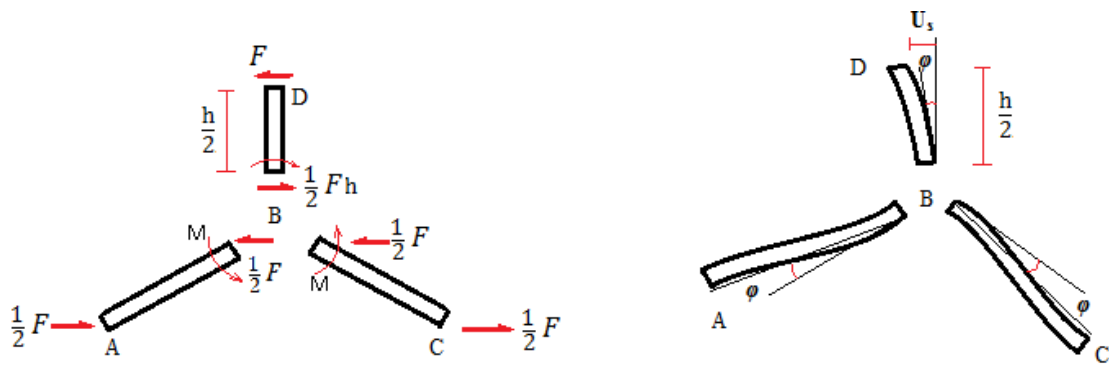


Figure 2.5 - Déformation en flexion et en la rotation des parois des cellules

La déviation  $U$  est de la forme:

$$U = \frac{1}{2} \varphi h + \frac{F \left(\frac{h}{2}\right)^3}{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right) \sin \theta} \quad (2.9)$$

La somme des moments au point B est nulle, on en déduit le moment au niveau de AB et BC.

$$M = \frac{Fh}{2}$$

Ensuite on peut en déduire l'angle  $\varphi$  :

$$\varphi \approx \tan \varphi = \frac{\delta}{l} \quad , \text{ avec } \delta = \frac{Ml^2}{6 E_s I}$$

On introduisant l'expression de l'angle  $\varphi$  dans l'expression de  $U$ , on obtient:

$$U = \frac{Fh^2}{48 E_s I} (1 + 2h)$$

La relation de comportement en cisaillement s'écrit:

$$G_{12} = \frac{\tau}{\gamma}$$

Avec :

$$\tau = \frac{F}{2bl \cos \theta}$$

et

$$\gamma = \frac{2U}{h + l \sin \theta}$$

Ceci nous donne pour  $G_{12}$ :

$$G_{12} = E_s \left(\frac{t}{l}\right)^3 \frac{\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right)}{\left(\frac{h}{l}\right)^2 \left(1 + \frac{2h}{l}\right) \cos \theta} \quad (2.10)$$

Les propriétés dans le plan jouent un rôle important dans les caractéristiques mécaniques des plaques sandwichs en nids d'abeilles.

### b) PROPRIÉTÉS HORS DU PLAN

Un total de neuf modules sont nécessaires pour décrire la déformation hors-plan, c'est signifie cinq nouvelles en plus des quatre déjà décrit ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  et  $\nu_{12}$ ). Nous allons maintenant trouver les cinq modules nouveaux.

Le module  $E_3$  est calculé en multipliant le module  $E_s$  du clinquant par le rapport «section de la cellule sur la surface totale de l'hexagone»

$$E_3 = E_s \frac{\text{Section de la cellule}}{2 \text{ Surface de l'hexagone}}$$

$$E_3 = E_s \left(\frac{t}{l}\right) \frac{\left(\frac{h}{l} + 2\right)}{2\left(\frac{h}{l} + \sin \theta\right) \cos \theta} \quad (2.11)$$

Les deux coefficients de Poisson  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{23}$  sont supposés égaux au coefficient du matériau constituant le nida.

$$\vartheta_{31} = \vartheta_{32} = \vartheta_s \quad (2.12)$$

Les deux autres coefficients de Poisson se trouvant dans les relations réciproques :

$$\vartheta_{13} = \frac{E_1}{E_3} \vartheta_{31} \quad (2.13)$$

$$\vartheta_{23} = \frac{E_2}{E_3} \vartheta_{32} \quad (2.14)$$

• **Modules de cisaillement transverses**

Les modules de cisaillement sont plus difficiles à trouver en raison de non-uniforme déformation dans les parois cellulaires grâce à la répartition des contraintes dans la structure du nid d'abeilles. En utilisant les théorèmes de l'énergie, Kelsey et al [15] ont proposé des bornes pour le module de cisaillement transverse. La direction Y constitue un cas particulier important pour lequel le cisaillement est nul dans les parois centrales et constant dans les parois inclinées. Dans ce cas, les bornes sont identiques et égales à la valeur du module dans le plan (Y, Z). En revanche, les bornes sont bien distinctes dans le plan (X, Z). Les méthodes énergétiques permettent de trouver des bornes supérieure et inférieure [11].

La borne supérieure se calcule en utilisant le théorème du travail maximal. Ce théorème indique que l'énergie de déformation, calculée à partir d'un champ de déplacement virtuel compatible avec les conditions limites, est supérieure à l'énergie utilisée par le champ de déplacement réel.

Pour le cisaillement suivant l'axe X, on trouve en appliquant ce théorème:

**Théorème de la borne supérieure :**

$$\frac{1}{2} G_{j3} \gamma_{j3} V = \sum_i \frac{1}{2} G_s \gamma_i^2 V_i \tag{2.15}$$

avec  $j = 1, 2$  et  $i$  : nombre de parois.  $G_j$  est le module de cisaillement du matériau constituant les parois.  $V$  est le volume de l'hexagone

Dans le cas de nid d'abeille, on peut écrire:

$$\frac{1}{2} G_{j3} \gamma_{j3} S h = \sum_i \frac{1}{2} G_s \gamma_i^2 S_i h \tag{2.16}$$

$S$  : projection dans le plan (X,Y) de l'hexagone.

$S_i$  : projection dans le plan (X,Y) de la paroi  $i$ .

Pour déterminer la borne inférieure, l'énergie de déformation calculée à partir d'un champ de contraintes statiquement admissible (continu et vérifiant les conditions de bords) est inférieure à l'énergie de déformation obtenue pour un champ de contraintes réelles. Si le cisaillement a lieu le long de l'axe X, le théorème donne le résultat suivant:

**Théorème de la borne inférieure :**

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{j3}^2}{G_{j3}} V \leq \left[ \frac{\tau_i^2}{G_s} V_i \right] \quad j = 1,2 \tag{2.17}$$

Dans le cas du nid d'abeille, on a :

$$\frac{1}{2} \frac{\tau_{j3}^2}{G_{j3}} S h \leq \left[ \frac{\tau_i^2}{G_s} S_i h \right] \quad j = 1,2 \tag{2.18}$$

Après simplification, les formules analytiques des différents modules de cisaillement transverses sont données par les équations (1) et (2) :

$$G_{23} = G_s \left( \frac{t}{l} \right) \frac{\cos \theta}{\left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)}$$

$$G_s \left( \frac{t}{l} \right) \frac{\frac{h}{l} + \sin \theta}{\cos \theta \left( \frac{h}{l} + 1 \right)} \leq G_{13} \leq G_s \left( \frac{t}{l} \right) \frac{\frac{h}{l} + \sin^2 \theta}{\cos \theta \left( \frac{h}{l} + \sin \theta \right)}$$

$G_s$  : le module de cisaillement du matériau constituant les parois.

## II.7. Modèle de Grédiac [16]

Grédiac s'est intéressé particulièrement aux modules de cisaillement hors-plan. Il s'est inspiré du modèle de Gibson, mais comparativement à lui, il a pris en compte également la double épaisseur des clinquants centraux. Grédiac a défini le nida par quatre grandeurs adimensionnelles :

$$R_1 = \frac{t}{l} \quad , \quad R_2 = \frac{h}{l} \quad , \quad R_3 = \frac{b}{l} \quad , \quad R_4 = \frac{t'}{t}$$

Deux cas sont différenciés :

- 1<sup>er</sup> cas :  $R_4 = 2$  ,  $G_s$  est le module de cisaillement du matériau utilisé :

$$\frac{(1+R_2) \sin \theta}{R_2(1+R_2)\cos \theta} R_1 \cdot G_s \leq G_{13} \leq \frac{(1+R_2) \sin^2 \theta}{(1+R_2.\sin \theta)R_2.\cos \theta} R_1 \cdot G_s \quad (2.19)$$

et

$$G_{23} = \frac{\cos \theta}{(1 + R_2) \sin \theta} R_1 \cdot G_s \quad (2.20)$$

- 2<sup>ème</sup> cas :  $R_4 = 1$

$$\frac{(1+R_2) \sin \theta}{R_2(2+R_2)\cos \theta} R_1 \cdot G_s \leq G_{13} \leq \frac{(1+R_2) \sin^2 \theta}{2(1+R_2.\sin \theta)R_2.\cos \theta} R_1 \cdot G_s \quad (2.21)$$

et

$$G_{23} = \frac{\cos \theta}{(1 + R_2) \sin \theta} R_1 \cdot G_s$$

et l'expression analytique pour le module de cisaillement  $G_{13}$  où l'éclatement  $R_3$  est pris en compte.

Cette expression est du type :

$$G_{13} = G_{13}^{\text{mini}} + \frac{0,787}{R_3} (G_{13}^{\text{maxi}} - G_{13}^{\text{mini}}) \quad (2.22)$$

On peut noter que pour les cellules hexagonales régulières ( $\theta=30^\circ$ ) avec  $R_4 = 1$ , les modules sont égaux quelle que soit la direction.

Le problème de ce modèle est qu'il ne tient pas compte du paramètre  $R_3$ . Quand  $R_3$  est petit, il ne donne pas une bonne évaluation des modules.

## II.8. Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre quelques approches permettant d'estimer les propriétés élastiques des matériaux en nid d'abeilles à partir de leurs paramètres géométriques et des propriétés de leurs constituants.

Dans cette étude, nous explorons les solutions suivantes

- une solution basée sur l'homogénéisation des structures périodiques sur la base des travaux de Gibson [11].
- Une solution par éléments finis basée sur un code de calcul ANSYS 13 et les travaux de Chamis et al [12].

### CHAPITRE III

# INFLUENCE DES PARAMETRES GEOMETRIQUES DES CELLULES SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES SANDWICHS EN NID D'ABEILLES



## CHAPITRE III : INFLUENCE DES PARAMÈTRES GÉOMÉTRIQUES DES CELLULES SUR LE COMPORTEMENT MÉCANIQUE DES SANDWICHS EN NID D'ABEILLES

### III.1. Introduction

Les matériaux sandwichs cellulaires connaissent un essor important, tant dans les applications les utilisant, que dans les technologies les mettant en œuvre. Ils présentent un intérêt pour les applications qui requièrent à la fois rigidité et légèreté, notamment les transports, la marine, le nautisme, l'aéronautique, l'aérospatial, les sports et loisirs, l'industrie lourde, le génie civil et l'armée,

Les propriétés d'un solide cellulaire dépendent non seulement des matériaux le constituant, mais aussi de la géométrie de la cellule. Le Nida étant une structure anisotrope, ses propriétés varient selon le sens transversal ou longitudinal des alvéoles (taille de mailles). De plus, la taille de celles-ci, l'épaisseur des parois du Nida et la méthode de mise en œuvre sont des paramètres qui influencent la résistance au cisaillement transversal et longitudinal du Nida

Ce chapitre a permis la mise en évidence de l'influence de quelque paramètre géométrique de la cellule sur le comportement général du sandwich.

Dans ce chapitre, nous explorons la solution basée sur les travaux de Gibson qu'ils s'appuient sur la théorie de l'élasticité pour les différents modules et coefficients du nid d'abeille en fonction des paramètres géométriques et mécaniques.

### III.2. Procédure de calcul

Suivant le plan indiqué dans le tableau (3.1), une série de calcul a été réalisée pour différentes combinaisons de paramètres géométriques, les modules d'élasticité considérés, comme il est défini dans le chapitre 2 (Hypothèse de Gibson et al), sont  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  ; modules de cisaillements:  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$ , Le but est de mettre au point des corrélations entre ces modules et les paramètres géométriques de la cellule Nida.

La géométrie de base :

Les caractéristiques de nid d'abeille en aluminium 5056 sont les suivantes:

$$\Phi = 6,4 \text{ mm}, \quad l = h = 3,695 \text{ mm}, \quad t = 0,075 \text{ mm} \quad hc = 8,8 \text{ mm}, \quad \theta = 30^\circ.$$

Le matériau considéré est de l'aluminium 5056 avec les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$E_s = 70 \text{ GPa}, \quad G_s = 23,247 \text{ GPa}, \quad \nu_s = 0,312.$$

### III.3. Résultats obtenus

N°	Facteurs variables				Modules d'élasticité			Modules de cisaillement			
	t (mm)	h/l	Φ (mm)	θ (deg)	E <sub>1</sub> (MPa)	E <sub>2</sub> (MPa)	E <sub>3</sub> (MPa)	G <sub>12</sub> (MPa)	G <sub>13</sub> min (MPa)	G <sub>13</sub> max (MPa)	G <sub>23</sub> (MPa)
01	<b>0.015</b>	1	6,4	30	0,009	0,009	285,941	0,002	81,728	90,809	54,486
02	<b>0.035</b>	1	6,4	30	0,120	0,120	667,195	0,030	190,698	211,887	127,134
03	<b>0.055</b>	1	6,4	30	0,465	0,465	1048,449	0,116	299,668	332,966	199,783
04	<b>0.075</b>	1	6,4	30	1,178	1,178	1429,704	0,295	408,638	454,044	272,431
05	0,075	<b>0,25</b>	6,4	30	2,356	0,589	2144,566	4,712	326,909	363,234	544,865
06	0,075	<b>0,5</b>	6,4	30	1,767	0,785	1787,134	1,178	363,233	408,639	408,648
07	0,075	<b>0,75</b>	6,4	30	1,414	0,982	1572,676	0,524	389,179	435,882	326,918
08	0,075	<b>1</b>	6,4	30	1,178	1,178	1429,704	0,295	408,638	454,044	272,431
09	0,075	<b>1,25</b>	6,4	30	1,010	1,374	1327,581	0,188	423,773	467,017	233,512
10	0,075	<b>1,5</b>	6,4	30	0,884	1,571	1250,989	0,131	435,881	476,747	204,323
11	0,075	<b>1,75</b>	6,4	30	0,785	1,767	1191,418	0,096	445,788	484,314	181,620
2	0,075	1	<b>2</b>	30	38,604	38,601	4575,023	9,650	1307,63	1452,933	871,774
13	0,075	1	<b>4</b>	30	4,825	4,825	2287,512	1,206	653,817	726,466	435,887
14	0,075	1	<b>6</b>	30	1,430	1,430	1525,008	0,357	435,878	484,311	290,591
15	0,075	1	<b>8</b>	30	0,603	0,603	1143,756	0,151	326,909	363,233	217,943
16	0,075	1	<b>10</b>	30	0,309	0,309	915,005	0,077	261,527	290,587	174,355
17	0,075	1	6,4	<b>-30</b>	3,534	0,393	4289,111	0,098	136,214	1362,141	817,285
18	0,075	1	6,4	<b>-20</b>	6,228	0,405	3003,790	0,119	165,200	852,430	673,885
19	0,075	1	6,4	<b>-10</b>	20,161	0,441	2282,188	0,143	197,969	597,308	562,340
20	0,075	1	6,4	<b>-5</b>	73,287	0,471	2042,335	0,156	216,190	522,827	514,944
21	0,075	1	6,4	<b>5</b>	61,536	0,561	1714,873	0,186	257,472	438,999	432,380
22	0,075	1	6,4	<b>10</b>	14,195	0,627	1606,862	0,203	281,170	420,558	395,937
23	0,075	1	6,4	<b>20</b>	3,053	0,825	1472,730	0,243	336,943	417,939	330,400
24	0,075	1	6,4	<b>30</b>	1,178	1,178	1429,704	0,295	408,642	454,047	272,428

Tableau 3.1. Paramètres géométriques en fonction des modules d'élasticité

### III.3.1. Effet de l'épaisseur de la paroi.

Les Fig. 3.1 et 3.2 représentent l'évolution des modules d'élasticité en fonction de l'épaisseur de la paroi de différentes séries 0.015, 0.035, 0.055 et 0,075 mm pour des structures en nid d'abeilles. On constate que les modules d'élasticités des structures en Nid d'abeilles augmentent avec l'augmentation de l'épaisseur de la paroi cellulaire

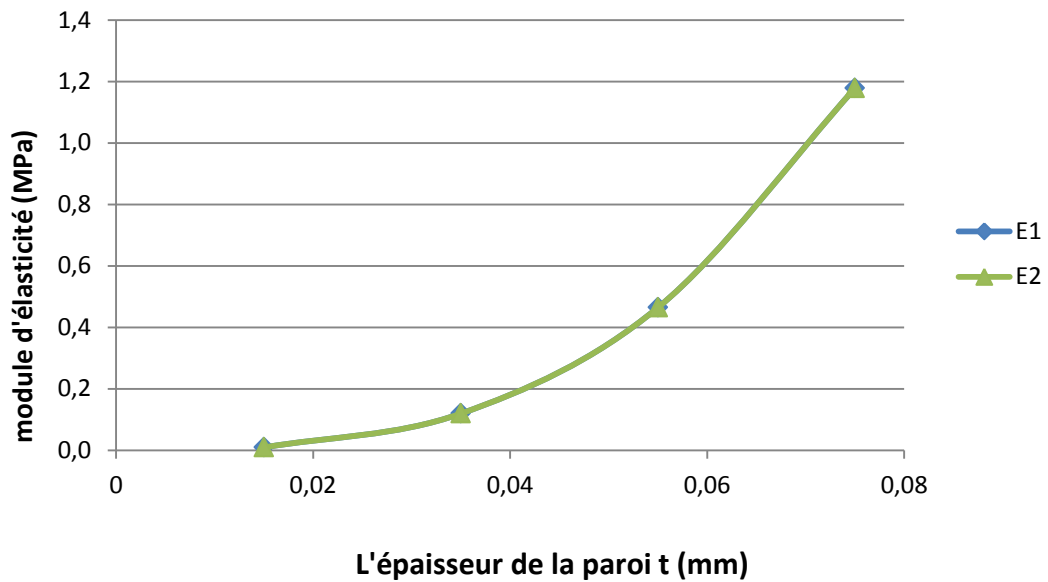


Figure 3.1. Évolution des modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de l'épaisseur de la paroi.

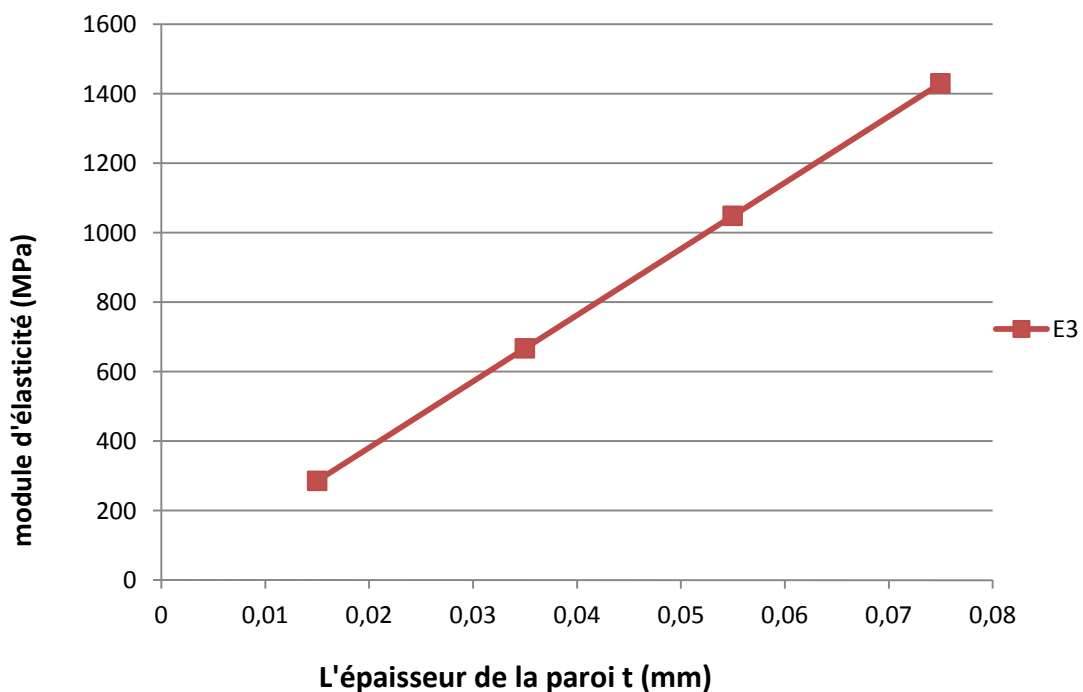


Figure 3.1. Évolution des modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de l'épaisseur de la paroi

Les figures 3.3 et 3.4 illustrent les résultats de l'évolution des modules de cisailent  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$  en fonction de l'épaisseur de la paroi  $t$ . L'analyse des résultats montre que l'augmentation des modules des cisaillements favorise une augmentation de l'épaisseur  $t$ , on remarque aussi que les valeurs des modules de cisaillements hors plan  $G_{13}$  et  $G_{23}$  des structures en Nida sont plus grandes que le module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$

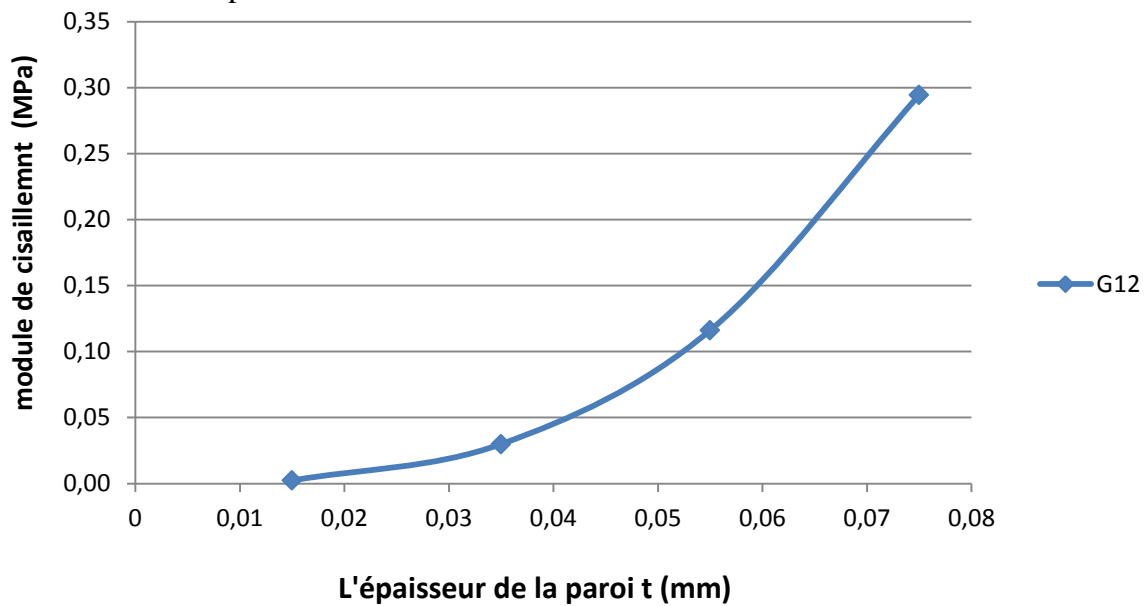


Figure 3.3 - Évolution du module de cisaillement dans le plan en fonction de l'épaisseur de la paroi.

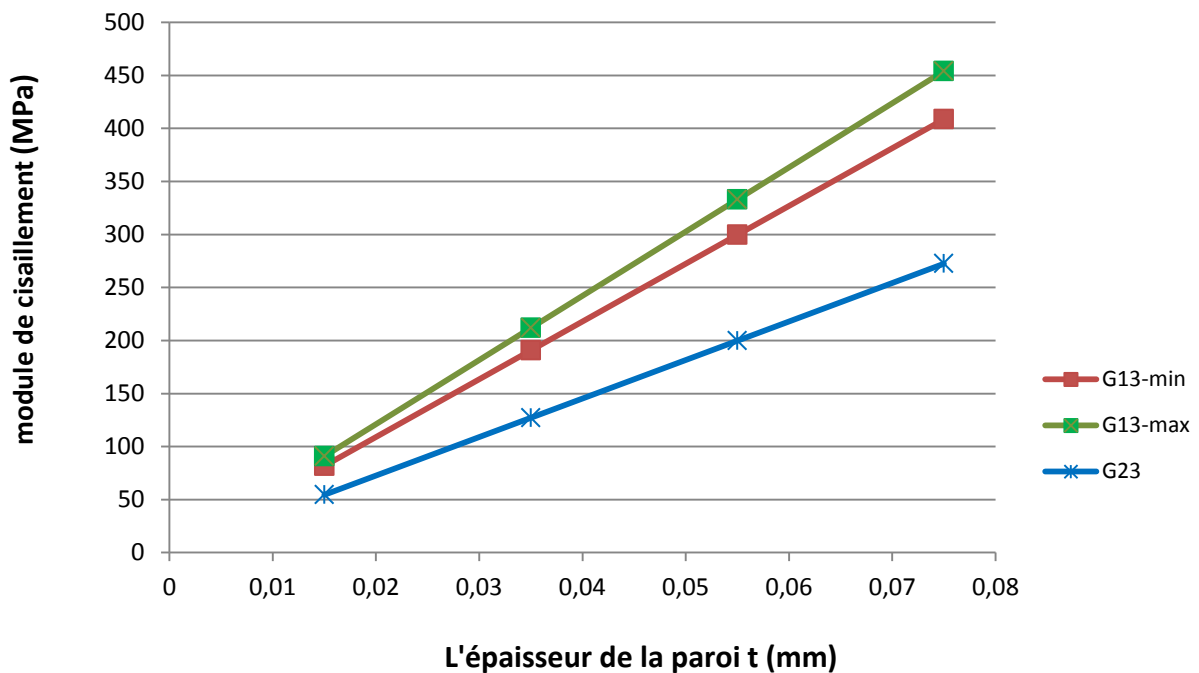


Figure 3.4 - Évolution du module de cisaillement hors plan en fonction de l'épaisseur de la paroi.

### III.3.2. Effet du rapport h/l

Les Fig. 3.5, 3.6 représentent l'évolution des modules d'élasticité en fonction du rapport h/l (longueur de la paroi centrale / longueur de la paroi inclinée) de différentes séries 0,25, 0,5, 0,75, 1, 1,25, 1,5 et 1,75 pour des structures en nid d'abeilles. On constate que l'augmentation du rapport h/l induit une diminution des modules d'élasticité  $E_1$ . D'un part, et une augmentation des modules d'élasticité  $E_2$  et  $E_3$  d'autre part.

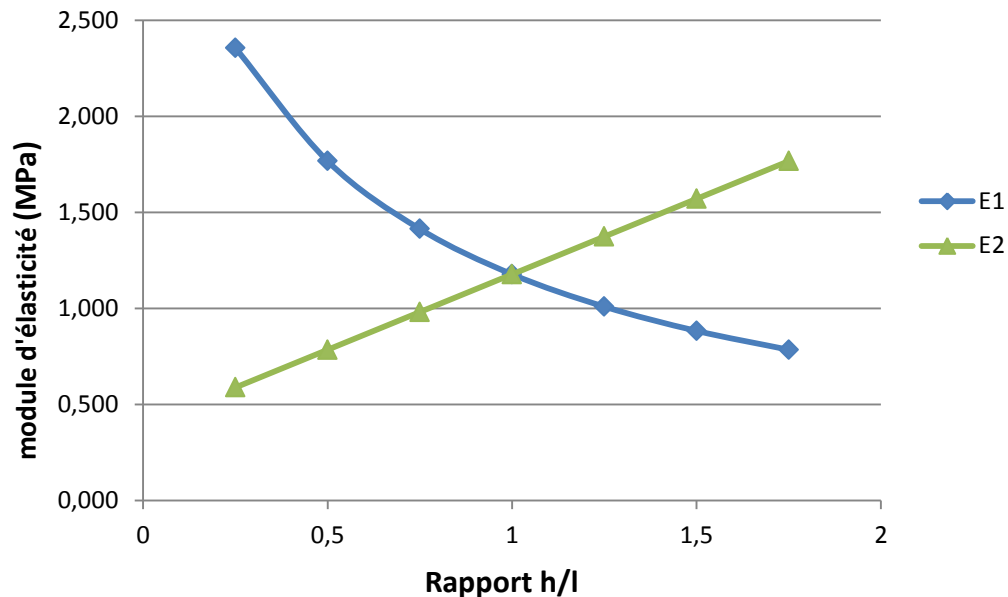


Figure 3.5. Évolution des modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  en fonction du rapport h/l

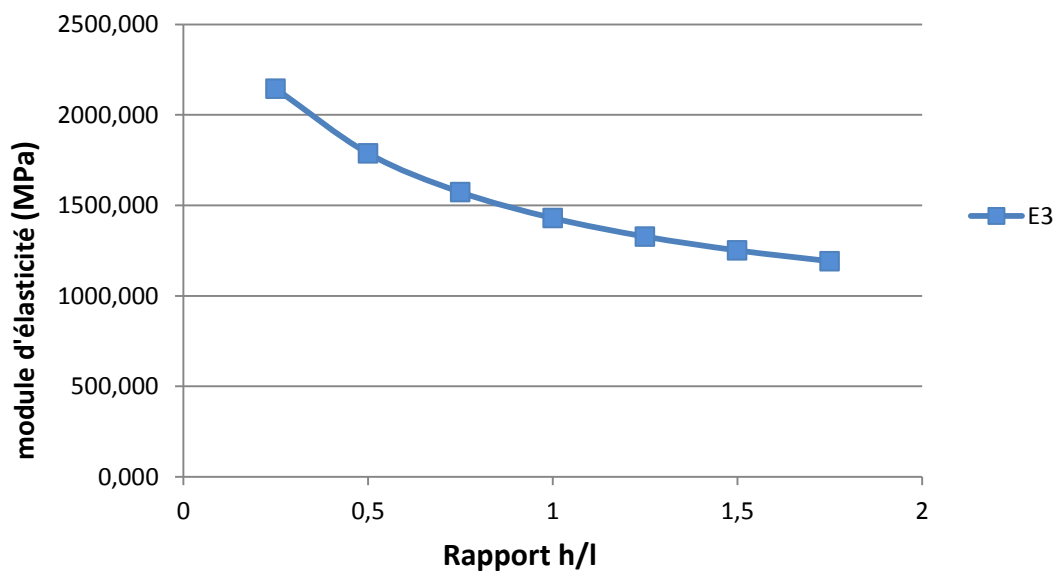


Figure 3.6. Évolution des modules d'élasticité  $E_3$  en fonction du rapport h/l

Les Fig. 3.7 et 3.8 représentent l'évolution des modules de cisailent  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$  en fonction du rapport  $h/l$  (longueur de la paroi centrale / longueur de la paroi inclinée) des structures en nid d'abeilles. D'après ces figures on constate que l'augmentation du rapport  $h/l$  induit une diminution du module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  ainsi que le module de cisaillement  $G_{23}$ , mais L'analyse de la fig 2.8 montre que l'augmentation du module de cisaillement hors plan  $G_{13}$  favorise une augmentation de ce rapport.

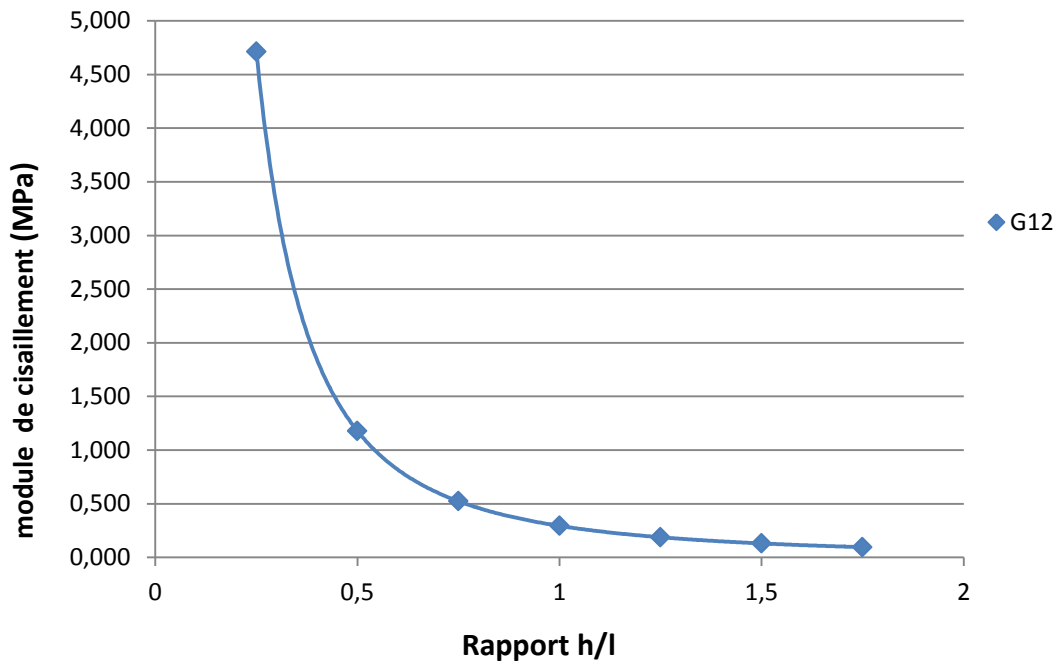


Figure 3.7 - Évolution du module de cisaillement  $G_{12}$  en fonction du rapport  $h/l$

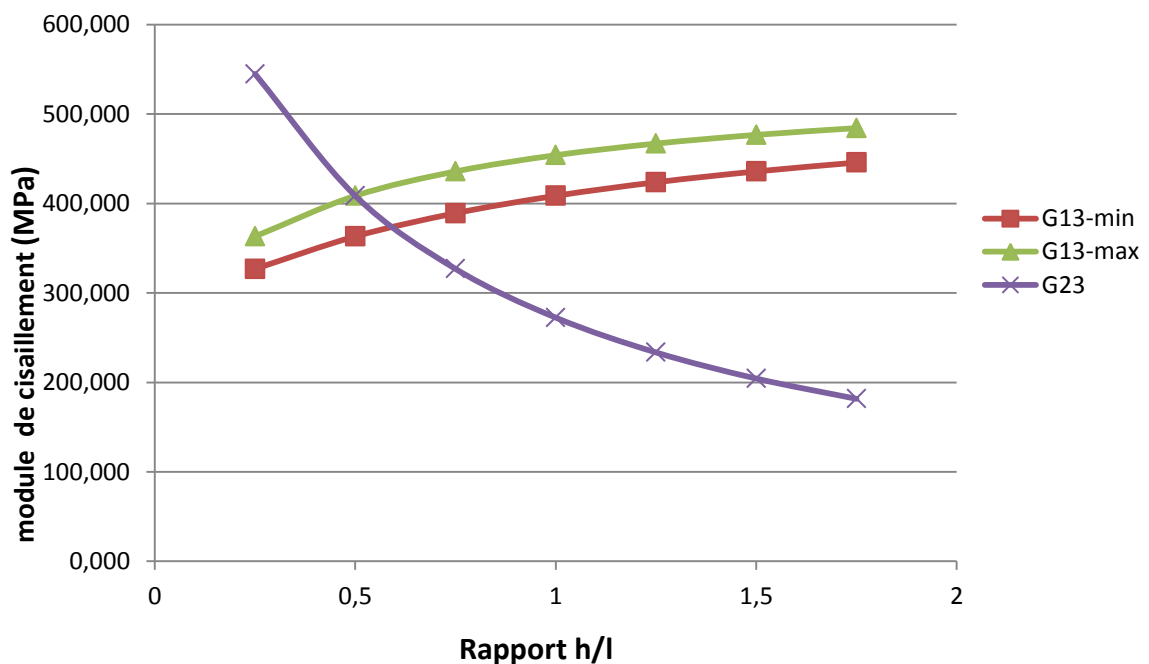


Figure 3.8- Évolution du module de cisaillement  $G_{13}$  et  $G_{23}$  en fonction du rapport  $h/l$

### III.3.3. Effet du diamètre de la cellule $\Phi$

Les Fig. 3.9 à 3.12 représentent l'évolution des modules d'élasticité  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  et des modules de cisailent  $G_{12}$ ,  $G_{13}$  et  $G_{23}$  en fonction du diamètre de la cellule pour différentes séries 2, 4, 6, 8 et 10 mm pour des structures en nid d'abeilles. D'après ces figures on constate que l'augmentation du diamètre de la cellule induit une diminution des modules d'élasticité et des modules de cisaillement

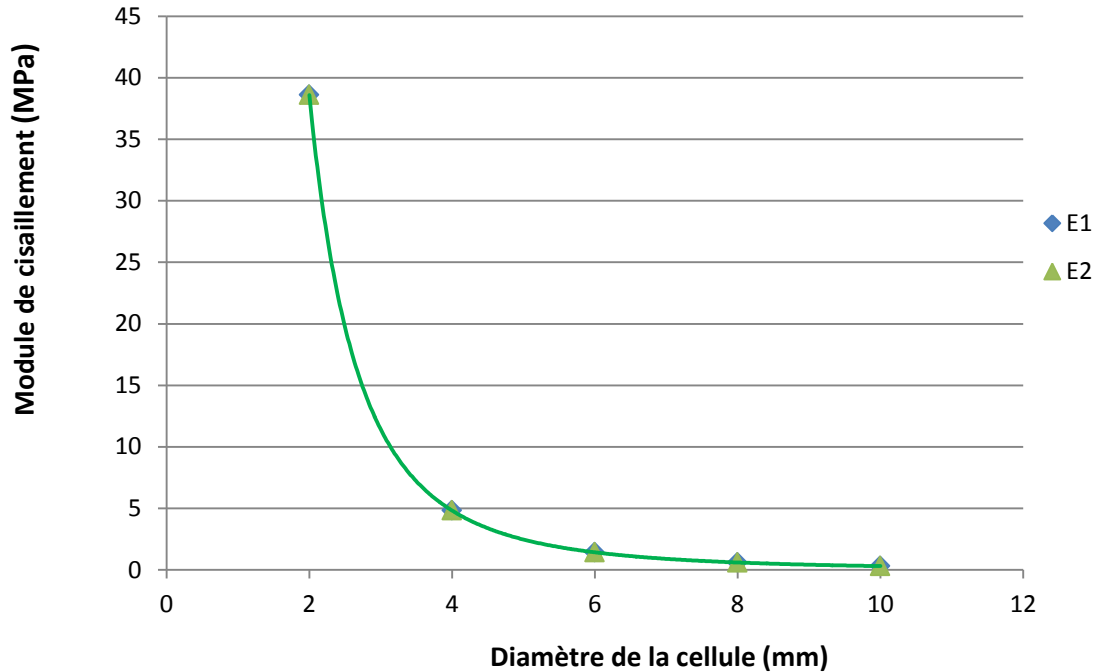


Figure 3.9 - Évolution des modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  en fonction du diamètre de la cellule  $\Phi$

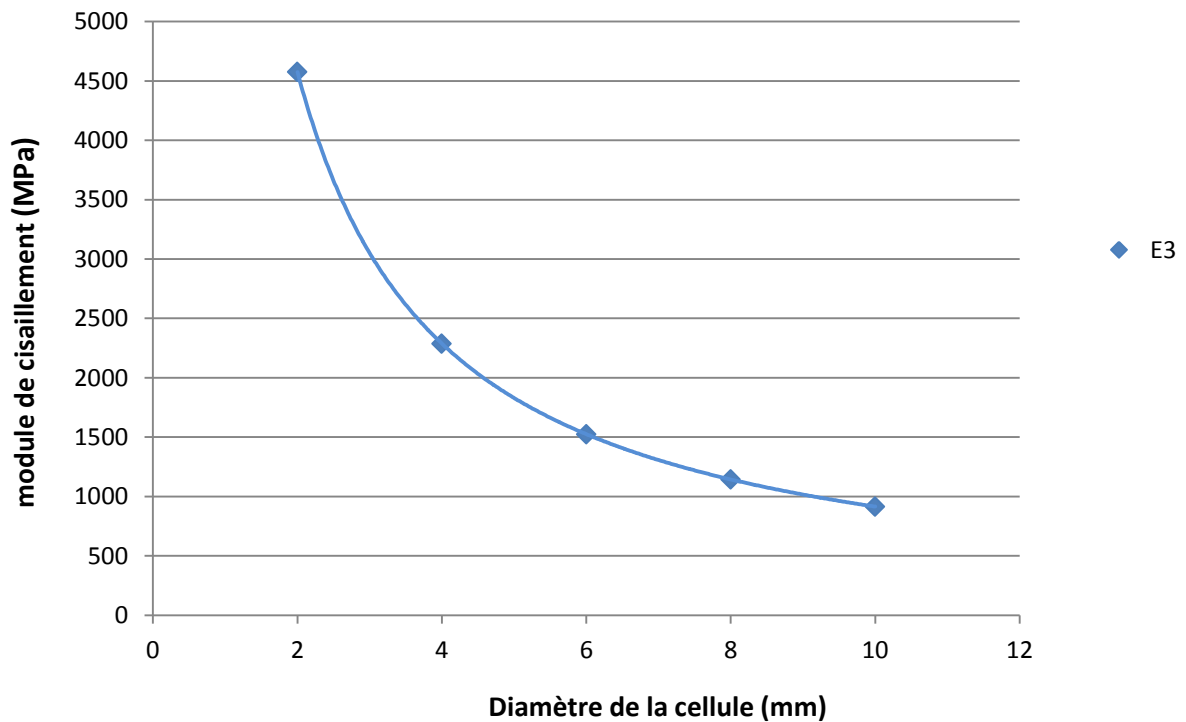


Figure 3.10 - Évolution du module d'élasticité  $E_3$  en fonction du diamètre de la cellule  $\Phi$

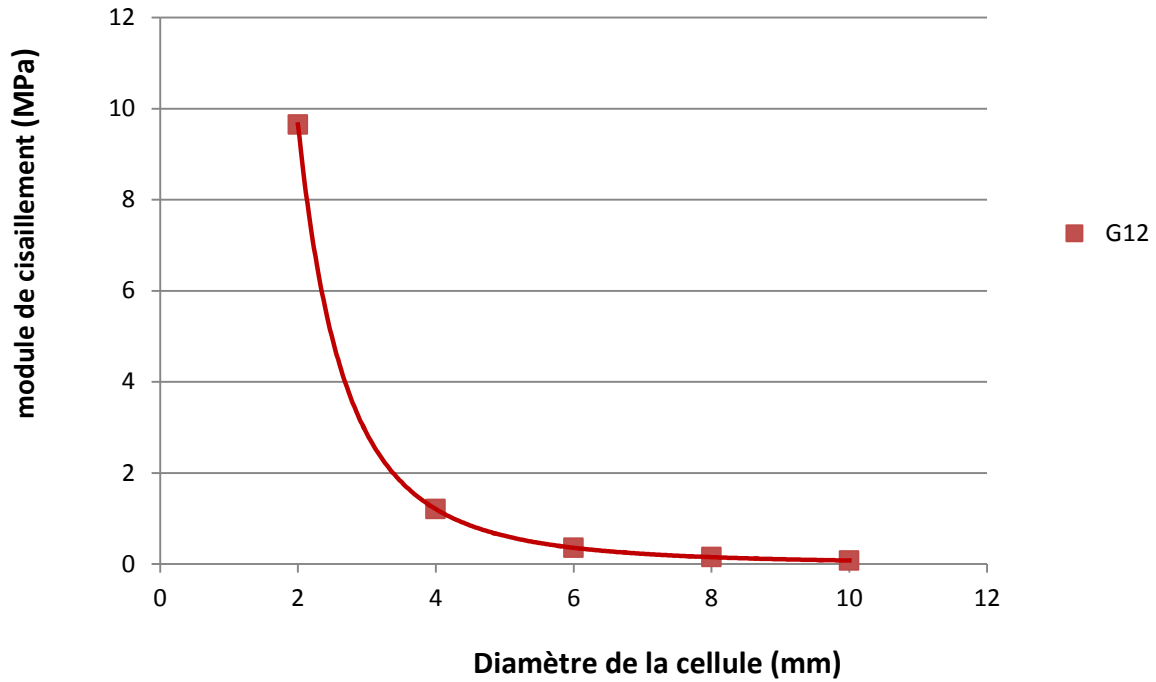


Figure 3.11 - Évolution du module de cisaillement  $G_{12}$  en fonction du diamètre de la cellule  $\Phi$

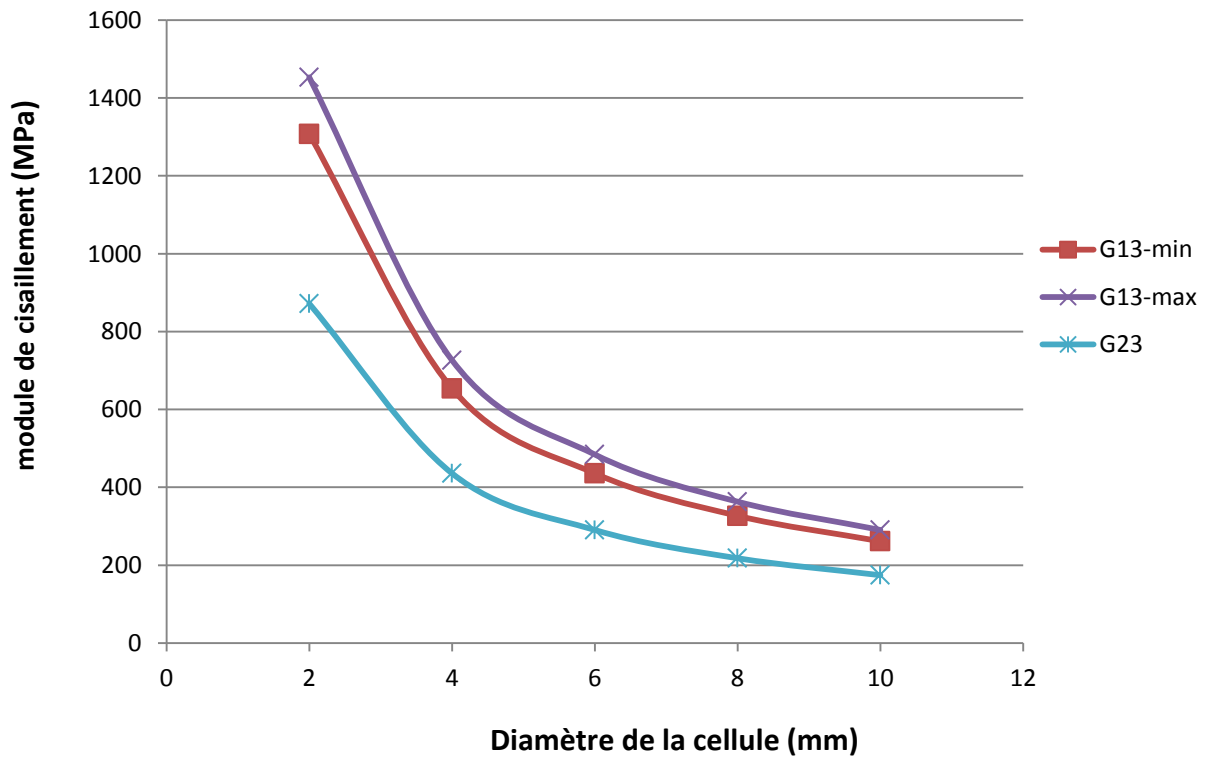


Figure 3.12 - Évolution du module de cisaillement  $G_{13}$  et  $G_{23}$  en fonction du diamètre de la cellule  $\Phi$



### III.3.4. Effet de l'angle de la cellule $\theta$ :

L'intérêt de ce paragraphe est de déterminer l'influence de l'angle interne de cellule sur les comportements des structures en nid d'abeille représenté par les modules d'élasticité, coefficients de poisson et modules de cisaillement.

La Fig. 3.13 représente l'évolution de module d'élasticité  $E_1$  en fonction de l'angle de la cellule  $\theta$  pour des structures en nid d'abeilles. On constate que l'augmentation de la valeur absolue de l'angle de la cellule induit une diminution des modules d'élasticité  $E_1$ .

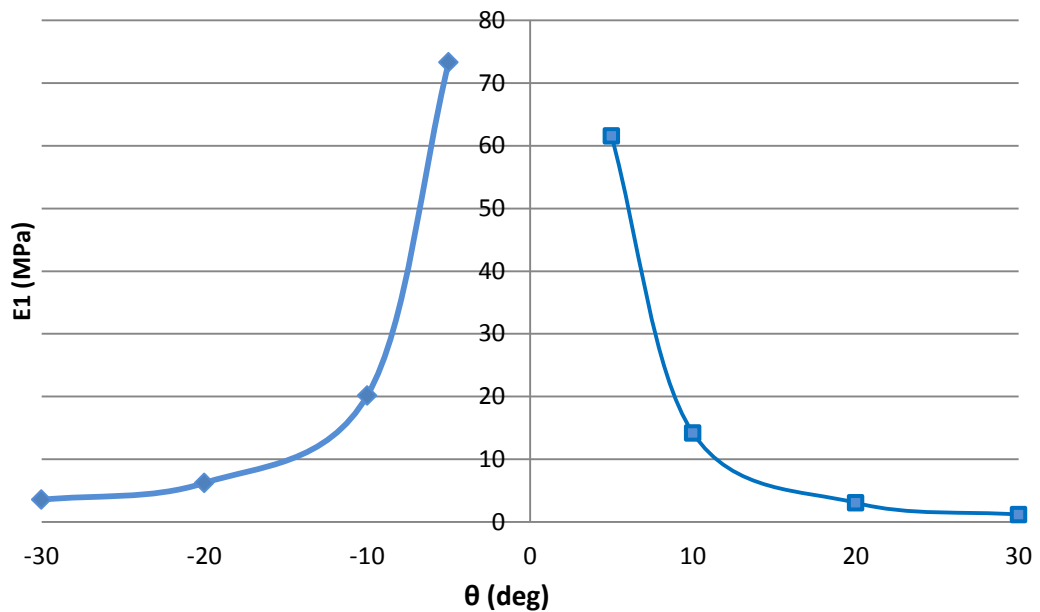


Figure 3.13 - Évolution du module d'élasticité  $E_1$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$

La Fig. 3.14 représente l'évolution de module d'élasticité  $E_2$  en fonction de l'angle de la cellule  $\theta$  de différentes séries -30, -20, -10, -5, 5, 10, 20 et 30 degrés pour des structures en nid d'abeilles. On constate que les modules d'élasticité des structures en Nid d'abeilles augmentent avec l'augmentation de l'angle interne de la cellule  $\theta$ .

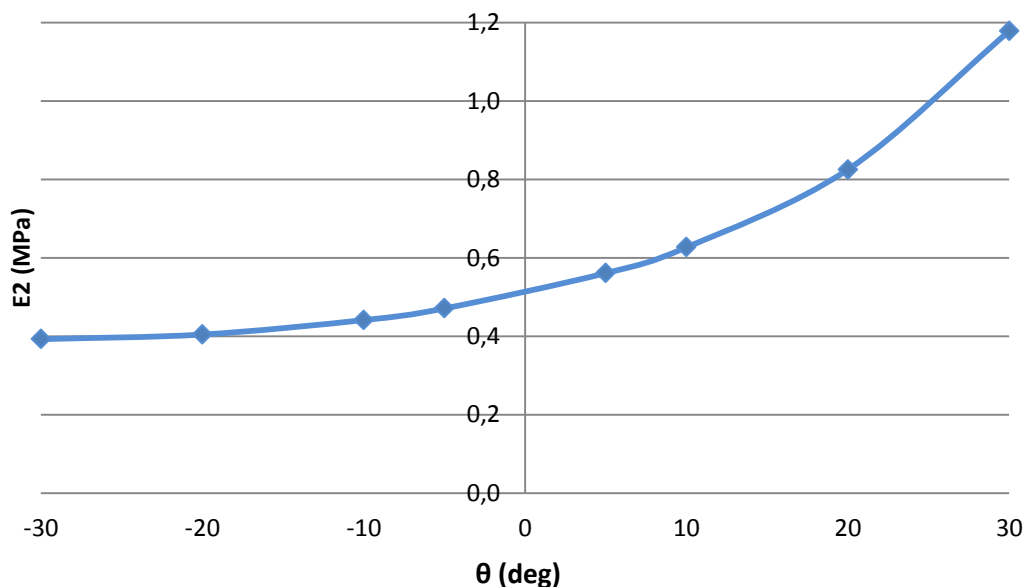


Figure 3.14 - Évolution du module d'élasticité  $E_2$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$

La Fig. 3.15 représente l'évolution de module d'élasticité  $E_3$  en fonction de l'angle de la cellule  $\theta$  pour des structures en nid d'abeilles. On constate que l'augmentation de la valeur de l'angle de la cellule induit une diminution des modules d'élasticité  $E_3$ .

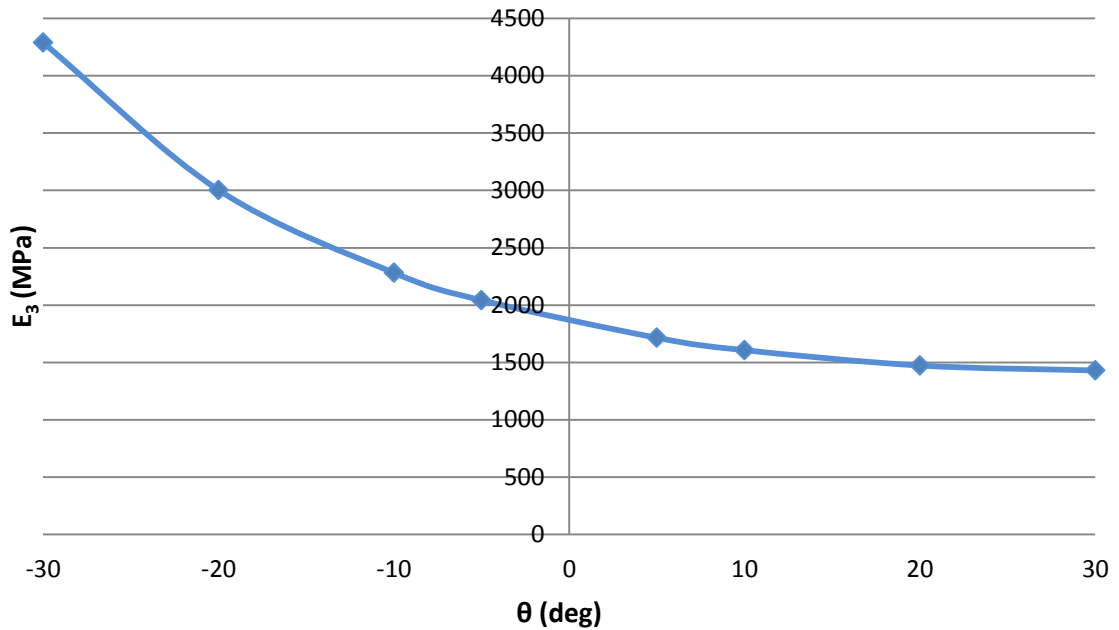


Figure 3.15 - Évolution du module d'élasticité  $E_3$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$

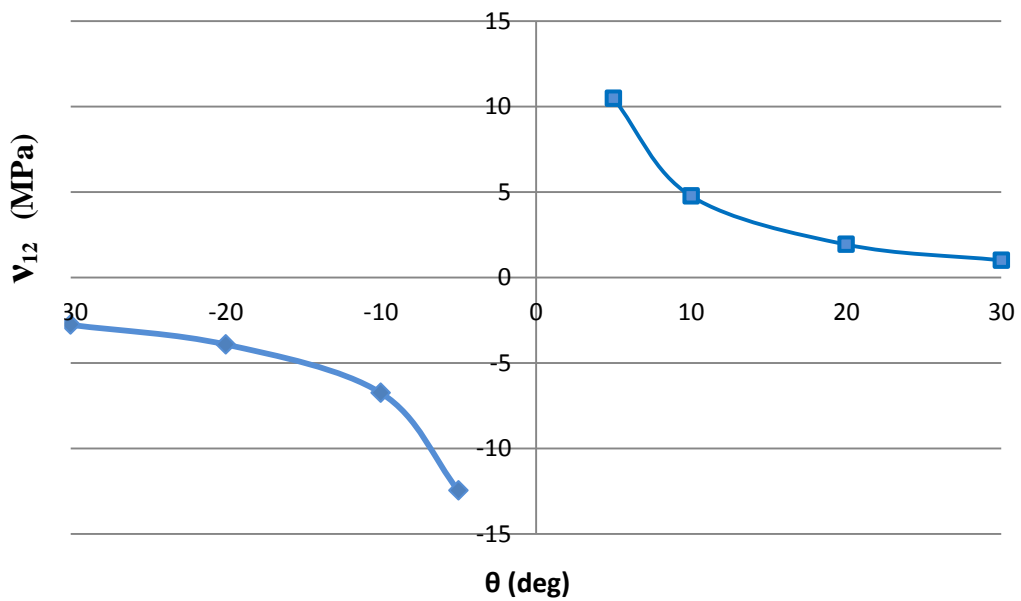


Figure 3.16 - Évolution du coefficient de poisson  $\nu_{12}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$

La Fig. 3.17 représente l'évolution de module de cisaillement dans le plan  $G_{12}$  en fonction de l'angle de la cellule  $\theta$  de différentes séries -30, -20, -10, 10, 20 et 30 degrés pour des structures en nid d'abeilles. On constate que les modules d'élasticités des structures en Nid d'abeilles augmentent avec l'augmentation de l'angle interne de la cellule  $\theta$ .

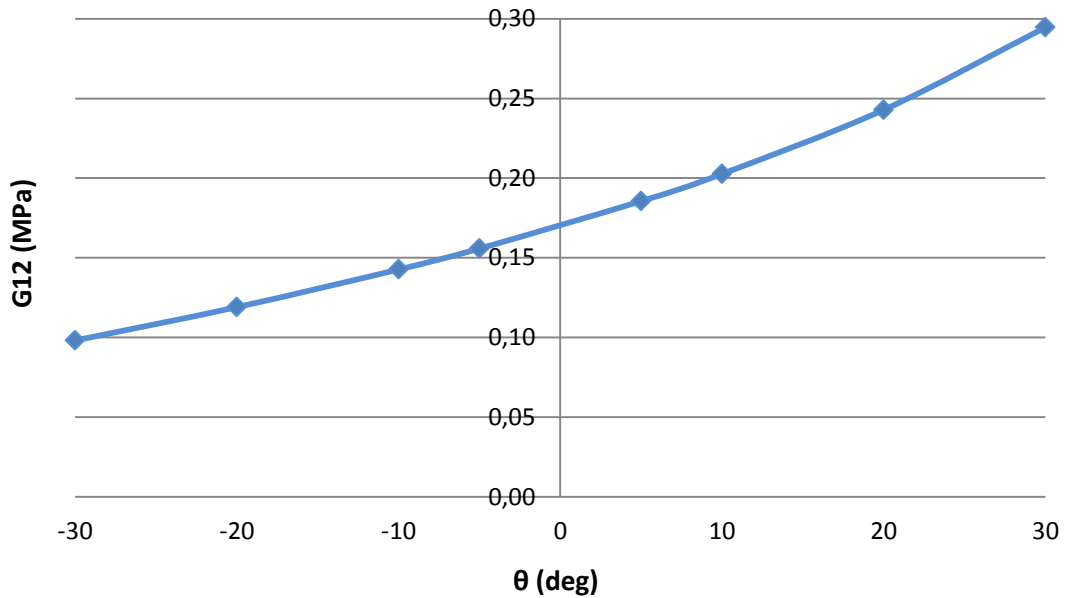


Figure 3.17 - Évolution du module de cisaillement  $G_{12}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$

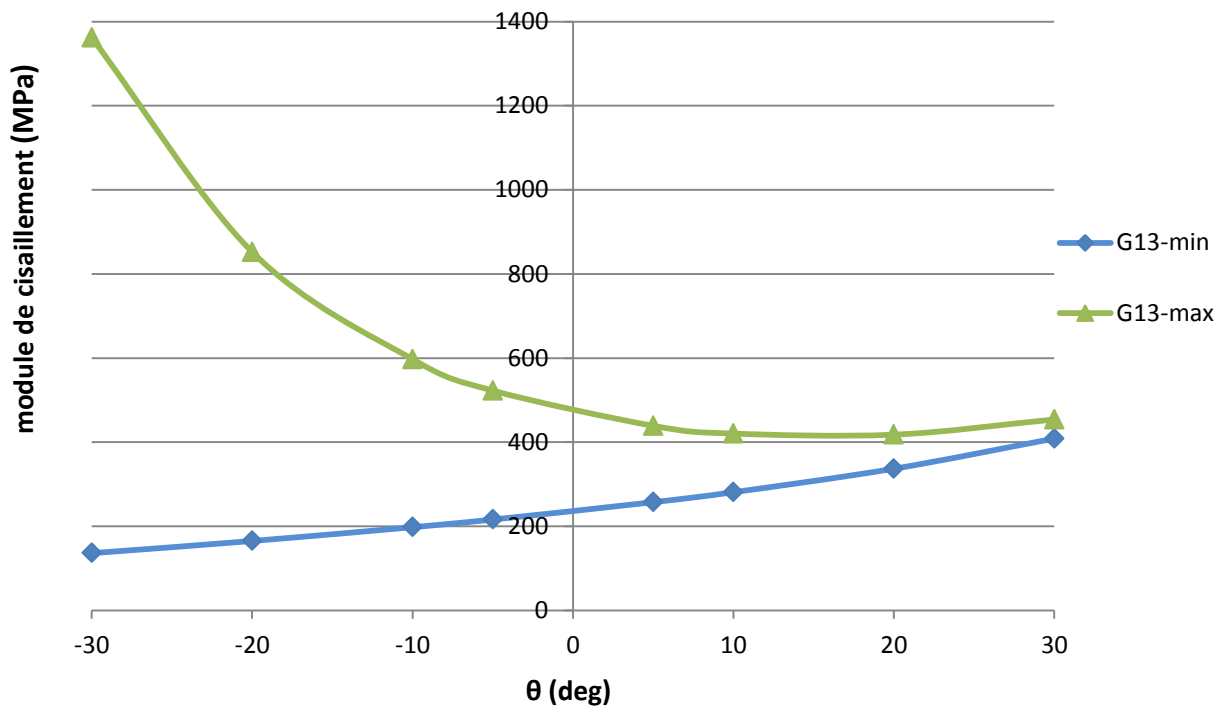


Figure 3.18 - Évolution du module de cisaillement  $G_{13}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$

La Fig. 3.19 représente l'évolution de module de cisaillement  $G_{23}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$  pour des structures en nid d'abeilles. On constate que l'augmentation de la valeur de l'angle de la cellule induit une diminution de module de cisaillement.

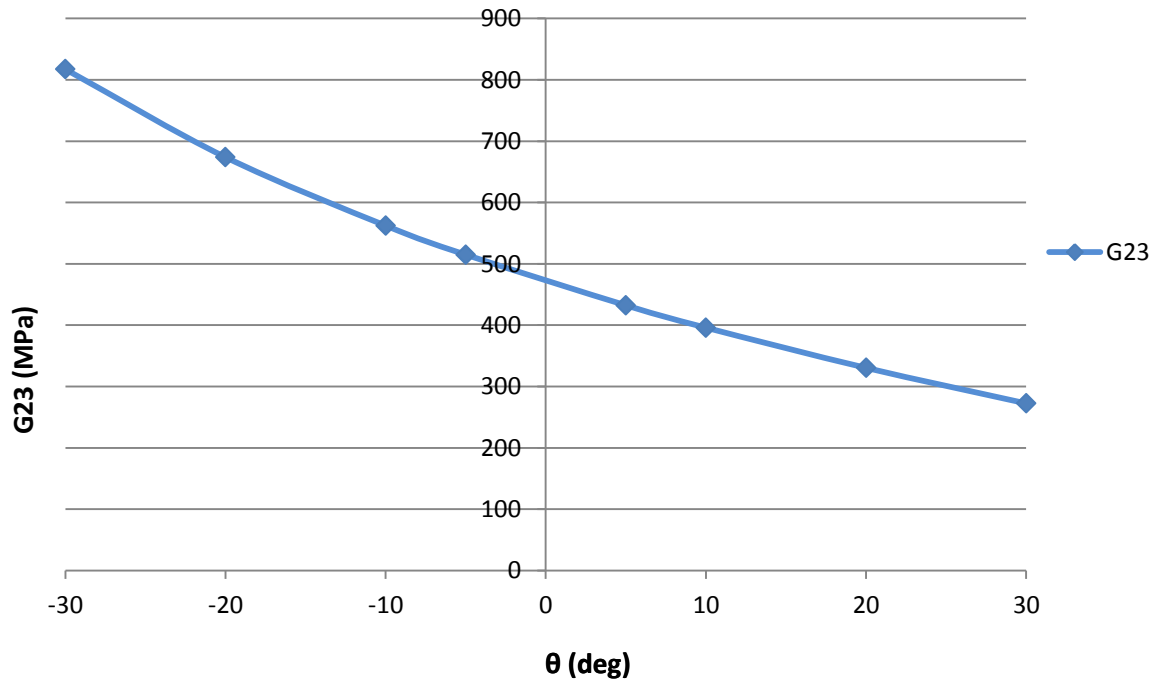


Figure 3.19 - Évolution du module de cisaillement  $G_{23}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$

### III.4. Conclusion

À la suite de cette étude, nous pouvons proposer les conclusions suivantes:

- les propriétés mécaniques des structures en nid d'abeille varient avec différents paramètres géométriques comme l'épaisseur de la paroi, forme de la cellule, le diamètre de la cellule ;
- les propriétés mécaniques sont influencées de manière significative par l'épaisseur des parois ;
- L'augmentation du diamètre de la cellule induit une diminution des propriétés mécaniques;
- l'orientation des parois inclinées est influencée de manière significative aux différents modules d'élasticité des structures en nid d'abeille ;
- On peut noter que les cellules hexagonales régulières ( $\theta = 30^\circ$ ) donnent les propriétés les plus recherchées par les différents domaines d'application des structures en Nida.

CHAPITRE IV

**HOMOGENEISATION NUMERIQUE DES  
STRUCTURES EN NID D'ABEILLE  
REGULIERE**

## CHAPITRE IV : HOMOGENÉISATION NUMÉRIQUE DES STRUCTURES EN NID D'ABEILLE RÉGULIÈRE

### IV.1. Introduction

Il est nécessaire pour des raisons de vérification et de validation de déterminer les constantes élastiques par une méthode d'homogénéisation numérique appliquée à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif du nid d'abeille afin de comparer les résultats avec ceux obtenus analytiquement.

Neuf simulations sont nécessaires pour déterminer les neufs constants:

- Trois simulations en traction simple. Chacune permettant de calculer un module d'élasticité et deux coefficients de Poisson.
- Six simulations de cisaillement. Une pour chaque module de cisaillement.

Les propriétés mécaniques du nid d'abeille étant intimement liées à ses caractéristiques géométriques, il est important de bien les définir.

### IV.2. Procédures d'homogénéisation

#### IV.2.1. Le volume élémentaire représentatif

Dans le type d'approche par changement d'échelle, il convient de définir tout d'abord un volume élémentaire représentatif (VER) qui caractérise la structure microscope. Le VER consiste à définir les caractéristiques des différentes phases supposées homogènes, notamment leur forme, leur répartition spatiale et leurs propriétés mécaniques.

Dans le cas du nida, le nombre de modèles pouvant être créés est abondant. Les modèles utilisés par la suite sont guidés par les études et les simulations effectuées sur le nid d'abeilles par de nombreuses équipes de recherche [6], [15], afin de pouvoir au préalable comparer les résultats des différentes simulations, améliorer et adapter si possible les modèles au code de calcul ANSYS 13. La géométrie est à base de cellules hexagonales régulières. Si l'on se réfère aux notations de la figure les caractéristiques de nid d'abeille en aluminium 5056 sont les suivantes:

$$\Phi = 6,4 \text{ mm}, \quad l = h = 3,695 \text{ mm}, \quad t = 0,075 \text{ mm}, \quad hc = 8,8 \text{ mm}, \quad \theta = 30^\circ.$$

Le matériau considéré est de l'aluminium avec les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$E_s = 70 \text{ GPa}, \quad G_s = 26,627 \text{ GPa}, \quad \nu_s = 0,312.$$

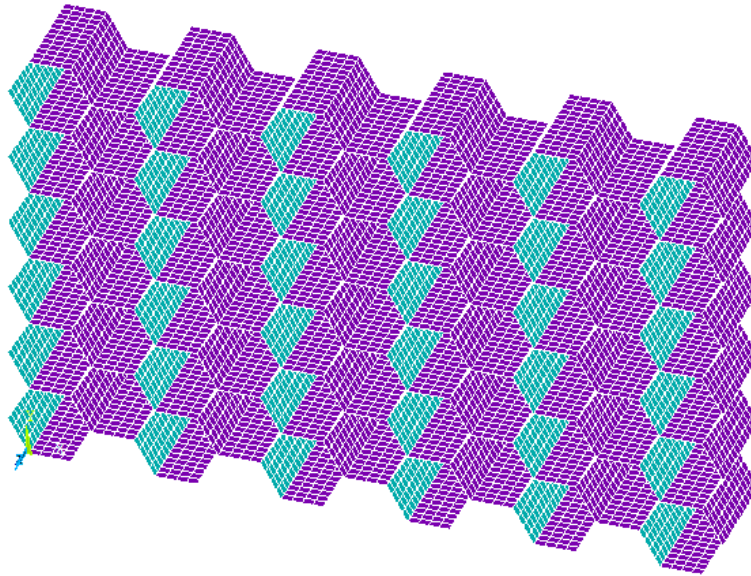


Figure 4.1 - volume élémentaire représentatif du nid d'abeille

#### IV.2.2. La simulation numérique

Les simulations ont été effectuées sur le code de calcul ANSYS 13. Le modèle de nid d'abeille prend en compte 48 cellules qui ont été maillées avec des éléments coques à 4 nœuds et à 6 degrés de liberté par nœud.

Pour ce modèle, le maillage choisi permet de ne pas trop alourdir le calcul tout en gardant une bonne précision au niveau des résultats. Un raffinement excessif ne donne pas de meilleurs résultats. Le maillage utilisé est présenté sur la Fig. 4-2 et donne une précision acceptable. Il compte 10368 éléments et 10452 nœuds. Chaque clinquant contient 48 éléments, 12 suivant l'axe Z et 4 suivant l'axe X.

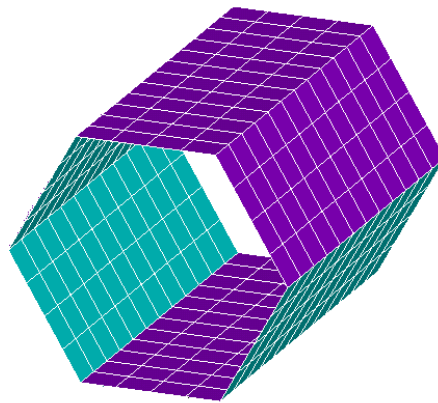


Figure 4-2 - Maillage de la cellule du nid d'abeille.

Pour calculer les différents modules, un déplacement est imposé sur une face du V.E.R dans une direction donnée. La face opposée est fixe. Les symétries sont prises en compte au niveau des conditions limites. Neuf simulations sont nécessaires pour déterminer les neuf constantes élastiques du nid d'abeille:

- La simulation d'une sollicitation de traction suivant une direction  $i$  ( $i = x, y, z$ ) permet de déterminer les trois modules de rigidité  $E_1, E_2$  et  $E_3$  et les six coefficients de Poisson.  
 $V_0$  est le volume avant déformation.  $V_f$  est volume après déformation.
- La simulation des sollicitations en cisaillement suivant les plans XY, YZ, XZ (deux simulations par plan) permet de déterminer les six coefficients de cisaillement  
 Cette méthode, basée sur les efforts aux liaisons à partir d'un déplacement imposé, permet par l'utilisation des lois de comportement de déduire les constantes élastiques.

#### IV.2.2.1. simulation des sollicitations en traction

Trois simulations en traction permettent de déterminer les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson.

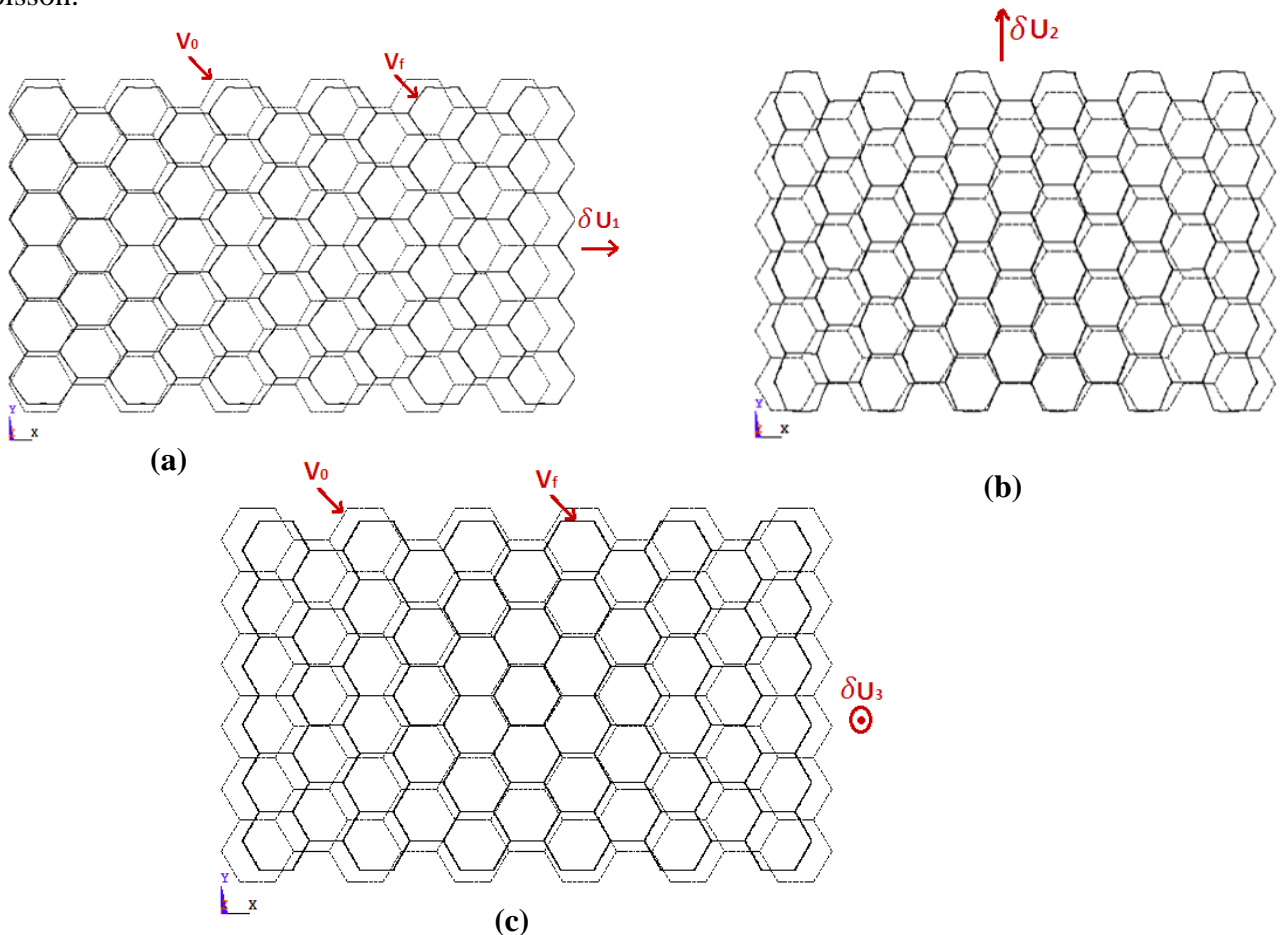


Figure 4-3 - VER en déplacement imposé suivant X(a), Y(b), Z(c)



Dans le cas d'une traction uni axiale, les modules d'élasticité sont pour  $i = x, y, z$ :

$$E_i = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \quad (4.1)$$

Où la contrainte de traction est déduite à partir des efforts de liaisons:

$$\sigma_i = \frac{F_i}{S} \quad (4.2)$$

$F_i$  est la force de liaison du V.E.R. suivant la direction  $i$  (déduite à partir du déplacement  $\delta U_i$  imposé).  $S$  est la surface perpendiculaire au déplacement imposé  $\delta U_i$ .

Les déformations  $\varepsilon_i, \varepsilon_j$  sont:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= \frac{\delta U_i}{l_i} \\ \varepsilon_j &= \frac{\delta U_j}{l_j} \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad i, j = x, y, z \end{aligned} \quad (4.3)$$

$\delta U_i$  est le déplacement (imposé) dans la direction  $i$  et  $l_i$  a longueur avant déformation du V.E.R dans la même direction.

$\delta U_i$  est fixé arbitrairement à 1 mm (hypothèse de petites perturbations). Le calcul par éléments finis permet de déterminer les efforts  $F_i$ .

$\delta U_j$  est le déplacement obtenu par le calcul dans la direction  $j$  et  $l_j$  la longueur avant déformation du V.E.R dans la même direction.

Les coefficients de Poisson sont déterminés par la relation:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad i, j = x, y, z \quad (4.4)$$

### IV.2.2.2. simulation des sollicitations en cisaillement

De même, la détermination des modules de cisaillements  $\mathbf{G}_{ij}$  nécessite l'utilisation des lois de comportement élastique. Des simulations de cisaillement sont indispensables à la détermination de  $\mathbf{G}_{ij}$ , en bloquant les déplacements d'une face et en appliquant un cisaillement sur la face opposée.

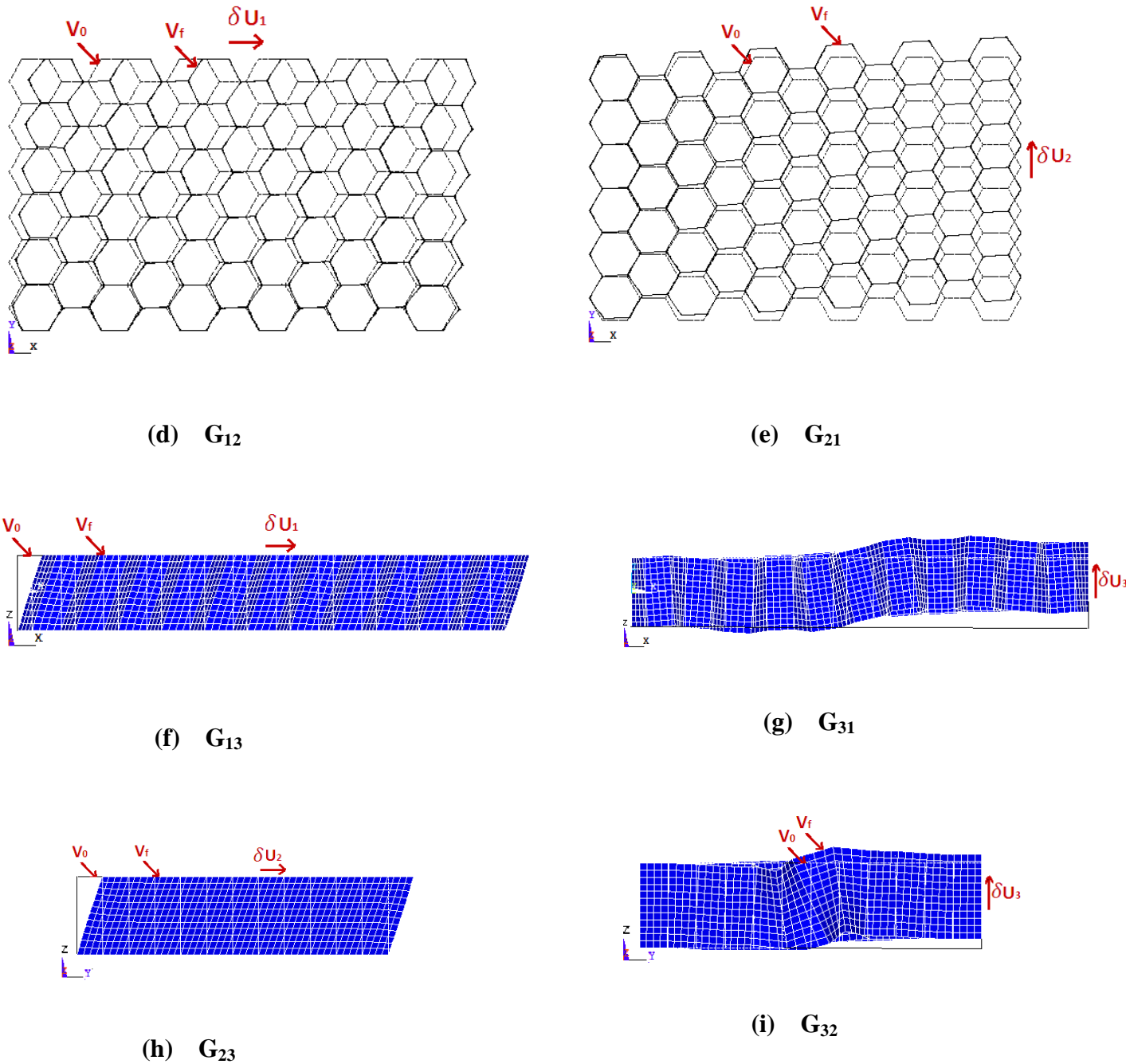


Figure 4-4 - VER sous sollicitation de cisaillement (d – i)

La loi de comportement dans le cas d'une sollicitation de cisaillement est:

$$G_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{\gamma_{ij}} \quad \text{avec} \quad i \neq j \quad \text{et} \quad i, j = x, y, z$$

Pour la contrainte de cisaillement:

$$\tau_{ij} = \frac{F_i}{S_{ik}} \quad \text{avec} \quad i \neq j \neq k \quad \text{et} \quad i, j, k = x, y, z$$

Et la déformation de cisaillement :

$$\gamma_{ij} = \tan \gamma_{ij} = \frac{\delta U_i}{l_i} \quad \text{avec} \quad i \neq j$$

$F_i$  est déterminée par la simulation numérique.

### IV.2.3. Résultats

#### IV.2.3.1. Module d'élasticité $E_1$

##### ➤ Les conditions aux limites pour une traction suivant la direction X :

Pour la détermination du module d'élasticité  $E_1$  on applique les conditions aux limites suivantes:

- Pour  $X = 0$ , on bloque le déplacement suivant X ( $U_x = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- □ Pour  $X = l_x$ , on impose un déplacement suivant X ( $U_x = 1 \text{ mm}$ ) pour tous les nœuds allant de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- Pour  $Y = l_y/2$ , on bloque le déplacement suivant Y ( $U_y = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- Pour  $Z = l_z/2$ , on bloque le déplacement suivant Z ( $U_z = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$ .
- **Résultats de la traction suivant X**

Sous l'effet de la traction uniaxiale, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4-3-a et Fig. 4-5

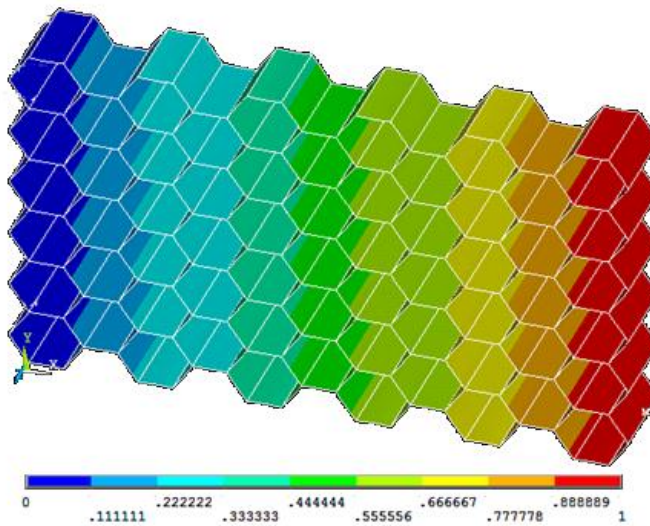


Figure 4-5 - VER sous sollicitation de traction suivant l'axe X.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>1</b>
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>-0,636</b>
	$\Delta l_3$ (mm)	<b>- 0,00007</b>
	$\varepsilon_1$	<b>0,0159</b>
	$\varepsilon_2$	<b>-0,0164</b>
	$\varepsilon_3$	<b>- 0,000008</b>
	$F_1$ (N)	<b>6,900</b>
	$\sigma_1$ (MPa)	<b>0,020</b>
<b>ANSYS</b>	$E_1$ (MPa)	<b>1,274</b>
	$\vartheta_{12}$	<b>1,034</b>
	$\vartheta_{13}$	<b>0</b>
<b>Gibson</b>	$E_1$ (MPa)	<b>1,35</b>
	$\vartheta_{12}$	<b>1</b>
	$\vartheta_{13}$	<b>0,00026</b>
<b>Erreur %</b>	$E_1$	<b>5,6</b>
	$\vartheta_{13}$	<b>3</b>

Tableau 4.1 Résultats de la traction suivant X

Le tableau 4-1 regroupe les résultats obtenus par les simulations numériques avec les conditions présentées précédemment (déplacement imposé suivant la direction X) et les compare aux valeurs analytiques obtenues par les formules de Gibson (Chapitre 2). On peut constater que l'écart des résultats entre la simulation numérique et le modèle analytique est d'environ 5,6 % pour  $E_1$  et 3 % pour le coefficient de Poisson. Ces écarts sont acceptables si on prend le module de Gibson comme référence.

### IV.2.3.2. Module d'élasticité $E_2$

➤ **Les conditions aux limites pour une traction suivant la direction Y :**

Pour la détermination du module d'élasticité  $E_2$  on applique les conditions aux limites suivantes:

- Pour  $Y = 0$ , on bloque le déplacement suivant Y ( $U_y = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- Pour  $Y = l_y$ , on impose un déplacement suivant Y ( $U_y = 1 \text{ mm}$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- Pour  $X = l_x/2$ , on bloque le déplacement suivant X ( $U_x = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- Pour  $Z = l_z/2$ , on bloque le déplacement suivant Z ( $U_z = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$ .

- **Résultats de la traction suivant Y**

Avec les conditions présentées précédemment (déplacement imposé suivant la direction Y) nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4-3-b et Fig. 4-6

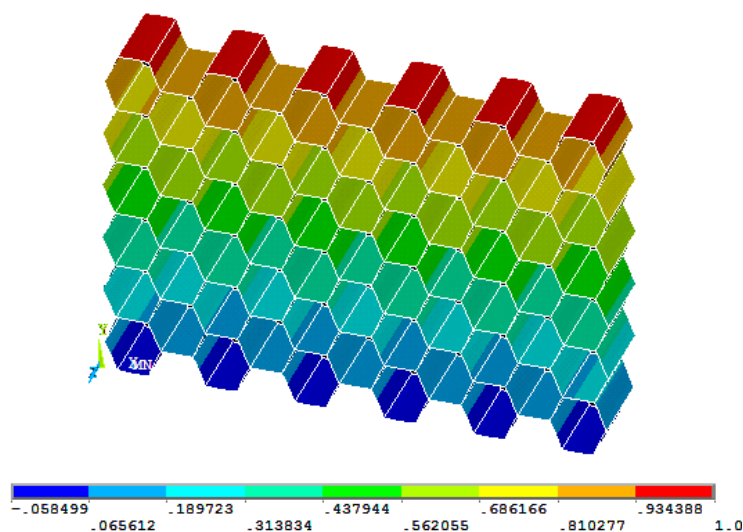


Figure 4.6 VER sous sollicitation de traction suivant l'axe Y

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>1,768</b>
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>1</b>
	$\Delta l_3$ (mm)	<b>1,11E-04</b>
	$\varepsilon_1$	<b>0,028148384</b>
	$\varepsilon_2$	<b>0,025873221</b>
	$\varepsilon_3$	<b>0,000013</b>
	$F_2$ (N)	<b>21,987</b>
	$\sigma_2$ (MPa)	<b>3,98E-02</b>
<b>ANSYS</b>	$E_2$ (MPa)	<b>1,53746</b>
	$\nu_{21}$	<b>1,08794</b>
	$\nu_{23}$	<b>0,00049</b>
<b>Gibson</b>	$E_2$ (MPa)	<b>1,35</b>
	$\nu_{21}$	<b>1</b>
	$\nu_{23}$	<b>0,000257</b>
<b>Erreur %</b>	$E_2$	<b>12</b>
	$\nu_{21}$	<b>8</b>

Tableau 4.2 Résultats de la traction suivant Y

D'après la figure 4.2 on peut constater que la détermination de module de Young  $E_2$  par les deux méthodes analytique et numérique est acceptable, car l'écart entre le modèle de Gibson et la simulation numérique atteint 12%. Par contre l'erreur sur le coefficient de Poisson est toujours très faible.

### IV.2.3.3. Module d'élasticité $E_3$

➤ **Les conditions aux limites pour une traction suivant la direction Z :**

Pour la détermination du module d'élasticité  $E_3$  on applique les conditions aux limites suivantes:

- Pour  $Z = 0$ , on bloque le déplacement suivant Y ( $U_z = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$ .
- □ Pour  $Y = l_y$ , on impose un déplacement suivant Y ( $U_y = 0,1 \text{ mm}$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$ .

➤ **Résultats de la traction suivant Z**

Sous l'effet de la traction uniaxiale, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4-3-c et Fig. 4-7

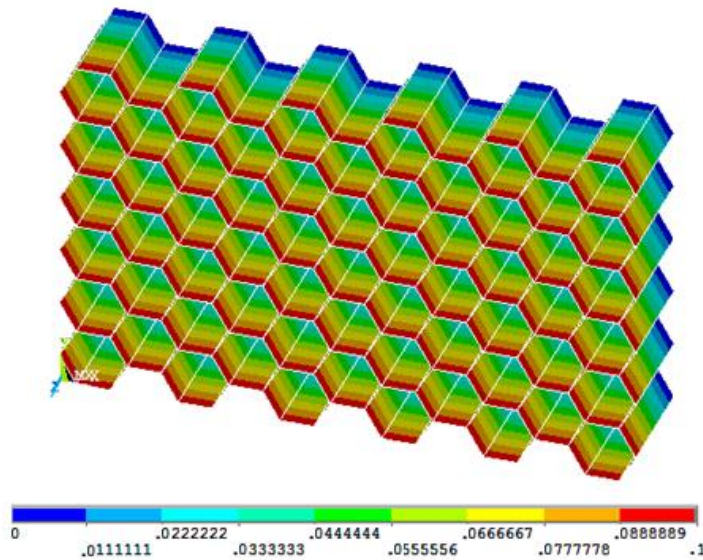


Figure 4-7 - VER sous sollicitation de traction suivant l'axe Z.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>0,222</b>
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>0,136</b>
	$\Delta l_3$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\varepsilon_1$	<b>0,00353</b>
	$\varepsilon_2$	<b>0,00352</b>
	$\varepsilon_3$	<b>0,0114</b>
	$F_3$ (N)	<b>42 665</b>
	$\sigma_3$ (MPa)	<b>17,575</b>
<b>ANSYS</b>	$E_3$ (MPa)	<b>1 546,59</b>
	$\nu_{31}$	<b>0,311</b>
	$\nu_{32}$	<b>0,310</b>
<b>Gibson</b>	$E_3$ (MPa)	<b>1640,64</b>
	$\nu_{31}$	<b>0,312</b>
	$\nu_{32}$	<b>0,312</b>
<b>Erreur %</b>	$E_3$	<b>6</b>
<b>Erreur %</b>	$\nu_{31}$	<b>0,3</b>

Tableau 4.3 Résultats de la traction suivant Z

On peut remarquer sur le tableau 4.3 que l'écart des résultats entre la simulation numérique et le modèle analytique est d'environ 6% pour  $E_3$ . Par contre l'écart sur le coefficient de Poisson est très faible.

#### IV.2.3.4. Module de cisaillement $G_{12}$ et $G_{21}$

La détermination des modules de cisaillement  $G_{12}$  et  $G_{21}$  est effectuée en imposant un déplacement dans un plan XY. La méthode de détermination des modules consiste à bloquer en translation une face et à appliquer un déplacement sur la face opposée.

##### ➤ Conditions aux limites pour la détermination du module de cisaillement $G_{12}$

· Pour déterminer  $G_{12}$ , les conditions aux limites sont les suivantes :

- Pour  $Y=0$  on bloque le déplacement suivant X, Y et Z ( $U_x=0$ ,  $U_y=0$ ,  $U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .



- Pour  $Y=l_y$  on bloque le déplacement suivant Y et Z ( $U_y=0, U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .
- Pour  $Y=l_y$  on impose un le déplacement suivant X ( $U_x=0,1$  mm) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan XY (un déplacement imposé suivant la direction X)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction X, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-d et Fig. 4.8

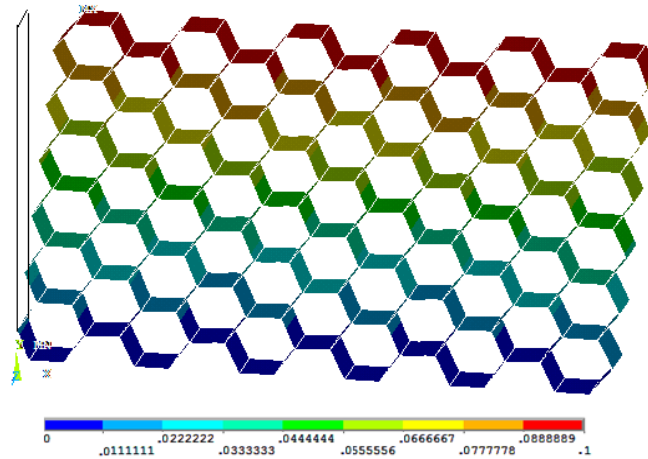


Figure 4-8 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant X.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\gamma_{12}$	<b>0,00259</b>
	$F_1$ (N)	<b>0,5183</b>
	$\tau_{12}$ (MPa)	<b>0,0009</b>
<b>ANSYS</b>	$G_{12}$ (MPa)	<b>0,36243</b>
<b>Gibson</b>	$G_{12}$ (MPa)	<b>0,33800</b>
<b>Erreur %</b>	$G_{12}$	<b>7</b>

Tableau 4.4 Résultats cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant X.

On peut remarquer sur le tableau 4.4 que l'écart des résultats entre ANSYS et Gibson est d'environ 7 % pour  $G_{12}$ . Cette erreur assez importante concerne un module de faible valeur donc peu prépondérant dans les propriétés mécaniques des sandwichs.

➤ **Conditions aux limites pour la détermination du module de cisaillement  $G_{21}$**

Pour déterminer  $G_{21}$ , les conditions aux limites sont les suivantes :

- Pour  $X=0$  on bloque le déplacement suivant X, Y et Z ( $U_x=0, U_y=0, U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .
- Pour  $X=l_x$  on bloque le déplacement suivant X et Z ( $U_x=0, U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $Y=0$  à  $Y=l_y$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .
- Pour  $X=l_x$  on impose un déplacement suivant Y ( $U_y=0,1$  mm) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan XY (un déplacement imposé suivant la direction Y)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction Y, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-e et Fig. 4.9

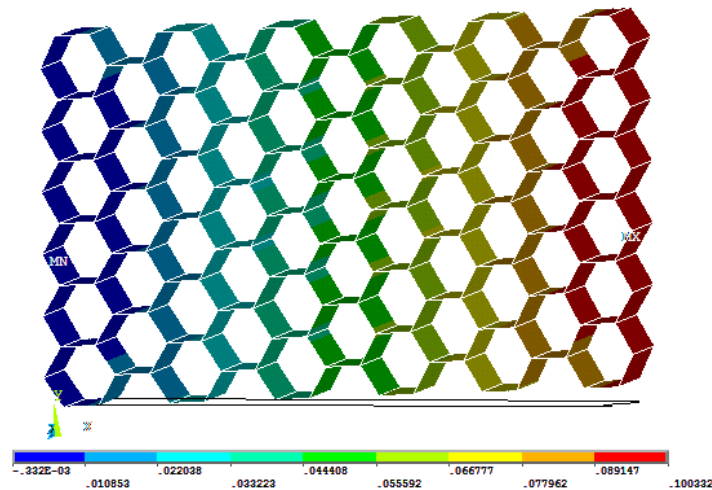


Figure 4-9 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant Y.

	<b>t=0.018 mm</b>	
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\gamma_{21}$	<b>0,00159</b>
	$F_2$ (N)	<b>0,00984</b>
	$\tau_{21}$ (MPa)	<b>0,00003</b>
<b>ANSYS</b>	$G_{21}$ (MPa)	<b>0,0182</b>

Tableau 4.5 Résultats cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant Y.

D'après le tableau 4.5, on remarque que le résultat de  $G_{21}$  obtenu par le code de calcul ANSYS 13 est faible, donc peu important dans les propriétés mécaniques des sandwichs.

#### IV.2.3.5. Module de cisaillement $G_{13}$ et $G_{31}$

Comme dans le cas précédent. La méthode de détermination des modules de cisaillement  $G_{13}$  et  $G_{31}$  consiste maintenant à bloquer en translation une face et à appliquer un déplacement parallèle sur la face opposée,

##### ➤ Conditions aux limites pour la détermination du module de cisaillement $G_{13}$

Pour déterminer  $G_{13}$ , les conditions aux limites sont les suivantes :

- Pour  $Z=0$  on bloque le déplacement suivant X, Y et Z ( $U_x=0$ ,  $U_y=0$ ,  $U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Y=0$  à  $Y=l_y$ .
- Pour  $Z=l_z$  on bloque le déplacement suivant Y et Z ( $U_y=0$ ,  $U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Y=0$  à  $Y=l_y$ .
- Pour  $Z=l_z$  on impose un déplacement suivant X ( $U_x=0,1$  mm) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Y=0$  à  $Y=l_y$ .

##### ➤ Résultats de cisaillement dans le plan XZ (un déplacement imposé suivant la direction X)

Pour un déplacement imposé suivant la direction X, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-f et Fig. 4.10

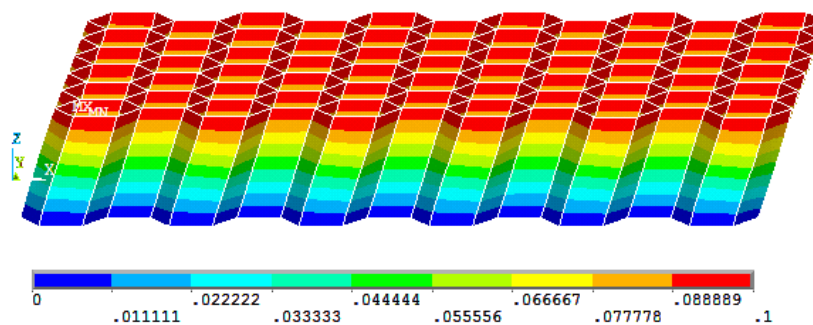


Figure 4-10 - V.E.R sous sollicitation de cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant X.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\gamma_{13}$	<b>0,011363636</b>
	$F_1$ (N)	<b>9 557,5</b>
	$\tau_{13}$ (MPa)	<b>3,9370</b>
<b>ANSYS</b>	$G_{13}$ (MPa)	<b>346,45648</b>
<b>Gibson</b>	$G_{13-min}$ (MPa)	<b>468,93</b>
	$G_{13-max}$ (MPa)	<b>521,04</b>
<b>Grédiac</b>	$G_{13}$ (MPa)	<b>494,98</b>
<b>Erreur %</b>	$G_{13-min}$ (MPa)	<b>27</b>

Tableau 4.6 Résultats cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant X.

Le tableau 4.6 présente les résultats obtenus par ANSYS et les compare aux valeurs analytiques obtenues par les formules de Gibson et de Grédiac. La détermination du module de cisaillement  $G_{13}$  est fondamentale, car il joue un rôle important dans le comportement des structures sandwichs. Nous avons rencontré cependant un problème dans la détermination de  $G_{13}$  qui s'avère plus important par rapport à la borne inférieure au modèle de Gibson (27%), et on peut remarquer aussi que l'écart des résultats entre ANSYS et le modèle analytique de Grédiac est d'environ de 30 %.

#### ➤ Conditions aux limites pour la détermination du module de cisaillement $G_{31}$

- Pour déterminer  $G_{31}$ , les conditions aux limites sont les suivantes :
  - Pour  $X=0$  on bloque le déplacement suivant X, Y et Z ( $U_x=0, U_y=0, U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $Y=0$  à  $Y=l_y$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .
  - Pour  $X=l_x$  on bloque le déplacement suivant X et Y ( $U_x=0, U_y=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $Y=0$  à  $Y=l_y$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .
  - Pour  $X=l_x$  on impose un déplacement suivant Z ( $U_z=0,1$  mm) pour tous les nœuds allant de  $Y=0$  à  $Y=l_y$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .

#### ➤ Résultats de cisaillement dans le plan XZ (un déplacement imposé suivant la direction Z)

Pour un déplacement imposé suivant la direction Z, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-g et Fig. 4.11

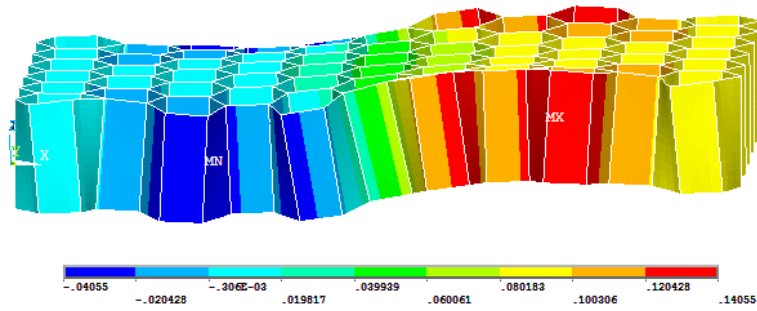


Figure 4-11 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant Z.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	<b><math>\Delta l_3</math> (mm)</b>	<b>0,1</b>
	<b><math>\gamma_{31}</math></b>	<b>0,001592103</b>
	<b><math>F_3</math> (N)</b>	<b>0,6808</b>
	<b><math>\tau_{31}</math> (MPa)</b>	<b>0,0020</b>
<b>ANSYS</b>	<b><math>G_{31}</math> (MPa)</b>	<b>1,25723</b>

Tableau 4.7 Résultats cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant Z.

Le tableau 4.7 représente les résultats de  $G_{31}$  obtenus par ANSYS.

#### IV.2.3.6. Module de cisaillement $G_{23}$ et $G_{32}$

La méthode de détermination des modules de cisaillement  $G_{23}$  et  $G_{32}$  consiste à bloquer en translation une face et à appliquer un déplacement parallèle sur la face opposée,

➤ **Conditions aux limites pour la détermination du module de cisaillement  $G_{23}$**

- Pour déterminer  $G_{23}$ , les conditions aux limites sont les suivantes :
  - Pour  $Z=0$  on bloque le déplacement suivant X, Y et Z ( $U_x=0, U_y=0, U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Y=0$  à  $Y=l_y$ .
  - Pour  $Z=l_z$  on bloque le déplacement suivant X et Z ( $U_x=0, U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Y=0$  à  $Y=l_y$ .
  - Pour  $Z=l_z$  on impose un déplacement suivant Y ( $U_y=0,1$  mm) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Y=0$  à  $Y=l_y$ .

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan YZ (un déplacement imposé suivant la direction Y)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction Y, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-h et Fig. 4.12.

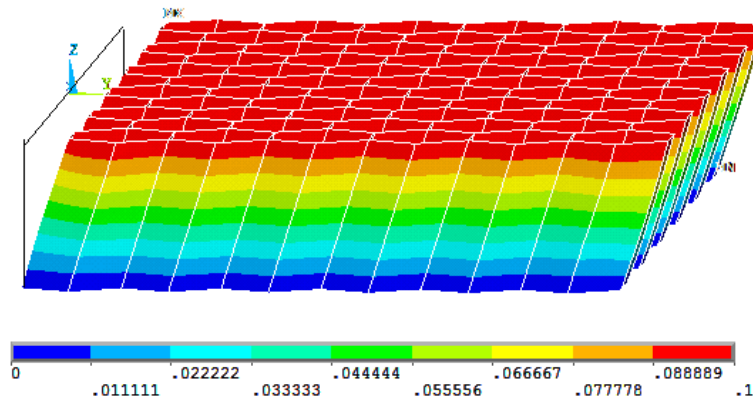


Figure 4-12 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Y.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\gamma_{23}$	<b>0,0114</b>
	$F_2$ (N)	<b>8 936</b>
	$\tau_{23}$ (MPa)	<b>3,6810</b>
<b>ANSYS</b>	$G_{23}$ (MPa)	<b>323,92729</b>
<b>Gibson</b>	$G_{23}$ (MPa)	<b>312,62</b>
<b>Grédiac</b>	$G_{23}$ (MPa)	
<b>Erreur %</b>	$G_{23}$ (MPa)	<b>4</b>

Tableau 4.8 Résultats cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Y.

Le tableau 4.8 présente les résultats obtenus pour le module de cisaillement  $G_{23}$  et les compare avec ceux obtenus par le modèle de Gibson. Les résultats sont proches, car l'écart entre ANSYS et Gibson est d'environ 4 %.

➤ **Conditions aux limites pour la détermination du module de cisaillement  $G_{32}$**

Pour déterminer  $G_{32}$ , les conditions aux limites sont les suivantes :

- Pour  $Y=0$  on bloque le déplacement suivant X, Y et Z ( $U_x=0, U_y=0, U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .
- Pour  $Y=l_y$  on bloque le déplacement suivant X et Z ( $U_x=0, U_z=0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .
- Pour  $Y=l_x$  on impose un déplacement suivant Z ( $U_z=0,1$  mm) pour tous les nœuds allant de  $X=0$  à  $X=l_x$  et de  $Z=0$  à  $Z=l_z$ .

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan YZ (un déplacement imposé suivant la direction Z)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction Z, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-i et Fig. 4.13

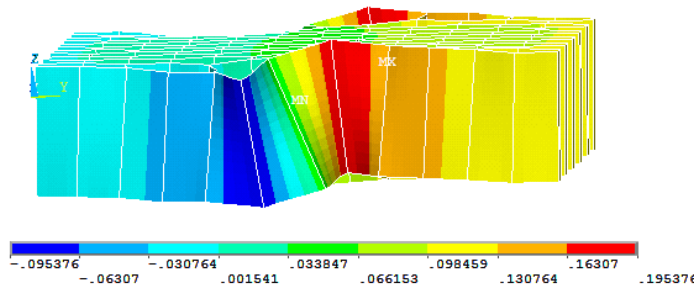


Figure 4-13 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Z.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	<b><math>\Delta l_3</math> (mm)</b>	<b>0,1</b>
	<b><math>\gamma_{32}</math></b>	<b>0,002587322</b>
	<b><math>F_3</math> (N)</b>	<b>1,9855</b>
	<b><math>\tau_{32}</math> (MPa)</b>	<b>0,0036</b>
<b>ANSYS</b>	<b><math>G_{32}</math> (MPa)</b>	<b>1,38838</b>

Tableau 4.9 Résultats cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Z.

Le tableau 4.9 représente les résultats de  $G_{32}$  obtenus par ANSYS. Gibson ne donne pas de valeur pour ce module. Ce module n'a aucune influence sur le comportement des structures sandwichs.

La synthèse de l'ensemble des simulations effectuées pour la détermination de l'ensemble des caractéristiques du nida est réalisée dans le tableau 4.10.

Propriétés élastiques	Ansys	Gibson	Erreur %
$E_1$ (MPa)	1,219	1,351878	5,6
$E_2$ (MPa)	1,53746	1,351880	12
$E_3$ (MPa)	1 909,09	1640,64353	6
$\vartheta_{12}$	1,034	1	3
$\vartheta_{21}$	1,08794	1	8
$\vartheta_{13}$	0	0,000257	0
$\vartheta_{31}$	0,31103	0,312	0,3
$\vartheta_{23}$	0,00049	0,000257	0
$\vartheta_{32}$	0,30965	0,312	0,7
$G_{12}$ (MPa)	0,36243	0,33797	7
$G_{21}$ (MPa)	0,0182		
$G_{13 \text{ min}}$ (MPa)	346,45648	468,93406	27
$G_{13 \text{ max}}$ (MPa)		521,03779	
$G_{31}$ (MPa)	1,25723		
$G_{23}$ (MPa)	323,92729	312,62254	4
$G_{32}$ (MPa)	1,38838		

Tableau 4.10 Caractéristiques du nida obtenues par différents modèles



### IV.3. L'essai de flexion

Les essais de flexion trois et quatre points sont des essais mécaniques permettant de caractériser le comportement mécanique de matériau étudié. Le principe des essais de flexion est de déterminer l'aptitude à la déformation d'un matériau sur deux appuis avec une application de l'effort à mi-distance des appuis. Il est alors possible de mesurer en fonction de la charge appliquée.

#### IV.3.1. L'essai de flexion trois points

Les Fig. 4.14 et 4.15 représentent l'évolution de la flèche  $\delta$  en fonction de la charge appliquée  $P$  pour des structures en nid d'abeille ont des cellules orientent suivant les deux axes X, Y, sollicitées en flexion 3-points pour  $L = 300$  mm et  $b = 40$  mm. Une analyse de la Fig.4.14 nous a permis de se décomposer le comportement en flexion en 3 phases principales, à savoir:

- une première phase qui correspond à une augmentation linéaire de la charge appliquée  $P$  avec la flèche  $\delta$  ;
- une phase de comportement non linéaire dans laquelle la charge maximale est atteinte ;
- dans une dernière phase, on observe une diminution de la charge appliquée jusqu'à la rupture totale de l'éprouvette.

Le comportement linéaire correspond essentiellement au travail des peaux en traction et en compression. Le comportement non linéaire dépend principalement des propriétés de l'âme sous l'effet des efforts de cisaillement. L'orientation des cellules d'une âme en nid d'abeille change la rigidité et la charge aux ruptures. Les figures montrent aussi que les structures en nid d'abeille ont des cellules orientent vers le sens X (SL) sont les plus rigides par rapport à ceux des Nida orientent vers Y (SW). D'autre part, les structures en nid d'abeille (SW) peuvent supporter une charge supérieure de 787 N (Fig.4.15). Par contre, une âme en Nida (SL) peut supporter une charge de 681.6 N. Nous constatons évidemment que l'orientation des cellules d'une âme en nid d'abeille du sens X au sens Y augmente la charge de rupture.

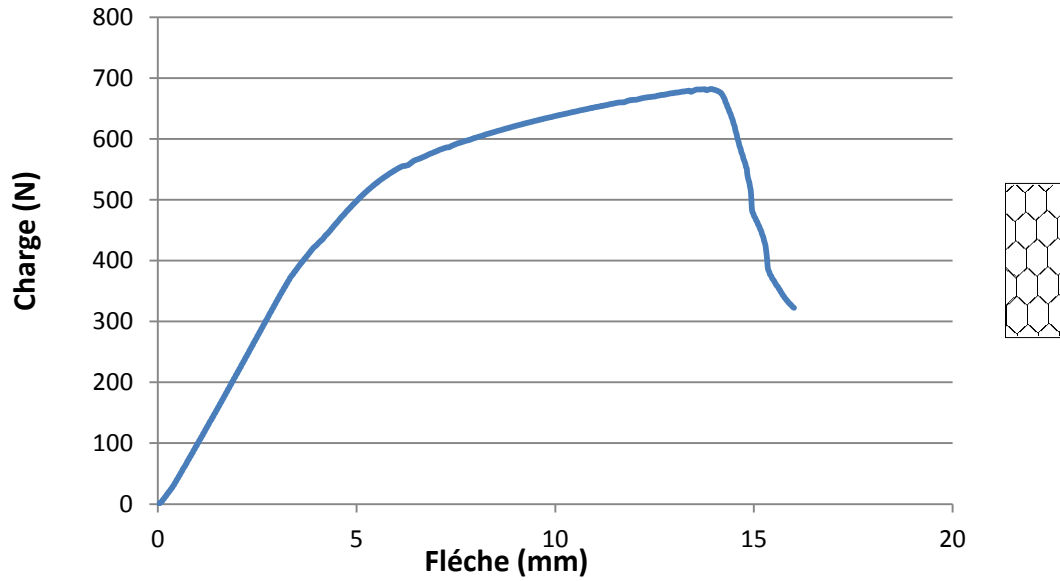


Figure 4.14 : Évolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant X)

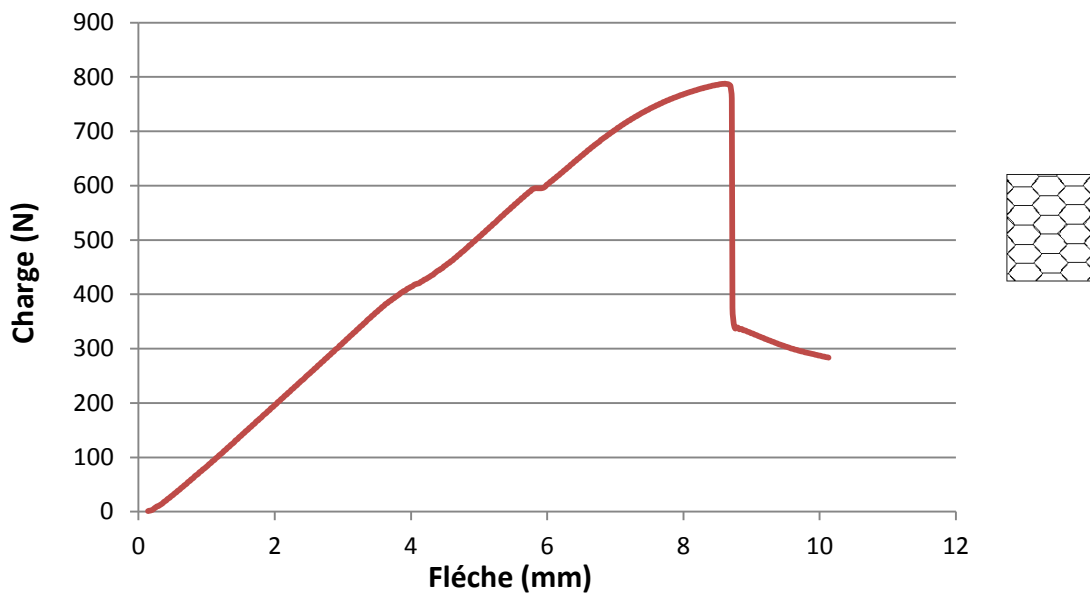


Figure 4.15 : Évolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant Y)

### IV.3.2.L'essai de flexion quatre points

L'intérêt de la flexion 4 points par rapport à la flexion 3 points se trouve dans l'absence d'effort tranchant dans la zone entre les deux appuis intérieurs. Dans cette zone, le flux de contrainte dans l'épaisseur du sandwich est constant. D'autre part, la rigidité longitudinale de l'âme est négligeable par rapport à celle des peaux.

Les Fig. 4.14 et 4.15 représentent l'évolution de la flèche  $\delta$  en fonction de la charge appliquée  $P$  pour des structures en nid d'abeille ont des cellules orientent suivant les deux axes X, Y, sollicitées en flexion 4-points pour  $L = 300$  mm et  $b = 40$  mm. on note des comportements déjà reportés lors l'essai de flexion 3 points (Fig.4.14).

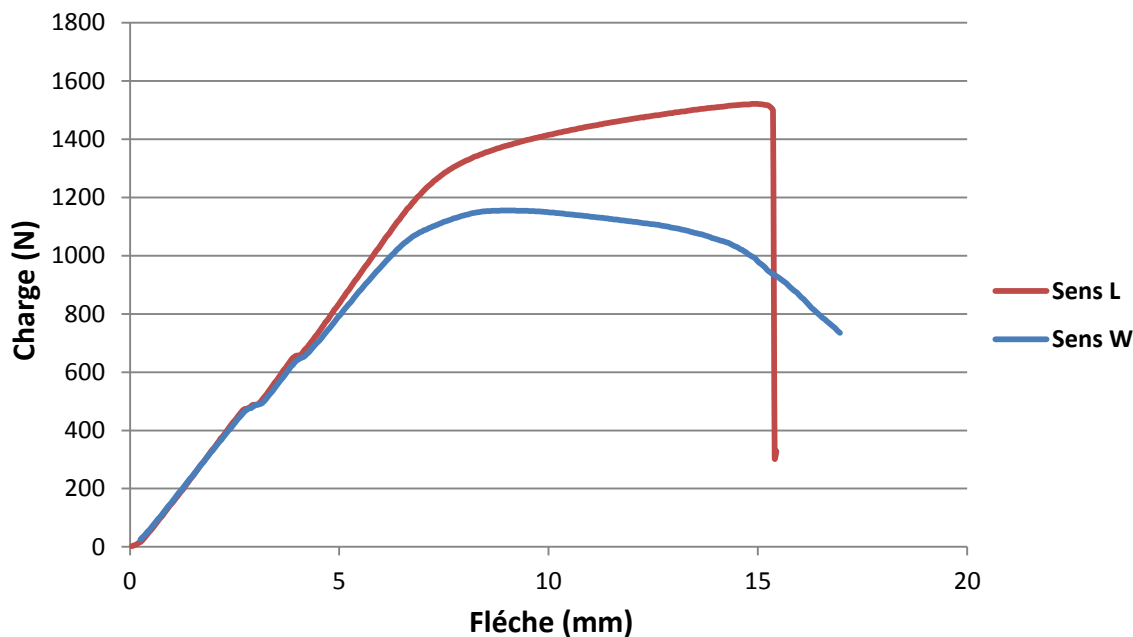


Figure 4.16 : Évolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant X et Y)

#### IV.4. Simulation numérique de la flexion trois points

Pour des raisons de symétrie, le modèle de base est constitué d'un demi de la plaque.

Les conditions aux limites appliquées sont:

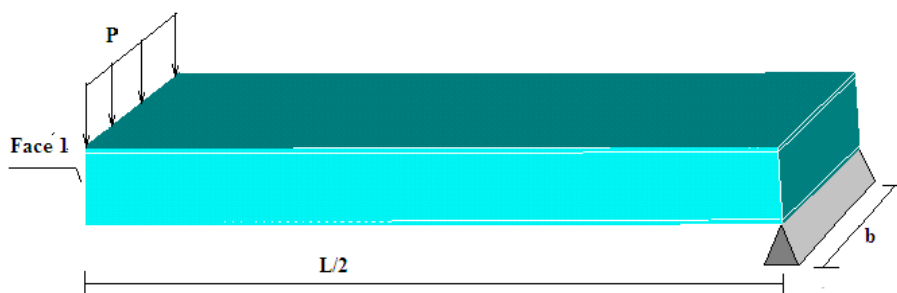


Figure 4.17 Modélisation de la flexion 3 points sur Ansys.

Le matériau sandwich est constitué:

- de deux peaux en aluminium 5056 ;
- une âme en nid d'abeille régulière en aluminium 5056.

Les caractéristiques mécaniques de la peau sont :

$$E_s = 61,000 \text{ GPa}, \quad G_s = 23,247 \text{ GPa}, \quad \nu_s = 0,312.$$

Les propriétés mécaniques homogénéisées de l'âme en nid d'abeille sont:

$E_1 = 1,35 \text{ MPa}$	$\nu_{12} = 1$	$G_{12} = 0.81 \text{ MPa}$
$E_2 = 1,35 \text{ MPa}$	$\nu_{23} = 0$	$G_{23} = 462 \text{ MPa}$
$E_3 = 2187 \text{ MPa}$	$\nu_{13} = 0$	$G_{13} = 803 \text{ MPa}$

#### IV.4.1. Résultats



Figure 4.18 Plaque déformée sous chargement.

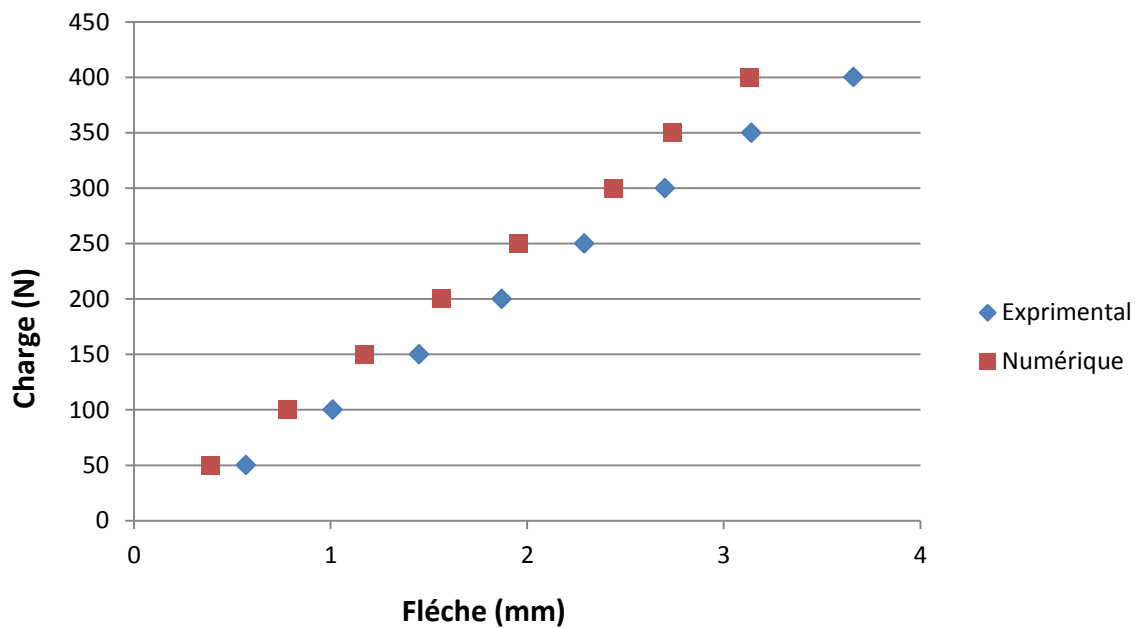


Figure 4.19 Comparaison entre l'expérimentale et le numérique pour Nida régulière

#### IV.5. Simulation numérique de la flexion quatre points

Les conditions aux limites appliquées sont:

- au niveau de l'appui : fixation de la translation  $U_z$ ,
- au niveau de la symétrie sur la face 1 : fixation  $U_x$  et des rotations  $\theta_y$  et  $\theta_z$ ,

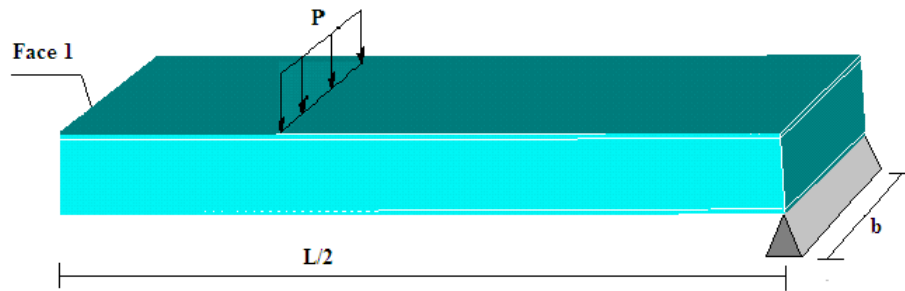


Figure 4.20 Modélisation de la flexion 4 points sur Ansys.

Le matériau sandwich est constitué:

- de deux peaux en aluminium 5056 ;
- une âme en nid d'abeille régulière en aluminium 5056.

Les caractéristiques mécaniques de la peau sont :

$$E_s = 61,000 \text{ GPa}, \quad G_s = 23,247 \text{ GPa}, \quad \nu_s = 0,312$$

Les propriétés mécaniques homogénéisées de l'âme en nid d'abeille sont:

$E_1 = 1,35 \text{ MPa}$	$\nu_{12} = 1$	$G_{12} = 0.81 \text{ MPa}$
$E_2 = 1,35 \text{ MPa}$	$\nu_{23} = 0$	$G_{23} = 462 \text{ MPa}$
$E_3 = 2187 \text{ MPa}$	$\nu_{13} = 0$	$G_{13} = 803 \text{ MPa}$

### IV.5.1. Résultats

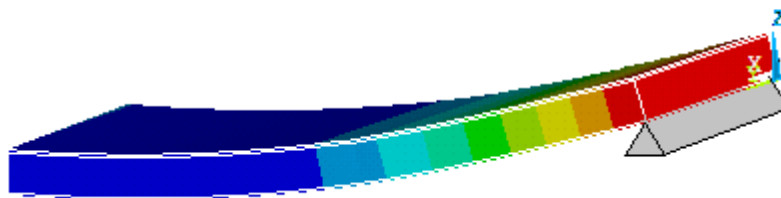


Figure 4.21 Déformée sous chargement.

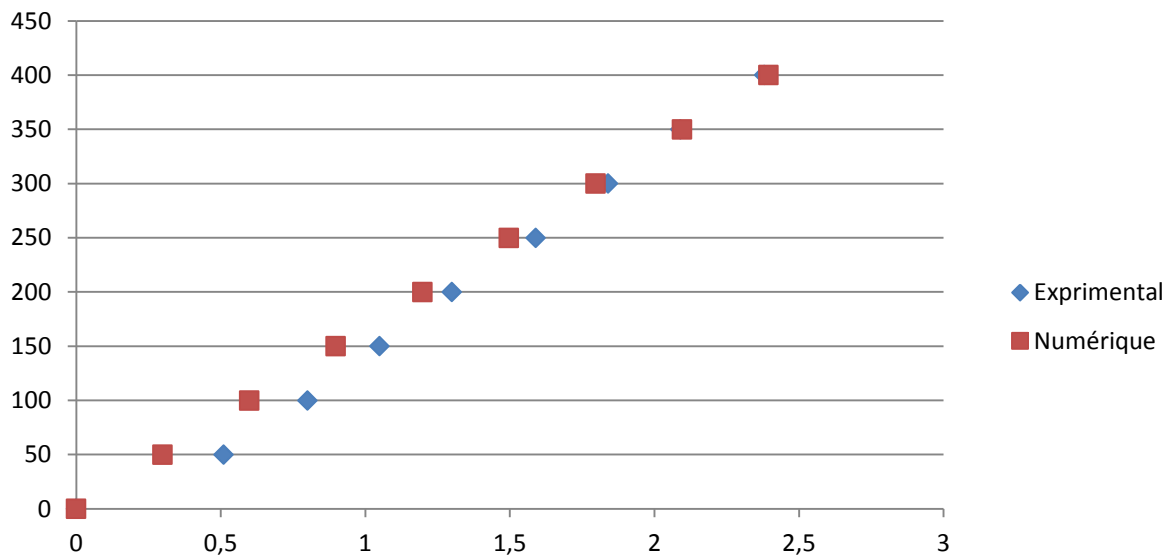


Figure 4.22- Comparaison expérimentale et numérique pour Nida régulière

La Fig. 4.21 et 4.22 sont illustrées les comparaisons entre résultats expérimentaux et simulations numériques. Elles représentent la flèche en fonction de la charge appliquée sur les structures sandwichs en nid d'abeille régulière. Nous constatons un léger écart entre la simulation numérique et l'expérience. Cet écart reste très raisonnable en tenant compte des défauts possibles lors du processus de fabrication, notamment les bulles d'air et les incertitudes des appareils utilisés.

#### IV.6. Conclusion :

L'objectif principal de cette partie est la connaissance des caractéristiques mécaniques pour la compréhension des matériaux sandwichs, cette étude a permis de déterminer les constantes élastiques des matériaux constituant le sandwich par la méthode d'homogénéisation. En utilisant les modélisations analytiques et numériques pour le nid d'abeille.

La comparaison des résultats du modèle analytique (Gibson) avec ceux obtenus par simulation numérique permet de mieux cadrer les valeurs des modules élastiques. On peut constater que la détermination des modules d'Young  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  par les deux méthodes analytique et numérique est acceptable, car l'écart entre le modèle de Gibson et la simulation numérique atteint 5,6 % pour  $E_1$ , 12 % pour  $E_2$  et 6 % pour  $E_3$ . Par contre l'erreur sur les coefficients de Poisson est toujours très faible.

Pour ce qui concerne le module de cisaillement  $G_{12}$ , l'écart entre simulations ANSYS et Gibson est d'environ 7 %. Cette erreur cependant un module de faible valeur donc peu important dans les propriétés mécaniques des sandwichs. Les modules de cisaillements  $G_{21}$ ,  $G_{31}$  et  $G_{32}$  sont obtenus uniquement par simulation numérique.

L'analyse des résultats en flexion trois et quatre points permet de cerner le comportement sous chargement statique des sandwichs en nid d'abeille en aluminium. Nous constatons un léger écart entre la simulation numérique et l'expérience.

## CHAPITRE V

# HOMOGENEISATION NUMERIQUE D'UNE STRUCTURES NID D'ABEILLES À COEFFICIENT DE POISSON NEGATIF.

## CHAPITRE V : HOMOGENÉISATION NUMÉRIQUE D'UNE STRUCTURE NID D'ABEILLES À COEFFICIENT DE POISSON NÉGATIF.

### V.1. Introduction

Les matériaux sandwichs à structure cellulaires sont un bon compromis entre résistance et légèreté et leur coefficient de dilatation est proche de zéro. Ces propriétés sont très recherchées par exemple pour les réflecteurs et les antennes des satellites de communications et les structures aéronautiques, il est intéressant de connaître leurs propriétés mécaniques pour prédire et calculer leur comportement dans des environnements spécifiques. Les modèles cellulaires considèrent les cellules comme des solides (figure 5.1) présentant différents paramètres [11]. Les propriétés d'un solide cellulaire dépendent non seulement des matériaux le constituant, mais aussi de la géométrie de la cellule. Ce chapitre est consacré à l'homogénéisation numérique des propriétés élastiques (modules d'Young, modules de cisaillement et coefficient de Poisson) d'une nouvelle conception de nids d'abeilles auxétiques. La raison d'être de ce concept (figure 5.2) est la présence de parois de base, nous explorons la solution basée sur les travaux de [18] qu'ils s'appuient sur la théorie de l'élasticité pour les différents modules et coefficients dans le plan du nid d'abeille auxétique en fonction des paramètres géométriques et mécaniques

### V.2. Géométrie et notations

Les caractéristiques géométriques nécessaires aux modélisations :

- Les modules d'élasticité :  $E_X$  où X est la direction de traction.
- Les coefficients de Poisson:  $\nu_{XY}$  où X est la direction de traction et Y la direction de contraction.

Les modules sont calculés dans le repère (X, Y, Z), (Fig.5).

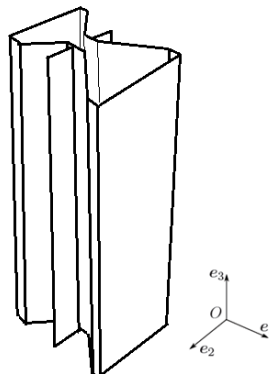


Figure 5.1 : Repère d'étude



Les Paramètres géométriques d'une cellule en nid d'abeille sont illustrés en (Fig. 6)

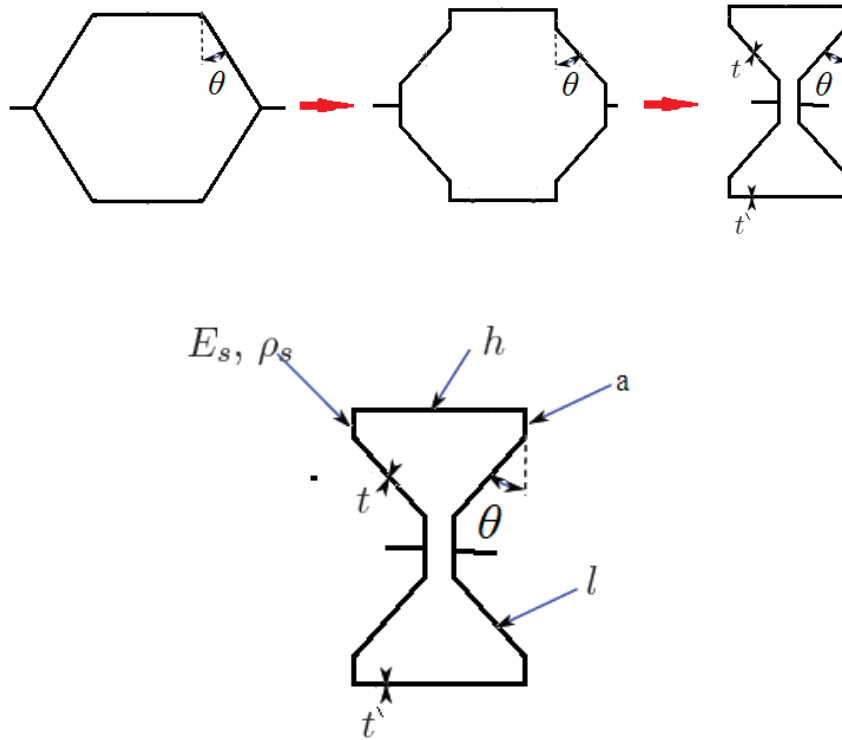


Figure 5.2 : Géométrie d'un nid d'abeille auxétique

avec :

- $\theta$  : Angle de la cellule
- $h$  : Longueur de la paroi centrale
- $a$  : Longueur de la base de la paroi inclinée
- $t$  : Épaisseur de la paroi inclinée
- $b$  : Hauteur du nid d'abeilles

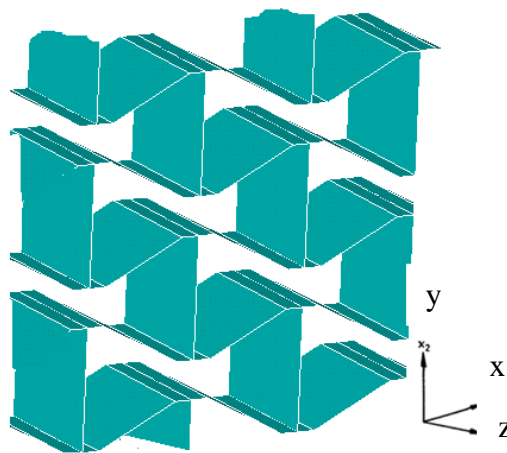


Figure 5.3 : Structure en nid d'abeille auxétique

### V.3. Expression générale de la densité relative d'une structure nida auxétique

#### V.3.1. Métrique [19].

Dans cette sous-section nous allons définir précisément la surface d'un polygone régulier pour introduire ensuite les différents paramétrages que l'on peut utiliser sur une structure nida.

Nous noterons  $S(n)_p$  l'aire d'un n-gone régulier [19]..

Soit un polygone régulier ayant  $n$  côtés,  $S(n)_p$  est la réunion de l'aire,  $S_{\text{tri}}$ , de  $2n$  triangles rectangles de hauteur  $h$  et de côté  $l$ , tel que  $2nl$  soit le périmètre du polygone. L'angle opposé à  $l$  vaut  $\frac{\pi}{n}$ ,

on a donc  $l = h \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$  et de fait :

$$S_{\text{tri}} = \frac{h^2 \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}{2} \quad (5.1)$$

Donc

$$S(n)_p = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) h^2 \quad (5.2)$$

$S(n)_p$  est l'aire d'un n-gone régulier. On vérifie bien que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) h^2 \right)^n = \pi$$

C'est-à-dire que l'on retrouve pour le  $\infty$ -gone l'aire du cercle. De fait on a  $S(n)_D$  l'aire d'un disque n-gonale dont les cercles inscrits intérieur et extérieur sont de rayons respectifs  $R_i$  et  $R_e$  :

$$S(n)_D = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) (R_e^2 - R_i^2) \quad (5.3)$$

Donc dans les systèmes de paramètres  $(R_e; e)$  et  $(R_i; e)$  :

$$S(n)_D = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) e R_i \left( 2 + \frac{e}{R_i} \right) \quad (5.4)$$

Par simplicité nous ne considérerons plus par la suite le système  $(R_i; e)$  qui nous intéressera moins que  $(R_e; e)$ . La fonction  $S(n)_D$  exprimée dans le système  $(R_e; e)$  (et de manière équivalente dans  $(R_i; e)$ ) s'écrit comme le produit de deux fonctions :

$$S(n)_D = l(n) m\left(\frac{e}{R_i}\right) \quad (5.5)$$

Où

$$l(n) = n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) ; \quad m(e, R_i) = e R_i \left( 2 + \frac{e}{R_i} \right)$$

C'est-à-dire que dans ce système de paramètres la contribution de la topologie via la fonction  $l$  et la contribution de la métrique via la fonction  $m$  sont découplées.

Il nous faut toutefois introduire un autre système de paramètres  $(L_e; e)$  qui sera en pratique plus simple d'utilisation pour les cas polygonaux. La relation  $L_e = 2R_e \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)$  nous permet d'exprimer  $S(n)_D$  dans le système  $(L_e; e)$ , on y obtient [19] :

$$S(n)_D = neL_e \left( 1 - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \frac{e}{R_i} \right) \quad (5.6)$$

Il est à noter que dans le système (Le; e) Le est une fonction de n, par opposition le système (Re; e) qui est indépendant de n. De plus dans ce dernier système on perd la propriété de séparation des contributions topologique et métrique.

À partir de cette « paramétrisation » de notre architecture, nous pouvons à présent définir la densité relative d'une telle structure.

### V.3.2. La densité relative d'une structure nida

De part sa nature adimensionalisée la densité relative d'une structure est un paramètre géométrique, on a la relation suivante :

$$\bar{\rho} = 1 - \emptyset \quad (5.7)$$

où  $\emptyset$  représente la porosité de la structure. La porosité s'exprime naturellement par le rapport :

$$\emptyset = \frac{V_{\text{pore}}}{V_{\text{total}}} \quad (5.8)$$

où  $V_{\text{pore}}$  représente le volume des pores et  $V_{\text{total}}$  Le volume total du matériau. De part notre définition du nida comme un matériau engendré par translation, nous pouvons simplifier cette relation en ne considérant qu'une tranche de matériau, on obtient :

$$\emptyset = \frac{S_{\text{pore}}}{S_{\text{total}}} \quad (5.9)$$

Particularisons, en terme de densité relative, nous donnerons le détail du calcul dans les deux cas : Un système hexagonal régulier et un système nida auxétique.

#### V.3.2.1. Système hexagonal régulier

On considère la cellule élémentaire suivante :

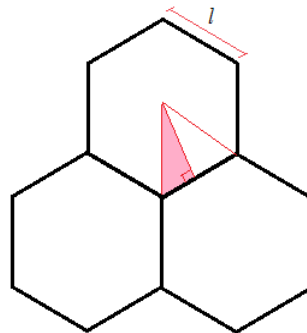


Figure 5.4. Cellule élémentaire d'un nida à topologie hexagonale régulière

L'illustration est faite sur un nida hexagonal régulier, toutefois les propriétés ne sont liées qu'au réseau, de fait cela ne nuit pas à la généralité du propos.

Pour des raisons de symétrie du réseau hexagonal, on travaillera dans le triangle rectangle encadré sur la figure 5.4. Soit  $S_T$  la surface totale de ce triangle, et  $S_M$  la surface occupée dans le triangle par la matière, on a trivialement:

$$\bar{\rho} = \frac{S_M}{S_T} \quad (5.10)$$

. On a immédiatement

$$S_T = \frac{l^2 \cos \theta}{4} \quad (5.11)$$

- Dans les cas où  $\hat{t} = t$  pour toutes les parois, de fait la densité relative matériau est de :

Le triangle rectangle  $S_M$  est égal au un douzième de la surface  $S_{Nida}$  d'un hexagone d'un épaisseur  $t$ .

$$S(n)_M = \frac{S(n)_{Nida}}{12}$$

On obtient immédiatement

$$\bar{\rho} = \frac{S(n)_{Nida}}{3 l^2 \cos \theta}$$

Ce qui nous donne dans le système  $(R_e ; e)$  :

$$\bar{\rho} = \frac{n t}{3 l \cos \theta} \left( 1 - \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \frac{t}{l} \right) \quad (5.12)$$

Vérifions si l'on retrouve bien à partir de notre paramétrisation les résultats de la littérature.

Dans la littérature l'épaisseur est, généralement, supposée faible devant le diamètre de la cellule. De fait si l'on suppose  $\frac{t}{l} \ll 1$  on peut réécrire la relation précédente :

$$\bar{\rho} = \frac{n t}{3 l \cos \theta} \quad (5.13)$$

Dans le cas où  $n = 6$ , et  $\theta = \frac{\pi}{6}$  on obtient :

$$\bar{\rho} = \frac{4}{\sqrt{3}} \left( \frac{t}{l} \right)$$

- Dans les cas où le pavage génère une épaisseur effective du réseau de  $\hat{t} = 2t$  pour les deux parois centrales, de fait la densité relative matériau est de :

$$S(n)_M = \frac{S(n)_{Nida}}{16} \quad (5.14)$$

On obtient immédiatement

$$\bar{\rho} = \frac{S(n)_{Nida}}{4 l^2 \cos \theta}$$

Ce qui nous donne dans le système  $(l; t)$  :

$$\bar{\rho} = \frac{n t}{4 l \cos \theta} \left( 1 - \tan \left( \frac{\pi}{n} \right) \frac{t}{l} \right) \quad (5.15)$$

De fait si l'on suppose  $\frac{t}{l} \ll 1$  on peut réécrire la relation précédente :

$$\bar{\rho} = \frac{n t}{4 l \cos \theta} \tag{5.16}$$

Dans le cas où  $n = 6$ , et  $\theta = \frac{\pi}{6}$  on obtient :

$$\bar{\rho} = \frac{3}{\sqrt{3}} \left( \frac{t}{l} \right)$$

- Dans les cas où le pavage génère une épaisseur effective du réseau de  $\hat{t} = 2t$  pour toutes les parois, de fait la densité relative matériau est de :

$$\bar{\rho} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left( \frac{t}{l} \right) \tag{5.17}$$

### V.3.2.2. Système nida Auxétique général

On considère la cellule élémentaire suivante :

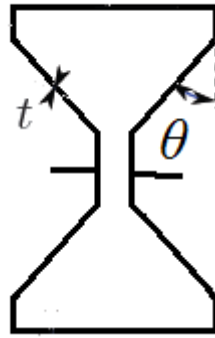


Figure 5.5– Cellule élémentaire d'un nida à topologie auxétique.

$$\bar{\rho} = \frac{S_M}{S_T}$$

. On a immédiatement

$$S_T = 2[(h + l \sin\theta)l \cos\theta + 2a(h - l \sin\theta)]$$

- Dans les cas où  $\hat{t} = t$  pour toutes les parois, de fait la densité relative matériau est de :

$$S_M = 2 \left[ (h + 2l + 4a) \frac{t}{2} \right]$$

Ce qui nous donne :

$$\bar{\rho} = \frac{(h+2l+4a)t}{2(h+l \sin\theta)l \cos\theta + 4a(h+l \sin\theta)} \tag{5.18}$$

avec

$\alpha$  Coefficient des parois de la cellule =  $h/l$

$\beta$  Densité relative d'une cellule nida =  $t/l$

$\gamma$  Coefficient de la paroi de base =  $a/l$

$$\bar{\rho} = \frac{(\alpha + 2 + 4\gamma)}{2(\alpha + \sin\theta)\cos\theta + 4\gamma(\alpha + \sin\theta)} \beta \tag{5.19}$$

- Dans les cas où le pavage génère une épaisseur effective du réseau de  $t = 2t$  pour toutes les parois, de fait la densité relative matériau est de :

$$\bar{\rho} = \frac{(h + 2l + 4a)t}{(h + l \sin\theta)l \cos\theta + 2a(h - l \sin\theta)} \quad (5.20)$$

On obtient immédiatement

$$\bar{\rho} = \frac{(\alpha + 2 + 4\gamma)}{(\alpha + \sin\theta)\cos\theta + 2\gamma(\alpha + \sin\theta)} \beta \quad (5.21)$$

### V.3.2.3. Système nida Auxétique d'origine régulière

Un système nida Auxétique d'origine régulière c'est un système présent une cellule auxétique d'origine nida régulière ( $h = l, \theta = 30^\circ$ ), c'est à dire quelque soit la valeur de l'angle  $\theta$  la hauteur  $h = l + 2a$

On considère la cellule élémentaire suivante :

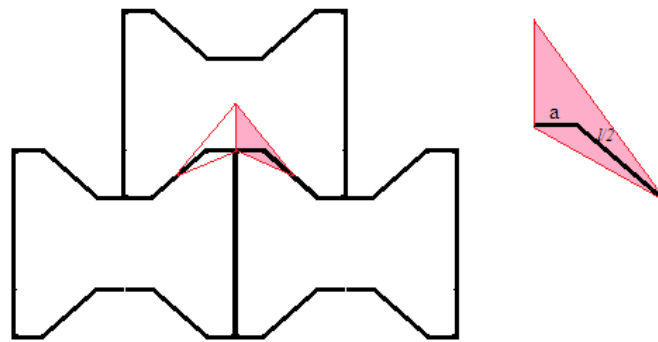


Figure 5.6– Cellule élémentaire d'un nida à topologie auxétique d'origine régulière

L'illustration est faite sur un nida Auxétique, toutefois les propriétés ne sont liées qu'au réseau, de fait cela ne nuit pas à la généralité du propos.

Pour des raisons de symétrie du réseau, on travaillera dans le triangle encadré sur la figure 5.6. Soit  $S_T$  la surface totale de ce triangle, et  $S_M$  la surface occupée dans le triangle par la matière, on a trivialement :

$$\bar{\rho} = \frac{S_M}{S_T}$$

. On a immédiatement

$$S_T = \frac{1}{4} \left[ (h - 2l \sin\theta) \left( a + \frac{l}{2} \cos\theta \right) \right]$$

- Dans les cas où  $\hat{t} = t$  pour toutes les parois, de fait la densité relative matériau est de :

$$S_M = \left(a + \frac{1}{2}\right) t$$

Ce qui nous donne :

$$\bar{\rho} = \frac{4 \left(a + \frac{1}{2}\right) t}{(h - 2l \sin\theta) \left(a + \frac{1}{2} \cos\theta\right)} \quad (5.22)$$

On obtient immédiatement

$$\bar{\rho} = \frac{2 \left(a + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2} - l \sin\theta\right) \left(\frac{a}{l} + \frac{1}{2} \cos\theta\right)} \frac{t}{l} \quad (5.23)$$

$\alpha$  Coefficient des parois de la cellule =  $h/l$

$\beta$  Densité relative d'une cellule nida =  $t/l$

$\gamma$  Coefficient de la paroi de base =  $a/l$

$$\bar{\rho} = \frac{2 \left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2} - \sin\theta\right) \left(\gamma + \frac{1}{2} \cos\theta\right)} \beta \quad (5.24)$$

- Dans les cas où le pavage génère une épaisseur effective du réseau de  $\hat{t} = 2t$  pour toutes les parois, de fait la densité relative matériau est de :

$$\bar{\rho} = \frac{\left(a + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{h}{2} - l \sin\theta\right) \left(\frac{a}{l} + \frac{1}{2} \cos\theta\right)} \frac{\hat{t}}{l} \quad (5.25)$$

Ce qui nous donne :

$$\bar{\rho} = \frac{\left(\gamma + \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{\alpha}{2} - \sin\theta\right) \left(\gamma + \frac{1}{2} \cos\theta\right)} \hat{\beta} \quad (5.26)$$

### V.3.3. Évolution de la densité relative en fonction des paramètres géométriques

Dans cette partie, nous explorons la solution basée sur les travaux de [18] qu'elle a permis la mise en évidence de l'effet de quelque paramètre géométrique de la cellule sur la densité relative générale.

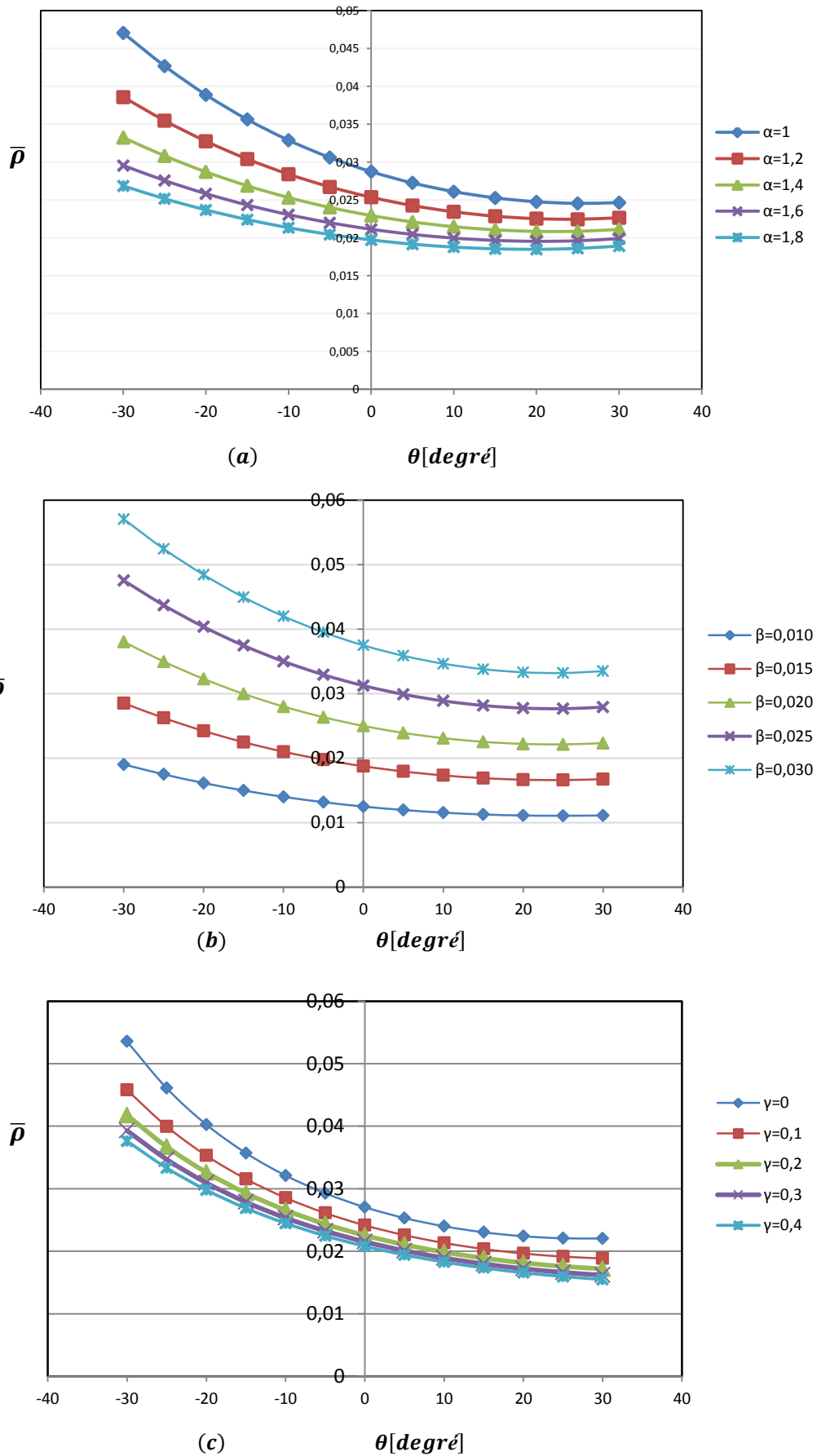


Figure 5.7. Évolution de la densité relative en fonction de l'angle de cellule  $\theta$  sous l'effet de :  
 (a) coefficient des parois de la cellule  $\alpha$ , (b) La densité relative d'une cellule nida  $\beta$ , (c) coefficient du paroi de base  $\gamma$



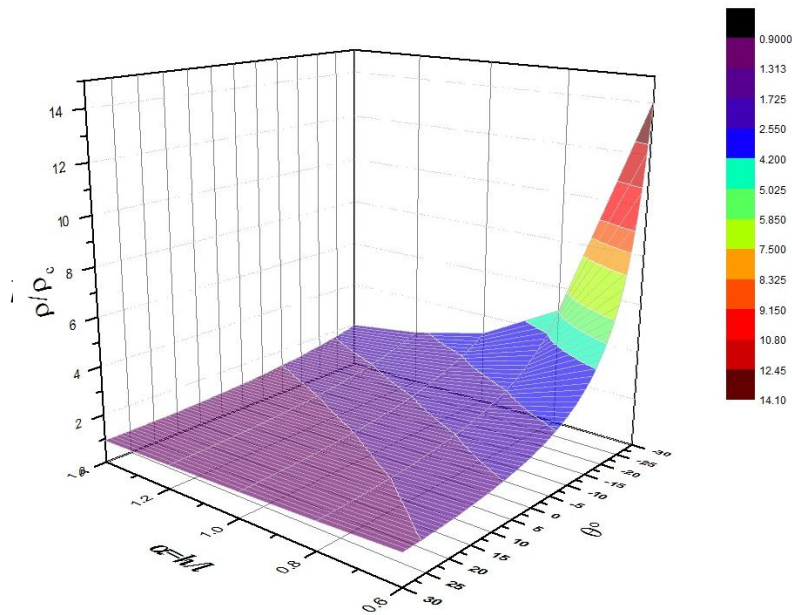


Figure 5.8. Évolution de la densité relative en fonction de l'angle de cellule  $\theta$  sous l'effet du coefficient des parois de la cellule  $\alpha$

Les Fig. 5.7 et 5.8 représentent l'évolution de la densité relative  $\bar{\rho}$  en fonction de l'angle de la cellule  $\theta$ , le coefficient des parois de la cellule  $\alpha$ , la densité relative d'une cellule nida  $\beta$  et le coefficient de la paroi de base  $\gamma$  pour des structures en nid d'abeilles Auxétique. On constate que :

- L'augmentation de la valeur de l'angle de la cellule induit une diminution de la densité relative.
- L'augmentation de la valeur du coefficient des parois de la cellule  $\alpha$  ou du coefficient du paroi de base  $\gamma$  induit une diminution de la densité relative.
- On constate que la densité relative  $\bar{\rho}$  Augmente avec l'augmentation du rapport  $t/l$  (La densité relative d'une cellule nida  $\beta$ ) ;
- La densité relative des structures en nid d'abeille auxétique varie avec différents paramètres géométriques comme l'épaisseur de la paroi, forme de la cellule, le diamètre de la cellule ;
- l'orientation des parois inclinées est influencée de manière significative à la densité relative des structures en nid d'abeille auxétique ;
- dans le cas où la paroi de base égale à zéro et l'angle égale à  $30^\circ$  on obtient les résultats trouvés par Gibson and Ashby [11].

### V.4. Modèle analytique

#### a) PROPRIÉTÉS DANS LE PLAN (X, Y)

Les caractéristiques qui entrent en jeu dans le plan sont:

- les modules  $E_1$  et  $E_2$ ,
- le module de cisaillement  $G_{12}$ ,
- les coefficients de Poisson  $\nu_{12}$  et  $\nu_{21}$ .

- **Modules  $E_1$  et  $E_2$**

Les deux modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  sont calculés en exerçant respectivement une pression suivant X et sur Y. On induit ainsi un effort P suivant les axes X et Y et donc des moments de flexion M . On considère le clinquant comme une poutre de longueur l et deux talons horizontaux, d'épaisseur t, de profondeur b et de module d'Young  $E_s$  [11] .

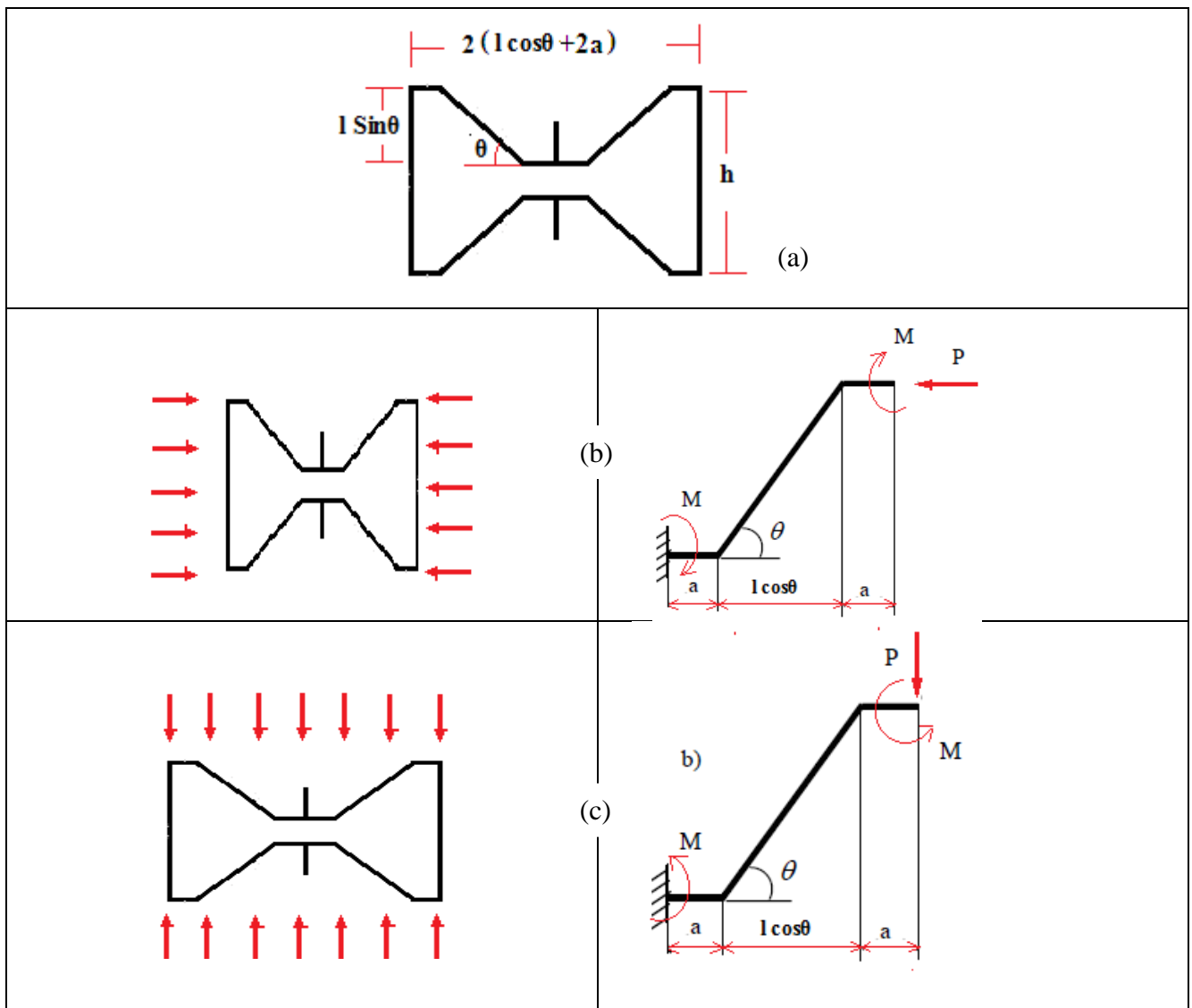


Figure 5.9 - Déformation des parois des cellules sous une charge dirigée suivant X (b) et Y (c) [18]

La distribution des moments de flexion est donnée dans ce cas par:

$$\begin{aligned} M(x) &= M_h & 0 \leq x \leq a \\ M(x) &= M_h - P \sin(\theta)x & a \leq x \leq L \\ M(x) &= M_h - P \sin(\theta)L & L + a \leq x \leq L + 2a \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de Castigliano obtient:

$$U = \int_0^L \frac{M^2 dx}{2EI}$$

$$U = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^a (M_h)^2 + (M_h - P \sin(\theta)L)^2 dx + \int_0^L (M_h - P \sin(\theta)x)^2 dx \right]$$

avec  $M_h = \frac{PL \sin(\theta)}{2}$

$$U = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^a \left( \frac{PL \sin(\theta)}{2} \right)^2 + \left( \frac{PL \sin(\theta)}{2} \right)^2 dx + \int_0^L \left( \frac{PL \sin(\theta)}{2} - P \sin(\theta)x \right)^2 dx \right]$$

$$U = \frac{1}{2EI} \left[ \int_0^a \left( \frac{P^2 L^2 \sin^2(\theta)}{2} \right) + d + \int_0^L \left( \frac{PL \sin(\theta)}{2} - P^2 L \sin^2(\theta)x - P^2 \sin^2(\theta)x^2 \right)^2 dx \right]$$

$$U = \frac{P^2 L^2 a \sin^2(\theta)}{4EI} + \frac{P^2 L^3 \sin^2(\theta)}{24EI} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \delta_h &= \frac{dU}{dp} \\ \delta_h &= \frac{PL^2 a \sin^2(\theta)}{2EI} + \frac{PL^3 \sin^2(\theta)}{12EI} \\ \sigma_1 &= \frac{P}{(h+L \sin \theta) b} \end{aligned} \quad (5.28)$$

Le module d'Young  $E_1$  est défini en utilisant les relations suivantes:

$$E_1 = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}$$

avec

$$\varepsilon_{11} = \frac{\Delta l_x}{l_x} = \frac{\delta_h}{L \cos \theta + 2a} \quad , \text{ où } I = \frac{bt^3}{12}$$

La déformation  $\varepsilon_{11}$  s'écrit :

$$\varepsilon_{11} = \frac{6PL^2 a \sin^2(\theta) + PL^3 \sin^2(\theta)}{E_s bt^3 (L \cos \theta + 2a)} \quad (5.29)$$

Le module d'Young  $E_1$  s'écrit alors:

$$E_1 = E_s \left(\frac{t}{L}\right)^3 \frac{\left(\cos \theta + \frac{2a}{L}\right)}{\left(\frac{h}{L} + \sin \theta\right) \left(1 + 6\frac{a}{L}\right) \sin^2 \theta} \quad (5.30)$$

On obtient le module d'Young  $E_2$  de même manière :

$$E_2 = E_s \left(\frac{t}{L}\right)^3 \frac{\left(\frac{h}{L} + \sin \theta\right)}{\left(\cos \theta + \frac{2a}{L}\right) \left(\cos^2 \theta + 6\frac{a}{L} \cos^2 \theta + 12\frac{a^2}{L^2} \cos \theta + 8\frac{a^3}{L^3}\right)} \quad (5.31)$$

Les coefficients de Poisson sont calculés selon la séquence suivante:

$$\nu_{21} = -\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{22}}$$

$$\nu_{21} = \frac{\left(\frac{h}{L} + \sin \theta\right) \sin \theta}{\left(\frac{2a}{L} + \cos \theta\right) \cos \theta} \quad (5.32)$$

$$\nu_{12} = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}$$

$$\nu_{12} = \frac{\left(\frac{2a}{L} + \cos \theta\right) \cos \theta}{\left(\frac{h}{L} + \sin \theta\right) \sin \theta} \quad (5.33)$$

## V.5. Approches numériques

Neuf simulations sont nécessaires pour déterminer les neufs constants:

- Trois simulations en traction simple. Chacune permettant de calculer un module d'élasticité et deux coefficients de Poisson.
- Six simulations de cisaillement. Une pour chaque module de cisaillement.

### V.5.1. Le volume élémentaire représentatif

La géométrie est à base de cellules auxétique. Si l'on se réfère aux notations de la figure les caractéristiques de nid d'abeille sont les suivantes:

$$\Phi = 6,4 \text{ mm}, \quad h = 3,695 \text{ mm}, \quad L = 1,216 \text{ mm}, \quad a = 1 \text{ mm}, \quad t = 0,075 \text{ mm}$$

$$hc = 8.8 \text{ mm}, \quad \theta = 34,3^\circ.$$

Le matériau considéré est de l'aluminium 5056 avec les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$E_s = 70 \text{ GPa}, \quad G_s = 26,676 \text{ GPa}, \quad \nu_s = 0,312.$$

Les longueurs  $l_x$ ,  $l_y$  et  $l_z$  du volume élémentaire représentatif sont (Fig. 5.10)

$$l_x = 54,09 \text{ mm}, \quad l_y = 33,79 \text{ mm}, \quad l_z = 8,8 \text{ mm}.$$

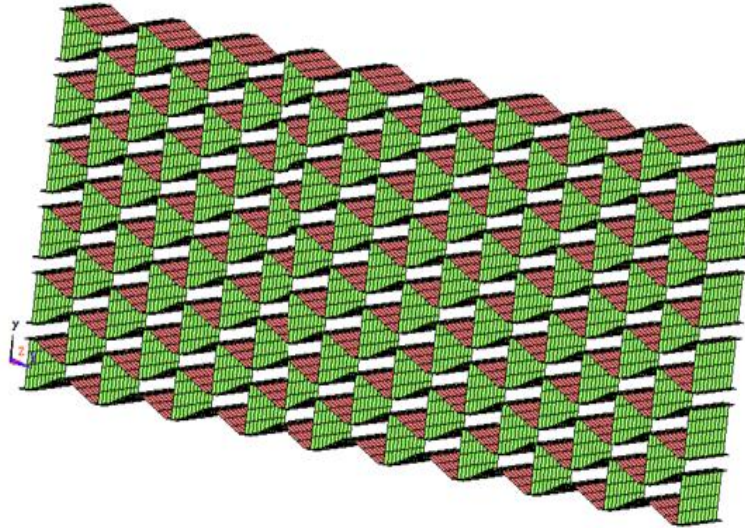


Figure 5.10 - volume élémentaire représentatif du nid d'abeille auxétique

Les simulations ont été effectuées sur le code de calcul ANSYS 13

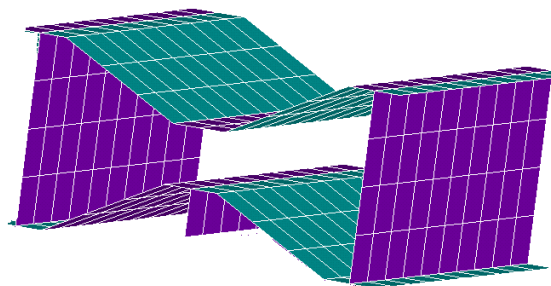


Figure 5.11 : Maillage de la cellule du nid d'abeille auxétique.

Ce modèle prend en compte 94 cellules qui ont été maillées avec des éléments coques à 4 nœuds et à 6 degrés de liberté par nœud.

Pour ce modèle, le maillage choisi permet de ne pas trop alourdir le calcul tout en gardant une bonne précision au niveau des résultats. Le maillage utilisé est présenté sur la Fig. 5.11 et donne une précision acceptable. Il compte 15288 éléments et 15576 nœuds.

- La simulation d'une sollicitation de traction suivant une direction  $i$  ( $i = x, y, z$ ) permet de déterminer les trois modules de rigidité  $E_1, E_2$  et  $E_3$  et les six coefficients de Poisson.  $V_0$  est le volume avant déformation.  $V_f$  est volume après déformation.

- La simulation des sollicitations en cisaillement suivant les plans XY, YZ, XZ (deux simulations par plan) permet de déterminer les six coefficients de cisaillement  
Cette méthode, basée sur les efforts aux liaisons à partir d'un déplacement imposé, permet par l'utilisation des lois de comportement de déduire les constantes élastiques.

### V.5.2. simulation des sollicitations en traction

Trois simulations en traction permettent de déterminer les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson.

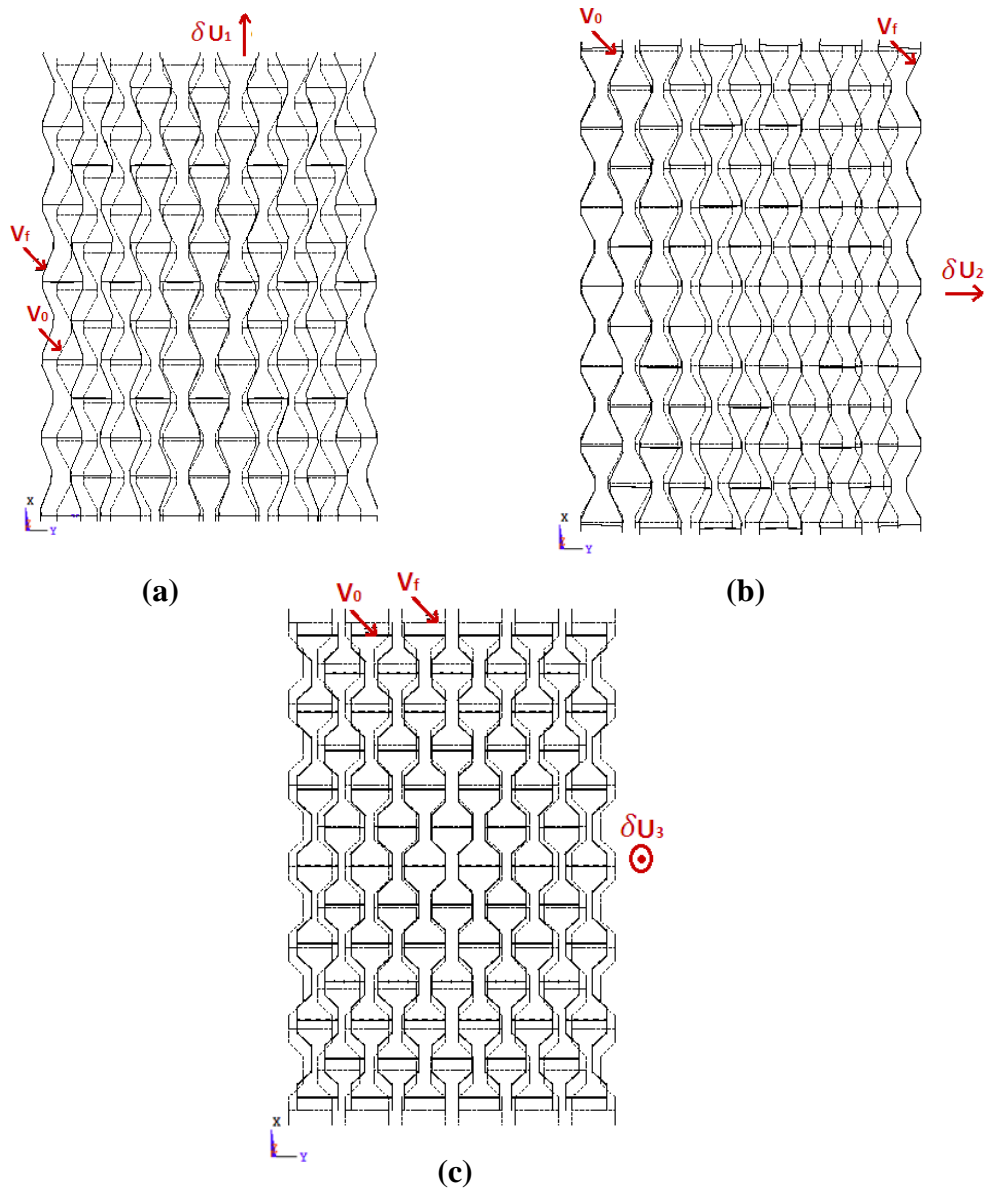


Figure 5.12 - VER en déplacement imposé suivant X(a), Y(b), Z(c)

## V.6. Résultats

### V.6.1. Module d'élasticité $E_1$

#### ➤ Les conditions aux limites pour une traction suivant la direction X :

Pour la détermination du module d'élasticité  $E_1$  on applique les conditions aux limites suivantes:

- Pour  $X = 0$ , on bloque le déplacement suivant X ( $U_x = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
  - Pour  $X = l_x$ , on impose un déplacement suivant X ( $U_x = 1$  mm) pour tous les nœuds allant de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
  - Pour  $Y = l_y/2$ , on bloque le déplacement suivant Y ( $U_y = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
  - Pour  $Z = l_z/2$ , on bloque le déplacement suivant Z ( $U_z = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$ .
- **Résultats de la traction suivant X**

Sous l'effet de la traction uniaxiale, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille auxétique la déformation représentée par Fig. 5-3-a et Fig. 5-13

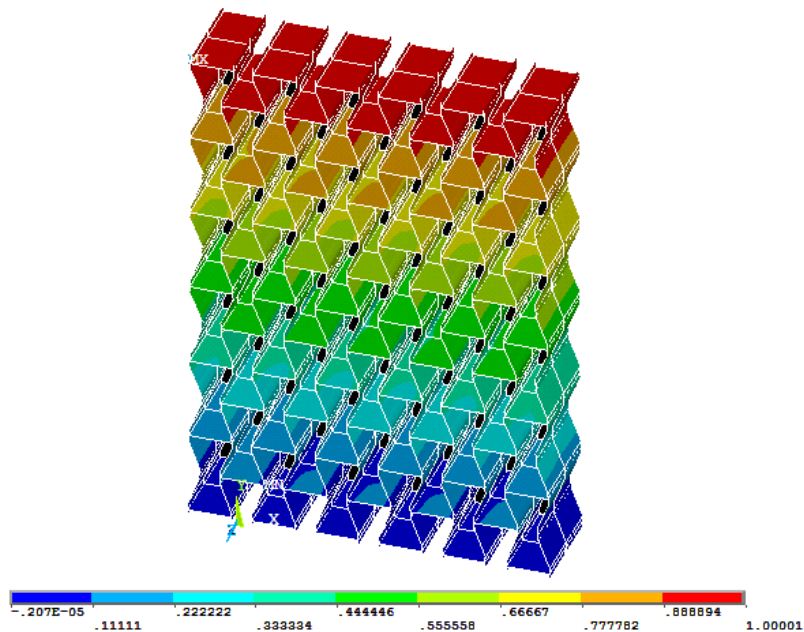


Figure 5.13 - VER sous sollicitation de traction suivant l'axe X.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>1</b>
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>0,930</b>
	$\Delta l_3$ (mm)	<b>0,0004</b>
	$\varepsilon_1$	<b>0,0296</b>
	$\varepsilon_2$	<b>0,0172</b>
	$\varepsilon_3$	<b>0,000041</b>
	$F_1$ (N)	<b>75,0000</b>
	$\sigma_1$ (MPa)	<b>0,2522</b>
<b>ANSYS</b>	$E_1$ (MPa)	<b>8,5227</b>
	$\vartheta_{12}$	<b>- 1,7213</b>
	$\vartheta_{13}$	<b>0,0024</b>
<b>MODELE Réf. [18]</b>	$E_1$ (MPa)	<b>8,7010</b>
	$\vartheta_{12}$	<b>- 1,4640</b>
<b>Erreur %</b>	$E_1$	<b>2</b>
	$\vartheta_{12}$	<b>17</b>

Tableau 5-1 - Résultats de la traction suivant X

On peut remarquer sur le tableau 5.1 que l'écart des résultats entre la simulation numérique et le modèle analytique proposé par Bezazi est d'environ 2 % pour  $E_1$ .

### V.6.2. Module d'élasticité $E_2$

#### ➤ Les conditions aux limites pour une traction suivant la direction Y :

Pour la détermination du module d'élasticité  $E_2$  on applique les conditions aux limites suivantes:

- Pour  $Y = 0$ , on bloque le déplacement suivant Y ( $U_y = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- □ Pour  $Y = l_y$ , on impose un déplacement suivant Y ( $U_y = 1$  mm) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- Pour  $X = l_x/2$ , on bloque le déplacement suivant X ( $U_x = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$  et de  $Z = 0$  à  $Z = l_z$ .
- Pour  $Z = l_z/2$ , on bloque le déplacement suivant Z ( $U_z = 0$ ) pour tous les nœuds allant de  $X = 0$  à  $X = l_x$  et de  $Y = 0$  à  $Y = l_y$ .



- **Résultats de la traction suivant Y**

Avec les conditions présentées précédemment (déplacement imposé suivant la direction Y) nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 5-3-b et Fig 5-14

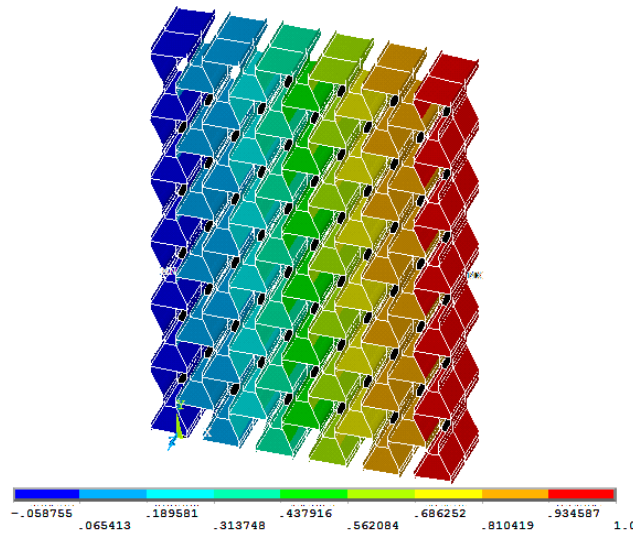


Figure 5.14 - VER sous sollicitation de traction suivant l'axe Y.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>0,884</b>
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>1,000</b>
	$\Delta l_3$ (mm)	<b>0,00023</b>
	$\epsilon_1$	<b>0,02959</b>
	$\epsilon_2$	<b>0,01634</b>
	$\epsilon_3$	<b>0,00003</b>
	$F_2$ (N)	<b>34,99200</b>
	$\sigma_2$ (MPa)	<b>0,07351</b>
<b>ANSYS</b>	$E_2$ (MPa)	<b>2,48403</b>
	$\vartheta_{21}$	<b>-0,55223</b>
	$\vartheta_{23}$	<b>0,00089</b>
<b>MODELE DE Réf. [18]</b>	$E_2$ (MPa)	<b>2,30000</b>
	$\vartheta_{21}$	<b>- 0,68300</b>
<b>Erreur %</b>	$E_2$	<b>7</b>
	$\vartheta_{21}$	<b>19</b>

Tableau 5-2 - Résultats de la traction suivant Y

Le tableau 5.2 présente les résultats obtenus par ANSYS et les compare aux valeurs analytiques obtenues par les formules de Bezazi. Nous avons constaté un écart faible, pour le module d'Young  $E_2$  égale à 7 % et pour le coefficient de poisson 19%.

### V.6.3. Module d'élasticité $E_3$

➤ **Résultats de la traction suivant Z**

Sous l'effet de la traction uniaxiale, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 5-7

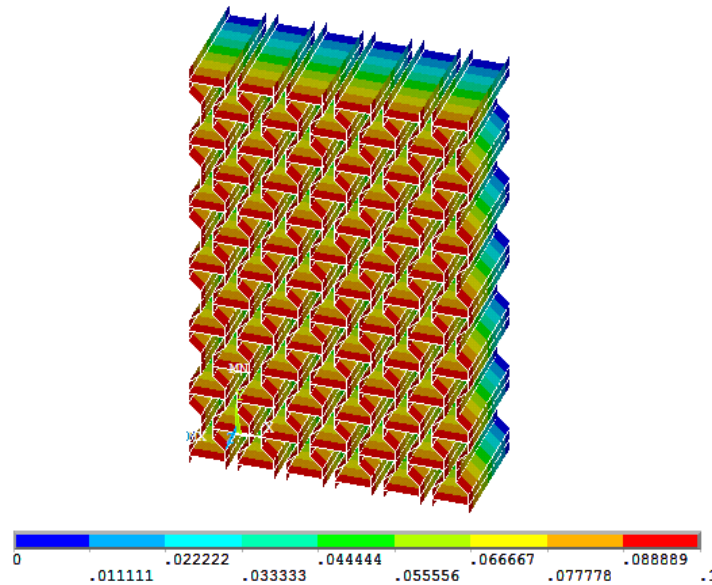


Figure 5-15 - VER sous sollicitation de traction suivant l'axe Z.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>0,014</b>
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>0,04</b>
	$\Delta l_3$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\epsilon_1$	<b>0,00026</b>
	$\epsilon_2$	<b>0,0012</b>
	$\epsilon_3$	<b>0,0114</b>
	$F_3$ (N)	<b>18 990</b>
	$\sigma_3$ (MPa)	<b>10,390</b>
<b>ANSYS</b>	$E_3$ (MPa)	<b>914,329</b>
	$\nu_{31}$	<b>0,02278</b>
	$\nu_{32}$	<b>0,10417</b>

Tableau 5-3 - Résultats de la traction suivant Z

### IV.6.4. Module de cisaillement $G_{12}$ et $G_{21}$

La détermination des modules de cisaillement  $G_{12}$  et  $G_{21}$  est effectuée en imposant un déplacement dans un plan XY. La méthode de détermination des modules consiste à bloquer en translation une face et à appliquer un déplacement sur la face opposée.

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan XY (un déplacement imposé suivant la direction X)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction X, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4.

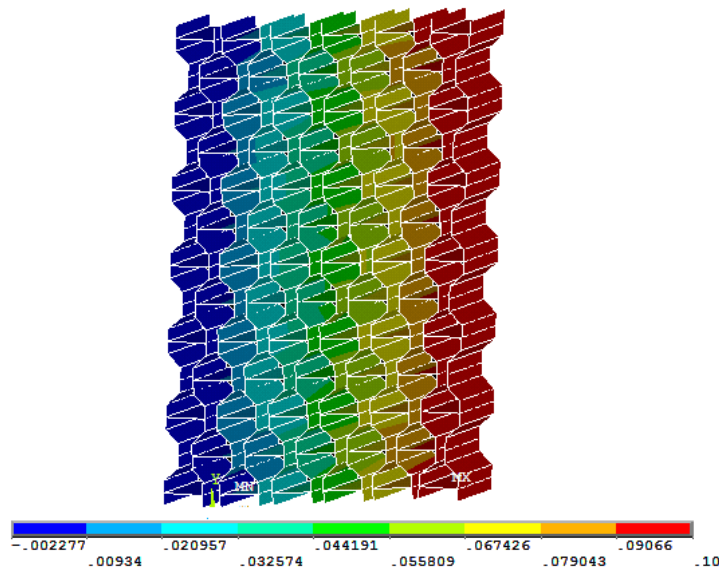


Figure 5.16 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant X.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>0,1000</b>
	$\gamma_{12}$	<b>0,0030</b>
	$F_1$ (N)	<b>1,9080</b>
	$\tau_{12}$ (MPa)	<b>0,0040</b>
<b>ANSYS</b>	$G_{12}$ (MPa)	<b>1,354</b>

Tableau 5.4 - Résultats cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant X.

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan XY (un déplacement imposé suivant la direction Y)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction Y, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-e

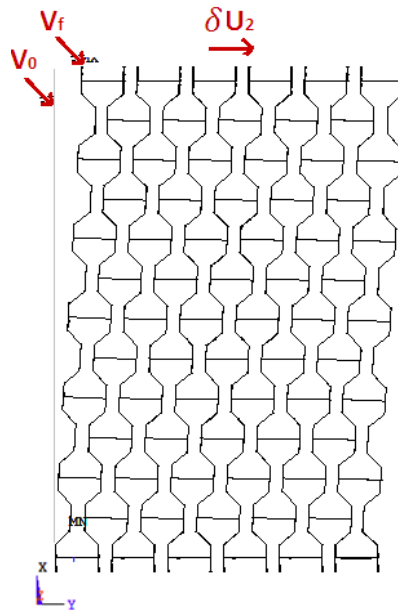


Figure 5.17 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant Y

	<b>t=0.075 mm</b>	
	<b><math>\Delta l_2</math> (mm)</b>	<b>0,1</b>
	<b><math>\gamma_{21}</math></b>	<b>0,0018</b>
	<b><math>F_2</math> (N)</b>	<b>0,0690</b>
	<b><math>\tau_{21}</math> (MPa)</b>	<b>0,0002</b>
<b>ANSYS</b>	<b><math>G_{21}</math>(MPa)</b>	<b>0,125</b>

Tableau 5.5 - Résultats cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant Y.

### V.6.5. Module de cisaillement $G_{13}$ et $G_{31}$

Comme dans le cas précédent. La méthode de détermination des modules de cisaillement  $G_{13}$  et  $G_{31}$  consiste maintenant à bloquer en translation une face et à appliquer un déplacement parallèle sur la face opposée,

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan XZ (un déplacement imposé suivant la direction X)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction X, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 5.10

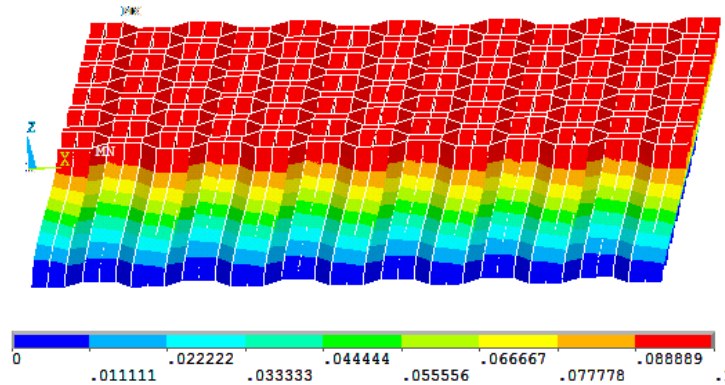


Figure 5-18 - V.E.R sous sollicitation de cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant X

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_1$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\gamma_{13}$	<b>0,0114</b>
	$F_1$ (N)	<b>12 630</b>
	$\tau_{13}$ (MPa)	<b>6,9103</b>
<b>ANSYS</b>	<b><math>G_{13}</math> (MPa)</b>	<b>608,108</b>

Tableau 5.6 - Résultats cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant X.

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan XZ (un déplacement imposé suivant la direction Z)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction Z, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-g et Fig. 5.11

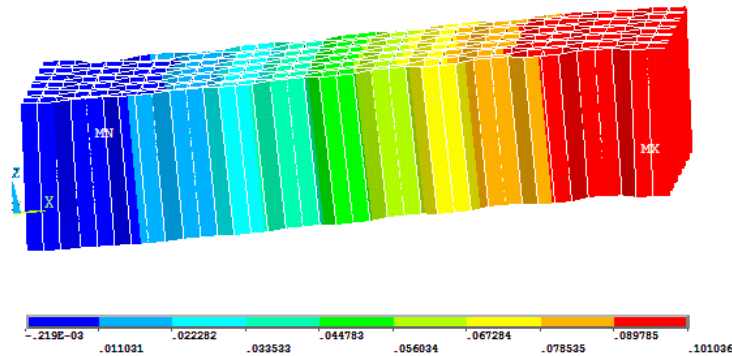


Figure 5-19 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant Z.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	<b><math>\Delta l_3</math> (mm)</b>	<b>0,1</b>
	<b><math>\gamma_{31}</math></b>	<b>0,0018</b>
	<b><math>F_3</math> (N)</b>	<b>0,70</b>
	<b><math>\tau_{31}</math> (MPa)</b>	<b>0,0024</b>
<b>ANSYS</b>	<b><math>G_{31}</math> (MPa)</b>	<b>1,273</b>

Tableau 5.7 - Résultats cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant Z.

V.6.6. Module de cisaillement  $G_{23}$  et  $G_{32}$

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan YZ (un déplacement imposé suivant la direction Y)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction Y, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-h et Fig. 4.12.

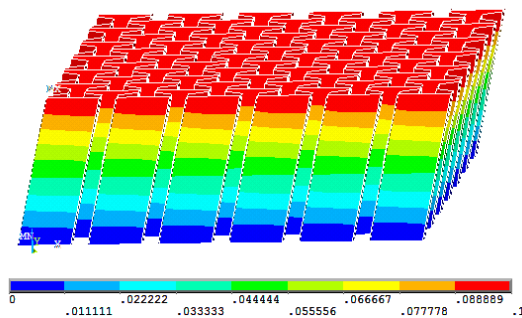


Figure 5-20 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Y

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_2$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\gamma_{23}$	<b>0,01136</b>
	$F_2$ (N)	<b>6 642,20</b>
	$\tau_{23}$ (MPa)	<b>3,634</b>
<b>ANSYS</b>	$G_{23}$ (MPa)	<b>319,808</b>

Tableau 5.8 - Résultats cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Y.

➤ **Résultats de cisaillement dans le plan ZY (un déplacement imposé suivant la direction Z)**

Pour un déplacement imposé suivant la direction Z, nous obtenons pour le V.E.R du nid d'abeille la déformation représentée par Fig. 4.4-i et Fig. 4.13

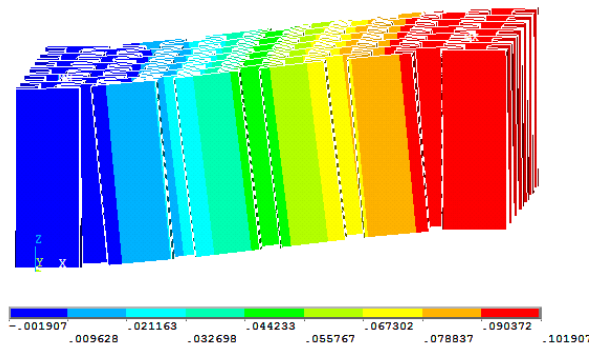


Figure 5-21 - VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan ZY pour un déplacement suivant Z.

	<b>t=0.075 mm</b>	
	$\Delta l_3$ (mm)	<b>0,1</b>
	$\gamma_{32}$	<b>0,0030</b>
	$F_3$ (N)	<b>4,0750</b>
	$\tau_{32}$ (MPa)	<b>0,0086</b>
<b>ANSYS</b>	$G_{32}$ (MPa)	<b>2,8928</b>

Tableau 5.9 - Résultats cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Z.

Le résumé de l'ensemble des simulations effectuées pour la détermination des caractéristiques du nid d'abeille auxétique est présenté dans le tableau 5.10

Propriétés élastiques	Ansys	Réf. [18]	Erreur %
<b>E<sub>1</sub> (MPa)</b>	8,221	8,701	2
<b>E<sub>2</sub> (MPa)</b>	3,250	2,300	7
<b>E<sub>3</sub> (MPa)</b>	914,329		
<b>ϑ<sub>12</sub></b>	-1,489	-1,464	17
<b>ϑ<sub>21</sub></b>	-0,390	-0,683	19
<b>ϑ<sub>13</sub></b>	0,0011		
<b>ϑ<sub>31</sub></b>	0,0228		
<b>ϑ<sub>23</sub></b>	0.0230		
<b>ϑ<sub>32</sub></b>	0,104		
<b>G<sub>12</sub> (MPa)</b>	1,354		
<b>G<sub>21</sub> (MPa)</b>	0,125		
<b>G<sub>13</sub> (MPa)</b>	608,108		
<b>G<sub>31</sub> (MPa)</b>	1,273		
<b>G<sub>23</sub> (MPa)</b>	319,808		
<b>G<sub>32</sub> (MPa)</b>	2,893		

Tableau 5.10 - Caractéristiques du nid d'abeilles auxétique obtenues par ANSYS.



### V.6.7. Simulation numérique de la flexion quatre points

Pour des raisons de symétrie, le modèle de base est constitué d'un demi de la plaque.

Les conditions aux limites appliquées sont:

- au niveau de l'appui : fixation de la translation  $U_z$ ,
- au niveau de la symétrie sur la face 1 : fixation  $U_x$  et des rotations  $\theta_y$  et  $\theta_z$ ,

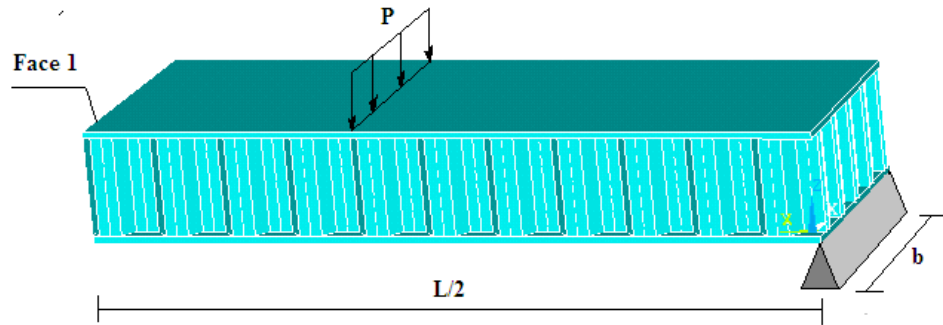


Figure 5-22 - Modélisation de la flexion 4 points sur Ansys.

Le matériau sandwich est constitué:

- de deux peaux en aluminium 5056 ;
- une âme en nid d'abeille Auxétique en aluminium 5056.

Les caractéristiques mécaniques de la peau sont :

$$E_s = 70 \text{ GPa}, \quad G_s = 26,677 \text{ GPa}, \quad \nu_s = 0,312$$

Les propriétés mécaniques homogénéisées de l'âme en nid d'abeille auxétique sont:

$$\begin{array}{lll} E_1 = 8,221 \text{ MPa} & \nu_{12} = -1,489 & G_{12} = 1,354 \text{ MPa} \\ E_2 = 3,250 \text{ MPa} & \nu_{23} = 0,023 & G_{23} = 319,808 \text{ MPa} \\ E_3 = 914,329 \text{ MPa} & \nu_{13} = 0,0011 & G_{13} = 608,108 \text{ MPa} \end{array}$$

Car logiciel Ansys n'accepte pas la valeur négative du coefficient de poisson, nous créons un modèle de base exacte constitué d'une âme de dimensions et géométrie réelle (Fig.6.14)

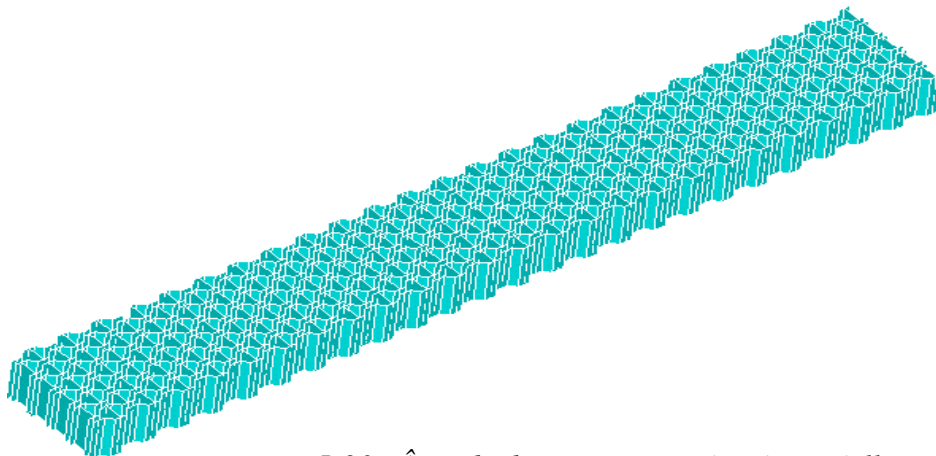


Figure 5-23- Âme de dimensions et géométrie réelle.

### V.6.8. Résultats

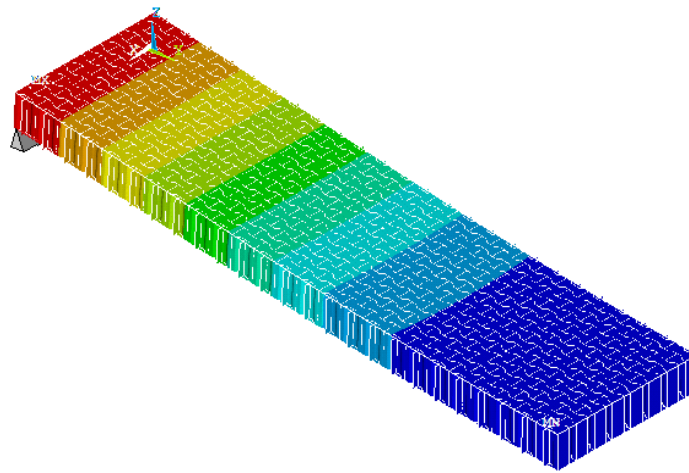


Figure 5.24 Plaque déformée sous chargement

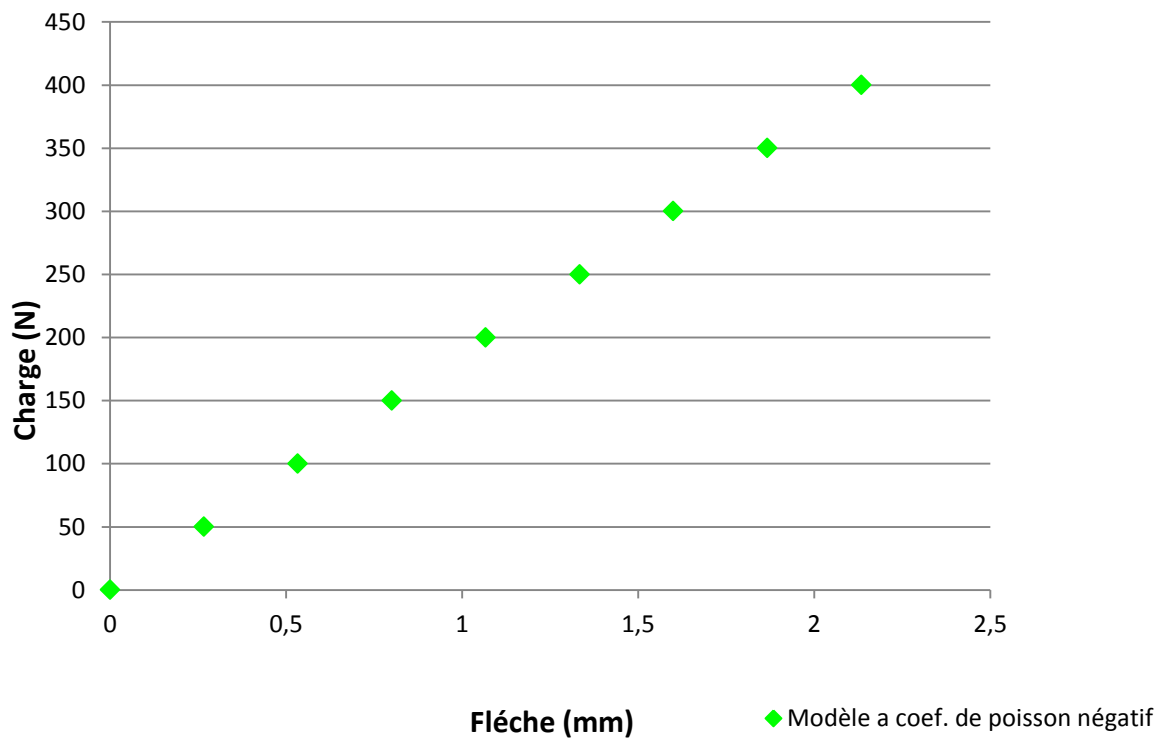


Figure 5.25 Résultats de la simulation numérique (cellules auxétique)

La Fig. 6.16 reporte les résultats de la simulation numérique de la flexion quatre points, elle représente l'évolution de la flèche  $\delta$  en fonction de la charge appliquée  $P$  pour une structure nid d'abeilles à des cellules auxétique, sollicitées en flexion 4-points pour  $L = 300$  mm

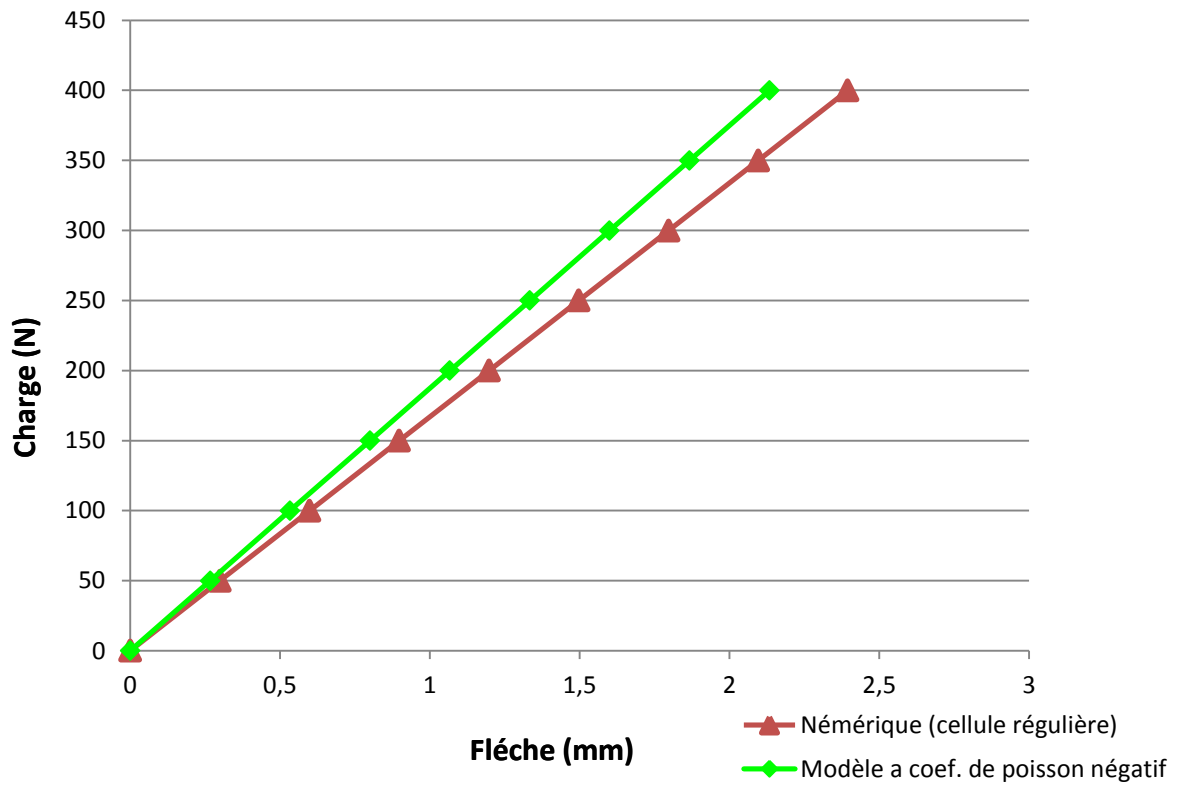


Figure 5.26 Comparaison numérique entre Nida auxétique et Nida régulier

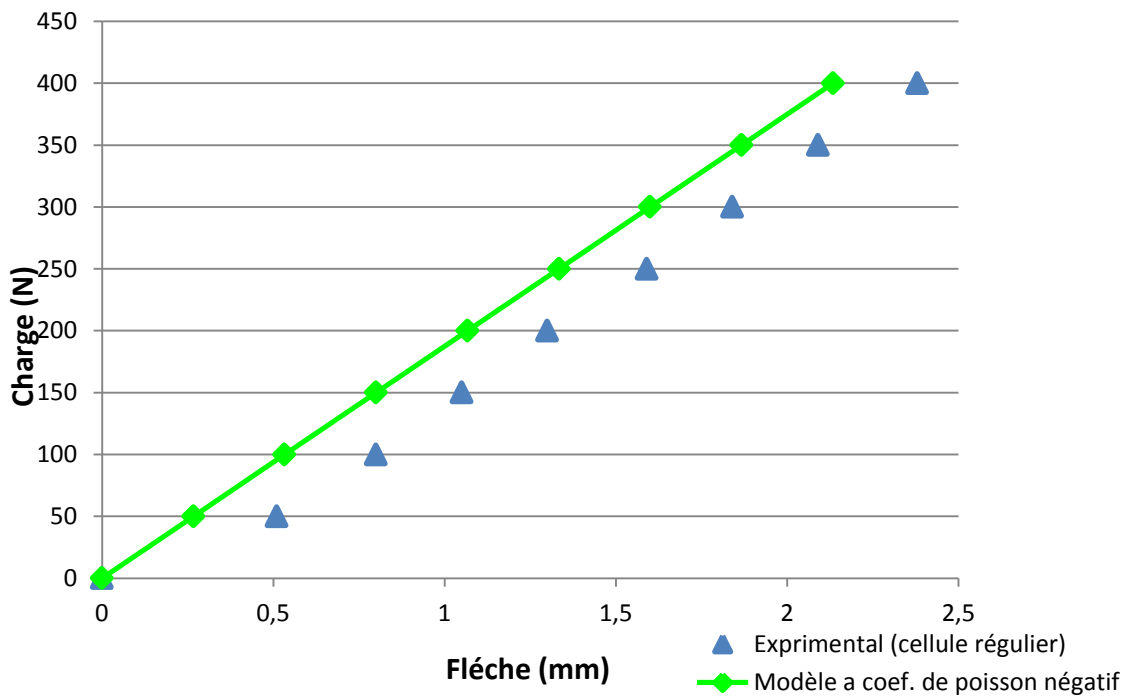


Figure 5.27 Comparaison entre l'expérimental du Nida régulier et numérique du Nida auxétique

Sur les Fig. 6.17 à 6.18 sont illustrées les comparaisons entre résultats de la simulation numérique de Nida auxétique et expérimentaux de Nida régulière (Fig. 6.17), aussi la comparaison entre les résultats de la simulation numérique de Nida auxétique et la simulation numérique de Nida régulière (Fig. 6.18). Elles représentent la flèche en fonction de la charge appliquée. Nous constatons un écart significatif entre les deux modèles. On note aussi que les résultats obtenus par la simulation numérique de la flexion 4 points pour la nouvelle conception de nid d'abeille sont prouvés une rigidité plus importante que ceux obtenus par la simulation numérique pour Nida régulier ainsi que les résultats expérimentaux.

### V.7. Conclusion :

L'homogénéisation numérique des propriétés élastiques (modules d'Young, modules de cisaillement et coefficient de Poisson) d'une nouvelle conception de nids d'abeilles auxétique c'est l'objectif principal de cette partie. En utilisant les modélisations analytiques (existantes) et numériques pour cette nouvelle géométrie.

Ce chapitre montre que la densité relative des structures en nid d'abeille auxétique varie avec différents paramètres géométriques comme l'épaisseur de la paroi, forme de la cellule, le diamètre de la cellule; ainsi que l'orientation des parois inclinées est influencée de manière significative à la densité relative des structures en nid d'abeille.

La comparaison des résultats du modèle analytique proposé par [18] avec ceux obtenus par simulation numérique permet de mieux cadrer les valeurs des modules élastiques dans le plan. On peut constater que la détermination du module d'Young  $E_1$  par les deux méthodes analytique et numérique est acceptable, car l'écart entre le modèle de [18] et la simulation numérique atteint 2% pour  $E_1$  et 7 % pour  $E_2$ . Par contre l'erreur sur les coefficients de Poisson est un peu important pour  $\nu_{12}$  (17%) et 19% pour  $\nu_{21}$ . Pour ce qui concerne le reste des modules, sont obtenus uniquement par simulation numérique.

L'analyse des résultats en flexion quatre points permet de cerner le comportement sous chargement statique des sandwichs en nid d'abeille auxétique en aluminium. Nous constatons que la nouvelle conception de la cellule donne une rigidité en flexion plus importante que celle obtenue par la flexion des sandwichs en Nida régulier.

# CONCLUSION GENERALE

## Conclusion générale

Le travail présenté dans ce mémoire avait pour objectif l'étude du comportement en statique des matériaux sandwichs ont des âmes en nid d'abeilles, nous nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau sandwich. Dans une première partie, nous avons présenté les principales propriétés mécaniques des structures sandwichs, les différents modèles permettant de décrire leur comportement en flexion, les différents modes d'endommagements, ainsi que les différentes approches existantes dans la littérature utilisées pour l'homogénéisation des structures en nid d'abeille.

La deuxième partie de ce travail a été consacrée à la connaissance des caractéristiques mécaniques pour la compréhension des matériaux sandwichs, cette étude a permis de déterminer les constantes élastiques des matériaux constituant le sandwich par la méthode d'homogénéisation. En utilisant les modélisations analytiques et numériques pour le nid d'abeille.

La comparaison des résultats du modèle analytique (Gibson) avec ceux obtenus par simulation numérique permet de mieux cadrer les valeurs des modules élastiques. On peut constater que la détermination des modules d'Young  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$  par les deux méthodes analytique et numérique est acceptable, car l'écart entre le modèle de Gibson et la simulation numérique atteint 5,6 % pour  $E_1$ , 12 % pour  $E_2$  et 6 % pour  $E_3$ . Par contre l'erreur sur les coefficients de Poisson est toujours très faible.

Pour ce qui concerne le module de cisaillement  $G_{12}$ , l'écart entre simulations ANSYS et Gibson est d'environ 7 %. Cette erreur cependant un module de faible valeur donc peu important dans les propriétés mécaniques des sandwichs. Les modules de cisaillements  $G_{21}$ ,  $G_{31}$  et  $G_{32}$  sont obtenus uniquement par la simulation numérique.

L'analyse des résultats en flexion trois et quatre points permet de cerner le comportement sous chargement statique des sandwichs en nid d'abeille en aluminium. Nous constatons un léger écart entre la simulation numérique et l'expérience.

La dernière partie de ce travail a été consacrée à l'homogénéisation numérique des propriétés élastiques (modules d'Young, modules de cisaillement et coefficient de Poisson) d'une nouvelle conception de nids d'abeilles auxétique proposée par [18], c'est l'objectif principal de cette partie. En utilisant les modélisations analytiques (existantes) et numériques pour cette nouvelle géométrie.

Cette partie montre que la densité relative des structures en nid d'abeille auxétique varie avec différents paramètres géométriques comme l'épaisseur de la paroi, forme de la cellule, le diamètre de la cellule; ainsi que l'orientation des parois inclinées est influencée de manière significative à la densité relative des structures en nid d'abeille.

La comparaison des résultats du modèle analytique proposé par [18] avec ceux obtenus par simulation numérique permet de mieux cadrer les valeurs des modules élastiques dans le plan. On peut constater que la détermination du module d'Young  $E_1$  par les deux méthodes analytique et numérique est acceptable, car l'écart entre le modèle de [18] et la simulation numérique atteint 2% pour  $E_1$  et 7 % pour  $E_2$ . Par contre l'erreur sur les coefficients de Poisson est un peu important pour  $\nu_{12}$  (17%) et 19% pour  $\nu_{21}$ . Pour ce qui concerne le reste des modules, sont obtenus uniquement par simulation numérique.

L'analyse des résultats en flexion quatre points permet de cerner le comportement sous chargement statique des sandwichs en nid d'abeille auxétique en aluminium. Nous constatons que la nouvelle conception de la cellule donne une rigidité en flexion plus importante que celle obtenue par la flexion des sandwichs en Nida régulier.

# ANNEXE



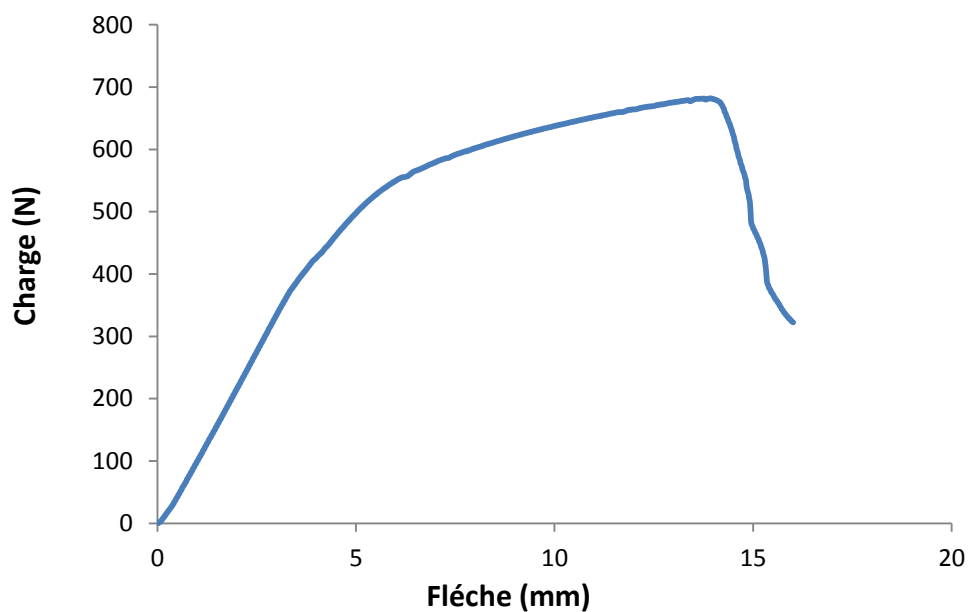
**EXPERIMENTAL : FLEXION TROIS POINTS**

Figure 1 : Evolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant X)

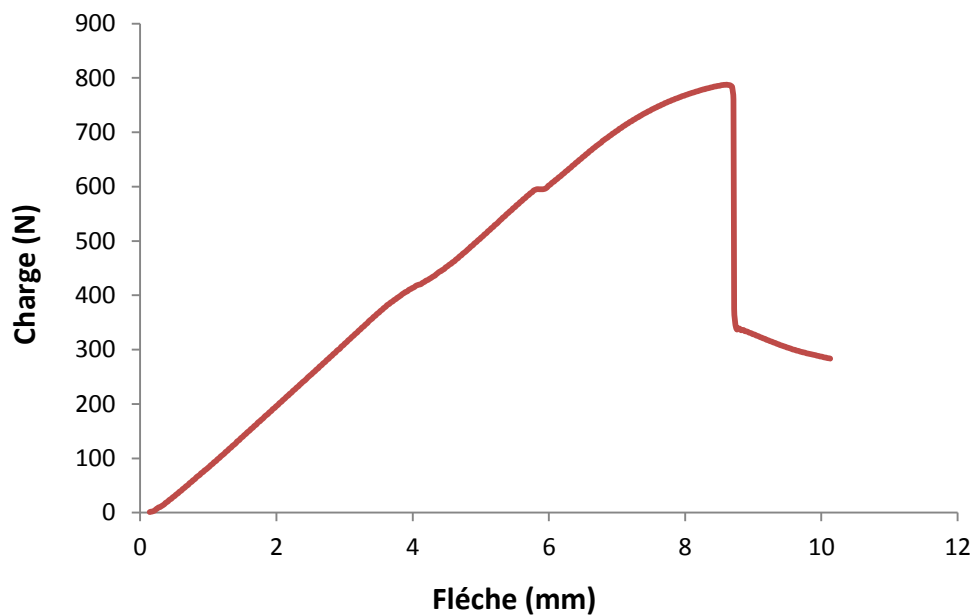


Figure 2: Evolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant Y)

## EXPERIMENTAL : FLEXION QUATRE POINTS

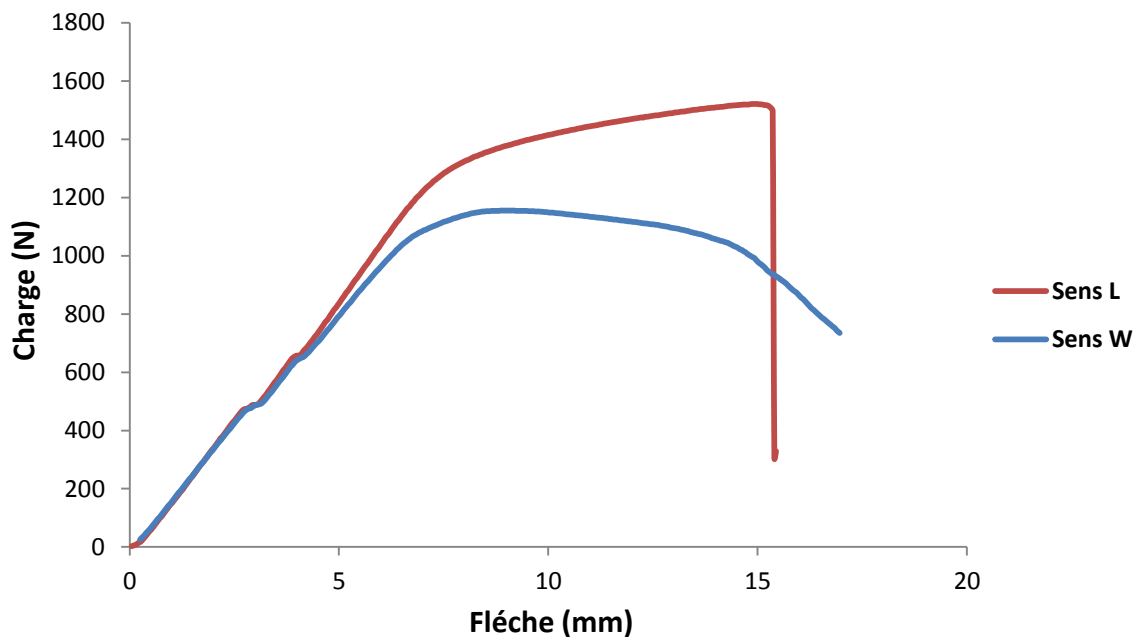


Figure 3 : Evolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant X et Y)

### Présentation du code de calcul ANSYS 13

ANSYS est un code éléments finis d'usage général dédié à la résolution numérique d'une large variété de problèmes physique en général et de mécanique en particulier. Ces problèmes portent notamment : **analyse structurale en statique** et en **dynamique (linéaire et non linéaire)**, transfert de chaleur, **dynamique des fluides**, acoustique, électromagnétique.

De façon générale, une résolution par éléments finis comporte trois étapes :

1. **Préparation des données ou Pré-processing: définir le problème;** les étapes majeurs sont données ci-dessous:
  - Définition des points clés (keypoints) /lignes/surfaces/volumes ;
  - Définir le type d'élément fini, ses propriétés géométriques et les propriétés physiques des matériaux ;
  - Maillage des lignes /surfaces/volume si cela est requis.

Les données nécessaires dépendent évidemment de la de la dimension du problème. (i.e.1D, 2D, axisymétrique, 3D).

2. **Traitement ou Processing: assigner les charges, contraintes (conditions aux limites) et résolution;** on spécifie notamment la nature des charges (localisées et/ou

distribuées), contraintes ou conditions aux limites (translation et rotation) et, finalement, on résout le système d'équations.

3. **Post-processing: analyse et visualisation des résultats;** lors de cette étape, on peut examiner:

- La liste des déplacements nodaux ;
- Les forces et des moments au niveau des éléments;
- Tracé des Déformées
- Tracé des Iso contours des contraintes

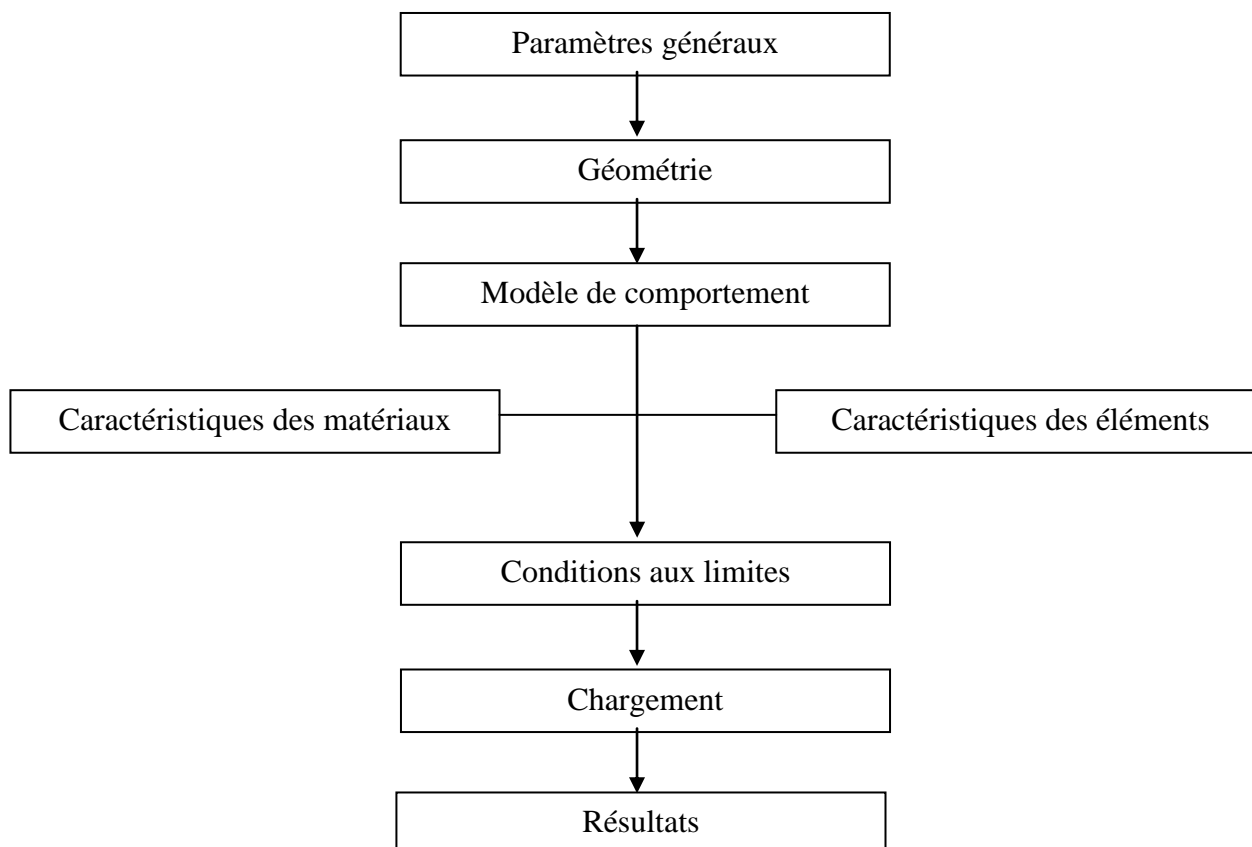


Figure 4 : Organigramme général de calcul Ansys

**MACROS ANSYS 13**• **Structure en nid d'abeille régulière**

!!!Calcul de E1 dans La direction 1

FINISH

/CLEAR

! \*\* Données mécanique et de maillage de la structure \*\* !

\*AFUN,DEG

tail=6.4

RT=0.075

! epaisseur des parois du nida

E0=70000

! module de young de materiau de base

nomb=6

! nombre de cellules

ray=3.695

! longueur de cote

ang=60

! angle de calcul (structure hexagonale)

haut=4.4

! epaisseur du nid d'abeille

long=tail\*((2\*nomb-1)/(2\*sin(ang))+ nomb/tan(ang)) ! longueur de la plaque

lar=tail\*(nomb+0.5)

! largeur de la plaque

/prep7

/TITLE, Honeycomb mechanical properties

ET,1,SHELL63 !element shell 63

R,1,RT,RT,RT,RT, , ,

mp,ex ,1,70000

mp,nuxy,1,0.312

mp,dens,1,26400

\*AFUN,DEG

!creation de points cle constituant la structure 12.00311210

\*do,j,1,nomb

k,1+4\*(j-1),2\*ray\*(1+cos(ang))\*(j-1),0,0 ! ang in deg

k,2+4\*(j-1),ray\*cos(ang)+2\*ray\*(1+cos(ang))\*(j-1),ray\*sin(ang),0

k,3+4\*(j-1),ray\*cos(ang)+ray+2\*ray\*(1+cos(ang))\*(j-1),ray\*sin(ang),0

k,4+4\*(j-1),2\*ray\*cos(ang)+ray+2\*ray\*(1+cos(ang))\*(j-1),0,0

\*enddo

KSEL,S,KP,,1,4\*nomb

KGEN,nomb+1,1,4\*nomb,1,0,2\*ray\*sin(ang),0,,0

!creation de lignes principales

\*do,j,1,(nomb+1)

\*do,i,4\*nomb\*j-(4\*nomb-1),4\*nomb\*j-1

l,i,i+1

\*enddo

\*enddo

!creation de lignes secondaires

```
*do,j,1,(nomb**2)
l,2+4*(j-1),2+4*(j-1)+4*nomb-1
l,2+4*(j-1)+1,2+4*(j-1)+4*nomb+2
*enddo
```

!creation de points cle et lignes pour extrusion horizontale

```
*do,j,1,(nomb+1)
k,4*nomb*(nomb+1)+j,0,(2*j-2)*ray*sin(ang),haut
l,4*nomb*j-(4*nomb-1),4*nomb*(nomb+1)+j
*enddo
```

!creation de points cle et lignes pour extrusion verticale

```
*do,i,1,nomb
*do,j,1,nomb
k,4*nomb*(nomb+1)+(nomb+1)+2*(j-1)+2*nomb*(i-1)+1,ray*cos(ang)+2*ray*(1+cos(ang))*(j-1),ray*sin(ang)+(2*i-2)*ray*sin(ang),haut
k,4*nomb*(nomb+1)+(nomb+1)+2*(j-1)+2*nomb*(i-1)+2,ray*cos(ang)+ray+2*ray*(1+cos(ang))*(j-1),ray*sin(ang)+(2*i-2)*ray*sin(ang),haut
l,2+4*(j-1)+4*nomb*(i-1),4*nomb*(nomb+1)+(nomb+1)+2*(j-1)+2*nomb*(i-1)+1
l,3+4*(j-1)+4*nomb*(i-1),4*nomb*(nomb+1)+(nomb+1)+2*(j-1)+2*nomb*(i-1)+2
*enddo
*enddo
```

!extrusion verticale

```
*do,j,1,2*nomb*nomb
ADRAG,(4*nomb-1)*(nomb+1)+j ,,,,,,(4*nomb-1)*(nomb+1)+2*nomb*nomb+j
*enddo
```

!extrusion horizontale

```
*do,j,1,(nomb+1)
LSEL,S,LINE,,4*nomb*j-(4*nomb-2)-j,4*nomb*j-j
ADRAG,all,,,,,(4*nomb-1)*(nomb+1)+2*nomb*nomb+j
*enddo
```

!maillage

!Cette partie traite du maillage de la structure de la structure en nidab.

!cohesion

```
ASEL,all
AGLUE,all
```

ARSYM,Z,all, , , 0,0

```
ASEL,all
AGLUE,all
```

```
ASEL,all
ESIZE,ray/4
AMESH,all
```

- **Structure en nid d'abeille auxétique**

!!!Calcul de E1 dans La direction 1

FINISH  
/CLEAR

! \*\* Données mécanique et de maillage de la structure \*\* !

```
*AFUN,DEG          ! charge (N)
tail=6.4
RT=0.075           ! epaisseur des parois du nida
E0=70000           ! module de young de materiau de base
a=1                ! longueur de la paroi de base
b=3.695
ht=6.01            ! langedeur de cellule
d=(ht/2)-(2*a)
ang=43             ! angle de calcul (structure hexagonale)
haut=4.4           ! epaisseur du nid d'abeille
long=9
lar=6
/UNITS,MPA ! Units are in mm, MPa, and Newtons
/prep7
/TITLE, Honeycomb mechanical properties
```

```
ET,1,SHELL63      !element shell 63
R,1,RT,RT,RT,RT, , ,
mp,ex ,1,70000
mp,nuxy,1,0.312
mp,dens,1,26270
```

```
! keypoint
!***!'ame
```

```
k,1,0,0,0        !keypoints
k,2,0,a,0
k,3,d*sin(ang),a+d,0
k,4,d*sin(ang),ht/2,0
k,5,d*sin(ang),3*a+d,0
k,6,0,ht-a,0
k,7,0,ht,0
k,8,b,ht,0
k,9,b,ht-a,0
k,10,b-(d*sin(ang)),3*a+d,0
k,11,b-(d*sin(ang)),ht/2,0
k,12,b-(d*sin(ang)),a+d,0
```

k,13,b,a,0  
 k,14,b,0,0  
 k,15,-(b/2-(d\*sin(ang))),ht/2,0  
 k,16,b+(b/2-(d\*sin(ang))),ht/2,0

!lignes

l,1,2,1  
 l,2,3,3  
 l,3,4,1  
 l,4,5,1  
 l,5,6,3  
 l,6,7,1  
 l,7,8,4  
 l,8,9,1  
 l,9,10,3  
 l,10,11,1  
 l,11,12,1  
 l,12,13,3  
 l,13,14,1  
 l,14,1,4  
 l,4,15,2  
 l,11,16,2

!creation de points cle et lignes pour extrusion verticale

k,17,0,0,haut !keypoints  
 k,18,0,a,haut  
 k,19,d\*sin(ang),a+d,haut  
 k,20,d\*sin(ang),ht/2,haut  
 k,21,d\*sin(ang),3\*a+d,haut  
 k,22,0,ht-a,haut  
 k,23,0,ht,haut  
 k,24,b,ht,haut  
 k,25,b,ht-a,haut  
 k,26,b-(d\*sin(ang)),3\*a+d,haut  
 k,27,b-(d\*sin(ang)),ht/2,haut  
 k,28,b-(d\*sin(ang)),a+d,haut  
 k,29,b,a,haut  
 k,30,b,0,haut  
 k,31,-(b/2-(d\*sin(ang))),ht/2,haut  
 k,32,b+(b/2-(d\*sin(ang))),ht/2,haut

!lignes

l,17,18,1  
 l,18,19,3  
 l,19,20,1

l,20,21,1  
l,21,22,3  
l,22,23,1  
l,23,24,4  
l,24,25,1  
l,25,26,3  
l,26,27,1  
l,27,28,1  
l,28,29,3  
l,29,30,1  
l,30,17,4  
l,20,31,2  
l,27,32,2  
l,1,17,10  
l,2,18,10  
l,3,19,10  
l,4,20,10  
l,5,21,10  
l,6,22,10  
l,7,23,10  
l,8,24,10  
l,9,25,10  
l,10,26,10  
l,11,27,10  
l,12,28,10  
l,13,29,10  
l,14,30,10

a,1,17,30,14  
a,1,17,18,2  
a,2,18,19,3  
a,3,19,20,4  
a,4,20,21,5  
a,5,21,22,6  
a,6,22,23,7  
a,7,23,24,8  
a,8,24,25,9  
a,9,25,26,10  
a,10,26,27,11  
a,11,27,28,12  
a,12,28,29,13  
a,13,29,30,14  
a,15,31,20,4  
a,16,32,27,11



```
AGEN,long,2,16,1,0,ht,0,,0
AGEN,lar,1,(long*15)+1,1,b+(b-2*(d*sin(ang))),0,0,,0
```

```
ASEL,all
AGLUE,all
```

```
!maillage
```

```
ARSYM,Z,all, , , ,0,0
```

```
ASEL,all
```

```
AGLUE,all
```

```
ASEL,all
```

```
ESIZE,ray/4
```

```
AMESH,all
```

- **Fléxion 3 points d'une structure sandwiches en Nida régulière.**

```
!!!Fléxion 3 points
```

```
FINISH
/CLEAR
/prep7
p=400          ! Charge
!l'ame
et,1,45       !solid45: 8-node 3D element
mp,ex,1,1.35  !modulus of elasticity
mp,ey,1,1.35
mp,ez,1,1641
mp,prxy,1,0.9 !poisson ratio
mp,pryz,1,0
mp,prxz,1,0
mp,gxy,1,0.34 !Shear moduli
mp,gyz,1,312.6
mp,gxz,1,468.9
```

```
!les peaux
et,2,45
mp,ex,2,70000
mp,prxy,2,0.312
```

```
k,1,0,0,0     !keypoints
k,2,0,0,0.6
k,3,0,0,9.4
k,4,0,0,10
k,5,0,40,10   !keypoints
k,6,0,40,9.4
k,7,0,40,0.6
k,8,0,40,0
```

```

l,1,2,3      !create lines
l,2,3,20
l,3,4,3
l,4,5,30
l,5,6,3      !create lines
l,6,7,20
l,7,8,3
l,1,8,30
l,2,7,30
l,3,6,30

a,1,2,7,8    !create areas
a,2,3,6,7
a,3,4,5,6

esize,,80
vext,1,3,1,300,0,0

!**** mesh pick ****
vmesh,all

nset,s,loc,x,0,0
nset,r,loc,z,0,0
d,all,ux,0
d,all,uz,0
nset,s,loc,x,300,300
nset,r,loc,z,0,0
d,all,uz,0
nset,s,loc,z,0,0
d,all,uy,0
nset,s,loc,x,150,150
nset,r,loc,z,10,10
nset,r,loc,y,0,0
f,all,fz,-p/3
nset,s,loc,x,150,150
nset,r,loc,z,10,10
nset,r,loc,y,20,20
f,all,fz,-p/3
nset,s,loc,x,150,150
nset,r,loc,z,10,10
nset,r,loc,y,40,40
f,all,fz,-p/3

nset,all
fini

/solu
solve
fini

/POST1 ! POSTPROCESS
PLNSOL,u,z,0,,,

```

- **Fkexion 4 points d'une structure sandwiches en Nida régulière.**

!!!flexion 4 points

```
FINISH
/CLEAR
/prep7
p=350
!!'ame
et,1,45      !solid45: 8-node 3D element
mp,ex,1,1.35  !modulus of elasticity
mp,ey,1,1.35
mp,ez,1,1641
mp,prxy,1,0.9  !poisson ratio
mp,pryz,1,0
mp,prxz,1,0
mp,gxy,1,0.34  !Shear moduli
mp,gyz,1,312.6
mp,gxz,1,468.9
```

```
!les peaux
et,2,45
mp,ex,2,70000
mp,prxy,2,0.312
```

```
k,1,0,0,0      !keypoints
k,2,0,0,0.6
k,3,0,0,9.4
k,4,0,0,10
k,5,0,40,10    !keypoints
k,6,0,40,9.4
k,7,0,40,0.6
k,8,0,40,0
```

```
l,1,2,3        !create lines
l,2,3,20
l,3,4,3
l,4,5,30
l,5,6,3        !create lines
l,6,7,20
l,7,8,3
l,1,8,30
l,2,7,30
l,3,6,30
```

```
a,1,2,7,8      !create areas
a,2,3,6,7
a,3,4,5,6
```

```
esize,,80
vext,1,3,1,300,0,0
```

```
!**** mesh pick ****
vmesh,all
```

```
nsel,s,loc,x,0,0
nsel,r,loc,z,0,0
d,all,ux,0
d,all,uz,0
nsel,s,loc,x,300,300
nsel,r,loc,z,0,0
d,all,uz,0
```

```
nsel,s,loc,z,0,0
d,all,uy,0
```

```
nsel,s,loc,x,90,90
nsel,r,loc,z,10,10
nsel,r,loc,y,0,0
f,all,fz,-p/6
```

```
nsel,s,loc,x,90,90
nsel,r,loc,z,10,10
nsel,r,loc,y,20,20
f,all,fz,-p/6
```

```
nsel,s,loc,x,90,90
nsel,r,loc,z,10,10
nsel,r,loc,y,40,40
f,all,fz,-p/6
```

```
nsel,s,loc,x,210,210
nsel,r,loc,z,10,10
nsel,r,loc,y,0,0
f,all,fz,-p/6
```

```
nsel,s,loc,x,210,210
nsel,r,loc,z,10,10
nsel,r,loc,y,20,20
f,all,fz,-p/6
```

```
nsel,s,loc,x,210,210
nsel,r,loc,z,10,10
nsel,r,loc,y,40,40
f,all,fz,-p/6
```

```
nsel,all
fini
```

```
/solu
solve
fini
```

```
/POST1 ! POSTPROCESS
PLNSOL,u,z,0,,,
```

- **Fkexion 4 points d'une structure sandwiches en Nida Auxetique.**

```

!!!Flexion 4 points _ Auxetique

FINISH
/CLEAR

! ** Données mécanique et de maillage de la structure ** !
*AFUN,DEG
p=350                ! charge (N)
tail=5.54
RT=0.075             ! epaisseur des parois du nida
RP=0.6
E0=70000            ! module de young de materiau de base
a=1                  ! longueur de la paroi de base
b=3.2
ht=6.01
d=(ht/2)-(2*a)
ang=43              ! angle de calcul (structure hexagonale)
haut=9.4            ! epaisseur du nid d'abeille
long=25
lar=8

/prep7

/TITLE, Honeycomb mechanical properties

ET,1,SHELL63  !element shell 63
R,1,RT,RT,RT,RT, , ,
mp,ex ,1,70000
mp,nuxy,1,0.312
mp,dens,1,26270

ET,2,SHELL63  !element shell 63
R,2,RP,RP,RP,RP, , ,
mp,ex ,2,70000
mp,nuxy,2,0.312
mp,dens,2,26270

! keypoin
!***!ame

k,1,0,0,0          !keypoints
k,2,0,a,0
k,3,d*sin(ang),a+d,0
k,4,d*sin(ang),ht/2,0
k,5,d*sin(ang),3*a+d,0
k,6,0,ht-a,0
k,7,0,ht,0
k,8,b,ht,0
k,9,b,ht-a,0
k,10,b-(d*sin(ang)),3*a+d,0
k,11,b-(d*sin(ang)),ht/2,0

```

k,12,b-(d\*sin(ang)),a+d,0  
 k,13,b,a,0  
 k,14,b,0,0  
 k,15,-(b/2-(d\*sin(ang))),ht/2,0  
 k,16,b+(b/2-(d\*sin(ang))),ht/2,0

!lignes

l,1,2,1  
 l,2,3,3  
 l,3,4,1  
 l,4,5,1  
 l,5,6,3  
 l,6,7,1  
 l,7,8,4  
 l,8,9,1  
 l,9,10,3  
 l,10,11,1  
 l,11,12,1  
 l,12,13,3  
 l,13,14,1  
 l,14,1,4  
 l,4,15,2  
 l,11,16,2

!creation de points cle et lignes pour extrusion verticale

k,17,0,0,haut !keypoints  
 k,18,0,a,haut  
 k,19,d\*sin(ang),a+d,haut  
 k,20,d\*sin(ang),ht/2,haut  
 k,21,d\*sin(ang),3\*a+d,haut  
 k,22,0,ht-a,haut  
 k,23,0,ht,haut  
 k,24,b,ht,haut  
 k,25,b,ht-a,haut  
 k,26,b-(d\*sin(ang)),3\*a+d,haut  
 k,27,b-(d\*sin(ang)),ht/2,haut  
 k,28,b-(d\*sin(ang)),a+d,haut  
 k,29,b,a,haut  
 k,30,b,0,haut  
 k,31,-(b/2-(d\*sin(ang))),ht/2,haut  
 k,32,b+(b/2-(d\*sin(ang))),ht/2,haut

!lignes

l,17,18,1  
 l,18,19,3  
 l,19,20,1  
 l,20,21,1  
 l,21,22,3  
 l,22,23,1  
 l,23,24,4  
 l,24,25,1  
 l,25,26,3

l,26,27,1  
 l,27,28,1  
 l,28,29,3  
 l,29,30,1  
 l,30,17,4  
 l,20,31,2  
 l,27,32,2

l,1,17,10  
 l,2,18,10  
 l,3,19,10  
 l,4,20,10  
 l,5,21,10  
 l,6,22,10  
 l,7,23,10  
 l,8,24,10  
 l,9,25,10  
 l,10,26,10  
 l,11,27,10  
 l,12,28,10  
 l,13,29,10  
 l,14,30,10

a,1,17,30,14  
 a,1,17,18,2  
 a,2,18,19,3  
 a,3,19,20,4  
 a,4,20,21,5  
 a,5,21,22,6  
 a,6,22,23,7  
 a,7,23,24,8  
 a,8,24,25,9  
 a,9,25,26,10  
 a,10,26,27,11  
 a,11,27,28,12  
 a,12,28,29,13  
 a,13,29,30,14  
 a,15,31,20,4  
 a,16,32,27,11

AGEN,lar,1,16,1,b+(b-2\*(d\*sin(ang))),0,0,,0

AGEN,long,1,lar\*16,1,0,ht,0,,0

RECTNG,0,(lar\*(b+(b-2\*(d\*sin(ang)))))-(b-2\*(d\*sin(ang))),0,long\*ht

AGEN,2,(16\*lar\*long)+1,(16\*lar\*long)+1,1,0,0,haut,,0

AOVLAP,all

|\*\*\*\*\*

ASEL,all

AGLUE,all

```
!***** mesh attribtte ****
```

```
ASEL,all
ESIZE,ray/4
AMESH,all
```

```
! chargement
```

```
nset,s,loc,y,0,0
nset,r,loc,z,0,0
d,all,ux,0
d,all,uy,0
d,all,uz,0
nset,s,loc,y,long*ht,long*ht
d,all,ux,0
d,all,uy,0
d,all,rotx,0
d,all,roty,0
d,all,rotz,0
```

```
nset,s,loc,y,90,90
nset,r,loc,z,haut,haut
nset,r,loc,x,0,0
f,all,fz,-p/10
```

```
nset,s,loc,y,90,90
nset,r,loc,z,haut,haut
nset,r,loc,x,((lar*(b+(b-2*(d*sin(ang)))))-(b-2*(d*sin(ang))))/4,((lar*(b+(b-2*(d*sin(ang)))))-(b-2*(d*sin(ang))))/4
```

```
f,all,fz,-p/10
```

```
nset,s,loc,y,90,90
```

```
nset,r,loc,z,haut,haut
```

```
nset,r,loc,x,2*(((lar*(b+(b-2*(d*sin(ang)))))-(b-2*(d*sin(ang))))/4,2*(((lar*(b+(b-2*(d*sin(ang)))))-(b-2*(d*sin(ang))))/4
```

```
f,all,fz,-p/10
```

```
nset,s,loc,y,90,90
```

```
nset,r,loc,z,haut,haut
```

```
nset,r,loc,x,3*(((lar*(b+(b-2*(d*sin(ang)))))-(b-2*(d*sin(ang))))/4,3*(((lar*(b+(b-2*(d*sin(ang)))))-(b-2*(d*sin(ang))))/4
```

```
f,all,fz,-p/10
```

```
nset,s,loc,y,90,90
```

```
nset,r,loc,z,haut,haut
```

```
nset,r,loc,x,(lar*(b+(b-2*(d*sin(ang)))))-(b-2*(d*sin(ang))),((lar*(b+(b-2*(d*sin(ang)))))-(b-2*(d*sin(ang))))
```

```
f,all,fz,-p/10
```

```
nset,all
```

```
fini
```

```
/solu
```

```
solve
```

```
fini
```

```
/POST1 ! POSTPROCESS
```

```
PLNSOL,u,z,0,,,
```



# BIBLIOGRAPHIE

# Bibliographie

- [1] C. Binétruy “Structures sandwichés”, *Techniques de l’Ingénieur*, am5141.
- [2] Petras, A., Sutcliffe, M. P. F., Apr. 1999. Failure mode maps for honeycomb sandwich panels. *Composite Structures* 44 (4), 237–252.
- [3] Rammerstorfer, F. G., Pahr, D. H., Daxner, T., Vonach, W. K., May 2006. Buckling in thin walled micro and meso structures of lightweight materials and material compounds. *Computational Mechanics* 37 (6), 470–478.
- [4] Wierzbicki, T., 1983. Crushing analysis of metal honeycombs. *International Journal of Impact Engineering* 1 (2), 157 – 174.
- [5] Mohr, D., Doyoyo, M., Jun. 2004. Deformation-induced folding systems in thin-walled monolithic hexagonal metallic honeycomb. *International Journal of Solids and Structures* 41 (11-12), 3353 – 3377.+
- [6] J. ARBAOUI, “Etude Comparative Et Caractérisations Mécaniques Des Structures Sandwichs Multicouches” Thèse Doctorat, 2009.
- [7] Timoshenko S. P., “Résistance des matériaux“. Dunod, Paris, Tome 1, 1968.
- [8] Plantema F. J., “Sandwich Construction“. John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [9] Zenkert D., ”An introduction to sandwich constructions”, London, EMAS, 1997.
- [10] J.-M. Berthelot, “Matériaux composites”, TEC&DOC, Paris, 3ème édition, 1999.
- [11] Gibson L. J, Ashby M. F, “Cellular Solids: Structure and Properties”, Pergamon, Oxford 1988.
- [12] Chamis C. C, et al., *Journal of composite technology & research*, vol. 10, 1988.
- [13] Bitzer T. N., “Useful analysis methods for sandwich structures”, Hexcel corporation report-SAMPE symposium California-April, 1994.
- [14] Joël Cugnoni, *Atlas Sct Assembly Finit Element Analysis*, Lausanne, 2001.
- [15] Kelsey S, Gellatly R. A, Clark B. W, *Aircraft engng*, pp. 294-302, 1958.
- [16] Grédiac M., *Int Journal of Solids and Structures*, Vol. 30(13), pp. 1777-1788, 1993.
- [17] Hexcel Composite. HexWeb tm honeycomb sandwich design technology. <http://www.hexcelcomposite.com>, 2012.
- [18] Bezazi A, Scarpa F et Remillat C, « A novel centresymmetric honeycomb composite structure », *Composite Structures*, 71 (2005)
- [19] N. AUFRAY, “Comportement des matériaux cellulaires ; élaboration, caractérisation et modélisation prédictive des propriétés” Thèse Doctorat, 2008.

# Liste des figures

## CHAPITRE I : COMPORTEMENT MECANIQUE DES PANNEAUX SANDWICHS

Figure 1.1 : Comparaison des performances mécaniques en flexion entre un panneau de référence et deux panneaux sandwichs

Figure 1.2.a : Effet de la flexion sur les peaux

Figure 1.2.b : Effet de l'effort tranchant sur l'âme

Figure 1.3 : Structure sandwich à âme Nida et peaux en stratifié

Figure 1.4– Analyse comparée des prix de différents matériaux d'âme (d'après [1])

Figure 1.5. Poutre sandwich chargée dans son plan.

Figure 1.6 Schéma d'un essai de flexion 3 points.

Figure 1.7. Schéma d'un essai de flexion 4 points.

Figure 1.8 Flambement généralisé des peaux du sandwich [1]

Figure 1.9 : Rupture des peaux en traction ou en compression [20]

Figure 1.10 Modes locaux de rupture par indentation [1]

Figure 1.11 Modes locaux de rupture par indentation [1]

Figure 1.12 Flambement généralisé de l'âme du sandwich [1]

Figure 1.13 Flambement localisé « wrinkling » [1]

Figure 1.14 Flambement localisé « wrinkling » [1]

Figure 1.15 Type de dégradation de l'adhésif

## CHAPITRE II : APPROCHES D'HOMOGENEISATIONS ANALYTIQUES

Figure 2.2– Géométrie d'un nid d'abeille

Figure 2.4– Structure en nid d'abeille régulière

Figure 2.3– Structure en nid d'abeille régulière

Figure 2.4 - Déformation des parois des cellules sous une charge dirigée suivant X (b) et Y (c)

Figure 2.5 - Déformation en flexion et en la rotation des parois des cellules

## CHAPITRE III : INFLUENCE DES PARAMETRES GEOMETRIQUES DES CELLULES SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES SANDWICHS EN NID D'ABEILLES

Figure 3.1. Evolution des modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  en fonction de l'épaisseur de la paroi.

Figure 3.2. Evolution des modules d'élasticité  $E_3$  en fonction de l'épaisseur de la paroi.

Figure 3.3 - Evolution du module de cisaillement dans le plan en fonction de l'épaisseur de la paroi.

Figure 3.4 - Evolution du module de cisaillement hors plan en fonction de l'épaisseur de la paroi.

Figure 3.5. Evolution des modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  en fonction du rapport  $h/l$

Figure 3.6. Evolution des modules d'élasticité  $E_3$  en fonction du rapport  $h/l$

Figure 3.7 - Evolution du module de cisaillement  $G_{12}$  en fonction du rapport  $h/l$

- Figure 3.8- Evolution du module de cisaillement  $G_{13}$  et  $G_{23}$  en fonction du rapport  $h/l$
- Figure 3.9 - Evolution des modules d'élasticité  $E_1$  et  $E_2$  en fonction du diamètre de la cellule  $\Phi$
- Figure 3.10 - Evolution du module d'élasticité  $E_3$  en fonction du diamètre de la cellule  $\Phi$
- Figure 3.11 - Evolution du module de cisaillement  $G_{12}$  en fonction du diamètre de la cellule  $\Phi$
- Figure 3.12 - Evolution du module de cisaillement  $G_{13}$  et  $G_{23}$  en fonction du diamètre de la cellule  $\Phi$
- Figure 3.13 - Evolution du module d'élasticité  $E_1$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$
- Figure 3.14 - Evolution du module d'élasticité  $E_2$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$
- Figure 3.15 - Evolution du module d'élasticité  $E_3$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$
- Figure 3.16 - Evolution du coefficient de poisson  $\nu_{12}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$
- Figure 3.17 - Evolution du module de cisaillement  $G_{12}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$
- Figure 3.18 - Evolution du module de cisaillement  $G_{13}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$
- Figure 3.19 - Evolution du module de cisaillement  $G_{23}$  en fonction de l'angle de cellule  $\theta$

## CHAPITRE IV: HOMOGENEISATION NUMERIQUE DES STRUCTURES EN NID D'ABEILLE REGULIERE

- Figure 4.1 volume élémentaire représentatif du nid d'abeille.
- Figure 4.2 Maillage de la cellule du nid d'abeille.
- Figure 4.3 VER en déplacement imposé suivant  $X(a)$ ,  $Y(b)$ ,  $Z(c)$
- Figure 4.4 VER sous sollicitation de cisaillement ( $d - i$ )
- Figure 4.5 VER sous sollicitation de traction suivant l'axe  $X$ .
- Figure 4.6 VER sous sollicitation de traction suivant l'axe  $Y$ .
- Figure 4.7 VER sous sollicitation de traction suivant l'axe  $Z$ .
- Figure 4.8 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan  $XY$  pour un déplacement suivant  $X$ .
- Figure 4.9 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan  $XY$  pour un déplacement suivant  $Y$ .
- Figure 4.10 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan  $XZ$  pour un déplacement suivant  $X$ .
- Figure 4.11 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan  $XZ$  pour un déplacement suivant  $Z$ .
- Figure 4.12 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan  $YZ$  pour un déplacement suivant  $Y$ .
- Figure 4.13 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan  $YZ$  pour un déplacement suivant  $Z$ .
- Figure 4.14 Evolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant  $X$ )
- Figure 4.15 Evolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant  $Y$ )
- Figure 4.16 Evolution de la charge en fonction de flèche (cellules orientent suivant  $X$  et  $Y$ )
- Figure 4.17 Modélisation de la flexion 3 points sur Ansys.
- Figure 4.18 Plaque déformée sous chargement.
- Figure 4.19 Comparaison expérimentale et numérique pour Nida régulière
- Figure 4.20 Modélisation de la flexion 4 points sur Ansys.
- Figure 4.21 Déformée sous chargement.
- Figure 4.22 Comparaison expérimentale et numérique pour Nida régulière

## CHAPITRE V: HOMOGENEISATION NUMERIQUE D'UNE STRUCTURES NID D'ABEILLES À COEFFICIENT DE POISSON NEGATIF.

Figure 5.1 Repère d'étude

Figure 5.2 Géométrie d'un nid d'abeille auxétique

Figure 5.3 Structure en nid d'abeille auxétique

Figure 5.4 Cellule élémentaire d'un nida à topologie hexagonal régulière

Figure 5.5 Cellule élémentaire d'un nida à topologie auxétique

Figure 5.6 Cellule élémentaire d'un nida à topologie auxétique d'origine régulière

Figure 5.7 Evolution de la densité relative en fonction de l'angle de cellule  $\theta$  sous l'effet de : (a) coefficient des parois de la cellule  $\alpha$ , (b) La densité relative d'une cellule nida  $\beta$ , (c) coefficient du paroi de base  $r$

Figure 5.8. Evolution de la densité relative en fonction de l'angle de cellule  $\theta$  sous l'effet du coefficient du paroi de base  $\gamma$

Figure 5.9 Déformation des parois des cellules sous une charge dirigée suivant X (b) et Y (c) [18]

Figure 5.10 volume élémentaire représentatif du nid d'abeille auxétique.

Figure 5.11 Maillage de la cellule du nid d'abeille auxétique.

Figure 5.12 VER en déplacement imposé suivant X(a), Y(b), Z(c)

Figure 5.13 VER sous sollicitation de traction suivant l'axe X

Figure 5.14 VER sous sollicitation de traction suivant l'axe Y.

Figure 5.15 VER sous sollicitation de traction suivant l'axe Z.

Figure 5.16 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant X.

Figure 5.17 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant Y.

Figure 5.18 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant X.

Figure 4-19 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant Z.

Figure 5.20 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Y.

Figure 5.21 VER sous sollicitation de cisaillement dans le plan ZY pour un déplacement suivant Z

Figure 5.22 Modélisation de la flexion 4 points sur Ansys.

Figure 5.23 Ame de dimensions et géométrie réelle.

Figure 5.24 Plaque déformée sous chargement

Figure 5.25 Résultats de la simulation numérique (cellules auxétique)

Figure 5.26 Comparaison numérique pour Nida auxétique et pour Nida régulier

Figure 5.27 Comparaison expérimental pour Nida régulier et numérique pour Nida auxétique

# Liste des tableaux

## CHAPITRE I : COMPORTEMENT MECANIQUE DES PANNEAUX SANDWICHS

Tableau 1.1 Propriétés mécaniques et géométriques du nid d'abeille en aluminium

Tableau 1.2 Propriétés mécaniques et géométriques du nid d'abeille en polyaramide (source Nomex)

## CHAPITRE III : INFLUENCE DES PARAMETRES GEOMETRIQUES DES CELLULES SUR LE COMPORTEMENT MECANIQUE DES SANDWICHS EN NID D'ABEILLES

Tableau 3.1. Paramètres géométriques en fonction des modules d'élasticité.

## CHAPITRE IV: HOMOGENEISATION NUMERIQUE DES STRUCTURES EN NID D'ABEILLE REGULIERE

Tableau 4-1 - Résultats de la traction suivant X

Tableau 4.2 Résultats de la traction suivant Y

Tableau 4.3 Résultats de la traction suivant Z

Tableau 4.4 Résultats cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant X.

Tableau 4.5 Résultats cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant Y.

Tableau 4.6 Résultats cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant X.

Tableau 4.7 Résultats cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant Z.

Tableau 4.8 Résultats cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Y.

Tableau 4.9 Résultats cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Z.

Tableau 4.10 Caractéristiques du nida obtenues par différents modèles

## CHAPITRE V: HOMOGENEISATION NUMERIQUE D'UNE STRUCTURES NID D'ABEILLES À COEFFICIENT DE POISSON NEGATIF.

Tableau 5.1 Résultats de la traction suivant X

Tableau 5.2 Résultats de la traction suivant Y

Tableau 5.3 Résultats de la traction suivant Z

Tableau 5.4 Résultats cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant X.

Tableau 5.5 Résultats cisaillement dans le plan XY pour un déplacement suivant Y.

Tableau 5.6 Résultats cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant X.

Tableau 5.7 Résultats cisaillement dans le plan XZ pour un déplacement suivant Z.

Tableau 5.8 Résultats cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Y.

Tableau 5.9 Résultats cisaillement dans le plan YZ pour un déplacement suivant Z.

Tableau 5.10 Caractéristiques du nid d'abeilles auxétique obtenues par ANSYS.