



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

Republique Algerienne Democratique Et Populaire



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي التبسي - تبسة

Université Larbi tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Civil

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme** de **Master Académique**

En : Génie Civil

Spécialité : Structures

Par : Bakhouche Marwa

Sujet

# L'EFFET DE CISAILLEMENT DANS LES POUTRES ET LES PLAQUES SANDWICH POUR DIFFERENTS TYPES CŒURS.

Présenté et soutenu publiquement, le **22 / 09 / 2020** , devant le jury composé de :

Dr. ABDERRAHMANI.S

Président

Dr ATHAMNIA.I

Examineur 1

Pr. HARKATI El-Haddi

Encadreur

Promotion : 2019/2020

## SOMMAIRE

Dédicace .....	I
Remerciements .....	II
Résumé .....	III
Liste des figures .....	V
Liste des tableaux .....	IX
Notations et Symboles .....	.X
Introduction générale .....	.01
Bibliographie.....	03

## CHAPITRE 01 : Revue de la littérature

1.1. Généralités sur les matériaux composites .....	07
1.1.1. Matrice et renforts .....	07
1.1.1.1. La matrice .....	07
1.1.1.2. Les renforts .....	07
1.1.2 Propriétés des matériaux composites .....	09
1.1.3 Architecture des matériaux composites .....	09
1.1.3.1. Les monocouches .....	09
1.1.3.2. Les stratifiés .....	09
1.1.3.3. Les sandwichs.....	10
1.2. Intérêt des structures composite sandwichs.....	11
1.3. Mécanique des composites sandwichs.....	12
1.3.1. Modes de rupture.....	12
1.4. Classement des théories de déformation en cisaillement.....	13
1.4.1. Théorie classique des plaques minces (CPT).....	13
1.4.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier degré (FSDPT).....	14
1.4.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT).....	16
1.4.3.1. La fonction de forme de la théorie d'ordre supérieure.....	17
1.5. Position du problème et techniques adoptées.....	20
1.6. Conclusion.....	21

## **Chapitre 02 : Comportement élastique et étude théorique des poutres composites sandwichs**

2.1 L'élasticité dans les matériaux composites.....	23
2.1.1 Introduction.....	23
2.1.2 Notation matricielle de l'ingénieur.....	23
2.1.3 Matrice de rigidité.....	23
2.1.4 Matrice de flexibilité (souplesse).....	24
2.1.5 Matériaux anisotropes.....	24
2.1.5.1 Introduction.....	24
2.1.5.2 Matériau monoclinique.....	24
2.1.5.3 Matériau orthotrope.....	25
2.1.5.4 Matériau unidirectionnel.....	25
2.1.6 Matrices de Rigidité et souplesse en fonction des paramètres de l'ingénieur d'un composite orthotrope.....	26
2.2. Relations d'élasticité dans un système d'axes quelconque.....	27
2.2.1 Equations d'élasticité pour un état de contraintes planes.....	28
2.2.2 Constantes de rigidité réduites en dehors des axes principaux.....	28
2.3. Étude théorique des poutres sandwichs.....	29
2.3.1 Introduction.....	29
2.3.2. La théorie adaptée en flexion des poutres sandwichs.....	29
2.3.2.1. Hypothèses de la théorie des plaques sandwichs.....	30
2.3.2.2. Champ de déplacements.....	30
2.3.2.3. Champ des déformations.....	31
2.3.2.4. Champ des contraintes.....	32
2.3.3. Relations fondamentales des plaques sandwichs.....	33
2.3.3.1. Equation constitutive.....	33
2.3.4. Flexion des poutres sandwichs.....	35

2.3.4.1 comportements des sandwichs en flexion 3 et 4 points.....	38
• comportement en flexion 3 points .....	39
• comportement en flexion 4 points .....	40
2.3.5 Cas particulier du nid d'abeille.....	41
2.4. Conclusion.....	42

## **CHAPITRE 03 : L'influence de la séquence d'empilement et le type de Matériau sur la distribution des champs de contraintes de cisaillement des stratifiés croisés**

3.1. Introduction.....	44
3.2 Les stratifiés symétriques.....	44
3.3. Homogénéisation et théorie classique des stratifiés.....	44
3.3.1. Flexion 3-points.....	47
3.4. Matériaux.....	48
3.4.1. Les propriétés intrinsèques des matériaux.....	48
3.4.2. Caractéristiques géométriques des éprouvettes.....	49
3.5. Modélisation par élément finis.....	49
3.5.1. Modèle et éléments utilisés.....	49
3.6 Travail effectué.....	49
3.7. Présentation graphique des stratifiés étudiés.....	50
3.7.1 Le premier stratifié $[(0_2/90_2)_2]_s$ .....	50
3.7.2 Le deuxième stratifié $[(0_2/90_2)_s]_s$ .....	51
3.7.3 Le troisième stratifié $[(0 / 90)_4]_s$ .....	51
3.7.4 Le quatrième stratifié $[0_4 / 90_4]_s$ .....	51
3.8. Résultats et analyses.....	52
3.8.1. Distributions des champs des contraintes de cisaillement $\tau_{xz}$ dans les quatre stratifiés.....	52
3.8.1.1. Le premier matériau : UM Graphite /Epoxy.....	53
3.8.1.2. Le deuxième matériau : E-Glass /Epoxy.....	55
3.9. Conclusions.....	57

## **Chapitre 04 : approche numérique et analytique : de la détermination du module de cisaillement dans les poutres sandwichs**

4.1. Introduction.....	59
ABRÉVIATIONS.....	60
4.2. Effet sandwich.....	60
4.2.1. Distribution des contraintes.....	61
A. Essai de cisaillement à un bloc.....	63
B. Essai de cisaillement à double chevauchement.....	64
C. Essais de flexion en trois et quatre points.....	64
D. Essai de cisaillement du panneau.....	65
E. Essai de cisaillement de torsion.....	65
F. Test de cisaillement d'Arcan.....	65
4.3. Flexion 4 points.....	65
4.3.1. Modèles et éléments utilisés.....	66
4.3.1.1. Caractéristiques mécaniques des poutres.....	66
4.3.1.2. Caractéristiques géométriques des poutres.....	67
4.3.2 Approche analytique.....	68
4.3.3. Modélisation par éléments finis.....	69
➤ Effet de la rigidité $E_c/E_f$ .....	70
➤ Effet de rapport $t_c/t_f$ .....	70
4.3.4. Conclusion.....	72
4.4. La cinématique des différentes approches de définir le cisaillement transverse.....	73
4.5. Homogénéisation Analytique et Modélisation Numérique de nid d'abeilles.....	75
4.5.1. Introduction.....	75
4.5.2. Approches existantes dans la littérature.....	76
4.5.3. Travail effectué.....	77
➤ Géométrie et notations.....	77
➤ Propriétés mécaniques des poutres.....	78

➤ Description du nid d'abeilles Alu-Alu ECM*.....	79
➤ Caractérisation du nid-d'abeilles.....	80
4.6. Approches analytiques.....	80
4.6.1. Calcul de module de rigidité D, le module de cisaillement en flexion N, le module de cisaillement de l'âme Ga et la flèche.....	82
4.6.1.1. Analyse et comparaison entre module de rigidité et modules de cisaillement.....	83
4.6.2. Conclusion.....	84
4.7. Approches numériques.....	84
4.7.1 Principe d'homogénéisation numérique.....	84
4.7.2. Organigramme d'homogénéisation numérique.....	85
4.7.3 Homogénéisation de $G_{xz}$ .....	86
4.7.4 Modèles développés.....	87
4.7.5. Résultats des simulations «4 points ».....	89
➤ Poutre 01.....	90
➤ Poutre 02.....	91
4.7.6. Flexion 4 Point.....	91
• Poutre 01.....	92
• Poutre 02.....	92
4.7.7. Analyse des résultats des différentes simulations.....	93
4.8. Modélisation du comportement de la structure sandwich à base de mousse H100.....	94
4.8.1. Modèles développés.....	94
• Poutre 01.....	94
• Poutre 02.....	94
4.8.2. Résultats des simulations «4 points ».....	95
4.9 Conclusions.....	97
Conclusions & Perspectives.....	100
références.....	101
Annexe A.....	105

# *Remerciements*

En premier temps, je remercie Dieu Allah tout puissant de m'avoir accordé le courage pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer mes vifs remerciements à mon encadreur **Pr.HARKATI El-haddi**, professeur au département de génie civil, faculté des sciences et technologie, université de Tébessa et directeur du laboratoire de mine, pour son aide et ses orientations durant la réalisation de ce travail et sa générosité dont il mon fait preuve.

Je remercie également tous les gens de génie civil, particulièrement nos enseignants, qui nous ont aidés et enrichi nos connaissances, durant les années de notre formations.

Mes remerciements sont également prodigués à **Mr S. ABDERRAHMANI** docteur au département de génie civil, université de Tébessa, et président du jury de soutenance de ce mémoire, ainsi qu'au membre de ce jury **Mr I. ATHAMNIA** : qui m'a fait l'honneur d'accepter d'être le modérateur de ce travail.

Mes vifs remerciements vont aussi aux membres de ma famille pour leur soutien et leur encouragement et qu'ils trouvent ici mes profondes reconnaissances.

*BAKHOUCHE Marwa*

## *Dédicace*

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui, quels que soient les termes embrassés, je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

- A l'homme, mon précieux offre du dieu, qui doit ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père *Mohammed Bakhouche*.
- A la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère *Zina Toillbia*.
- A mes chère sœurs *hanen* et *Madina* et mes frères *Djalal*, *Ali* et *Walid* qui n'ont pas cessée de me conseiller, encourager et soutenir tout au long de mes études. Que dieu les protège et leurs offre la chance et le bonheur.
- A mon adorable petite sœur *Safaa*, qui sait toujours comment procurer la joie et le bonheur pour toute la famille.
- A toi mon grand-mère *Dezair*, ceci est ma profonde gratitude pour ton éternel amour, que ce rapport soit le meilleur cadeau que je puisse t'offrir.
- A mon grand-père, mes oncles et mes tantes. Que dieu leur donne une longue et joyeuse vie.
- A tous les cousins, les voisins et les amis que j'ai connu jusqu'à maintenant. Merci pour leurs amours et leurs encouragements.

*Marwa*



# Résumé

Ce travail de thèse a pour objectif d'analyser le comportement en cisaillement des différents types de sections composites. Une démarche d'analyse numérique a été mise en place pour étudier le comportement mécanique des poutres et plaque constituée par ces matériaux.

Ceci a permis d'une part d'identifier les propriétés élastiques en cisaillement des différents types des composites stratifiés. Une démarche d'analyse numérique sur le comportement en statique linéaire de l'effet de la séquence d'empilement et le type de matériau sur la distribution des champs de contraintes de cisaillement dans l'épaisseur du stratifié, par l'utilisation d'un modèle d'éléments finis (MEF) en utilisant un logiciel ABAQUS, comparés aux résultats obtenus par la théorie classique des stratifiés avec cisaillement transverse. La deuxième partie de ce travail est consacrée à une modélisation de l'effet de cisaillement dans les composites en sandwichs pour différents matériaux d'âmes, ceci a permis d'effectuer une comparaison avec les formulations traditionnelles relatives à des poutres homogènes ou sandwichs à âmes en mousse rigides. Enfin, une conclusion générale a été faite sur la distribution de champs de contrainte de cisaillement dans le cas de poutres sandwich à faible rigidité d'âme comme les nids-d'abeilles.

**Mots-clés :** modélisation, comportement, cisaillement, composites.

## Abstract

The aim of this thesis is to analyse the shear behavior of the different types of composite sections. A numerical analysis approach has been implemented to study the mechanical behavior of the beams and plate made of these materials.

This made it possible, on the one hand, to identify the shear elastic properties of the different types of laminated composites. A numerical analysis approach on the linear static behavior of the effect of the stacking sequence and the type of material on the distribution of shear stress fields in the thickness of the laminate, using a finite element model (FEM) using ABAQUS software, compared to the results obtained by the classical theory of transverse shear laminates. The second part of this work is devoted to modelling the shear effect in sandwich composites for different soul materials, this made it possible to make a comparison with traditional formulations relating to homogeneous beams or sandwiches with rigid foam cores. Finally, a

general conclusion was made on the distribution of shear stress fields in the case of low-core sandwich beams such as honeycombs.

**Keywords:** modeling, behavior, shear, composites.

## ملخص

والهدف من هذه الدراسة هو تحليل سلوك القص لمختلف أنواع الأقسام المركبة. وقد تم تنفيذ نهج تحليل رقمي لدراسة السلوك ميكانيكي للأشعة واللوح المصنوعة من هذه المواد.

وقد مكن ذلك، من ناحية، من تحديد خصائص المرونة المقتضية لمختلف أنواع المواد المركبة المصنوعة. أسلوب تحليل رقمي للسلوك الخطي الثابت لأثر تسلسل التجميع ونوع المادة على توزيع حقول ضغط الجز بسمك الصفائح، باستخدام نموذج عنصر محدود باستخدام البرنامج ABAQUS ، مقارنة بالنتائج التي حققتها النظرية الكلاسيكية للصفائح المقتضية المستعرضة.

الجزء الثاني من هذا العمل مخصص لنمذجة تأثير القص في تركيبات السندويتشات للمواد المختلفة القلب، مما جعل من الممكن إجراء مقارنة مع التركيبات التقليدية المتعلقة بالروافد المتجانسة أو السندويتشات مع الأساسات الرغوية الصلبة.

وأخيراً، استنتاج عام كان على التوزيع من إجهادات القص في روافد الساندويتش ذات صلابة منخفضة مثل قلب عس النحل.

**الكلمات الرئيسية:** النمذجة، السلوك، القص ، المواد المركبة.

## *Liste des figures*

<b>Figure</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<b>Figure 1.1</b>	pli à renforcement unidirectionnel	04
<b>Figure 1.2</b>	Structure d'un composite stratifié	05
<b>Figure 1.3</b>	Structure composite sandwich	05
<b>Figure 1.4</b>	Principaux modes de ruptures des structures sandwichs avec âme en nid d'abeille	07
<b>Figure 1.5</b>	Cartographie des modes d'endommagement d'une poutre sandwich avec âme en nid d'abeille en flexion 3 points	07
<b>Figure 1.6</b>	Déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier degré).	09
<b>Figure 1.7</b>	Schématisation des déformations de la théorie des plaques du premier ordre.	09
<b>Figure 1.8</b>	Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur.	10
<b>Figure 2.1</b>	Contraintes et déformations en 3D	17
<b>Figure 2.2</b>	Matériau composite unidirectionnel	20
<b>Figure 2.3</b>	Axes principaux $(1, 2, 3) = (L, T, E)$ et axes de référence $(1', 2', 3) = (x, y, z)$ d'une couche de stratifié	21
<b>Figure 2.4</b>	Plaque sandwich	24
<b>Figure 2.5</b>	Elément poutre	29
<b>Figure 2.6</b>	Schéma d'un essai de flexion 3 points.	33
<b>Figure 2.7</b>	Schéma d'un essai de flexion 4 points.	35
<b>Figure 2.8.</b>	Flexion d'une poutre sandwich	36
<b>Figure 2.9.</b>	Contraintes normales de flexion	36
<b>Figure 2.10.</b>	Contrainte de cisaillement	36
<b>Figure.3.1</b>	Élément poutre en flexion 3-points.	41
<b>Figure.3.2</b>	définition de la structure et les empilements testés	44
<b>Figure.3.3</b>	Condition aux limites de modèle.	44
<b>Figure.3.4</b>	Maillage.	44
<b>Figure.3.5</b>	Désignation du stratifié $[(02/902)2]_s$	44
<b>Figure3.6</b>	Désignation du stratifié $[(02/902)_s]_s$	45
<b>Figure3.7</b>	Désignation du stratifié $[(0 / 90)4]_s$	45
<b>Figure3.8</b>	Désignation du stratifié $[04 / 904]_s$	45
<b>Figure3.9a</b>	Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié	47

<b>Figure 3.9b</b>	STC1 [(02 / 902)2] s (UM Graphite /Epoxy) Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié	47
<b>Figure 3.9c</b>	STC2 [(02 / 902)s] s (UM Graphite /Epoxy) Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié	47
<b>Figure 3.9d</b>	STC3 [(0 / 90)4] s (UM Graphite /Epoxy) Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié	48
<b>Figure 3.9e</b>	STC4 [04 / 904] s (UM Graphite /Epoxy) Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié	48
<b>Figure 3.9f</b>	STC1 [(02 / 902)2] s (E-Glass /Epoxy) Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié	48
<b>Figure 3.9g</b>	STC2 [(02 / 902) s] s (E-Glass /Epoxy) Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié	49
<b>Figure 3.9h</b>	STC4 [04 / 904] s (E-Glass /Epoxy) Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié	49
	s (E-Glass Epoxy).	
<b>Figure 4.1.</b>	Structure sandwich à base de nid d'abeilles	52
<b>Figure 4.2.</b>	Répartition des contraintes dans une structure sandwich : Contraintes dans les peaux.	53
<b>Figure 4.3.</b>	Répartition des contraintes de cisaillement dans la structure sandwich	53
<b>Figure 4.4.</b>	(a) déformation totale, (b) flexion, et (c) cisaillement	54
<b>Figure 4.5.</b>	les conventions des poutres sandwichs	54
<b>Figure 4.6.</b>	contrainte normale et cisaillement due à la flexion : (a) solution exacte, (b) $E_c \ll E_f$ , (c) $E_c \ll E_f$ et $t_c \gg t_f$	55
<b>Figure 4.7.</b>	Les essais principales de cisaillement : a) cisaillement à un seul bloc, b) cisaillement à double chevauchement, c) flexion à trois et quatre points, d) cisaillement de panneaux, e) cisaillement de torsion et f) cisaillement d'Arcan	56
<b>Figure 4.8.</b>	FPB schématique	59

<b>Figure 4.9.</b>	Définition de la structure	60
<b>Figure 4.10.</b>	la moitié de poutre.	60
<b>Figure 4.11.</b>	Précision de la répartition des contraintes idéalisée pour différents paramètres de la poutre sandwich	61
<b>Figure 4.12.</b>	Précision de la répartition des contraintes idéalisée pour différents paramètres de la poutre sandwich.	61
<b>Figure 4.13.</b>	Modèle EF -ABAQUS.	62
<b>Figure 4.14.</b>	La variation de la contrainte de cisaillement $\tau_{13}$ à travers l'épaisseur en fonction du rapport de rigidité $E_f/E_c$ .	62
<b>Figure 4.15.</b>	La variation de contrainte de cisaillement $\tau_{13}$ en fonction de l'épaisseur de cœur $h_c=40\text{mm}$ .	63
<b>Figure 4.16.</b>	La variation de contrainte de cisaillement $\tau_{13}$ en fonction de l'épaisseur de cœur $h_c=20\text{mm}$ .	63
<b>Figure 4.17.</b>	La variation de contrainte de cisaillement $\tau_{13}$ en fonction de l'épaisseur de cœur $h_c=10\text{mm}$ .	64
<b>Figure 4.18.</b>	La variation de contrainte de cisaillement $\tau_{13}$ en fonction de l'épaisseur de cœur $h_c=5\text{mm}$ .	64
<b>Figure 4.19.</b>	La variation de contrainte de cisaillement $\tau_{13}$ en fonction de l'épaisseur de cœur $h_c=2.5\text{mm}$ .	64
<b>Figure 4.20.</b>	les théories de Kirchhoff-love, Reissner-Mindlin, et Reddy	66
<b>Figure 4.21.</b>	exemple des fonctions de cisaillement transverse	67
<b>Figure 4.22.</b>	La variation de déplacement $U_1$ à travers l'épaisseur de la poutre en fonction du rapport de rigidité $E_f/E_c$ .	67
<b>Figure 4.23.</b>	Poutre sandwich soumise à la flexion 4-point.	69
<b>Figure 4.24.</b>	Configurations L et W et dimensions du panneau sandwich à nid d'abeilles	69
<b>Figure 4.25.</b>	Géométrie d'une cellule nida, vue de dessus.	69
<b>Figure 4.26.</b>	V.E.R d'un d'abeilles P1.	76
<b>Figure 4.27.</b>	V.E.R du nid d'abeilles P2.	76
<b>Figure 4.28.</b>	Organigramme du processus adopté pour le calcul numérique des modules de cisaillement.	77
<b>Figure 4.29.</b>	Modélisation de la moitié de la poutre en flexion 4 Points.	78
<b>Figure 4.30.</b>	Poutre sandwich P1 et P2 à section homogénéisé.	78
<b>Figure 4.31.</b>	Poutre sandwich P1 et P2 à section exacte	79

<b>Figure 4.32.</b>	Maillage des poutres 1 et 2.	80
<b>Figure 4.33.</b>	Contrainte $\tau_{13}$ et déplacement U3 d'un sandwich homogénéisée.	80
<b>Figure 4.34.</b>	Contrainte $\tau_{13}$ et déplacement U3 d'un sandwich exact.	81
<b>Figure 4.35.</b>	Contrainte et déplacement U3 d'un sandwich homogénéisée p2.	81
<b>Figure 4.36.</b>	Contrainte $\tau_{13}$ et Déplacement U3 d'un sandwich exact.	82
<b>Figure 4.37.</b>	Courbe charge déplacement de sandwich EMC82 de poutre 1 et poutre 2.	82
<b>Figure 4.38.</b>	Distribution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.	83
<b>Figure 4.39.</b>	Condition aux limites et maillage d'une Poutre sandwich P1 en âme moussée Divinycell H100.	85
<b>Figure 4.40.</b>	Condition aux limites et maillage d'une Poutre sandwich P2 en âme moussée Divinycell H100.	85
<b>Figure 4.41.</b>	Déformée, Déplacement U3 et Contrainte $\tau_{13}$ d'un sandwich en âme moussée Divinycell H100..	85
<b>Figure 4.42.</b>	La variation de la contrainte de cisaillement $\tau_{13}$ à travers l'épaisseur de la poutre1..	86
<b>Figure 4.43.</b>	Contrainte $\tau_{13}$ et Déplacement U3 d'un sandwich en âme moussée Divinycell H100..	86
<b>Figure 4.44.</b>	La variation de la contrainte de cisaillement $\tau_{13}$ à travers l'épaisseur de la poutre sandwich 2.	86

## *Liste des tableaux*

<b>Tableau</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<b>Tableau 1.1</b>	Exemples de matériaux composites, pris au sens large	03
<b>Tableau 1.2</b>	différentes fonction de forme des théories des plaques	12
<b>Tableau 4.1</b>	Caractéristique géométrique des poutres	69
<b>Tableau 4.2</b>	paramètres géométriques de la cellule	69
<b>Tableau 4.3</b>	Propriétés mécaniques des âmes	70
<b>Tableau 4.5</b>	Modules homogénéisée.	72
<b>Tableau 4.6</b>	Modules élastiques homogénéisés du nida ECM 6.4-82.	73
<b>Tableau 4.7</b>	les différent propriétés de sandwich en flexion 4-point.	75
<b>Tableau 4.8</b>	Conditions aux limites et résultats de l'homogénéisation de GXZ.	77
<b>Tableau 4.9</b>	Comparaison des résultats	82
<b>Tableau 4.10</b>	Comparaison des résultats	83
<b>Tableau 4.11</b>	Propriétés physiques et mécaniques de la mousse Divinycell H100.	84

## NOMENCLATURE

- $C_{ij}, \bar{C}_{ij}$  : Eléments de la matrice de rigidité dans les axes principaux et en dehors de ses axes ;
- $S_{ij}, \bar{S}_{ij}$  : Eléments de la matrice de souplesse dans les axes principaux et en dehors de ses axes ;
- $k$  : Module de compressibilité
- $E_L$  : Module de Young longitudinal
- $E_T$  : Module d'Young transversal
- $\nu_{LT}$  : Coefficient de Poisson
- GLT : Module de cisaillement.
- $A$  : Matrice de comportement en membrane.
- $D$  : Matrice de comportement en
- $B$  : Matrice de couplage membrane-cisaillement
- $Q_{ij}, \bar{Q}_{ij}$  : Constantes de rigidité réduite dans les axes principaux et en dehors de ses axes ;
- $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$  : Contraintes normales, et de cisaillement dans les axes principaux
- $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}$  : Déformations normales, et de cisaillement dans les axes principaux
- $\sigma_L, \sigma_T$  et  $\sigma_{LT}$  : Contraintes normales, et de cisaillement dans les axes d'orthotropie
- $\varepsilon_L, \varepsilon_T$  et  $\varepsilon_{LT}$  : Déformations normales, et de cisaillement dans les axes d'orthotropie
- $\sigma_{ij}^k$  : Contraintes normales et de cisaillement de la couche  $k$  ;
- $\nu_{ij}$  : Coefficients de Poisson
- $\sigma_0$  : Contrainte de flexion maximale
- $\tau_0$  : Contrainte de cisaillement maximale
- $M_f$  : Matrice des moments de flexion ;
- $N$  : Matrice des résultantes en membrane ;
- $N_x, N_y, N_{xy}$  : Résultantes, par unité de longueur, des contraintes normales (suivant les axes  $x$  et  $y$ ) et des contraintes de cisaillement, dans le plan  $(x,y)$ .
- $k$  : Numéro de la couche
- $Z$  : Profondeur de la couche
- $h_k$  et  $h_{k-1}$  : Distances entre l'axe du stratifié et sa face supérieure et inférieure



$a_{ij}^k$  : Coefficients de rigidité du stratifié.

$T_\varepsilon$  : Matrice de changement de base des déformations

$T_\sigma$  : Matrice de changement de base des contraintes

$D$  : Rigidité en flexion du sandwich

$E_f, E_1, E_2$  : Module d'élasticité des peaux

$E_c$  : Module d'élasticité du cœur

$G_c$  : Module de cisaillement du cœur

$h_f, h_1, h_2$  : Epaisseur des peaux sup. et inf.

$t$  : Epaisseur des peaux identiques

$h_c$  : Epaisseur du cœur

$b$  : Largeur de la poutre sandwich

$S$  : Rigidité de cisaillement du sandwich

$w$  : Flèche totale

$\Phi$ : Fonction de forme

## ABRÉVIATIONS

FSDPT: first-order shear deformation theory.

HSDPT: Higher-order Shear Deformation Theory.

CPT: classical plate theory.

RPT: refined plate theory.

SSDT: the sinusoidal shear deformation theory.

ESDPT: the exponential shear deformation plate theory.

HSDPT: The hyperbolic shear deformation plate theory.

FPB: four point bending (flexion 4-point).

TPB: three point bending (flexion 3-point).

## Introduction générale

Le monde industriel est en perpétuelle évolution et en quête obsessionnelle de la perfection. Cette évolution et cette perfection ne peuvent se concrétiser sans l'avancée de la science qui met à la disposition de l'industrie les résultats d'une recherche scientifique permettant de concevoir des procédés novateurs et porteurs de développements industriels.

Les matériaux composites sont et seront de plus utilisés dans les domaines variés de l'industrie pour la fabrication des pièces élémentaires structurales.

Cependant, les matériaux composites conventionnels généralement constitués des couches ont un problème majeur : la discontinuité provoque des fortes concentrations de contraintes, des fissurations de matrice ainsi qu'un grave problème de délaminage dû à la transition brutale de composition.

Parmi les matériaux composites les plus utilisés, on notera les matériaux sandwich. Les structures sandwich se distinguent des autres matériaux comme les métaux, les céramiques et les polymères. Le but essentiel de l'utilisation des poutres en sandwichs est d'augmenter les propriétés mécaniques surtout la rigidité en flexion d'une structure tout en minimisant la masse associée.

Pour ce faire, une structure en sandwich se compose de deux faces minces très rigides et résistantes pour supporter les contraintes normales telles que la traction et la compression,

Séparées par un noyau (ou âme) léger plus épais, pour supporter les contraintes de cisaillement. Un phénomène structurel se produit au niveau du cœur sur la distribution des contraintes de cisaillement va apparaître lorsque le rapport entre la rigidité des peaux et du cœur ( $E_f/E_c$ ) devient important.

Deux objectifs seront visés à travers cette mémoire. Le premier objectif est d'analyser l'influence de l'orientation des fibres sur la distribution des contraintes de cisaillement sur les matériaux composites stratifiés par une simulation numérique réalisée sur le logiciel le plus connu dans le domaine ABAQUS basé sur la méthode des éléments finis. La méthode des éléments finis (M.E.F) est très répandue pour les structures en plaque orthotrope et panneaux sandwich et exige une investigation afin de développer une conception précise et fiable. Elle donne une solution complète aux problèmes statique afin d'évaluer les contraintes de cisaillement transverse. Et de confronter les résultats obtenus aux modèles analytiques basés sur la théorie classique des stratifiés (CPT) pour déterminer la distribution des champs de contraintes de cisaillement dans l'épaisseur des stratifiés.

Le second objectif de cette mémoire est la modélisation du comportement mécanique des structures sandwichs à différent type de cœur (nid-d'abeilles et la mousse PVC), soumises aux diverses sollicitations. Cette modélisation était abordée en utilisant une approche prévisionnelle d'homogénéisation analytique et numérique des propriétés mécaniques de nid-d'abeilles et la mousse PVC.

Cette mémoire contient quatre chapitres ont comme objectif d'effectuer une étude sur L'effet du cisaillement transverse sur le comportement en statique linéaire des poutres composites stratifiées et sandwich à différent type de cœur sous l'effet de charges transversales.

*Le premier chapitre* traite un aperçu général des matériaux composites et leurs propriétés. Ensuite l'intérêt des structures composites sandwichs et leur mécanique de rupture. et les différentes théories de déformation en cisaillement.

Dans *le deuxième chapitre*, on expose le comportement élastique et étude théorique des poutres composites sandwich.

Dans *le troisième chapitre*, on expose l'influence de la séquence d'empilement des couches et le type de matériau sur la distribution des champs de contraintes de cisaillement, l'étude est focalisée sur le comportement en statique linéaire dans le cas de la flexion 3-points, d'un modèle éléments finis (MEF) en utilisant un logiciel le plus connu dans le domaine

ABAQUS, comparé aux résultats obtenus par un programme fortran spécialement développé pour exécuter la méthode de la théorie classique des stratifiés. Ensuite, tracer des courbes représente la variation des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur rapportée aux valeurs maximales  $\tau_0$  atteintes dans le cas d'une section homogène.

La modélisation du comportement mécanique des sandwichs en nid-d'abeilles a été décrite dans *le quatrième chapitre*. Cette modélisation était abordée en utilisant une approche prévisionnelle d'homogénéisation analytique et numérique des propriétés mécaniques des poutres sandwich à différents types de cœurs (nid d'abeille et la mousse). Des résultats analytiques et expérimentaux du comportement statique seront présentés et analysés. Les essais en flexion quatre points restent la référence dans l'ensemble des analyses proposées. La résolution du problème de flexion a été étudiée en s'appuyant sur différentes théories actuellement disponibles. Et des simulations numériques par le Code ABAQUS 10 ont été utilisées.

## Bibliographie

Ce n'est qu'en 1850 que Kirchhoff [1] a établi de façon correcte pour la première fois les hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces. En 1888 Love [2] utilisa les hypothèses de Gustav Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (également appelée théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). Timoshenko en 1921 montre que l'effet du cisaillement devient important (non négligeable) pour les sections épaisses. Timoshenko propose une formulation avec correction de la section réduite pour la prise en compte des effets du cisaillement. [3]

La théorie des plaques semi-épaisses (théorie des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh (1877), modifiée par Reissner (1945) afin d'enrichir les paramètres cinématiques. Une amélioration des théories existantes et du premier ordre proposée par Touratier. En 2004 Pizhong.Q et coll. [4], ont étudiés analytiquement par une technique d'homogénéisation à deux échelles, l'effet de deux types de matériaux constituant le noyau du nid-d'abeilles sur le cisaillement transversal des noyaux sandwich en nid d'abeille en investiguant la variation d'un indice non dimensionnel, appelé efficacité du matériau (EOM) afin d'évaluer la conception optimale des noyaux cellulaires, Ricard et Stefan.H 2007 [5], ont proposés une méthode d'essai de cisaillement par un essai statique flexion 4-points, les auteurs ont prouvés une bonne concordance entre les résultats d'essai mécanique et les relations mathématiques exprimant les différentes variables cinématiques et de résistance. Les performances de fatigue du composite sandwich avec noyau nano-phasé sous charge de cisaillement. Ont été rapportés les travaux de S. Zainuddin et coll. [6] où le noyau nano-phasé a été fabriqué à partir de mousse de polyuréthane dispersée avec des nano-fibres de carbone (CNF) Les tests de cisaillement statique ont révélé que la résistance et le module des mousses nano-phasées étaient 33% plus élevés que ceux des mousses non renforcées. Le Comportement statique et en fatigue des noyaux hexagonaux en nid-d'abeilles sous des charges de cisaillement dans le plan et pour a été étudié par Gabriel.B et coll. [7]. Des essais expérimentaux menés pour étudier les comportements statiques et en fatigue des noyaux hexagonaux en nid-d'abeilles en aluminium soumis à des charges de cisaillement dans le plan. Les résultats sont également présentés pour des tests effectués à des orientations intermédiaires pour étudier la variation de la résistance au cisaillement du noyau avec l'orientation de chargement, les résultats sont étudiés plus en détail à l'aide d'une analyse par éléments finis non linéaires explicite pour modéliser les mécanismes de rupture.

La conception et la caractérisation d'un nouveau matériau composite de type sandwich à base de jute/époxy comme peaux et de liège aggloméré comme âme a été traité par A. MIR et coll. [8], ont été étudiés sous un chargement en flexion trois et quatre points et en cisaillement, les résultats montrent l'effet de la variabilité de la valeur du module de cisaillement du liège sur le comportement global des structures sandwichs. Michael.O et coll. [9], ont étudiés expérimentalement des d'échantillons Iosipescu pour évaluer les effets de paramètres tels que, la densité et les joints adhésifs et l'orientation du plan de cisaillement sur la rigidité et la résistance au cisaillement des panneaux de bois de balsa comme matériau de base des panneaux sandwich composites ainsi que la variation de ductilité par rapport aux plans de cisaillement. Sous le titre « Caractérisation mécanique par cisaillement du bois de balsa comme matériau ».

Les caractéristiques de cisaillement du noyau d'un matériau relativement nouveau basé sur une préforme de tissu sandwich tissé tridimensionnel, le test de cisaillement et le test de flexion en trois points ont été utilisés par Judawisastra .H et coll. [10] pour déterminer la résistance au cisaillement du noyau du matériau. Une théorie d'ordre élevé est utilisée par Rabia.B et coll. [11], pour analyser des déplacements et des contraintes de cisaillement d'une plaque sandwich rectangulaire en matériaux à gradient de propriétés (FGM) simplement appuyées sur les quatre côtés sous à un chargement statique transverse. Les équations d'équilibre sont obtenues en appliquant le principe des travaux virtuels. Les expressions mathématiques de la flèche, les contraintes normales et tangentielles sont obtenues en utilisant l'approche de Navier pour résoudre le système des équations d'équilibre. L'influence de chargement mécanique et le changement du paramètre du matériau sur comportement mécanique de la plaque FGM sont représentés. Une Analyse du cisaillement plein champ de matériaux de noyau sandwich à l'aide de la corrélation d'image numérique (DIC) a été effectuée par Amir.F et coll. [12]. Les travaux ont étudié les déformations de cisaillement de trois matériaux de noyau structurels communs à l'aide d'une analyse optique plein champ. Les matériaux d'âme choisis sont la mousse PET, mousse PVC réticulée. Les déformations de cisaillement globales et locales sont calculées et visualisées graphiquement. Dans la région élastique, les noyaux en mousse ont montré des déformations plus uniformes que le Balsa.

Une nouvelle fonction de gauchissement pour l'analyse en flexion des plaques sandwich fonctionnellement graduées est présentée récemment (2019) dans les travaux de Saoula. A et coll.[13], ils ont présenté un modèle qui utilise « FGM » simplement appuyée sous des charges mécaniques, les résultats numériques obtenus par l'analyse sont présentés et comparés avec

ceux disponibles dans la littérature (les théories d'ordre supérieur). Les Travaux récents (2019) réalisés par Mo-Nan.W et coll. [14], ont présentés la réponse au cisaillement dans le plan et le mode de rupture des composites sandwich en nid d'abeille de grande taille qui se composent de peaux laminées en tissu de carbone à armure toile et d'une âme en papier aramide. Une combinaison d'analyse théorique et de méthode des éléments finis (FEM) a été menée pour prédire la distribution du champ de cisaillement et la charge globale de flambement.

En 2015 zemani.K et sebakhi.F, ont consacré à présenter une théorie raffinée qui prend en considération l'effet de cisaillement transverse afin d'analyser le comportement vibratoire des plaques épaisses fonctionnellement graduées(FGM) simplement appuyées reposant sur une fondation élastique de type winkler-pesternak. [15].

Cette Année 2020 les Chercheurs Karim.M et coll. [16], ont proposés une nouvelle méthodologie de test pour déterminer les propriétés de cisaillement à l'aide d'un test de torsion. Cette nouvelle méthode permet une caractérisation plus précise des matériaux de l'âme sandwich puisqu'elle élimine le phénomène de concentration des contraintes de cisaillement sur les bords retrouvé dans le test standard.

# Chapitre

## 01

### REVUE DE LA LITTERATURE.

---

*Penser ne suffit pas : il faut penser à quelques choses.*

*Jules renard*

---

## Chapitre 01 : Revue de la littérature

Cette revue de la littérature fait l'état de l'art des différents domaines qui ont servi aux études présentées dans ce mémoire. D'abord, un aperçu général des matériaux composites et de leurs propriétés permettra de poser les bases de ces matériaux novateurs, ensuite l'intérêt des structures composites sandwichs et leur mécanique de rupture, un résumé des théories de Classement déformation en cisaillement, le cas particulier des âmes en nid d'abeille sera ensuite étudié.

### 1.1 Généralités sur les matériaux composites : [17]

Par définition, un composite est un matériau composé d'au moins 2 constituants : une matrice et un renfort. L'étude du comportement de ces matériaux et la prédiction de leurs propriétés font aussi bien intervenir les caractéristiques de la matrice et des fibres que les conditions de fabrication et de qualité d'interface. Donc le renfort et la matrice doivent être compatibles entre eux et se solidariser. Pour cela, un agent de liaison, appelé interface, est nécessaire.

La combinaison fibre-résine aboutit tout naturellement à un matériau ayant une bonne résistance mécanique, une grande rigidité et une bonne résistance chimique. En outre, ce composite est doté d'un module spécifique (module par unité de poids) et d'une résistance spécifique qui les rendent très compétitifs, vis-à-vis des métaux, dans les applications où le poids est un facteur déterminant.

#### 1.1.1 Matrice et renforts

##### 1.1.1.1. La matrice

Aujourd'hui, la plupart des composites utilisent des matrices organiques en polymère. Il existe quelques exemples de composites à matrice inorganique tel que des métaux, des céramiques ou des carbones, toutefois, leur utilisation reste marginale dus à des coûts de production importants. Les objectifs de l'utilisation de la matrice sont multiples, plus importants sont :

- Support et protection chimique des fibres ou particules ;
- Répartition et transfert de charges ;
- Donner la forme désirée au produit final.

##### 1.1.1.2. Les renforts

Les renforts se présentent le plus souvent sous forme de fibres. Il existe des renforts de fibres courtes (de l'ordre du mm), de fibres moyennes, ou mi-longues (de l'ordre du cm) et des renforts de fibre longue (où les fibres font environ la taille de l'échantillon). Il existe trois principaux types de fibres : les fibres de verres, de carbone et d'aramide. Les fibres de verre,



coulées à partir d'un mélange de silice et de différents additifs, représentent plus de 90% de la production. Elles sont produites en trois qualités selon leurs domaines d'application : les fibres E pour les composites à grande diffusion, fibres D pour des applications en construction électrique et fibres R pour les hautes performances. Pour un prix raisonnable, ces fibres offrent une bonne interface fibre/résine ainsi que de bonnes propriétés mécaniques. Leur utilisation reste toutefois limitée dans des domaines tels que l'aéronautique pour laquelle elles présentent une rigidité insuffisante ou un vieillissement accéléré au contact de l'eau, des rayons UV, etc. Dans ces cas, des fibres de carbones seront privilégiées. En plus d'offrir de meilleures caractéristiques techniques, ces dernières apportent une faible masse volumique ainsi qu'une très bonne tenue en température. Enfin, les fibres aramides, aussi appelées Kevlar par leurs concepteurs, sont utilisées notamment dans les gilets pare-balles. Leur résistance au choc et à la fatigue est grande, mais elles ont une mauvaise résistance en compression.

**Tableau 1.1.** Exemples de matériaux composites, pris au sens large [18].

	<b>Constituants</b>	<b>Domaines d'application</b>
<b>1. Composites à matrice organique</b>	Résine /charges/fibres cellulosiques	Imprimerie, emballage, etc.
Papier, carton	Résine/copeaux de bois	Menuiserie
Panneaux de particules	Résine/fibres de bois	Bâtiment
Panneaux de fibres	Résine souples/tissue	Sports, bâtiment
Toiles enduites	Elastomères/bitume/textiles	Toiture,
Matériaux d'étanchéité	Caoutchouc/toile/acier	Terrasse, etc.
Pneumatique	Résine/charges/fibres de verre, de carbone, etc.	Automobile
Stratifiés		Domaines multiples
Plastiques renforcés	Résine/microsphères	
<b>2. Composites à matrice Minérale</b>	Ciment/sable/granulats	Génie civil
Béton Composites carbone-	Carbone/fibres de carbone	Aviation, espace, sports,
Carbone Composites céramique	Céramique/fibres céramique	biomédecine, etc.
		Pièces thermomécaniques
<b>3. Composites à matrice Métallique</b>	Aluminium/fibres de bore	Espace
	Aluminium/fibres de carbone	
<b>4. Sandwiches</b>	Métaux, stratifiés, etc.	Domaines multiples
$\left. \begin{array}{l} \text{peaux} \\ \text{ames} \end{array} \right\}$	Mousses, nids d'abeilles, balsa,	
	Plastiques renforcés, etc.	

### 1.1.2 Propriétés des matériaux composites [17]

Les matériaux composites se caractérisent aux matériaux classiques par un module élevé, une masse volumique faible et une bonne tenue en fatigue. Il ont l'avantage d'avoir une limite élastique très élevée, l'absence de la corrosion, de plus, les techniques de mise en forme par moulage permettent la réalisation de pièces complexes. Cependant, leur résistance aux impacts est souvent plus faible que celle de matériaux métalliques classiques. Enfin, ils sont plus sensibles à la chaleur et à l'humidité.

### 1.1.3. Architecture des matériaux composites [19]

#### 1.1.3.1. Les monocouches

Les monocouches sont les éléments de base des structures composites. Des fibres unidirectionnelles placées dans le plan médian sont emprisonnées dans une matrice polymère. Ils sont caractérisés par le type de renfort utilisé : des fibres longues (unidirectionnelles ou non), courtes, sous forme de tissus, de rubans...

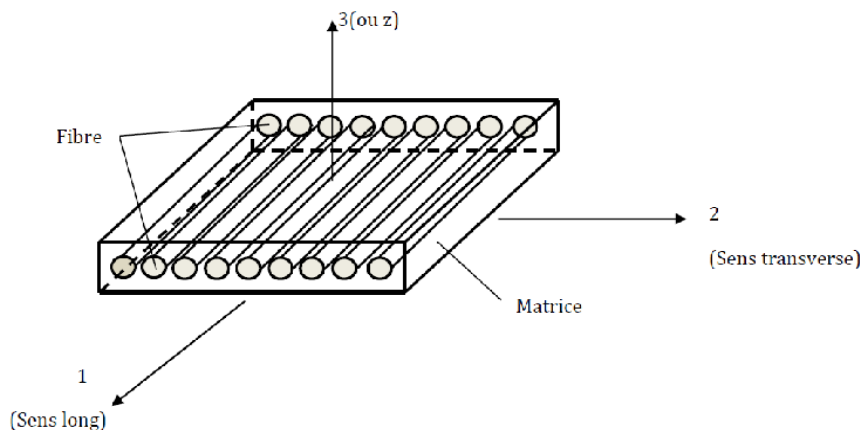


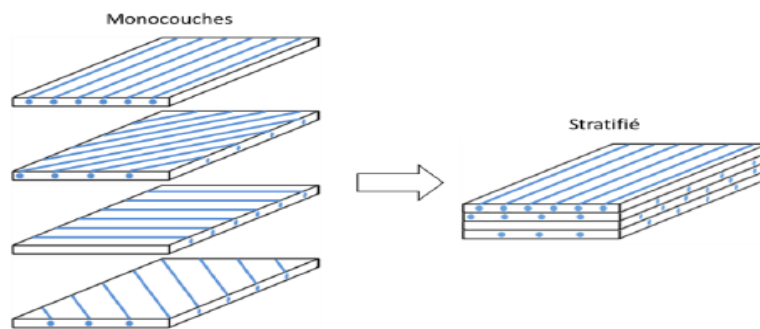
Figure 1.1. pli à renforcement unidirectionnel [19].

#### 1.1.3.2. Les stratifiés :

Les stratifiés sont formés par des empilements de monocouches unidirectionnelles, chacun ayant une orientation  $\theta$  propre par rapport aux axes principaux de la structure (Figure 1.2). Un choix judicieux de la séquence d'empilement et des différentes orientations permettra d'obtenir des propriétés mécaniques adaptées au champ de contrainte subie par la structure [17]. Il existe différentes classes de stratifiés :

1. Équilibré : le stratifié compte autant de couches orientées selon l'angle  $+\theta$  que l'angle  $-\theta$
2. Symétrique : les couches du stratifié sont disposées de manière symétrique par rapport au plan moyen

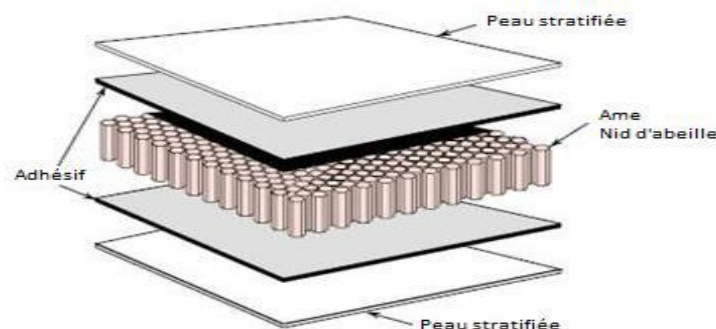
3. Antisymétrique : les couches du stratifié sont disposées de manière antisymétrique par rapport au plan moyen
4. Croisé : le stratifié compte autant de couches orientées à  $0^\circ$  qu'à  $90^\circ$ .
5. Hybride : les couches successives du stratifié comportent des fibres de natures différentes



**Figure 1.2.** Structure d'un composite stratifié [17].

### 1.1.3.3. Les sandwichs :

Le principe de fabrication des matériaux en sandwichs, consiste en l'association d'une âme épaisse et de faible masse volumique et de deux peaux minces à fort module. L'objectif est de constituer une structure conciliant légèreté et rigidité. La théorie de la résistance des matériaux montre que la rigidité en flexion est proportionnelle au cube de l'épaisseur. Ainsi, dans un sandwich, le rôle de l'âme est d'accroître le module du stratifié en augmentant significativement son second moment de surface (via l'épaisseur) par l'ajout d'un matériau de faible densité [20]. Lorsqu'une telle structure est sollicitée en flexion, la peau supérieure est généralement chargée en compression, la peau inférieure en traction, et l'âme supporte le cisaillement. Ainsi, l'un des principaux critères de sélection du matériau d'âme sera sa résistance au cisaillement. De plus, l'âme doit être capable de supporter des charges de compression afin d'éviter le flambage des peaux.



**Figure 1.3.** Structure composite sandwich [17].

Les âmes sont classées en deux catégories : les âmes pleines pouvant être constituées de différents bois, mousses, résines chargées et les âmes creuses, essentiellement des nids d'abeilles et des profilés en alliage métallique léger (souvent aluminium), papier Kraft (enduit de résine ou non), papier polyamide de type Nomex, et autres. Les critères de sélection du matériau d'âme seront la résistance au cisaillement, en flexion, au choc, à la compression,... ou encore sa résistance au feu, à l'eau ou ses propriétés acoustiques d'isolation (cas des mousses). Les peaux rigides sont quant à elles, pour des composites de moyennes et hautes performances, des stratifiés à matrice thermodurcissable contenant des renforts fibreux de verre, de carbone ou d'aramide [17].

Pour des structures portantes, des feuilles métalliques d'aluminium ou d'acier seront privilégiées tandis que des matériaux tels que du bois, du laminé ou du contreplaqué serviront pour des structures à faibles performances.

Dans le but de répartir les efforts entre âme et peaux et ainsi d'obtenir le maximum de performance des structures sandwich, il est également nécessaire de soigner l'interface âme/peaux. L'assemblage est réalisé par collage grâce à des résines compatibles avec les matériaux.

## **1.2. Intérêt des structures composite sandwichs [21]**

L'intérêt principal des structures sandwich, par opposition aux composites traditionnels dits monolithiques, réside dans leur rigidité spécifique très élevée. La densité de l'âme est couramment de l'ordre de  $100 \text{ kg/m}^3$ . En modifiant la nature et l'épaisseur de la peau et/ou de l'âme, on parvient à donner à la structure le matériau qui convient le mieux. L'amélioration de rigidité qui traduit le comportement en flexion du matériau, s'obtient en augmentant soit l'épaisseur de l'âme qui conduit à l'augmentation de son moment d'inertie, soit le module d'élasticité des peaux. Puisque l'âme du sandwich possède une faible densité, la masse du composite n'évolue pas de façon importante.

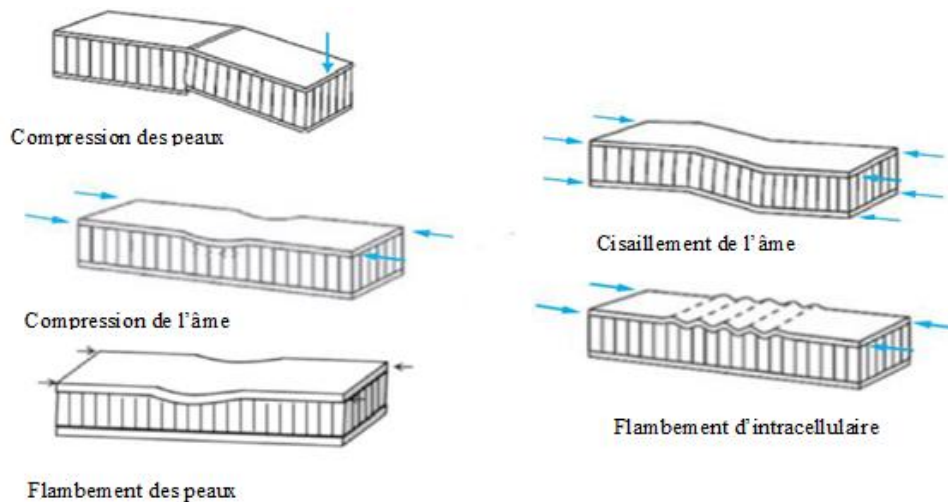
Les matériaux composites sandwich disposent d'atouts importants par rapport aux matériaux traditionnels. Ils apportent de nombreux avantages fonctionnels : légèreté, résistance mécanique et chimique, maintenance réduite, liberté de formes. Ils permettent d'augmenter la durée de vie de certains équipements grâce à leurs propriétés mécaniques et chimiques. Ils contribuent au renforcement de la sécurité grâce à une meilleure tenue aux chocs et au feu. Ils offrent une meilleure isolation thermique ou phonique et, pour certains d'entre eux, une bonne isolation électrique. Ils enrichissent aussi les possibilités de conception en permettant d'alléger des structures et de réaliser des formes complexes, aptes à remplir plusieurs fonctions. Dans chacun

des marchés d'application (automobile, bâtiment, électricité, équipements industriels...), ces performances remarquables sont à l'origine de solutions technologiques innovantes.

### 1.3. Mécanique des composites sandwichs [17]

#### 1.3.1. Modes de rupture

L'atout des matériaux composites sandwich est clairement leur légèreté et leur rigidité. Cependant, soumis à diverses sollicitations, les peaux du sandwich doivent résister à des contraintes de traction, de compression, de flambage. L'âme ainsi que l'interface âme/peaux doivent également résister au cisaillement. Les modes de ruptures sont donc variés et dépendent des propriétés mécaniques des peaux et de l'âme. Les principaux modes de ruptures sont présentés à la Figure 1.4.

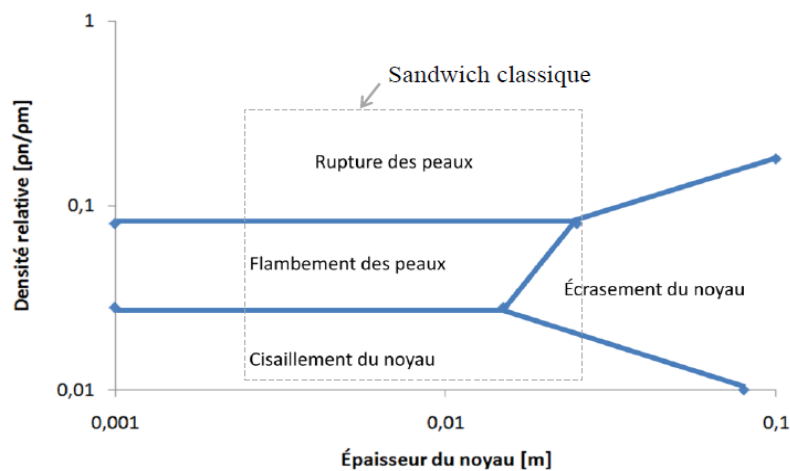


**Figure 1.4** Principaux modes de ruptures des structures sandwichs avec âme en nid d'abeille [17].

Des cartes de prévision de ces ruptures existent pour les âmes en mousses et en nid d'abeille pour différents types de chargement. La Figure 1.5 donne les différents modes de rupture d'un matériau composite sandwich avec une âme en nid d'abeille soumise à un chargement en flexion 3 points. La figure présente le rapport de la densité de l'âme  $\rho_n$  sur celle de son matériau  $\rho_m$  en fonction de l'épaisseur de l'âme. Elle est spécifique au cas d'un rapport

$$\frac{\text{épaisseur de peaux}}{\text{longueur entre les appuis}} = 5.10^{-4}$$

[17].



**Figure 1.5** Cartographie des modes d'endommagement d'une poutre sandwich avec âme en nid d'abeille en flexion 3 points [17].

#### 1.4 Classement des théories des déformations en cisaillements

Afin de résoudre les problèmes des structures ayant comme éléments structuraux des poutres composites et poutres sandwichs dans le domaine élastique, il est nécessaire de choisir la bonne théorie décrivant correctement le comportement statique de la structure ainsi que la méthode de résolution à appliquer. Love en 1888 utilisa les hypothèses de Kirchhoff, elles-mêmes inspirées des hypothèses d'Euler-Bernoulli pour fonder une théorie des plaques minces (théorie classique ou théorie de Kirchhoff-Love). La théorie des plaques semi-épaisses (théories des déformations du premier ordre) a été consolidée par Mindlin à partir des travaux de Rayleigh, Timoshenko, Reissner. Ensuite, des théories d'ordre supérieur sont venues améliorer les hypothèses des théories classiques et du premier ordre lorsque l'épaisseur des poutres devient importante.

La théorie classique des plaques basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs des contraintes et déformations dans les plaques peu épaisses. Par contre, dans le cas des plaques épaisses, la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique. Une première amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse.

##### 1.4.1. Théorie classique des plaques minces (CPT)

On parle d'une plaque mince, lorsque la flèche générée par les déformations de cisaillement reste négligeable devant la flèche générée par la courbure de la plaque.

### 1.4.1.1. Hypothèses de la théorie classique des plaques

Les hypothèses cinématiques adoptées pour les plaques mince, par Kirchhoff, généralisant à deux dimensions celles adoptées pour les poutres sans déformations en cisaillement, appelées poutres d'Euler-Bernoulli. Les hypothèses de Kirchhoff reprises par Love sont les suivants :

- ✓ Les plaque est d'épaisseur petite devant les autres dimensions (rapport d'élanement  $h/a$  ou  $h/b \leq 0.05$ ) .elle possède un plan moyen.
- ✓ Hypothèse dite de section droite (section plane) : les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et normales à celui-ci après déformation. La déformation en cisaillement transverse est donc négligée.
- ✓ Les termes non linéaires du déplacement  $U$  et  $V$  sont négligés, et l'inertie de rotation est négligée. Seul le déplacement transversal  $W$  est considéré.

La déformée de la normale au plan moyen ( $Oxy$ ), est alors un segment de droite normales à la déformée du plan moyen.

L'effet de la déformation en cisaillement transverse augmente d'une manière significative lorsque le rapport d'élanement  $h/a$  ou  $h/b$  est supérieur ou égal à 0.05. Étant donné que cette théorie néglige la flexibilité de cisaillement transverse, ceci conduit à une surestimation de la rigidité de flexion et par voie de conséquence une surestimation des fréquences de vibration et une sous-estimation des déplacements.

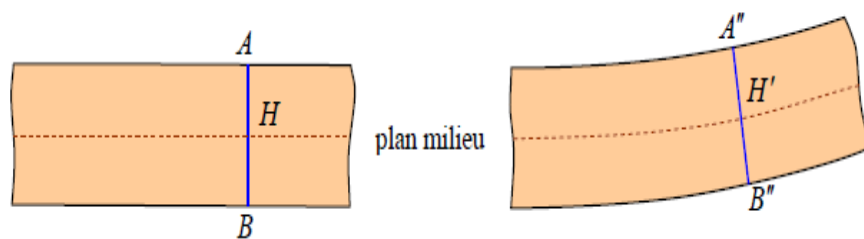
### 1.4.1.2. Limitation de la théorie classique

La théorie classique des plaques basée sur l'hypothèse de Kirchhoff, permet de décrire avec une bonne précision les champs contrainte et déformation dans les plaques peu épaisse. Par contre, dans le cas des plaques épaisses, la théorie classique devient assez mal adaptée à la description du comportement mécanique. Une première amélioration consiste à tenir compte du cisaillement transverse. Une deuxième amélioration consiste à modifier cette théorie, en introduisant des facteurs de correction aux modules de cisaillement transverse.

### 1.4.2. Théorie de déformation de cisaillement du premier degré (FSDPT)

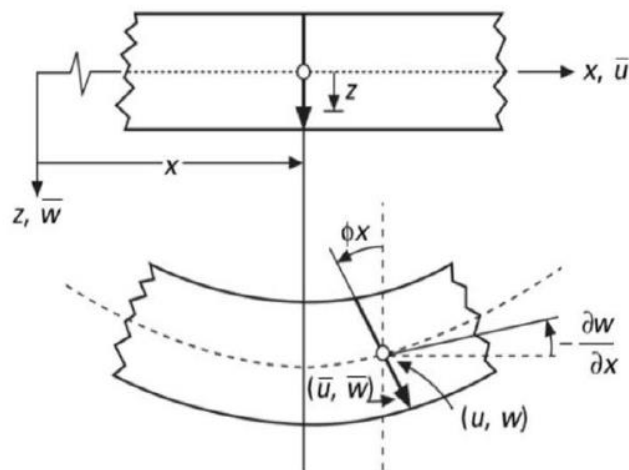
Lorsque l'épaisseur de la plaque ne permet plus de vérifier les hypothèses de Kirchhoff quant à leur mouvement de flexion, une théorie plus complètes basée sur celle des poutres de Timoshenko est nécessaires (théorie des plaques moyennement épaisses).

Contrairement à la théorie des plaques minces, la théorie de Mindlin suppose que les sections droites, initialement normales au plan neutre, restent planes et non nécessairement normales à celui-ci après déformations figure (1.6), d'autres variantes de la théorie supposent que ces sections ne restent ni droites, ni normales après déformation. Étant donné que la théorie des plaques de premier ordre (FSDPT) ne satisfait pas les conditions aux limites au niveau des surfaces supérieures et inférieures de la plaque (contraintes de traction non nulles), un facteur de correction en cisaillement à travers l'épaisseur est nécessaire. La valeur de facteur correction dépend de la géométrie de la plaque, de la variation des coefficients de Poisson à travers l'épaisseur, du chargement appliqué et des conditions aux limites imposées.



**Figure 1.6.** Déformation avec cisaillement transverse (schéma du premier degré) [20].

Timoshenko a été le premier à avoir étudié les effets des déformations de cisaillement et de l'inertie de rotation dans l'analyse des poutres, c'est pourquoi le modèle de la poutre avec une théorie du premier ordre est aussi appelé modèle ou poutre de Timoshenko.



**Figure 1.7.** Schématisation des déformations de la théorie des plaques du premier ordre [33].



### 1.4.3. Théorie de déformation en cisaillement d'ordre supérieur (HSDPT)

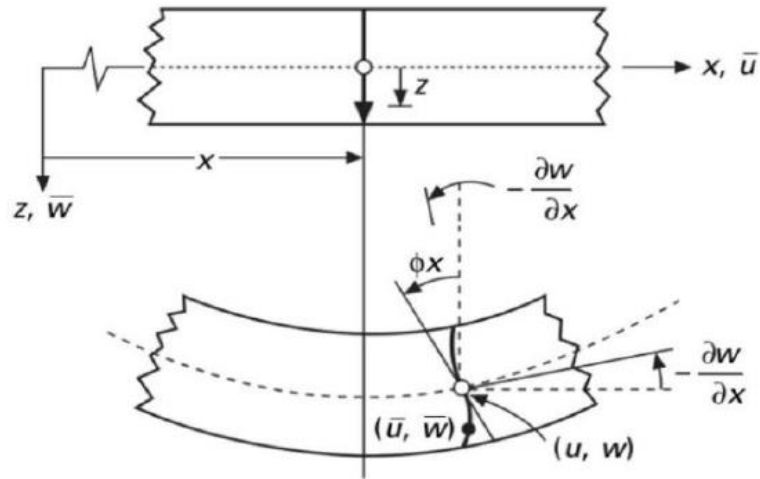
À la différence de la théorie classique des plaques (CPT) et la théorie du premier ordre (FSDT) avec les hypothèses de la distribution linéaire du déplacement à travers l'épaisseur, la théorie d'ordre élevé est basée sur une distribution non linéaire des champs à travers l'épaisseur. Par conséquent, on tient compte des effets de la déformation transversale de cisaillement et/ou de la déformation normale transversale.

Ces modèles n'exigent pas des facteurs de correction en cisaillement et pour tenir compte des hypothèses plus réalistes que celle de Kirchhoff. Plusieurs théories d'ordre supérieur ont été proposées par plusieurs chercheurs. Elles sont basées sur le développement des déplacements en série de puissance à travers l'épaisseur. Les hypothèses qui sont à la base du développement de cette théorie sont :

- ✓ Les déplacements sont petits comparés à l'épaisseur de la plaque,
- ✓ Les sections transversales, initialement planes et normales au plan moyen, ne restent pas nécessairement planes et normales à celui-ci après déformations.
- ✓ La déformation axiale dans la direction transversale n'est en général pas négligeable.
- ✓ Les contraintes normale dans la direction transversale n'est en générale pas négligeables.

De nouvelles formulations et théorie d'ordre supérieur ont vu le jour ces dernières années.

Carrera a proposé une formulation compacte et unifiée des théories d'ordre supérieur [37] [38]. Cependant, les théories du premier ordre (FSDT) et d'ordre supérieur (HSDPT) ne sont pas pratiques vu le nombre de termes d'ordre supérieur introduits dans la formulation. Dans le souci de réduire le nombre de variables utilisées dans les formulations existantes, Shimpi a développé un modèle raffiné pour les plaques isotropes (RPT). Les caractéristiques les plus intéressantes de cette méthode sont qu'elle ne nécessite pas de coefficient de correction en cisaillement et qu'elle présente beaucoup de similitudes avec la théorie classique des plaques quant aux équations du mouvement. La théorie RPT a été ensuite adaptée avec succès aux plaques orthotropes. La fiabilité de cette méthode a été démontrée par Kim et Thai [39] [40] pour le cas de flexion statique et pour le cas du flambage d'une plaque composite. Récemment Thai et Kim, ont adapté la méthode RPT, avec succès, au flambage des plaques orthotropes, et à la vibration libre des plaques stratifiées et sandwichs respectivement.



**Figure 1.8.** Schématisation des déformations dans le cas de la théorie des plaques d'ordre supérieur [33].

### 1.4.3.1. La fonction de forme de la théorie d'ordre supérieure

Pour le cas des théories raffinées basées sur la théorie classique des plaques (CPT) et satisfaisant les conditions de contraintes nulles sur les faces inférieure et supérieure de la plaque, le champ de déplacement d'un point matériel situé aux coordonnées  $(x, y, z)$  dans la plaque s'écrit comme

$$\begin{aligned}
 U(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} + f(z)\phi_x(x, y, z) \\
 \text{suit : } V(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} + f(z)\phi_y(x, y, z) \\
 W(x, y, z) &= w(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{1.1}$$

$U(x, y, z), V(x, y, z), W(x, y, z)$  sont les déplacements dans les directions  $x, y, z$ .

$u, v, w$  sont les déplacements du plan médian (plan  $z=0$ ).

$$\begin{aligned}
 \phi_x &= \phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\
 \phi_y &= \phi_y + \frac{\partial w}{\partial y}
 \end{aligned}
 \tag{1.2}$$

$\phi_x, \phi_y$  sont les rotations des plans  $yz$  et  $xz$ .

$F(z)$  représente la fonction de forme déterminant la distribution des contraintes et des déformations transversale suivant l'épaisseur.

Le champ de déplacement de la théorie classique des plaques (CPT) est obtenu en posant  $f(z)=0$ . La théorie du premier ordre (FSDT) est obtenue en posant  $f(z)=z$ . en plus, le champ de déplacement de la théorie de déformation de cisaillement du troisième ordre de Reddy est obtenu par la prise de la fonction suivante :

$$f(z) = z \left( 1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right) \quad (1.3)$$

Dans le modèle de Reddy, le champ de déplacement membranaire est cubique et le déplacement normal  $W$ , est constant. Ce modèle donne une bonne approximation pour les contraintes de cisaillement transverse par rapport à la solution d'élasticité tridimensionnelle.

La distribution des contraintes de cisaillement transverse est parabolique à travers l'épaisseur.

Les conditions aux limites sur les surfaces libres sont satisfaites.

Touratier a proposé le modèle sinusoidal (SSDT) qui est différent des autres modèles d'ordre supérieurs puisqu'il n'utilise pas de fonction polynomiale. Une fonction trigonométrique sinusoidale est donc introduite pour modéliser la répartition des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur. La fonction de cisaillement transverse s'écrit comme suite :

$$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi z}{h}\right) \quad (1.4)$$

Les contraintes de cisaillement transverses déterminées par le modèle (sinus) prennent une forme co-sinusoidale à travers l'épaisseur de la plaque. La précision de ce modèle par rapport à la solution exacte est meilleure que la théorie de Reddy.

La version exponentielle de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (ESDPT) développée par karama en 2003 est obtenue en prenant :

$$f(z) = z e^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2} \quad (1.5)$$

La version hyperbolique de la théorie de déformation de cisaillement d'ordre élevé (HSDPT) développé par Ait Atmane en 2010 est obtenue en prenant :

$$f(z) = \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} z - \frac{\frac{h}{\pi} \sinh\left(\frac{\pi z}{h}\right) - z}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1} \quad (1.6)$$

D'autres théories raffinées ont vu le jour plus récemment. Leur champ de déplacement sous la forme unifiée s'écrit suivant la formule (1.1) ou la fonction  $f(z)$  est la fonction de la forme pilotant la distribution des déformations de cisaillement et des contraintes à travers l'épaisseur de la plaque. Elle est propre à chaque théorie. Nous regroupons dans le tableau suivant les différentes fonctions de cisaillement ainsi qu'une comparaison entre les différents modèles.

**Tableau 1.2.**différentes fonction de forme des théories des plaques [33].

Théorie	intitulé	Fonction de forme $\phi(z)$	Distribution de $\gamma_{xz}$ et $\gamma_{yz}$ Suivant z	Coefficient de correction	Validité
CPT Kirchhoff	Théorie classique des plaques	0	-	-	Plaque mince
FSDPT Mindlin	Théorie de déformation des plaques du 1 <sup>er</sup> ordre	z	constante	Requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Ambarts- umian	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{z}{2} \left( \frac{h^2}{4} - \frac{z^2}{3} \right)$	Quadratique	Non requis	Plaques minces et moyennement épaisses
Reissner	Théorie d'ordre supérieur	$\frac{5z}{2} \left( 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
TSDPT Touratier	Théorie de déformation trigonométri- que des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \frac{\pi z}{h}$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

ESDPT Karama	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \text{Exp} \left( -2 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
PSDPT Levinson Reddy Murthy	Théorie de déformation parabolique des plaques	$z \left( 1 - \frac{4}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right)$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Aydogdu	Théorie de déformation exponentielle des plaques	$z \alpha \frac{2(z/h)^2}{\ln(\alpha)}, \alpha > 0$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
El Meiche Tounsi	Théorie raffiné des plaques	$\frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) - z$ $\frac{z}{\cosh(\pi/2) - 1}$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Atmane Tounsi	Théorie raffiné des plaques	$\frac{\cosh(\pi/2)}{\cos(\pi/2) - 1} z$ $\frac{h}{\pi} \sin \left( \frac{\pi z}{h} \right) - z$ $\frac{z}{\cosh(\pi/2) - 1}$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses
Shimpi	Théorie raffiné des plaques	$h \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{z}{h} \right) - \frac{5}{3} \left( \frac{z}{h} \right)^3 \right]$	Parabolique	Non requis	Plaques minces et épaisses

### 1.5. Position du problème et techniques adoptées

L'étude des matériaux composites et sandwichs qui a déjà fait l'objet de nombreux travaux, est encore loin d'avoir abouti à la connaissance totale de leur comportement.

Le comportement des matériaux composites stratifiés et sandwichs, est un domaine que beaucoup de chercheurs ont essayé de illustrer.

Beaucoup de techniques expérimentales et différents modèles numériques sont développés selon trois niveaux d'échelles différentes (microscopique, mésoscopique et macroscopique).

L'étude bibliographique montre qu'il existe peu de travaux sur les matériaux composites stratifiés, et les structures composite type sandwich nécessitent une détermination précise des propriétés mécaniques du matériau. Le cœur en nid-d'abeilles des structures sandwichs, peut être assimilé à un matériau orthotrope. Pour le caractériser, il faut connaître les 09 modules de l'ingénieur. La détermination de ces caractéristiques mécaniques peut être effectuée grâce à 2 méthodes différentes :

— La modélisation analytique

— La modélisation numérique

L'approche numérique appliquée sur ABAQUS capable de déterminer les propriétés élastiques par une méthode d'homogénéisation à l'échelle d'un volume élémentaire représentatif (3D) de nid d'abeilles et de comparer ces résultats aux résultats analytiques.

### **1.6. Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous sommes attachés à présenter et à définir la notion de matériau composite sandwich. Dans un premier temps, nous avons présenté les principales propriétés des structures composites et l'intérêt des structures sandwich les différents modèles permettant de décrire leur comportement en flexion, ainsi que les différents modes d'endommagements, et les théories de déformation en cisaillement. Le chapitre suivant présente le comportement élastique et un exposé détaillé sur la théorie classique des poutres et des plaques.

# Chapitre

## 02

### Comportement élastique et étude théorique des poutres composites sandwichs.

---

Que me reste-t-il de ma vie ? Que me reste-t-il ? Que  
cela est étrange, il me reste que ce que j'ai donnée aux  
autres.

Vahan TEKEYAN

---

## Chapitre 02 : Comportement élastique et étude théorique des poutres composites sandwichs

### 2.1 L'élasticité dans les matériaux composites

#### 2.1.1 INTRODUCTION

La loi de comportement est une liaison des champs des déformations et des contraintes dans un milieu continue, caractérisant le comportement mécanique du milieu. Ces lois sont décrites par des axiomes qui permettent de rendre compte au mieux des phénomènes observés. L'expérience montre que de nombreux milieux solides déformables ont [18], pour une température donnée, un *comportement élastique linéaire*.

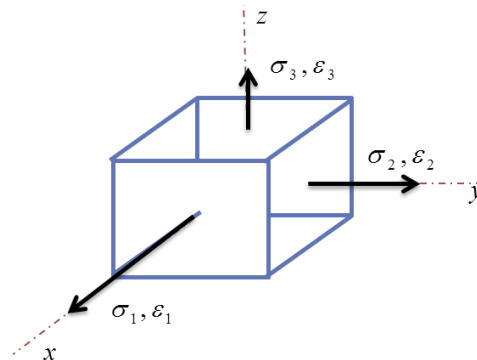


Figure 2.1. Contraintes et déformations en 3D

#### 2.1.2 Notation matricielle de l'ingénieur

La matrice des 9 composantes du tenseur des contraintes, est remplacée par une matrice colonne à 6 composantes à condition de la symétrie du tenseur. On utilise les notations suivantes :

Notation standard :  $\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{13} \sigma_{12}$

Notation contractée :  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_6$

Les notations semblables s'appliquent aux déformations

Sous l'effet de contraintes dans toutes les directions, la loi de Hooke, pour un élément en matériau linéaire élastique isotrope, s'écrit sous la forme :  $\sigma = C\varepsilon$

Avec : C : la matrice de rigidité

#### 2.1.3 Matrice de rigidité



$\sigma = C\varepsilon$  ; Cette loi, généralement appelée loi de Hooke généralisée, introduit la *matrice de rigidité*  $C$ , symétrique. Le comportement linéaire d'un matériau est donc décrit dans le cas général à l'aide de 21 coefficients indépendants, ici les 21 *constantes de rigidité*  $C_{ij}$

La relation d'élasticité linéaire peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

#### 2.1.4 Matrice de flexibilité (souplesse)

La relation d'élasticité peut être écrite sous la forme inverse, suivant [20] :

$$\varepsilon = S\sigma \quad (2.2)$$

En introduisant la matrice inverse de la matrice de rigidité. La matrice  $S$  est appelée matrice de flexibilité ou matrice de souplesse, et s'écrit dans le cas général :

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{15} & S_{25} & S_{35} & S_{45} & S_{55} & S_{56} \\ S_{16} & S_{26} & S_{36} & S_{46} & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Avec :  $S = C^{-1}$  et  $S_{ij}$  sont appelés les constantes de flexibilité ou de souplesse

#### 2.1.5 Matériaux anisotropes

##### 2.1.5.1 Introduction

La plupart des matériaux anisotropes possèdent une structure présentant une ou plusieurs symétries : par exemple, les monocristaux, les structures fibreuses, les matériaux composites à fibres ou tissus, etc. Les propriétés de symétries géométriques réduisent alors le nombre de constantes indépendantes nécessaires pour décrire le comportement du matériau. Cette réduction est fonction des symétries présentées par le matériau considéré.

##### 2.1.5.2 Matériau monoclinique

Un matériau monoclinique est un matériau qui possède un plan de symétrie. La forme de la matrice de rigidité (ou de souplesse) doit être telle qu'un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce plan ne modifie pas la matrice. Dans le cas où le plan de symétrie est le plan (1,2), l'exploitation des changements de base conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

### 2.1.5.3 Matériau orthotrope

Un matériau orthotrope possède trois plans de symétrie, perpendiculaires deux à deux. Il est à noter que l'existence de deux plans de symétrie perpendiculaires implique l'existence du troisième : la forme de la matrice de rigidité est donc obtenue en ajoutant au matériau monoclinique un plan de symétrie perpendiculaire au précédent. L'invariance de la matrice dans un changement de base effectué par symétrie par rapport à ce deuxième plan conduit à une matrice de rigidité de la forme :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

La matrice de souplesse a la même forme. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est réduit à 9 constants.

### 2.1.5.4 Matériau unidirectionnel

La cellule élémentaire d'un matériau composite unidirectionnel peut être considérée comme constituée d'une fibre entourée d'un cylindre de matrice (figure 2.2). Le matériau se comporte donc comme un matériau orthotrope possédant de plus un axe de révolution. Le matériau est alors appelé matériau orthotrope de révolution ou *isotrope transverse*. Il en résulte qu'un changement de base effectué par rotation quelconque autour de cet axe doit laisser

inchangée la matrice de rigidité (ou de souplesse). L'exploitation de cette propriété conduit à la matrice :

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

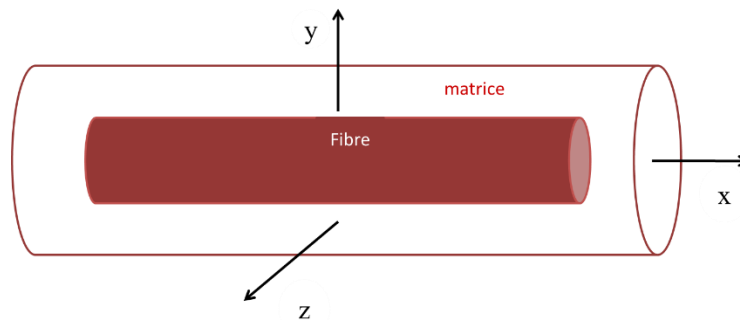


Figure 2.2. Matériau composite unidirectionnel

### 2.1.6 Matrices de Rigidité et souplesse en fonction des paramètres de l'ingénieur d'un composite orthotrope :

$E_1, E_2, E_3$  : Les modules de Young

$\nu_{12}, \nu_{13}$  et  $\nu_{23}$  : Les coefficients de poisson

$G_{12}, G_{13}$  et  $G_{23}$  : Les modules de cisaillement

Pour la matrice de rigidité nous avons :

$$[C] = \begin{bmatrix} (1-\nu_{23}\nu_{32})/E_2E_3\Delta & (\nu_{21}+\nu_{13}\nu_{32})/E_2E_3\Delta & (\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23})/E_2E_3\Delta & 0 & 0 & 0 \\ (\nu_{21}+\nu_{23}\nu_{31})/E_1E_3\Delta & (1-\nu_{13}\nu_{31})/E_1E_3\Delta & (\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13})/E_1E_3\Delta & 0 & 0 & 0 \\ (\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32})/E_1E_2\Delta & (\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31})/E_1E_2\Delta & (1-\nu_{12}\nu_{21})/E_1E_2\Delta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Avec :

$$\Delta = \frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{12}\nu_{23}\nu_{31}}{E_1E_2E_3} \quad (2.8)$$

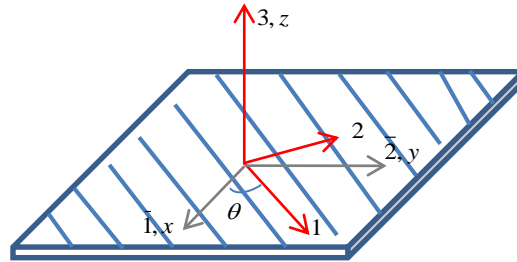
Et la matrice de souplesse est donné par :

$$[S] = \begin{bmatrix} (1/E_1) & -(v_{12}/E_1) & -(v_{13}/E_1) & 0 & 0 & 0 \\ -(v_{12}/E_1) & (1/E_2) & -(v_{23}/E_2) & 0 & 0 & 0 \\ -(v_{13}/E_1) & -(v_{23}/E_2) & (1/E_3) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1/G_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (1/G_{13}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (1/G_{12}) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Où  $v_{ij}$  est le coefficient de Poisson transversal dans la direction  $i$  par rapport à la déformation de compression longitudinale dans la direction  $j$ . C'est à dire :

$$v_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (2.10)$$

## 2.2. Relations d'élasticité dans un système d'axes quelconque



**Figure 2.3.** Axes principaux (1, 2, 3) = (L, T, E) et axes de référence (1', 2', 3) = (x, y, z) d'une couche de stratifié.

Les matrices de rigidité  $C'$  et de souplesse s'exprimées dans la base (1', 2', 3) sont obtenues en appliquant aux matrices de rigidité et de souplesse, rapportées à la base (1, 2, 3), les relations de changement de base suivantes [20] :

$$[C'] = [T_\sigma]^{-1} [C] [T_\varepsilon] \quad (2.11)$$

$$[S'] = [T_\varepsilon]^{-1} [S] [T_\sigma] \quad (2.12)$$

Avec :

$T_\sigma$  : La matrice de changement de base des contraintes :

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -2 \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Et  $T_\varepsilon$  : La matrice de changement de base des déformations :

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -2\sin \theta \cos \theta & 2\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

### 2.2.1 Equations d'élasticité pour un état de contraintes planes

Les relations d'élasticité peuvent être expliquées à partir de la matrice de rigidité réduite Q du matériau [20] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{66} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

On peut déterminer les constantes de rigidité réduite à partir de deux méthodes :

*Méthode 01* : Les constantes de rigidité réduites s'expriment en fonction des rigidités par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} - \frac{C_{13}^2}{C_{33}} & Q_{22} &= C_{22} - \frac{C_{23}^2}{C_{33}} \\ Q_{12} &= C_{12} - \frac{C_{13}C_{23}}{C_{33}} & Q_{66} &= C_{66} \end{aligned} \quad (2.16)$$

*Méthode 02* : Les constantes de rigidité réduites s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur (Les constants d'élasticités dans les axes principaux) par :

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} & Q_{22} &= \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \\ Q_{12} &= \nu_{LT} Q_{22} & Q_{66} &= G_{LT} \end{aligned} \quad (2.17)$$

### 2.2.2 Constantes de rigidité réduites en dehors des axes principaux

La relation d'élasticité en contraintes planes en fonction des constantes de la matrice de rigidité réduite s'écrit dans le système d'axe (x, y, z) comme suit [20] :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & Q'_{16} \\ Q'_{12} & Q'_{22} & Q'_{26} \\ Q'_{16} & Q'_{26} & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

$\sigma_{xx}$  : Contraintes dans le plan principal

$\varepsilon_{xx}$  : Déformation dans le plan principal

Avec :  $Q_{ij}'$  les constants de rigidité réduite en dehors des axes principaux, sont donnés par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
 Q_{11}' &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\
 Q_{12}' &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\
 Q_{16}' &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
 Q_{22}' &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
 Q_{26}' &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
 Q_{66}' &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta)
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

## 2.3. Étude théorique des poutres sandwichs

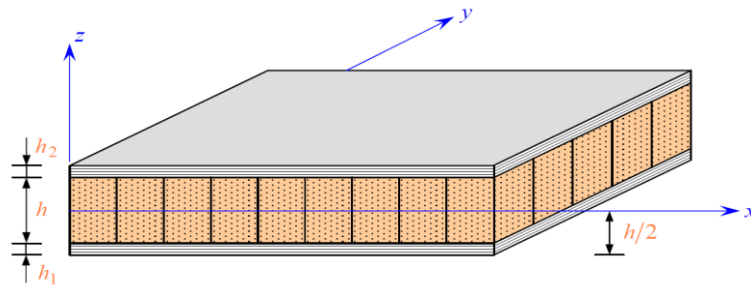
### 2.3.1 Introduction

Le comportement mécanique élastique d'une structure constituée de matériaux en sandwichs est généralement analysé par la théorie des plaques sandwich [20]. Elle est basée sur la théorie des stratifiés prenant en compte le cisaillement transverse qui considère qu'une normale au plan moyen d'un stratifié reste un segment de droite lors de la déformation, mais ne reste toutefois pas normale au plan moyen. La théorie des plaques en sandwichs considère que seule l'âme du matériau sandwich est soumise à une déformation de cisaillement transverse.

La théorie des stratifiés avec cisaillement transverse et la théorie des plaques sandwichs sont les outils qui peuvent être utilisés usuellement pour analyser le comportement élastique des structures en matériaux sandwichs [26].

### 2.3.2. La théorie adaptée en flexion des poutres sandwichs

Un matériau sandwich est constitué d'une âme de faible masse volumique sur laquelle sont collées deux peaux à rigidité et résistance élevées. La fonction essentielle de l'âme du sandwich est de transmettre par cisaillement transverse les actions mécaniques d'une peau à l'autre (figure 2.4). Les peaux peuvent être constituées par des matériaux métalliques ou plus généralement par des stratifiés d'épaisseur  $h1$  (peau inférieure) et d'épaisseur  $h2$  (peau supérieure). L'épaisseur de l'âme notée  $h$ , le système de coordonnées sera choisi de manière que le plan  $(x, y)$  soit le plan moyen [20].



**Figure 2.4 :** Plaque sandwich [20].

### 2.3.2.1. Hypothèses de la théorie des plaques sandwichs

La théorie des plaques sandwichs est basée sur les hypothèses suivantes [20] :

- L'épaisseur de l'âme est bien plus élevée que celle des peaux ( $h \gg h_1, h_2$ ).
- Les déplacements de l'âme  $u_a$  et  $v_a$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont des fonctions linéaires de la coordonnée  $z$ .
- Les déplacements  $u$  et  $v$  suivant les directions  $x$  et  $y$  sont uniformes dans l'épaisseur des peaux.
- Le déplacement transverse  $w$  est indépendant de la variable  $z$  : la déformation  $\varepsilon_{zz}$  est négligée.
- L'âme ne transmet que les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}, \sigma_{yz}$  : les contraintes  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}$  et  $\sigma_{zz}$  sont négligées.
- Les contraintes de cisaillement transverse  $\sigma_{xz}$  et  $\sigma_{yz}$  sont négligées dans les peaux.

Enfin la théorie traite les problèmes d'élasticité en faibles déformations.

### 2.3.2.2. Champ de déplacements

L'hypothèse "b" implique un schéma du premier ordre pour les déplacements de l'âme :

$$\begin{aligned} u_a(x, y, z) &= u_0(x, y) + z\varphi_x(x, y) \\ v_a(x, y, z) &= v_0(x, y) + z\varphi_y(x, y) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Avec :

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= u_a(x, y, 0), \\ v_0(x, y) &= v_a(x, y, 0), \end{aligned}$$

La continuité des déplacements aux interfaces âme-peau, associé à l'hypothèse "c" conduit aux expressions suivantes des déplacements dans les peaux :

- ✓ Peau inférieure :

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\
 v_1(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_y(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.21}$$

✓ Peau supérieure :

$$\begin{aligned}
 u_1(x, y, z) &= u_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_x(x, y) \\
 v_1(x, y, z) &= v_0(x, y) - \frac{h}{2} \varphi_y(x, y)
 \end{aligned}
 \tag{2.22}$$

L'hypothèse "d" s'écrit :

$$(x, y, z) = \omega_0(x, y) \tag{2.23}$$

La théorie des plaques sandwichs est basée sur la détermination de cinq fonction de déplacement et de rotation  $u_0$ ,  $v_0$ ,  $w_0$ ,  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  analogue à celle introduite dans la théorie des stratifiés tenant compte du cisaillement transverse.

### 2.3.2.3. Champ des déformations

Le champ des déformations dans la peau inférieur est déduit du champ (2.21) des déplacements.

Il s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{xx}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - \frac{h}{2} \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz}^1 &= 0 \\
 \gamma_{yz}^1 &= \frac{\partial v_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} \\
 \gamma_{xz}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \\
 \gamma_{xy}^1 &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.24}$$

Les déformations en cisaillement transverse  $\gamma_{yz}^1$  et  $\gamma_{xz}^1$  dans la peau sont négligées et le champ des déformations se réduit au champ des déformations en membrane qui s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} - \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy}^0 = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \quad \gamma_{xy}^0 = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \tag{2.26}$$



$$k_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, \quad k_{xy}^0 = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x}$$

Le champ des déformations dans la peau supérieure s'écrit sous la forme

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^2 \\ \varepsilon_{yy}^2 \\ \gamma_{xy}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + \frac{h}{2} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Le champ de déformation dans le cœur se déduit de champ (2.21) des déplacements soit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^{a1} &= \frac{\partial u_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_{zz}^a &= \frac{\partial w_0}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{yz}^a &= \frac{\partial v_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \gamma_{xz}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \gamma_{xy}^a &= \frac{\partial u_a}{\partial y} + \frac{\partial v_a}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Le champ des déformations à la même écriture que le champ des déformations de la théorie des stratifiés avec cisaillement transverse. Il est la superposition de deux champs de déformation :

➤ Le champ des déformations en membrane -flexion :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^a \\ \varepsilon_{yy}^a \\ \gamma_{xy}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

➤ Le champ des déformations en cisaillement transverse :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

### 2.3.2.4. Champ des contraintes

Le champ des contraintes dans le cœur est déduit de l'hypothèse "e" :

$$\sigma_{xx}^a = \sigma_{yy}^a = \sigma_{xy}^a = \sigma_{zz}^a = 0 \quad (2.31)$$

Le cœur ne transmet que les contraintes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yz}^a \\ \sigma_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44}^a & C_{45}^a \\ C_{45}^a & C_{55}^a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

Où les coefficients  $C_{ij}^a$  s'expriment en fonction des coefficients  $C_{ij}^a$  rapportés aux axes principaux de l'âme suivant :

$$\begin{aligned} C_{44}^a &= C_{44}^a \cos^2 \theta + C_{55}^a \sin^2 \theta \\ C_{45}^a &= (C_{55}^a - C_{44}^a) \sin \theta \cos \theta \\ C_{55}^a &= C_{44}^a \sin^2 \theta + C_{55}^a \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (2.33)$$

Où  $\theta$  est l'angle que font les axes principaux de l'âme avec les axes de référence de la plaque sandwich. Les coefficients  $C_{ij}^a$  dans les axes principaux s'expriment en fonction des coefficients de cisaillement de l'âme, mesurés dans les axes principaux, selon :

$$C_{44}^a = C_{23}^a, \quad C_{55}^a = C_{13}^a \quad (2.34)$$

L'hypothèse "f" implique que les contraintes en cisaillements transverse sont nulles dans toutes les couches  $k$  de la peau inférieure ou supérieure :

$$\sigma_{xz}^k = \sigma_{yz}^k = 0 \quad (2.35)$$

Les autres contraintes sont déduites des déformations dans les peaux par la relation :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{yy}^k \\ \sigma_{xy}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^i & Q_{12}^i & Q_{16}^i \\ Q_{12}^i & Q_{22}^i & Q_{16}^i \\ Q_{16}^i & Q_{26}^i & Q_{66}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^i \\ \varepsilon_{yy}^i \\ \varepsilon_{xy}^i \end{bmatrix}, \quad i=1,2 \quad (2.36)$$

Pour la couche  $k$  de la peau inférieure  $i=1$  ou de la peau supérieure  $i=2$ .

### 2.3.3. Relations fondamentales des plaques sandwichs [20]

#### 2.3.3.1. Equation constitutive

L'équation constitutive des plaques sandwichs fait intervenir les résultantes et moments :

✓ Les résultantes en membrane :

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} dz \quad (2.37)$$

✓ Les résultantes en flexion –torsion :

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz + \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} z dz \quad (2.38)$$

✓ Les résultantes en cisaillement :

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{bmatrix} dz \quad (2.39)$$

En substituant les expressions des contraintes (2.32) à (2.36) dans les expressions précédentes des résultantes et moments, nous obtenons l'équation constitutive

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ C_{11} & C_{12} & C_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \\ \gamma_{yz}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_{ij} &= A_{ij}^1 + A_{ij}^2 \\ B_{ij} &= \frac{h}{2} (A_{ij}^2 - A_{ij}^1) \\ C_{ij} &= C_{ij}^1 + C_{ij}^2 \\ D_{ij} &= \frac{h}{2} (C_{ij}^2 - C_{ij}^1) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Et

$$\begin{aligned} A_{ij}^1 &= \int_{-\frac{h}{2+h_1}}^{\frac{h}{2}} (Q_{ij}^1) dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (Q_{ij}^1)_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (Q_{ij}^1)_k e_k \\ C_{ij}^1 &= \int_{-\frac{h}{2+h_1}}^{\frac{h}{2}} z (Q_{ij}^1) dz = \sum_{k=1}^{n_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (Q_{ij}^1)_k dz = \sum_{k=1}^{n_1} (Q_{ij}^1)_k e_k z_k \\ A_{ij}^2 &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} (Q_{ij}^2) dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} (Q_{ij}^2)_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij}^2)_k e_k \\ C_{ij}^2 &= \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}+h_2} z (Q_{ij}^2) dz = \sum_{k=1}^{n_2} \int_{h_{k-1}}^{h_k} z (Q_{ij}^2)_k dz = \sum_{k=1}^{n_2} (Q_{ij}^2)_k e_k z_k \\ F_{ij} &= h C_{ij}^a \end{aligned} \quad (2.42)$$

Où  $n_1$  et  $n_2$  sont les nombres de couches respectivement dans la peau inférieure et dans la peau supérieure, et  $C_{ij}^a$  sont les coefficients relatifs au cisaillement transverse de l'âme.

Dans le cas de plaques sandwichs symétrique, les peaux inférieure et supérieure sont identiques, d'où :

$$A_{ij}^1 = A_{ij}^2, \quad C_{ij}^1 = -C_{ij}^2 \quad (2.43)$$

Il en résulte :

$$A_{ij} = 2A_{ij}^2, D_{ij} = hC_{ij}^2, \quad (2.44)$$

$$B_{ij} = C_{ij} = 0 \quad (2.45)$$

### 2.3.4. Flexion des poutres sandwichs

L'importance de développer une analyse sur le comportement en flexion des poutres est liée d'une part à l'utilisation des poutres comme éléments de base dans la réalisation des structures, et d'autre part à la caractérisation des propriétés mécaniques des matériaux stratifiés et sandwichs à partir d'essais de flexion réalisés sur des éprouvettes en forme de poutres.

La théorie des poutres considère que la longueur  $l$  de la poutre est très supérieure à sa largeur  $b$  (Figure 2.5) [20].

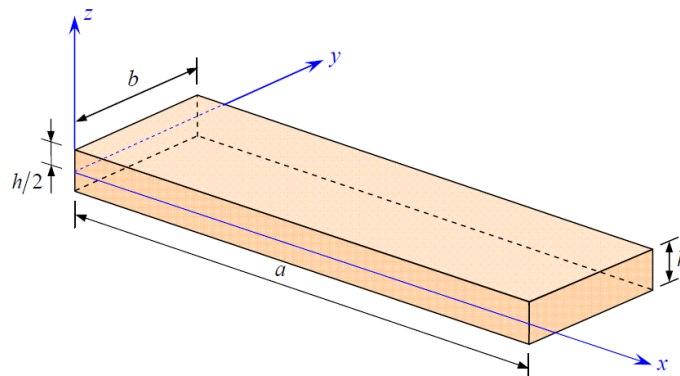


Figure 2.5 : Élément poutre [20].

Les résultantes en flexion

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.46) \text{ et}$$

les résultantes en cisaillement

$$\begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44} & 0 \\ 0 & F_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Où  $M_x$ ,  $M_y$  et  $M_{xy}$  sont les moments de flexion tandis que  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_{xy}$  sont des courbures de flexion ;

$Q_y$  et  $Q_x$  sont les résultantes en cisaillement respectivement suivant les axes  $y$  et  $x$  et  $\gamma_{yz}^a, \gamma_{xz}^a$  sont des déformations en cisaillement.

Les coefficients de flexion  $D_{ij}$  de l'équation (1) sont donnés par :

$$D_{ij} = \frac{h}{2} (C_{ij}^1 - C_{ij}^2) \quad (2.48)$$

Avec :

$$C_{ij}^1 = \int_{\frac{ha}{2}}^{\frac{ha}{2}+h_{p1}} z(Q'_{ij}) dz = \sum_{k=1}^{n1} (Q'_{ij})_k e_z z_k \tag{2.49}$$

$$C_{ij}^2 = \int_{\frac{ha}{2}}^{\frac{ha}{2}+h_2} z(Q'_{ij}) dz = \sum_{k=1}^{n2} (Q'_{ij})_k e_z z_k$$

Où  $n1$  et  $n2$  sont respectivement les nombres de couches dans les peaux inférieure et supérieure. Les constantes  $Q'_{ij}$  de chaque couche exprimées en fonction des coefficients de rigidité dans les axes principaux  $Q_{ij}$  sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned} Q'_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ Q'_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} + 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\ Q'_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\ Q'_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\ Q'_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\ Q'_{66} &= [Q_{11} + Q_{22} - 2(Q_{12} + Q_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \tag{2.50}$$

Avec  $\theta$  est l'angle d'orientation des fibres par rapport l'axe principal du composite (ox), et  $Q_{ij}$  sont les coefficients de rigidité qu'ils sont définies par les formules suivantes :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \nu_{LT} \nu_{TL}} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} \tag{2.51}$$

$$Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11}, Q_{66} = G_{TT}$$

$[F_{ij}]$  Est la matrice de rigidité en cisaillement et  $\gamma_{ij}^a$  sont les déformations de cisaillement transverse dans le cœur. Elles sont données par les équations suivantes :

$$\gamma_{yz}^a = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \text{ et } \gamma_{xz}^a = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \tag{2.52}$$

Avec  $w_0$  est le déplacement transversal de la surface moyenne du sandwich ;  $\varphi_x$  et  $\varphi_y$  sont les angles de rotation de la normale au plan moyen par rapport à  $x$  et  $y$ .

Les courbures de flexion  $k_x$ ,  $k_y$  et  $k_{xy}$  sont données par les équations :

$$K_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, k_y = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y}, k_{xy} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \tag{2.53}$$

Et les coefficients de cisaillement définie par :

$$F_{ij} = h C_{ij}^a$$

Où  $C_{ij}^a$  sont les coefficients de cisaillement transverse du cœur

Donc les équations (2.54) et (2.55) s'écrivent sous la forme inverse par :

$$\begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11}^* & D_{12}^* & 0 \\ D_{21}^* & D_{22}^* & 0 \\ 0 & 0 & D_{66}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{yz}^a \\ \gamma_{xz}^a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{44}^* & 0 \\ 0 & F_{55}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{aligned} D_{11}^* &= \frac{D_{22}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}, D_{22}^* = \frac{D_{11}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}, \\ D_{12}^* &= \frac{D_{12}}{D_{11}D_{22} - D_{12}^2}, D_{66}^* = \frac{1}{D_{66}} \\ F_{44}^* &= \frac{1}{F_{44}}, F_{55}^* = \frac{1}{F_{55}} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Si une flexion autour de l'axe  $y$ , on néglige les valeurs de la courbure et de la flèche dans la largeur de la poutre Les fonctions  $\varphi_x$  et  $w_0$  sont alors indépendantes de la variable  $y$  :

$$\varphi_x = \varphi_x(x), w_0 = w_0(x) \quad (2.56)$$

Les valeurs de déformation  $\varepsilon_{xx}^a$  et  $\gamma_{xz}^a$  sont donnée par

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^a &= z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x}, \\ \gamma_{xz}^a &= \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \end{aligned} \quad (2.57)$$

Donc les relations des plaques sandwichs sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= 0 \end{aligned} \quad (2.58)$$

De plus la théorie des poutres sandwichs fait l'hypothèse, que dans le cas d'une flexion suivant l'axe  $(Ox)$ , les moments de flexion  $M_y$  suivant  $(Oy)$  et le moment de torsion  $M_{xy}$  dans le plan  $(Ox, Oy)$  sont nuls :

$$M_y = M_{xy} = 0 \quad (2.59)$$

En reportant la relation (2.59) dans l'équation d'équilibre (2.57), nous trouvons que la résultante en cisaillement  $Q_y$  est nulle :

$$Q_y = 0$$

Ainsi, des équations des moments et des résultantes en cisaillement (2.46) et (2.47) nous déduisons :

$$k_x = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = D_{11}^* M_x \quad (2.60)$$

$$\gamma_{xz}^a = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} = F_{55}^* Q_x$$

En reportant l'équation (2.52) dans l'équation (2.50), nous obtenons :

$$\frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - \frac{D_{11}^*}{F_{55}^*} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0 \quad (2.61)$$

Il est usuel d'écrire cette dernière équation en introduisant le module d'élasticité longitudinal  $E_x$ , et le module de cisaillement  $G_{xz}$  de la poutre :

$$\frac{d^2 \varphi_x}{dx^2} - \frac{bh G_{xz}}{I E_x} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) = 0 \quad (2.62)$$

Le module de cisaillement transversal  $G_{xz}$  et le module  $E_x$ , de la poutre s'écrivent :

$$G_{xz} = \frac{1}{hF_{55}^*} \quad \text{Et} \quad E_x = \frac{b}{ID_{11}^*} \quad \text{avec} \quad M = bM_x \quad \text{et} \quad I = \frac{bh^3}{12} \quad (2.63)$$

De même en reportant la relation (2.63) dans l'équation d'équilibre (2.61), nous obtenons :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_x}{dx} + F_{55}^* q = 0 \quad (2.64)$$

Soit :

$$\frac{d^2 w_0}{dx^2} + \frac{d\varphi_x}{dx} + \frac{1}{hG_{xz}} p = 0 \quad \text{Avec} \quad p = bq \quad (2.65)$$

Dans le cas où la variation du moment de flexion  $M_x$  est connue, la relation (2.65) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d\varphi_x}{dx} = D_{11}^* M_x = \frac{M}{E_x I} \quad (2.66)$$

Une seconde équation peut être obtenue en reportant (2.66) dans l'une des relations (2.64) ou (2.65) :

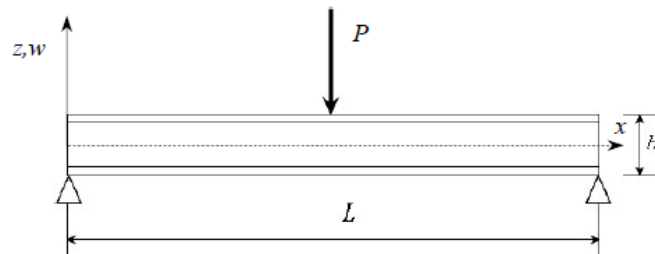
$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{1}{F_{55}^*} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) \quad (2.67)$$

$$\frac{dM}{dx} = bhG_{xz} \left( \varphi_x + \frac{dw_0}{dx} \right) \quad (2.68)$$

### 2.3.4.1 comportements des sandwichs en flexion 3 et 4 points

Les structures sandwich sont généralement sollicitées en flexion (trois et quatre points). afin d'optimiser les caractéristiques de leurs constituants (âme et peaux) pour une application donnée, il convient donc de connaître leur comportement pour ces deux types de sollicitation.  $E_1=E_2=E_f$ ,  $h_1=h_2=t$  et  $e=d/2$ .

- **Comportement en flexion 3 points**



**Figure 2.6** Schéma d'un essai de flexion 3 points.

- **Les contraintes normales dans les peaux :**

Dans le cas d'un chargement central d'une poutre sandwich (figure 2.6). Les contraintes de traction ou de compression dans les deux peaux et la contrainte de cisaillement dans le cœur sont alors :

Les contraintes dans les peaux pour  $\frac{h_c}{2} \leq z \leq \frac{H}{2}$  et  $-\frac{H}{2} \leq z \leq -\frac{h_c}{2}$  :

$$\sigma_f = \frac{Mz}{D} E_f \quad (2.69)$$

Le maximum des contraintes étant obtenu pour  $z = \pm \frac{H}{2}$  et  $x = \frac{L}{2}$ , ce qui nous donne :

$$\sigma_{f,\max} = \pm \frac{PLH}{8D} E_f \quad (2.70)$$

- **Les contraintes dans le cœur pour  $-\frac{h_c}{2} \leq z \leq \frac{h_c}{2}$  :**

$$\sigma_c = \frac{Mz}{D} E_c \quad (2.71)$$

- Les contraintes planes maximales supportées par le cœur sont alors :

$$\sigma_c = \pm \frac{PLh_c}{8D} E_c \quad (2.72)$$

- **Les contraintes de cisaillement dans le cœur**

En ce qui concerne la contrainte de cisaillement  $\tau_c$  dans le cœur, du fait de l'hétérogénéité de la structure, il faut tenir compte du changement de module dans une section droite :



$$\tau_c = \frac{T}{Db} \sum SE \quad \text{Avec} \quad \sum SE = E_f \frac{btd}{2} + E_c \frac{b}{t} \left( \frac{h_c}{2} - z \right) \left( \frac{h_c}{2} + z \right) \quad (2.73)$$

S, moment statique par rapport à l'axe (Oy).

Ce qui donne :

$$\tau_c = \frac{T}{2D} \left[ E_f \frac{btd}{2} + E_c \frac{b}{2} \left( \frac{h_c^2}{2} - z^2 \right) \right] \quad (2.74)$$

Avec un maximum au centre du sandwich d'où :

$$\tau_{c,\max} = \frac{P}{4D} \left( E_f td + E_c \frac{h_c^2}{4} \right) \quad (2.75)$$

De plus sachant que  $E_f \gg E_c$  on peut négliger le terme tenant compte du module de Young de l'âme de sandwich, et de ce fait on obtient :

$$\tau_{c,\max} = \frac{P}{4D} E_f td \quad (2.76)$$

Nous avons déjà vu précédemment que l'expression de la rigidité en flexion D pouvait être réduite au second terme du second membre de son expression globale, ce qui nous donne pour la contrainte maximale de cisaillement dans le cœur :

$$\tau_{c,\max} = \frac{P}{2bd} \quad (2.77)$$

Nous pouvons constater que  $\tau_{c,\max}$  est constante dans l'épaisseur de l'âme.

- Le déplacement W au point de chargement ( $x=L/2$ )

Le déplacement total de la poutre sandwich soumise à la flexion trois-points, sera la somme d'une contribution classique due à la flexion,  $w_f$ , et d'une autre due au cisaillement de l'âme,  $w_c$ , de sorte que  $w_t = w_f + w_c$  ;

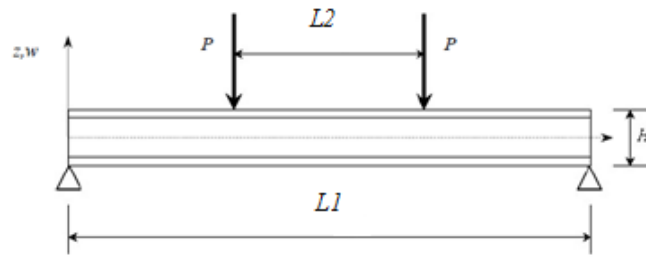
$$w_f = \frac{PL^3}{48D} \quad \text{et} \quad w_c = \frac{PL}{4S} \quad (2.78)$$

D'où le déplacement total :

$$w_t = \frac{PL^3}{48D} \left( 1 + \frac{12D}{SL} \right) \quad (2.79)$$

### 2.3.4.2. Comportement en flexion quatre points

L'essai de flexion 4 points (figure 2.7) a prouvé une efficacité remarquable dans l'étude de la rupture par cisaillement des structures sandwich, l'avantage inhérent de l'essai flexion 4 points est qu'il n'y a pas de large concentration de contrainte aux points d'application de la charge (entre appuis intérieurs).



**Figure 2.7.** Schéma d'un essai de flexion 4 points.

Cet essai offre au milieu de la section du sandwich un moment de flexion maximum constant avec une force transversale nulle. Les contraintes de traction ou de compression dans les deux peaux et la contrainte de cisaillement dans le cœur sont :

Les contraintes normales dans les peaux :

$$\sigma_f = \frac{P(L_1 - L_2)}{2h_f bd} \tag{2.80}$$

Les contraintes de cisaillement dans le cœur :

$$\tau_c = \frac{P}{bd} \tag{2.81}$$

Le déplacement W au point de chargement  $\left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right)$  :

$$W\left(\frac{L_1 - L_2}{2}\right) = \frac{P(L_1 - L_2)^2(L_1 - 2L_2)}{24D} + \frac{P(L_1 - L_2)}{2S} \tag{2.82}$$

La déformation maximale en flexion des peaux :

$$\varepsilon_f = \frac{P(L_1 - L_2)h}{4D} \tag{2.83}$$

Déformation maximale en cisaillement du cœur

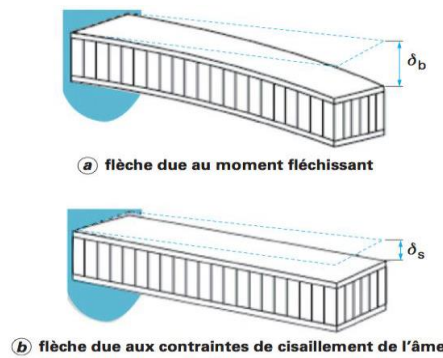
$$\gamma_c = \frac{P}{G_c bd} \tag{2.84}$$

### 2.3.5 Cas particulier du nid d'abeille [17]

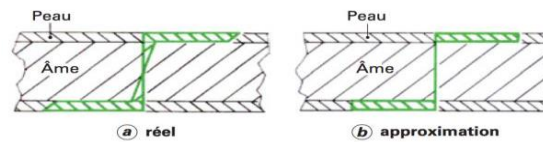
La principale différence entre une structure sandwich à nid d'abeille et une structure sandwich classique est la contribution très significative du cisaillement transversal due à la déformation du nid d'abeille.

La Figure 2.8 présente une poutre sandwich soumise à une sollicitation de flexion. La flèche est alors une combinaison de deux composantes, l'une due au moment fléchissant (a), et l'autre due au cisaillement de l'âme (b). Les Figure 2.9 et Figure 2.10 illustrent les répartitions réelles et modélisées des contraintes normales de flexion et de cisaillement dans une poutre sandwich.

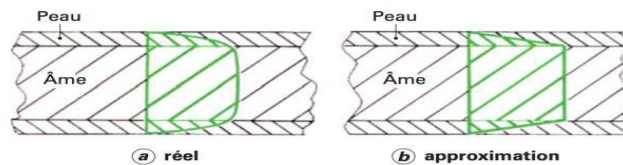
On observe qu'il est nécessaire que la résistance au cisaillement de la liaison âme/peaux soit au moins égale à celle de l'âme. En pratique, elle devra être supérieure car de nouvelles contraintes de cisaillement, issues de la différence des coefficients de dilation des matériaux de l'âme et des peaux, peuvent apparaître.



**Figure 2.8.** Flexion d'une poutre sandwich [17].



**Figure 2.9.** Contraintes normales de flexion [17].



**Figure 2.10.** Contrainte de cisaillement [17].

## 2.4. Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre le comportement élastique des matériaux composites, ensuite les théories de flexion des poutres sandwich sont présentées.

Le chapitre suivant va porter sur la présentation de la modélisation de l'influence de la séquence d'empilement sur la distribution des champs de contraintes de cisaillement des stratifiés croisés.

# Chapitre

## 03

L'influence de la séquence  
d'empilement et le type de  
Matériau sur la  
distribution des champs de  
contraintes de cisaillement  
des stratifiés.

---

*La science sans conscience n'est que ruine de l'âme.*

*Jean Stewart*

---

## **Chapitre 03 : L'influence de la séquence d'empilement et le type de Matériau sur la distribution des champs de contraintes de cisaillement des stratifiés croisés**

### **3.1. Introduction :**

Tous les matériaux sont hétérogènes, même les matériaux dits homogènes, il suffit de partir de l'échelle des atomes et des molécules pour s'en convaincre. Les variations des propriétés peuvent être de deux types : soit continue, soit discontinue comme dans le cas des matériaux composites. La prise en compte de l'anisotropie est essentielle pour la conception et le dimensionnement d'une structure en matériaux composites, car son comportement sera très différent de celui d'une structure isotrope de géométrie identique. [18].

### **3.2 Les stratifiés symétriques :**

On dit un stratifié symétrique si le plan moyen de ce dernier est le plan de symétrie, on peut dire aussi que deux couches symétriques ont [20] :

- La même matrice de rigidité réduite  $[Q'_{ij}]_k$
- Des côtes opposées  $z_k$  et  $-z_k$
- la même épaisseur  $e_k$

### **3.3. Homogénéisation et théorie classique des stratifiés : [27]**

Cette technique permet de simplifier les calculs en étudiant le comportement de la structure ramenée à son feuillet moyen au lieu de traiter par une approche complètement tridimensionnelle

chacun des plis de la coque mince supposés être en état plan de contrainte, d'où un comportement mécanique bidimensionnel du pli. Dans les axes d'orthotropie, la loi de Hook du pli K s'écrit :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{66} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Les constantes de rigidité s'expriment en fonction des modules de l'ingénieur suivant les expressions :

$$Q_{11} = \frac{E_L}{1 - \frac{E_T}{E_L} \nu_{LT}^2} \quad Q_{22} = \frac{E_T}{E_L} Q_{11} \quad (3.2)$$

$$Q_{12} = \nu_{LT} Q_{22} \quad Q_{66} = G_{LT}$$

Dans le repère structural, la relation (3.1) devient

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q'_{11} & Q'_{12} & 0 \\ Q'_{12} & Q'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q'_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

En effectuant un changement de base sur les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  on obtient :

$$\begin{bmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_{LT} \end{bmatrix}_K = T' \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}_k \quad (3.4)$$

En introduisant les matrices A, B, D, on obtient la relation qui relie les efforts généralisés sur la coque à la déformation et à la courbure de son feuillet moyen.

$$\begin{bmatrix} N \\ M_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_m \\ K \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Avec :

$$A = [A_{ij}] \text{ Avec } A_{ij} = \sum_{k=1}^n (h_k - h_{k-1})(Q'_{ij})_k$$

$$B = [B_{ij}] \text{ Avec } B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (h_k^2 - h_{k-1}^2)(Q'_{ij})_k \quad (3.6)$$

$$D = [D_{ij}] \text{ Avec } D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (h_k^3 - h_{k-1}^3)(Q'_{ij})_k$$

A : matrice de membrane qui relie les efforts dans le plan à la déformation du feuillet moyen.

D : matrice de flexion qui relie les moments aux courbures du feuillet moyen.

B : matrice de couplage, est nulle lorsque l'empilement présente une symétrie miroir lorsque la matrice de couplage est non nulle, une charge dans le plan de la coque induit un

déplacement transversal qui peut être du même ordre de grandeur, voire plus important que celui dans le plan.

Les expressions de ces contraintes peuvent être réécrites, en introduisant  $M$  et  $I$ , sous la forme :

$$\sigma_{xx}^k = a_{xx}^k \frac{M}{I} z, \quad (3.7)$$

$$\sigma_{yy}^k = a_{yy}^k \frac{M}{I} z, \quad (3.8)$$

$$\sigma_{xy}^k = a_{xy}^k \frac{M}{I} z, \quad (3.9)$$

Avec :

$$a_{xx}^k = \left( Q_{11}^k D_{11}^* + Q_{12}^k D_{12}^* + Q_{16}^k D_{16}^* \right) \frac{h^3}{12},$$

$$a_{yy}^k = \left( Q_{12}^k D_{11}^* + Q_{22}^k D_{12}^* + Q_{26}^k D_{16}^* \right) \frac{h^3}{12}, \quad (3.10)$$

$$a_{xy}^k = \left( Q_{16}^k D_{11}^* + Q_{26}^k D_{12}^* + Q_{66}^k D_{16}^* \right) \frac{h^3}{12}.$$

Les expressions précédentes des contraintes ne sont correctes qu'à une distance assez éloignée ( $> h$ ) des bords de la poutre. Les résultats précédents ne sont donc applicables qu'au cas de poutres ayant un rapport  $b/h$  assez élevé.

La contrainte de cisaillement dans les couches s'écrit alors :

$$\sigma_{xz} = \frac{3Q}{2bh} \left[ 1 - 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (3.11)$$

La contrainte de cisaillement est maximum pour  $z=0$ , soit :

$$\sigma_{xz}(z=0) = \tau_0 = \frac{3Q}{2bh} \quad (3.12)$$

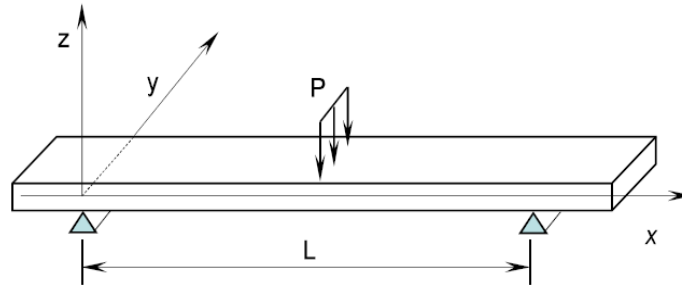
La relation (3.26) peut alors être réécrite sous la forme :

$$\sigma_{xz} = -a_{xx}^k \tau_0 \left[ 4 \left( \frac{z}{h} \right)^2 + d_k \right] \quad (3.13)$$

Ou les nouvelles constantes  $d_k$  sont déterminées en assurant la continuité de la contrainte  $\sigma_{xz}$  dans l'épaisseur de la poutre.

**3.3.1. Flexion 3-points :**

Considérons une poutre en flexion 3points (figure 3.1).la symétrie du problème conduit à ne considérer qu'une moitié de poutre.



**Figure 3.1.** Élément poutre en flexion 3-points.

Les contraintes de la couche k s'écrivent :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -6a_{xx}^k \frac{P}{bh^3} xz \\ \sigma_{yy}^k &= -6a_{yy}^k \frac{P}{bh^3} xz \\ \sigma_{xy}^k &= -6a_{xy}^k \frac{P}{bh^3} xz \end{aligned} \tag{3.14}$$

Ces contraintes sont maximales pour  $x= L/2$ , soit :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^k &= -3a_{xx}^k \frac{P}{bh^3} z \\ \sigma_{yy}^k &= -3a_{yy}^k \frac{P}{bh^3} z \\ \sigma_{xy}^k &= -3a_{xy}^k \frac{P}{bh^3} z \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dans le cas d'une poutre en matériau homogène isotrope :  $a_{xx} = 1$ , et la contrainte normale

d'écrit:  $\sigma_{xx}^k = -\frac{3PL}{bh^3} z$  (3.16)

La contrainte de traction maximale est atteinte sur la face inférieure ( $z= h/2$ ), et s'exprime comme suit :

$$\sigma_{xx \max}^k = \sigma_0 = \frac{3PL}{2bh^2} \tag{3.17}$$

La contrainte dans la couche k d'un stratifié peut donc s'écrire sous la forme :

$$\sigma_{xx}^k = -2a_{xx}^k \sigma_0 \frac{z}{h} \tag{3.18}$$



### 3.4. Matériaux :

Différents types des stratifiés croisés sont élaborés constitués de E-Glass et UM Graphite Epoxy (Ultra Mod Graphit). Ils sont différenciés par la séquence d'empilement et par le rapport des épaisseurs des couches orientées  $0^\circ$  et  $90^\circ$ . les stratifiés désignés par STRC1 à STRC4, comportent 16 plis choisis pour d'assurer une épaisseur des éprouvettes à peu près constante. La mise en œuvre des stratifiés est réalisée par moulage sous vide en utilisant la technique dite du sac. Les plis sont stratifiés et imprégnés à température ambiante, puis moulée sous vide (dépression 30KPa) pendant 10 heures entre le moule et le contre moule après interposition de divers tissus de moulage. Les éprouvettes ont été découpées à l'aide d'une tronçonneuse à disque diamantée à partir de plaques de 30 cm x 30 cm selon la norme ASTM D 790.

#### 3.4.1. Les propriétés intrinsèques des matériaux :

*Matériau 01 : UM Graphite /Epoxy (Ultra Mod Graphit) – en [MPa]*

$$\begin{aligned} E_1 &= 2.2E8 & E_2 &= 9.6E6 & E_3 &= 9.6E6 \\ G_{12} &= 4.8E6 & G_{13} &= 4.8E6 & G_{23} &= 3E6 \\ \nu_{12} &= 0.25 & \nu_{13} &= 0.25 & \nu_{23} &= 0.31 \\ X_t &= 7.6E5 & X_c &= 6.9E5 & Y_t &= 2.4E4 \\ Y_c &= 1.7E5 & S &= 8E4 \end{aligned}$$

*Matériau 02 : E-Glass /Epoxy – en [MPa]*

$$\begin{aligned} E_1 &= 4.5E7 & E_2 &= 1.2E7 & E_3 &= 1.2E7 \\ G_{12} &= 5.5E6 & G_{13} &= 5.5E6 & G_{23} &= 5E6 \\ \nu_{12} &= 0.19 & \nu_{13} &= 0.3 & \nu_{23} &= 0.31 \\ X_t &= 1.02E6 & X_c &= 6.2E5 & Y_t &= 4E4 \\ Y_c &= 1.4E5 & S &= 8E4 \end{aligned}$$

Avec :

$x_t$  : La contrainte de traction a la rupture selon l'axe x

$x_c$  : La contrainte de compression a la rupture selon l'axe x

$y_t$  : La contrainte de traction a la rupture selon l'axe y

$y_c$  : La contrainte de compression a la rupture selon l'axe y

$S$  : La contrainte de cisaillement a la rupture

### 3.4.2. Caractéristiques géométriques des éprouvettes :

Longueur totale  $L=90$  mm

Longueur entre appuis  $l=70$ mm

Largeur  $b=15$ mm

Epaisseur  $h=4$  mm

La charge  $P= -1200$  N

### 3.5. Modélisation par élément finis :

Les progrès réalisés ces dernières années dans le domaine des calculateurs, tant par la puissance de calcul que par une interactivité toujours plus grande et des interfaces homme/machine sans cesse améliorées, ont contribué à une large diffusion de la conception assistée par ordinateur (CAO) et amené une grande diffusion des logiciels de calcul dans le monde industriel.

Les difficultés d'utilisation de codes de calcul par les éléments finis sont de quatre ordres : la modélisation elle-même, l'aspect numérique de la résolution, l'interprétation et la validation des résultats, enfin la syntaxe et les conventions du code utilisé. Les trois premières difficultés doivent être abordées d'un point de vue physique et le code ne doit être qu'un outil pour la résolution de problème.

#### 3.5.1. Modèle et éléments utilisés :

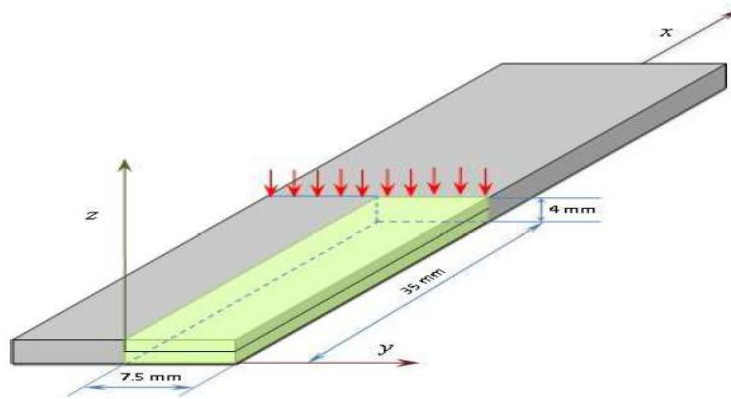
Notre étude s'est focalisée sur les comportements en statique linéaire des stratifiés croisés dans le cas de la flexion 3-points. Nous avons utilisé le logiciel ABAQUS pour calculer la distribution des contraintes. Les modèles établis utilisent successivement l'élément Shell 3D d'ABAQUS. Les modèles ainsi établis permettent de déterminer les contraintes de cisaillement dans les plis.

### 3.6 Travail effectué :

L'objet de ce chapitre est l'étude de la variation des contraintes de cisaillement en fonction de l'orientation des fibres et le type de matériaux pour une poutre composée de 16 plis.

Les différentes symétries géométriques de la poutre permettent de ne considérer que le 1/2 de la structure (figure 3.2). Le maillage de cette structure comprend 525 éléments quadrilatères à 8 nœuds et 6 degrés de liberté (d. d. l) par nœud.

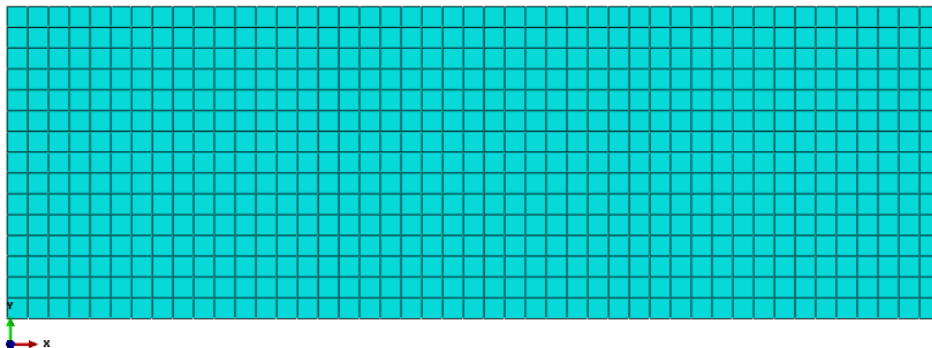
Nous pouvons déterminer les contraintes de cisaillements dans les différents plis.



**Figure 3.2** définition de la structure et les empilements testés.



**Figure 3.3.** Condition aux limites de modèle.



**Figure 3.4.** Maillage.

### 3.7. Présentation graphique des stratifiés étudiés :

Les propriétés intrinsèques des matériaux utilisés (E-Glass/Epoxy et UM Graphite/Epoxy (Ultra Mod Graphit)) sont dans le titre précédente 3.4.1 :

**3.7.1 Le premier stratifié  $[(0_2/90_2)_2]_s$**  : est un stratifié constitué de 16 plis : les plis sont orientés dans la direction  $90^\circ$  et  $0^\circ$ .

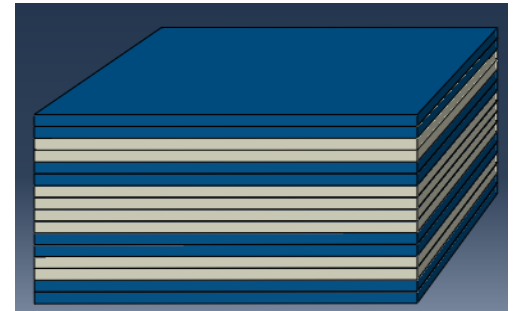
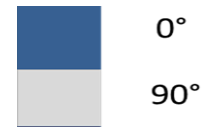
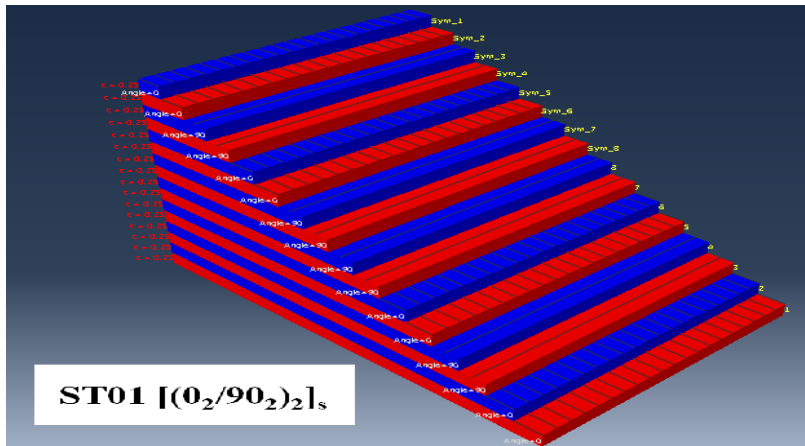


Figure 3.5. Désignation du stratifié  $[(0_2/90_2)_2]_s$

3.7.2 Le deuxième stratifié  $[(0_2/90_2)_s]_s$  : est un stratifié constitué de 16 plis: les plis sont orientés dans la direction 0° et 90° superposé entre eux respectivement.

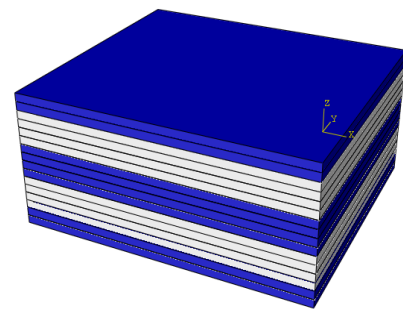
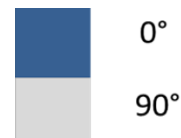
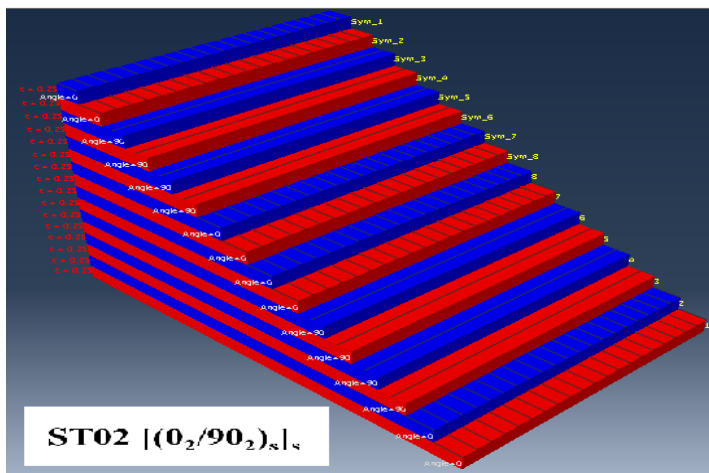


Figure 3.6. Désignation du stratifié  $[(0_2/90_2)_s]_s$ .

3.7.3 Le troisième stratifié  $[(0 / 90)_4]_s$  : est un stratifié constitué de 16 plis de fibre: les plis sont orientés dans la direction 0° et 90°.

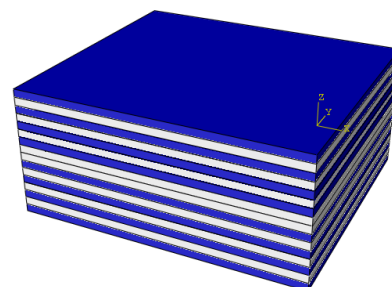
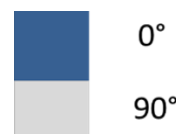
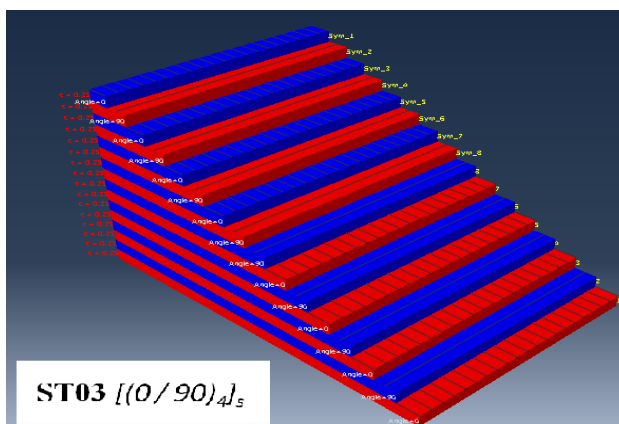


Figure 3.7. Désignation du stratifié  $[(0 / 90)_4]_s$ .

3.7.4 Le quatrième stratifié  $[0_4 / 90_4]_s$  : est un stratifié constitué de 16 plis de fibre : les 4

premiers plis sont orienté dans la direction  $0^\circ$  et les 4 autre sont orientés dans la direction  $90^\circ$  superposé entre eux respectivement.

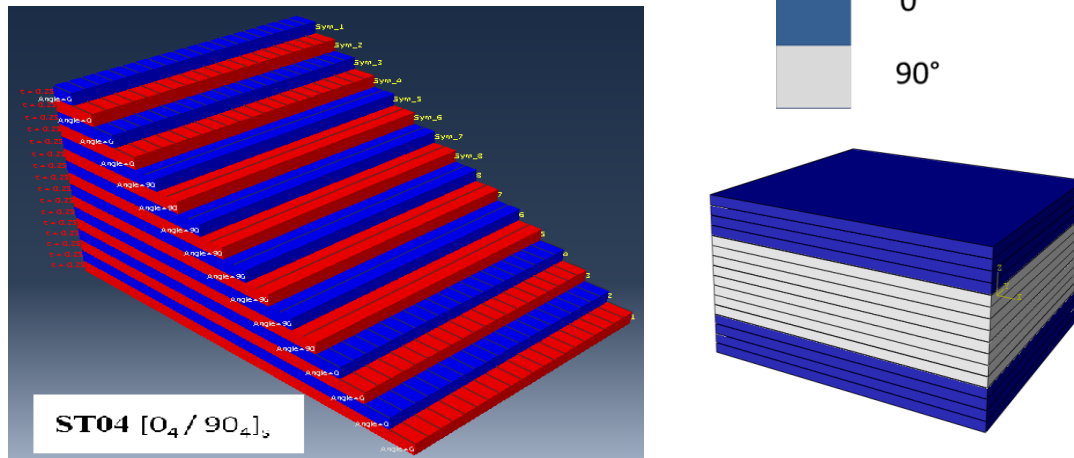


Figure 3.8. Désignation du stratifié  $[0_4 / 90_4]_s$  .

### 3.8. Résultats et analyses :

D'une part, la détermination analytique, par la théorie des stratifiés, des champs de contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur du composite pour quatre stratifiés croisés STC1, STC2, STC3 et STC4 sont établis. Un programme en Fortran 90 est élaboré,

D'autre part, nous avons établi un modèle d'éléments finis en utilisant le logiciel ABAQUS permettant de déterminer : les champs de contraintes à travers l'épaisseur des stratifiés exprimés, dans les repères globaux et d'orthotropie.

L'influence de l'empilement des couches et le type de matériau sur la variation des contraintes à travers l'épaisseur est représentée sur les figures 3.9 (a, b, c, d, e, f, g et h) pour les différents stratifiés étudiés pour comparaison la variation des contraintes  $\tau_{xz}$  pour une poutre homogène, est tracées sur les mêmes figures

Les résultats obtenus permettent de dégager les constatations suivantes :

#### - La contrainte de cisaillement

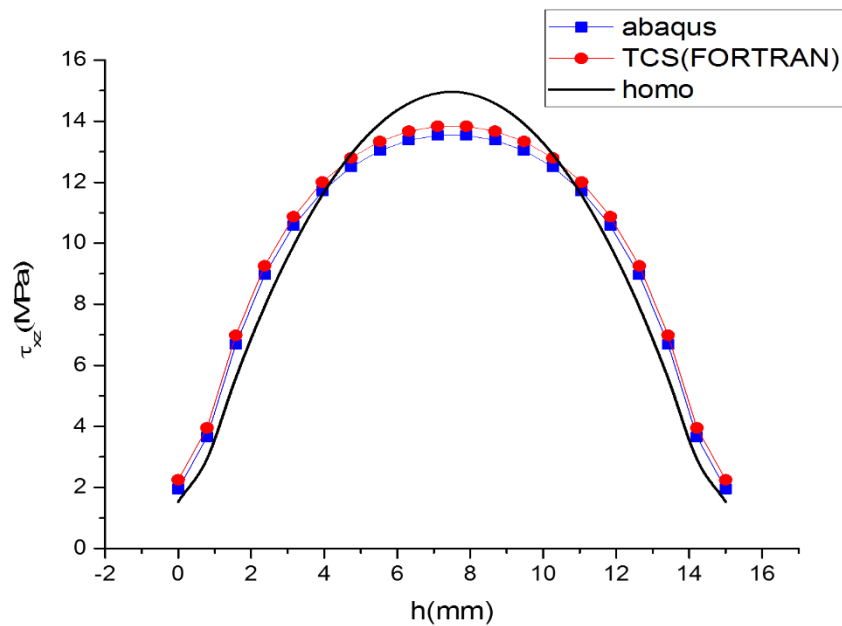
##### 3.8.1. Distributions des champs des contraintes de cisaillement $\tau_{xz}$ dans les quatre stratifiés

Pour tous les stratifiés, les valeurs maximales des  $\tau_{xz}$  sont situées sur les axes de symétrie (au niveau de la fibre neutre). Plus le stratifié est confiné, plus la contrainte est faible.

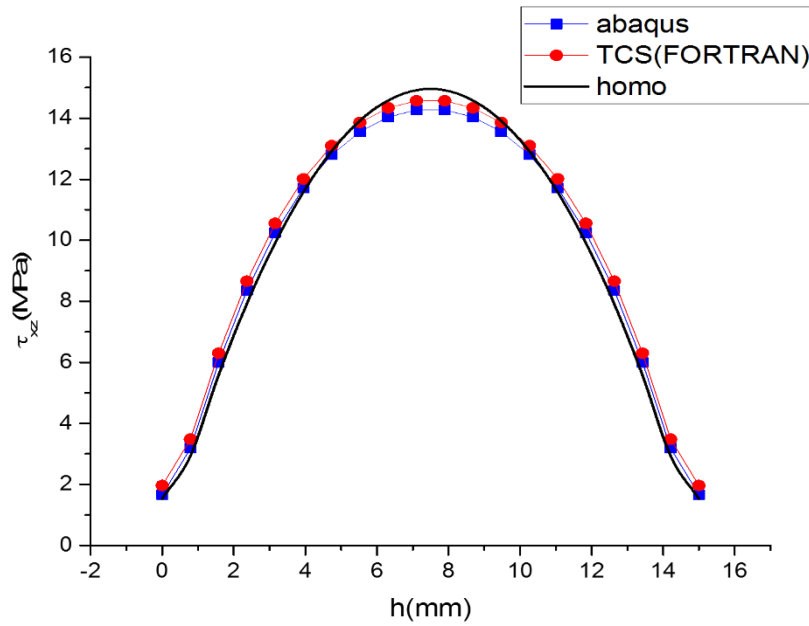
Les résultats obtenus montrent que la distribution des contraintes dépend de type de matériau et du type d'empilement et que leurs variations diffèrent nettement de la variation donnée par la théorie classique des poutres homogènes.

Les figures 3.9 (a, b, c, d, e, f, g et h) représentent la variation des contraintes de cisaillement  $\tau_{xz}$  à travers l'épaisseur dans le cas des stratifiées et d'une section homogène.

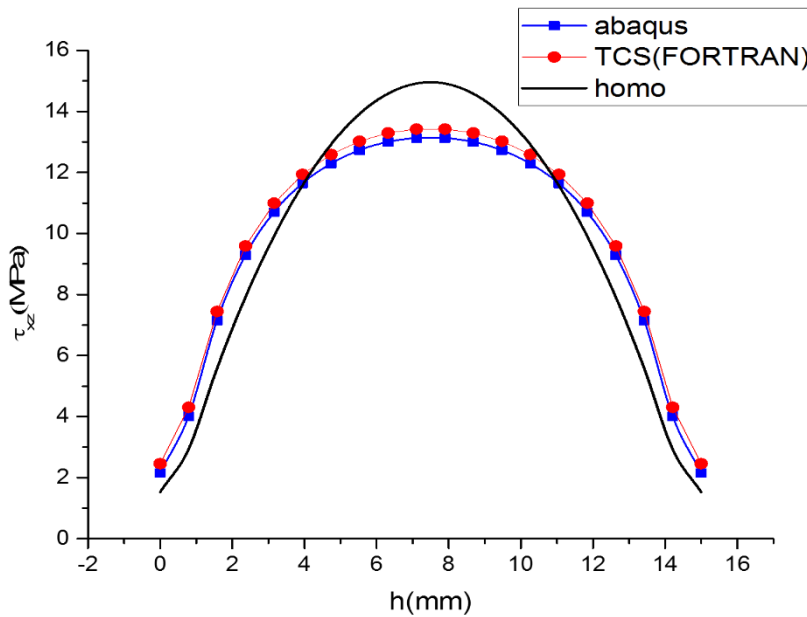
### 3.8.1.1 .Le premier matériau : UM Graphite /Epoxy



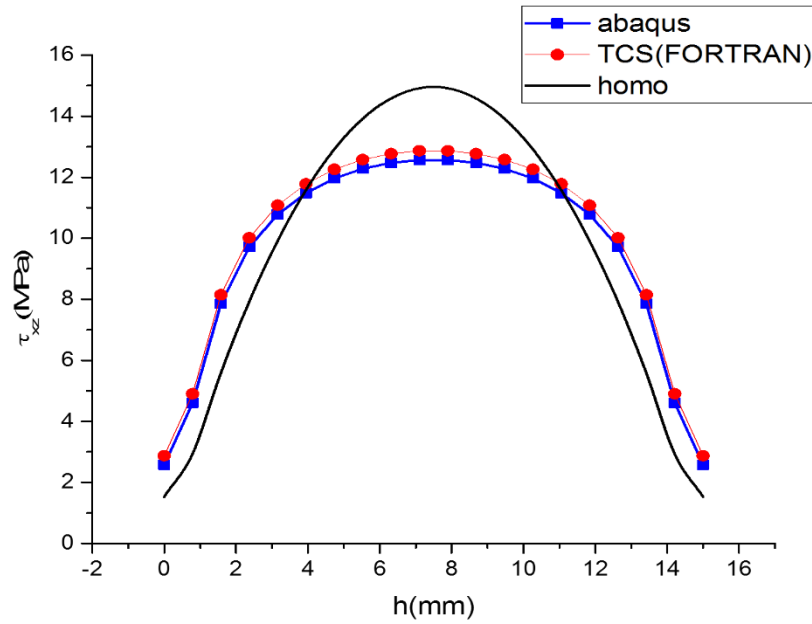
**Figure 3.9a.** Variation de la contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  à travers l'épaisseur du stratifié STC1 [(0<sub>2</sub>/90<sub>2</sub>)<sub>2</sub>] s (UM Graphite /Epoxy)



**Figure 3.9b.** Variation de la contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  à travers l'épaisseur du stratifié STC2  $[(0_2 / 90_2)_s]_s$  (UM Graphite /Epoxy)

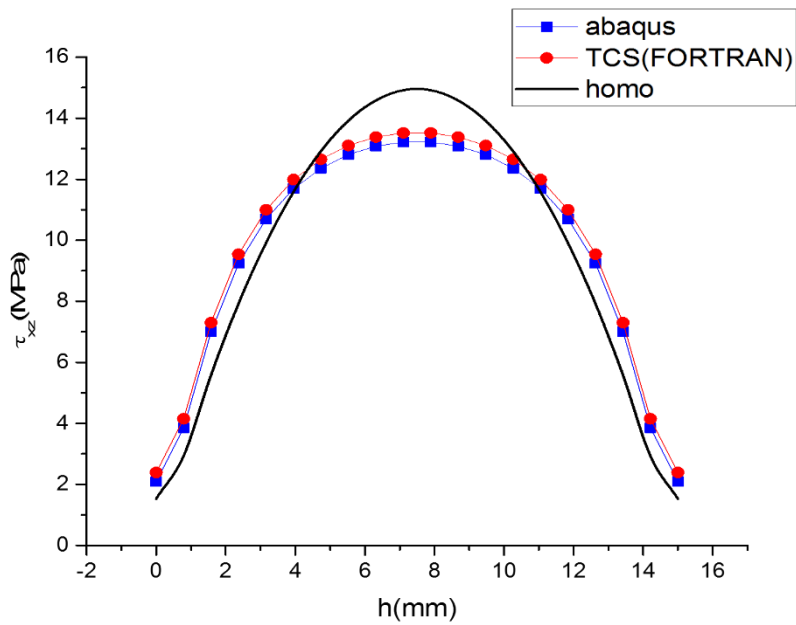


**Figure 3.7c.** Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié STC3  $[(0 / 90)_4]_s$  (UM Graphite /Epoxy)



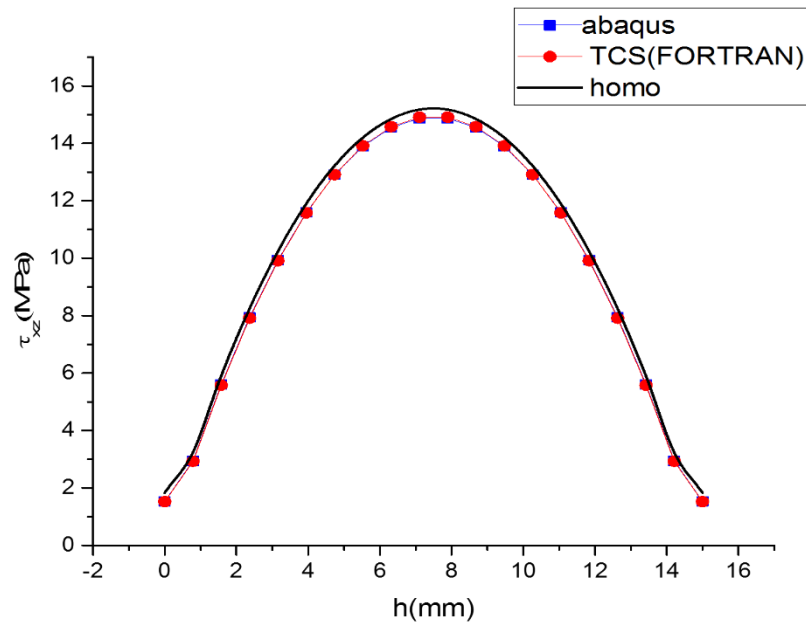
**Figure 3.9d.** Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié STC4 [0<sub>4</sub> / 90<sub>4</sub>]<sub>s</sub> (UM Graphite/ Epoxy)

**3.8.1.2. .Le deuxième matériau : E-Glass /Epoxy**

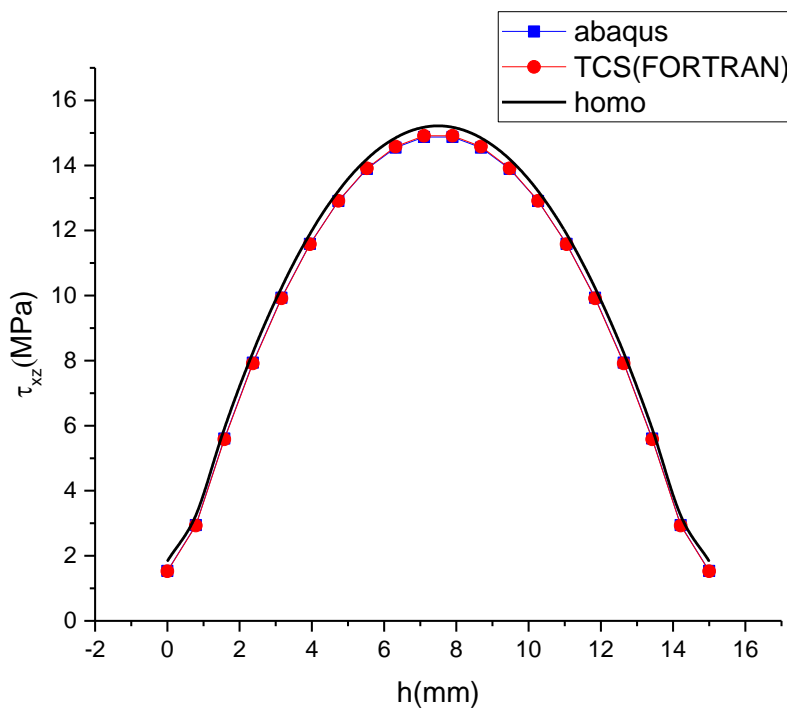


**Figure 3.9e.** Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié STC1 [(0<sub>2</sub> / 90<sub>2</sub>)<sub>2</sub>]<sub>s</sub> (E-Glass /Epoxy)

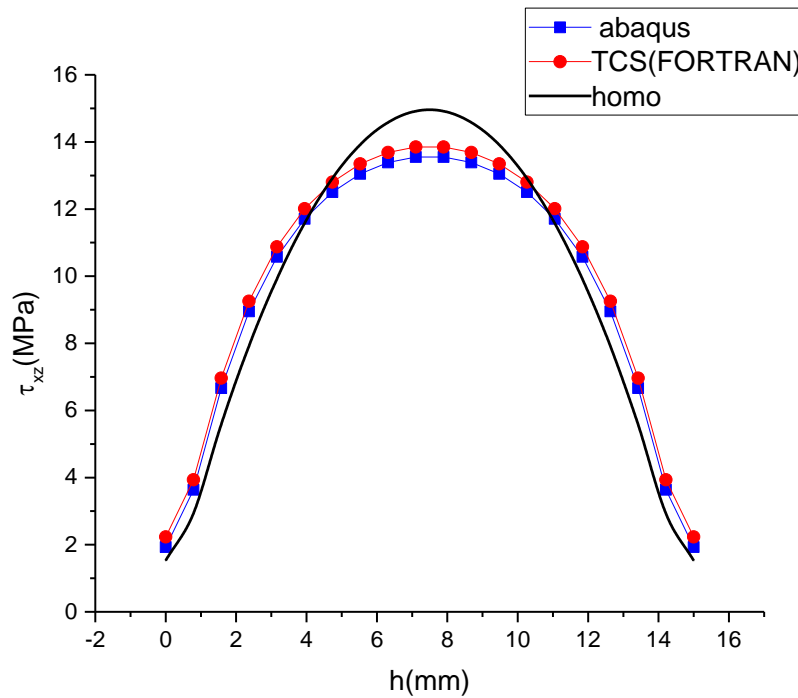




**Figure 3.9f.** Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié STC2 [(02 / 902) s] s (E-Glass/ Epoxy)



**Figure 3.9g.** Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié STC3 [04 / 904] s (E-Glass/ Epoxy)



**Figure 3.9h.** Variation de la contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur du stratifié STC4 [0<sub>4</sub> / 90<sub>4</sub>] s (E-Glass /Epoxy).

D'après les figures 3.9 (a, b, c, d, e, f, g et h), on remarque que les résultats obtenus montrent que la contrainte de cisaillement maximum dépend de l'empilement et que la variation de la contrainte de cisaillement maximum dépend de l'empilement et que la variation de la contrainte diffère nettement de la variation donnée par la théorie classique des poutres.

### 3.9. CONCLUSIONS

L'étude de l'influence de la séquence d'empilement et le type de matériau par l'utilisation de la théorie des stratifiés et le logiciel (ABAQUS) pour la détermination des distributions des champs de contraintes permettent de dégager les points suivants :

- La distribution des contraintes dépend du type d'empilement et que leurs variations sont différentes des poutres homogènes ;
- Les résultats issus du modèle EF sont en bonne concordance avec ceux obtenus par la théorie des stratifiés.
- Plus le stratifié est confiné, plus les contraintes  $\tau_{xz}$  sont moins importantes.

# Chapitre

## 04

Approche numérique et analytique : de la détermination du module de cisaillement dans les poutres sandwichs.

---

La pensée n'est qu'un éclair dans la nuit. Mais c'est cet éclair qui est tout.

Henri POINCARÉ

---

## Chapitre 04 : approche numérique et analytique : de la détermination du module de cisaillement dans les poutres sandwichs

### 4.1. Introduction

L'utilisation des composites sandwichs n'a cessé d'augmenter dans le secteur industriel. Au cours du siècle dernier, Le potentiel élevé de ces solutions pour des applications structurales, comme une alternative aux matériaux traditionnels, découle de leur légèreté, d'un meilleur ratio rigidité/masse ainsi qu'une meilleure durabilité [28], le développement de nouveaux matériaux, le besoin des hautes performances et les structures à poids faible assurent que la construction sandwich continuera à être en demande dans différents domaines technologiques.

Ainsi, un panneau sandwich est une structure fabriquée à partir de 3 couches : une âme de faible densité insérée entre deux peaux fines et rigides. Cette composition de sandwich permet d'avoir une excellente performance mécanique avec un minimum de masse, l'âme en mousse polymère et l'âme en nid-d'abeilles sont souvent utilisées dans les structures sandwich exigeant une grande résistance, comme les coques des navires et les avions.

La norme ASTM C393 (ASTM, 2008) définit la structure sandwich comme suit : « Une structure sandwich est une forme spéciale des composites laminés composés par différents matériaux collés les uns contre les autres dont le but est de compenser les propriétés de chaque composant permettant ainsi d'améliorer le comportement de toute la structure » [28].

Un exemple de structure sandwich à base de nid-d'abeilles est présenté sur la figure 4.1.

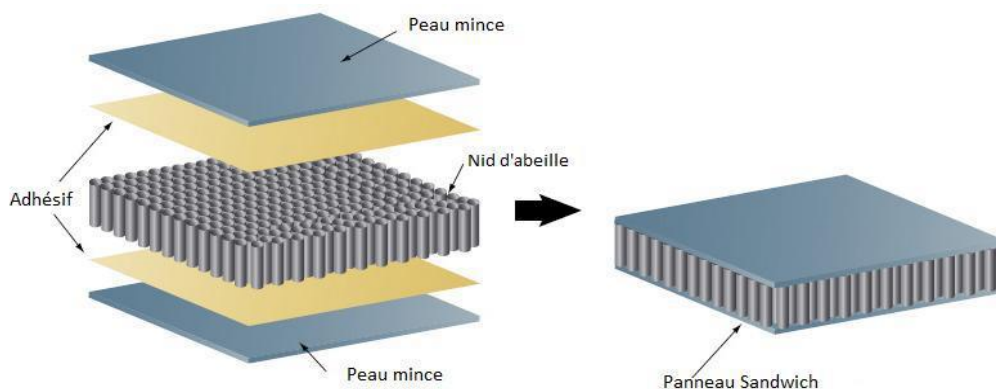


Figure 4.1 Structure sandwich à base de nid d'abeilles [28].

La meilleure rigidité d'un panneau sandwich est atteinte grâce à l'interaction de ses composants sous l'application d'une charge de flexion sur le panneau. En effet, l'âme prend le chargement en cisaillement en créant une distance entre les peaux qui prennent à leur tour les chargements dans le plan, l'une en traction et l'autre en compression.

## ABRÉVIATIONS

FPB: four point bending (flexion 4-point).

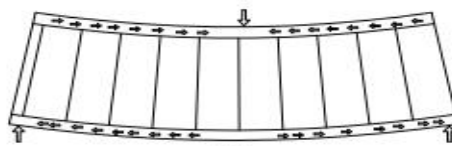
TPB: three point bending (flexion 3-point).

CLPT : classical laminate plate theory (théorie classique des plaques laminées).

HOST : high order shear theories (théorie d'ordre Supérieur de cisaillement).

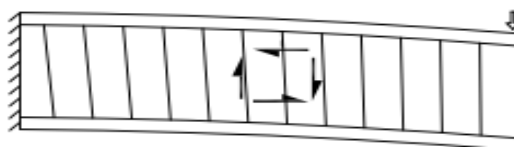
## 4.2. Effet sandwich

Chaque élément d'une structure sandwich remplit des fonctions différentes vis-à-vis de la réponse mécanique de la structure. Les épaisseurs des peaux sont choisies pour résister à la traction, la compression et le cisaillement induits par le chargement en flexion (Figure 4.2) [28].



**Figure 4.2** Répartition des contraintes dans une structure sandwich : Contraintes dans les peaux [28].

Pour compenser les contraintes de cisaillement, l'âme du sandwich est choisie en donnant l'importance aux propriétés mécaniques de cisaillement. Concernant l'interface adhésive entre les peaux et l'âme, il est recommandé d'avoir une bonne propriété d'adhérence pour pouvoir transférer les contraintes de cisaillement à l'âme (Figure 4.3).

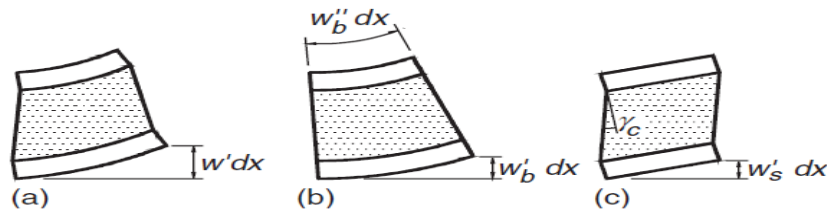


**Figure 4.3.** Répartition des contraintes de cisaillement dans la structure sandwich [28].

Pour les structures ayant une rigidité de cisaillement relativement faible, tel que les poutres sandwich avec des faces rigides et un cœur conforme, la déformation de cisaillement constitue généralement une partie relativement importante de la déformation totale lorsqu'elle est soumise à la flexion. La déviation d'une poutre sandwich peut être séparée en deux parties :

$$w = w_b + w_s \tag{4.1}$$

Où  $w_b$  est la déformation due à la flexion et  $w_s$  est la déformation due au cisaillement. Une illustration schématique des différents modes de déformation est présentée à la figure 4.4. La déformation par cisaillement de cœur peut donc être obtenue par la mesure de l'angle  $\gamma_c$ , tel qu'illustré à la figure 4.4(c), indépendamment de la déformation par flexion superposée.



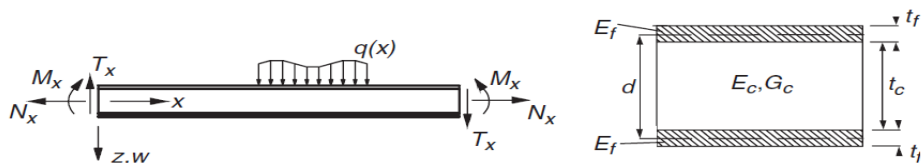
**Figure 4.4.** (a) déformation totale, (b) flexion, et (c) cisaillement [5].

#### 4.2.1. Distribution des contraintes

La partie de flexion de la déflexion provoque un champ de contraintes direct dans le sandwich selon

$$\sigma_f = \frac{M_x z E_f}{D}, \quad \frac{t_c}{2} < |z| < \frac{t_c}{2} + t_f \tag{4.2}$$

$$\sigma_c = \frac{M_x z E_c}{D}, \quad |z| < \frac{t_c}{2} \tag{4.3}$$



**Figure 4.5.** les conventions des poutres sandwich [5].

Où  $\sigma_f$  et  $\sigma_c$  sont les contraintes dans les faces et le cœur, respectivement,  $M_x$  est le moment de flexion agissant,  $z$  est la distance transversale par rapport à l'axe neutre de la poutre,  $E_f$  et  $E_c$

sont les modules Young de peau et cœur, respectivement, et  $t_f$  et  $t_c$  sont les épaisseurs correspondantes.  $D$  est la rigidité de flexion, qui est définie comme

$$D = b \int E z^2 dz = \frac{E_f t_f^3 b}{6} + \frac{E_f t_f d^2 b}{2} + \frac{E_c t_c^3 b}{12} \tag{4.4}$$

Où  $b$  est la largeur de la poutre. La convention des signes adoptée est illustrée à la figure 4.4, où  $T_x$  est la force transversale,  $N_x$  est la force normale et  $G_c$  représente le module de cisaillement du cœur. La contrainte de cisaillement dans les faces sandwich est donnée par

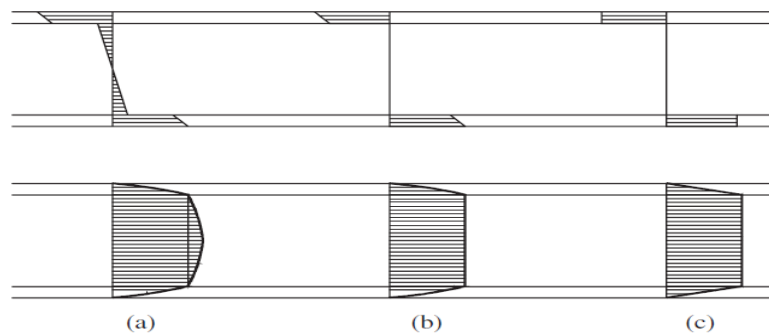
$$\tau_f(z) = \frac{T_x}{D} \frac{E_f}{2} \left( \frac{t_c^2}{4} + t_c t_f + t_f^2 - z^2 \right), \quad \frac{t_c}{2} < |z| < \frac{t_c}{2} + t_f \tag{4.5}$$

Et de même pour le cœur par

$$\tau_c(z) = \frac{T_x}{D} \left[ \frac{E_f t_f d}{2} + \frac{E_c}{2} \left( \frac{t_c^2}{4} - z^2 \right) \right], \quad |z| < \frac{t_c}{2} \tag{4.6}$$

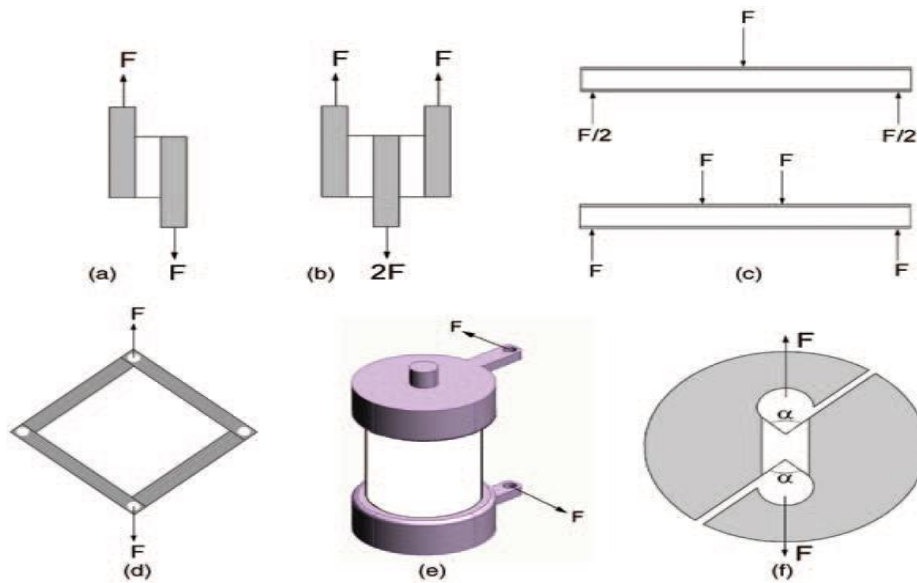
La répartition des contraintes normales et de cisaillement est illustrée à la figure 4.5(a). Si les champs de contraintes  $E_c \ll E_f$  se rapprochent des formes idéalisées illustrées à la figure 4.5(b), et si en plus  $t_f \ll t_c$ , les champs de contraintes idéalisées supplémentaires de la figure 4.5(c) s'appliquent. Pour ces dernières conditions idéalisées (figure 4.5(c)), les formules pour les contraintes directes et de cisaillement sont approximatives comme suit :

$$\sigma_c = 0, \quad \sigma_f(z) = \pm \frac{M_x}{t_f b d}, \quad \tau_c(z) = \frac{T_x}{b d}, \quad \tau_f(z) = 0. \tag{4.7}$$



**Figure 4.6.** contrainte normale et cisaillement due à la flexion : (a) solution exacte, (b)  $E_c \ll E_f$ , (c)  $E_c \ll E_f$  et  $t_c \gg t_f$  [5].

Donc il existe plusieurs méthodes d'essai pour l'évaluation des propriétés de cisaillement du cœur. La plupart des fabricants de matériaux publient des données de cisaillement évaluées à l'aide de la norme d'essai de cisaillement à un bloc. D'autres méthodes comprennent l'essai de cisaillement à double chevauchement, l'essai de flexion à trois points (TPB) et à quatre points (FPB), l'essai de cisaillement sur panneau, l'essai de cisaillement à torsion, et l'essai de cisaillement présenté par Arcan et al [32]. Dans ce qui suit appelé l'essai de cisaillement à Arcan. Les différentes méthodes d'essai de cisaillement sont illustrées à la figure 4.6 et décrites plus en détail ci-dessous.



**Figure 4.7.** Les essais principales de cisaillement : a) cisaillement à un seul bloc, b) cisaillement à double chevauchement, c) flexion à trois et quatre points, d) cisaillement de panneaux, e) cisaillement de torsion et f) cisaillement d'Arcan [5].

#### A. Essai de cisaillement à un bloc

Le but est d'acquérir un champ de contraintes de cisaillement uniforme dans l'échantillon et de minimiser la rotation et la flexion. Cependant, la géométrie de l'échantillon et la charge donnent lieu à des zones où des contraintes mixtes sont présentes. Sur les bords, les contraintes de traction peuvent provoquer une rupture de l'échantillon qui n'est donc pas régie uniquement par le cisaillement. Une analyse effectuée par Bendery et al. [31] sur la mousse Rohacell, ont montrés que la contrainte de cisaillement n'était pas constante sur toute la longueur de l'échantillon. Il y avait un écart significatif entre la contrainte de cisaillement moyenne et la contrainte de cisaillement maximale, et cet écart dépendait de l'échantillon. Il y avait un écart significatif entre la contrainte de cisaillement moyenne et la contrainte de cisaillement



maximale, et il a été démontré que cet écart dépendait des dimensions de l'échantillon. D'autres inconvénients de la méthode sont que la préparation des échantillons d'essai exige beaucoup de travail et que le cœur n'est pas testé dans des conditions de service.

La méthode d'essai de cisaillement à un bloc induit également de façon inhérente des concentrations de contraintes aux coins bi matériaux entre le matériau du cœur examiné et les blocs de charge (coins supérieurs gauche et inférieur droits du matériau du noyau à la figure 4.6(a)).

Les concentrations de contraintes dans ces coins donnent souvent lieu à des fissures, qui s'amorcent à des niveaux de charge relativement faibles et se développent de façon stable dans le matériau du cœur à mesure que la charge augmente.

### **B. Essai de cisaillement à double chevauchement**

L'essai de cisaillement à double chevauchement a été conçu pour éviter la rotation induite par l'essai de cisaillement à un bloc. Cependant, les effets de bordure sont toujours présents et la préparation de l'échantillon est encore plus laborieuse que pour l'essai de cisaillement à bloc unique. En outre, l'essai de cisaillement à double chevauchement nécessite beaucoup plus de matériaux.

### **C. Essais de flexion en trois et quatre points**

Les méthodes d'essai TPB et FPB utilisent le fait que les forces transversales sont constantes dans de grandes sections des poutres testées. Les conditions sandwich idéalisées mentionnées précédemment permettent d'extraire certaines des propriétés constituant le sandwich, par exemple les propriétés de traction des faces et les propriétés de cisaillement du cœur, à condition que l'échantillon soit correctement conçu.

Toutefois, comme l'extraction de la déformation de cisaillement à partir des essais n'est pas simple, les méthodes sont principalement utilisées pour les mesures de la résistance au cisaillement plutôt que pour la caractérisation de la contrainte de cisaillement des matériaux de base. Le principal problème avec les deux méthodes d'essai est que l'introduction de la charge est susceptible de provoquer une indentation locale des échantillons.

La méthode TPB est particulièrement sensible puisque la charge localisée au niveau du support central est deux fois plus élevée qu'au niveau des supports extérieurs. Un avantage de ces méthodes est qu'elles permettent le chargement des composants sandwich dans des conditions de service authentiques.

Caprino et Langella [29] ont utilisé le TPB pour évaluer le comportement de cisaillement des matériaux de base. L'intention était de concevoir une méthode d'essai de cisaillement du cœur exempt des effets finaux présents dans les méthodes de cisaillement des blocs. Afin d'éviter l'indentation locale, des parties du matériau de base ont été remplacées par des blocs de bois, qui ont été collés dans la poutre sandwich sous les introductions de charge. Il a été signalé que la méthode était meilleure que les essais de cisaillement à un seul bloc, principalement en raison de l'observation selon laquelle des fissures se sont formées et se sont développées dans les échantillons dans ce dernier cas, ce qui aurait causé une défaillance prématurée. La façon dont les blocs de bois introduits ont modifié les champs de contraintes étudiés n'est toutefois pas abordée dans le travail présenté.

#### **D. Essai de cisaillement du panneau**

Dans les travaux d'O'Connor [30], on a signalé que l'essai de cisaillement des panneaux était plus adapté aux matériaux disponibles en vrac qu'aux couches sandwich minces en raison de la microstructure souvent inhomogène des matériaux de base. La microstructure inhomogène donne lieu à des bandes de déformation localisées inhibant un champ de déformation uniforme dans l'échantillon. En outre, l'essai de cisaillement des panneaux mesure les propriétés de cisaillement dans le plan, tandis que les propriétés d'intérêt primaire dans les applications sandwich sont les propriétés de cisaillement hors plan.

#### **E. Essai de cisaillement de torsion**

L'essai de cisaillement de torsion présente les avantages d'utiliser de petits échantillons et un petit banc d'essai, en comparaison avec les essais de cisaillement de bloc. Cependant, un inconvénient majeur est que l'échantillon est soumis à un gradient de déformation radial rendant impossible l'évaluation des résultats sans connaissance à priori du comportement du matériau.

#### **F. Test de cisaillement d'Arcan**

Arcan et al. [32] ont conçu une géométrie d'échantillon initialement destinée à la caractérisation de cisaillement de matériaux renforcés de fibres. La géométrie de l'échantillon a été conçue pour générer un champ de contraintes de cisaillement pur et uniforme. Au début, les échantillons étaient collés à un appareil et chargés comme illustré à la figure 4.6(f).

### **4.3. Flexion 4 points**

La figure 4.8 illustre une disposition d'essai FPB avec les distributions correspondantes de l'effort tranchant et du moment de flexion. Le niveau constant des efforts transversaux entre les appuis extérieurs et intérieurs permet d'estimer de façon fiable la contrainte de cisaillement dans ces régions, puisque la précision est alors relativement indépendante de l'emplacement longitudinal des gages. En outre, avec le choix approprié du matériau et de l'épaisseur des faces, on pourrait obtenir une contrainte de cisaillement pratiquement constante à travers l'épaisseur de cœur. La contrainte de cisaillement est alors donnée par

$$\tau_{c,\min} \approx \tau_{c,\max} \approx \tau_{c,\text{ideal}} = \frac{F}{2bd} \tag{4.8}$$

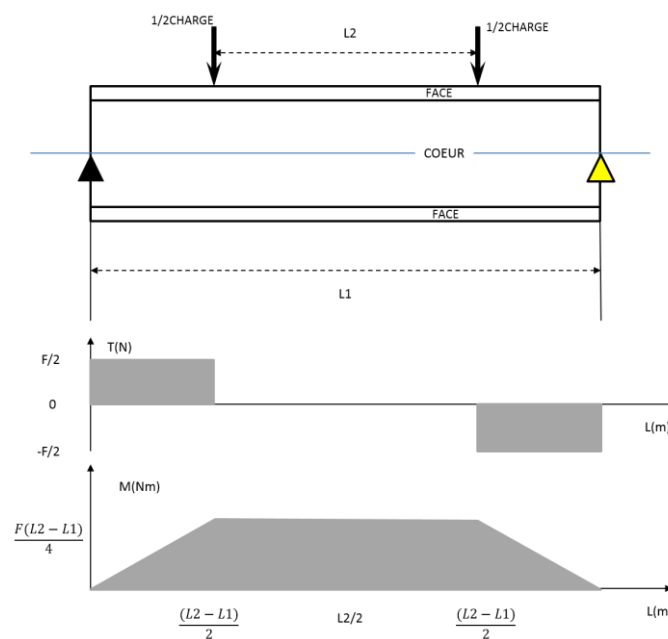


Figure 4.8. FPB schématique.

### 4.3.1. Modèles et éléments utilisés

Notre étude s'est focalisée sur les comportements en statique linéaire des sandwichs dans le cas de la flexion 4-point. nous vont utiliser une partie analytique par les formules (4.8), (4.9) et (4.10) et l'autre est numérique utilisant le logiciel *ABAQUS*, nous allons montrer l'effet de la rigidité  $E_c/E_f$  et l'effet de la variation d'épaisseur de cœur  $t_c/t_f$ , sur le comportement mécanique des poutres sandwichs à partir de la distribution des contraintes de cisaillement  $\tau_{13}$  à travers l'épaisseur de la poutre.

#### 4.3.1.1. Caractéristiques mécaniques des poutres [27]

$E_f = 70000 \text{ MPa}$

$E_f = E_c$ ,  $E_f = 10 E_c$ ,  $100 E_c$  et  $100000 E_c$  MPa

$\nu = 0.3$

$P = -200$  N

Avec :

$E_f$  : Module de Young des peaux (MPa)

$E_c$  : Module de Young du cœur (MPa).

$\nu$  : coefficient de poisson.

$P$  : La Charge (N).

### 4.3.1.2. Caractéristiques géométriques des poutres

Longueur totale  $L = 500$  mm

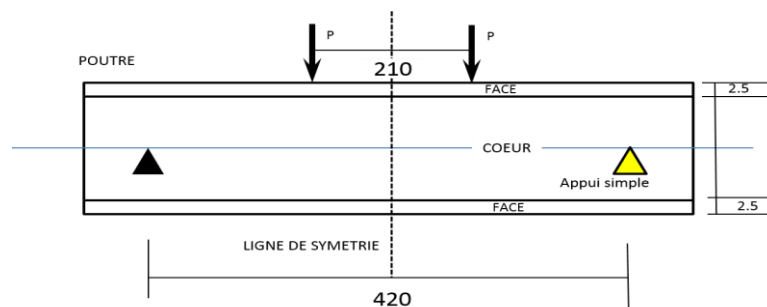
Longueur entre appuis  $I = 420$  mm

Longueur entre charge  $L' = 210$  mm

Largeur  $b = 20$  mm

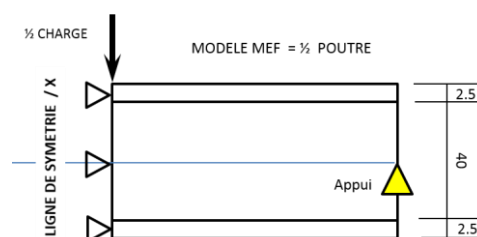
Epaisseur  $t_c = 40$  mm

Epaisseur de peau  $t_f = 2.5$  mm



**Figure.4.9** Définition de la structure.

La symétrie du problème conduit à ne considérer qu'une moitié de poutre.



**Figure.4.10** la moitié de poutre.

### 4.3.2 Approche analytique

Caprino et Langella [29] ont introduit un ensemble de paramètres non dimensionnels pour l'analyse des structures sandwich. Une approche similaire est ici adoptée avec l'utilisation des définitions de paramètres suivantes :

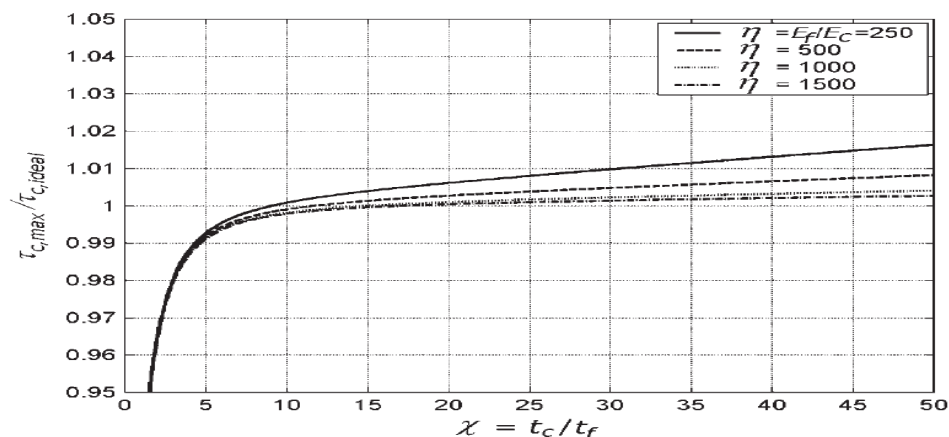
$$\chi = \frac{t_c}{t_f}, \quad \eta = \frac{E_f}{E_c} \tag{4.9}$$

L'évaluation de FPB sandwich est effectuée en supposant une liaison parfaite entre les faces et le cœur.

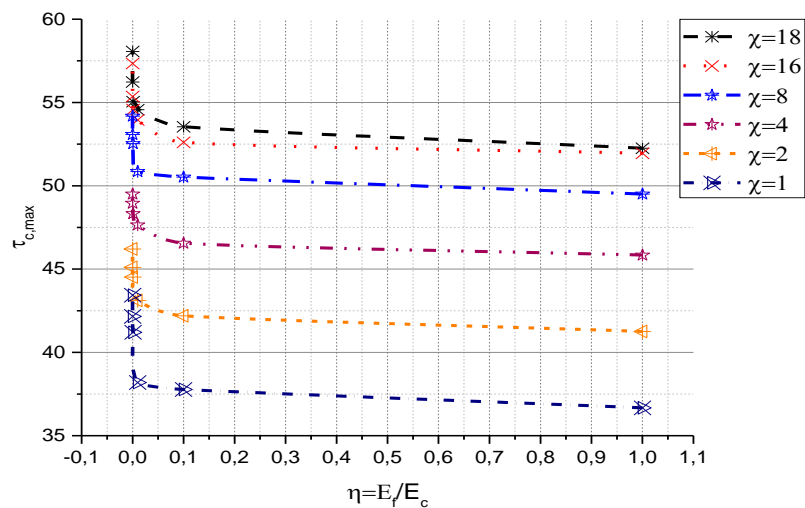
Il s'agit ici de concevoir la poutre sandwich de telle manière que la contrainte de cisaillement soit pratiquement constante à travers l'épaisseur du cœur et permette ainsi une évaluation simple des résultats d'essai. Une estimation de l'erreur maximale obtenue en supposant une contrainte de cisaillement constante à travers l'épaisseur pour une certaine poutre sandwich est obtenue en utilisant les équations (4.6), (4.8) et (4.9), formant le quotient

$$\frac{\tau_{c,max}}{\tau_{c,ideal}} = \frac{3}{2} \frac{4\eta + 8\eta\chi + 4\eta\chi^2 + \chi^2 + \chi^3}{8\eta + 12\eta\chi + 6\eta\chi^2 + \chi^3} \tag{4.10}$$

La variation de  $\tau_{c,max} / \tau_{c,ideal}$ , idéale pour différentes valeurs de  $\chi$  et  $\eta$  est illustrée dans la figure 4.11.



**Figure 4.11.** Précision de la répartition des contraintes idéalisée pour différents paramètres de la poutre sandwich [5].



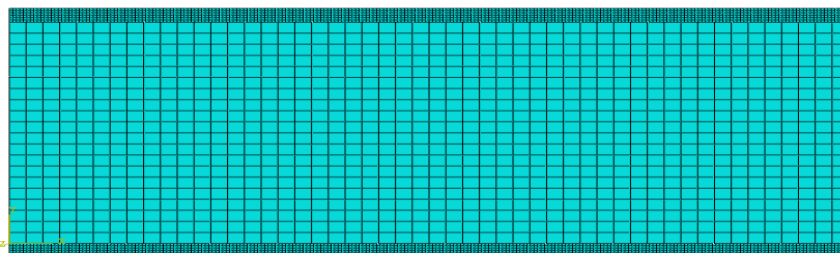
**Figure 4.12.** Précision de la répartition des contraintes idéalisée pour différents paramètres de la poutre sandwich.

D'après la figure 4.12. On remarque :

- Que le cœur se fatigue avant les peaux
- La contrainte est presque constante lorsque  $\eta$  augmente.
- Lorsqu'on augmente le rapport  $\chi = t_f/t_c$  la contrainte est très grande.

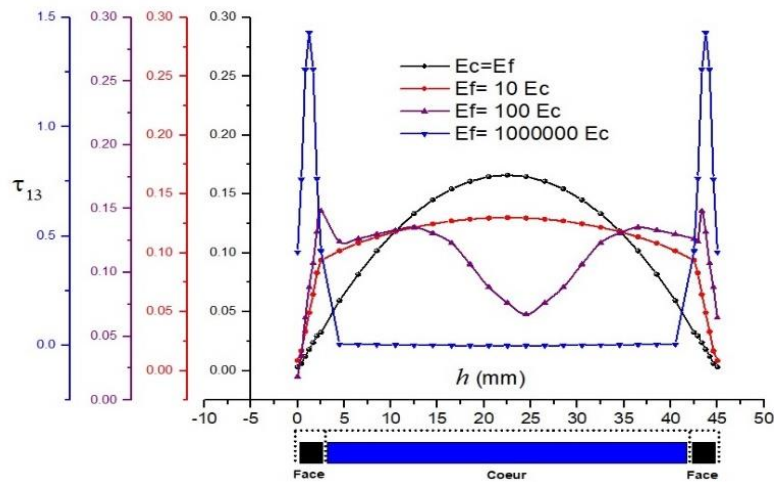
### 4.3.3. Modélisation par éléments finis

Dans cette partie d'analyse numérique nous allons montrer l'effet de la rigidité  $E_c/E_f$  et l'effet de l'épaisseur de cœur, sur le comportement mécanique des poutres sandwichs à partir de la distribution des contraintes de cisaillement  $\tau_{13}$  à travers l'épaisseur de la poutre.



**Figure 4.13.** Modèle EF -ABAQUS.

➤ Effet de la rigidité  $E_c/E_f$



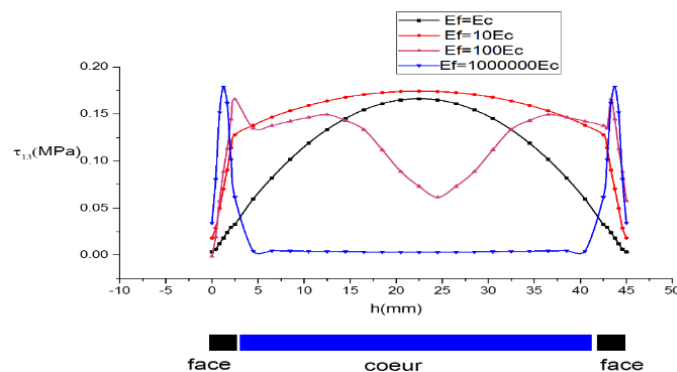
**Figure.4.14.** La variation de la contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  à travers l'épaisseur en fonction du rapport de rigidité  $E_f/E_c$ .

La figure 4.14 présente la variation des contraintes de cisaillement  $\tau_{13}$  à travers l'épaisseur en fonction du rapport de rigidité. En remarque que lorsqu'on augmente  $E_c$  par rapport  $E_f$  la contrainte augmente. Cette augmentation est lente lorsqu' $E_c$  est petit par rapport  $E_f$ .

La contrainte est max dans le cœur lorsque  $E_f=E_c$  est presque nul tant que  $E_f \gg E_c$ . Cette élévation est due probablement à l'augmentation de la rigidité flexionnelle due à l'augmentation de  $E_c$ .

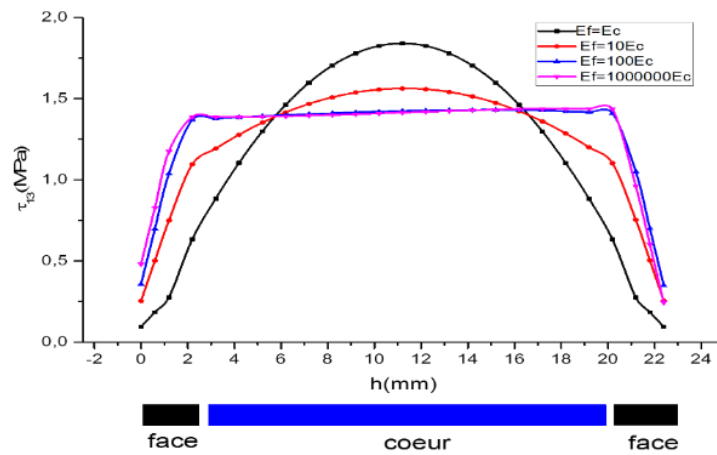
➤ Effet de rapport  $t_c/t_f$

1.  $t_c/t_f=16$



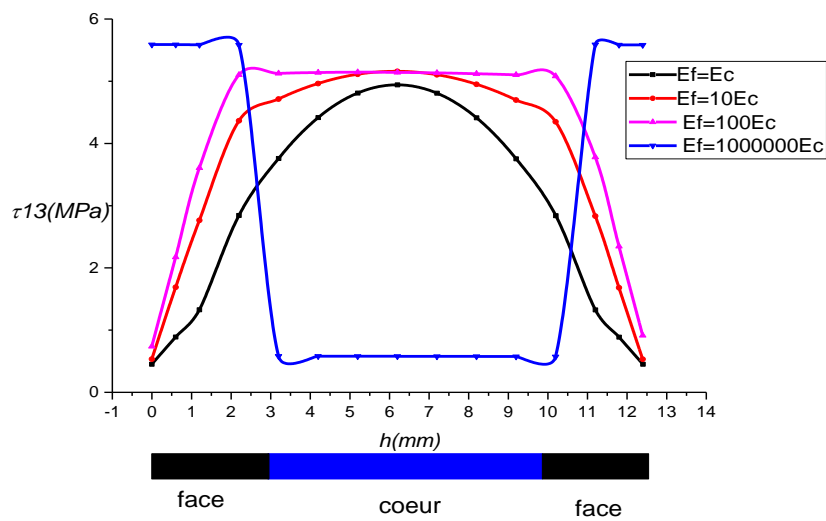
**Figure.4.15.** La variation de contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  en fonction de l'épaisseur de cœur  $h_c=40\text{mm}$ .

2.  $t_c/t_f=8$



**Figure.4.16.** La variation de contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  en fonction de l'épaisseur de cœur  $h_c=20\text{mm}$ .

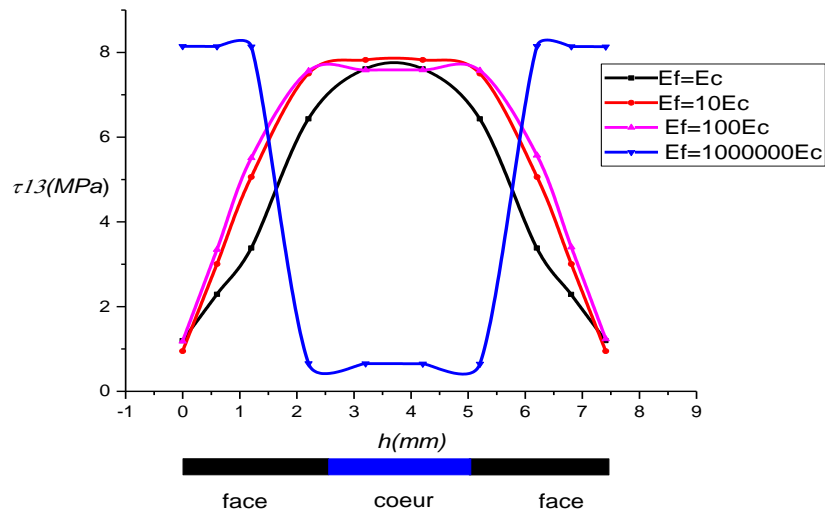
3.  $t_c/t_f=4$



**Figure.4.17.** La variation de contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  en fonction de l'épaisseur de cœur  $h_c=10\text{mm}$ .

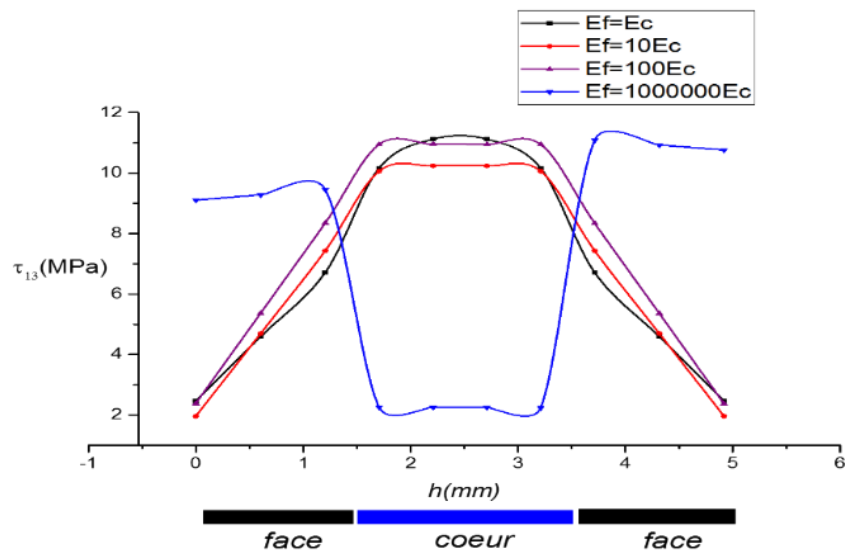
4.  $t_c/t_f=2$





**Figure.4.18.** La variation de contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  en fonction de l'épaisseur de cœur  $h_c=5\text{mm}$ .

**5.  $t_c/t_f=1$**



**Figure.4.19.** La variation de contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  en fonction de l'épaisseur de cœur  $h_c=2.5\text{mm}$ .

D'après les figure (4.14), (4.15), (4.16) , (4.17), (4.18) et (4.19) présentent la variation de la contrainte en fonction du rapport ( $t_c/t_f$ ). On constate que les valeurs de la contrainte diminuent avec l'augmentation des rapports d'épaisseurs de l'âme par rapport à celle des peaux. Cela est dû probablement à diminution la rigidité flexionnelle causée par l'excès de matériau de l'âme.

**4.3.4. Conclusion**

On conclut que :

- la contrainte dans le cœur croît avec l'augmentation de l'épaisseur d'âme.
- les peaux qui ont supporté la totalité de contraintes lorsque  $E_c \ll E_f$  et la contrainte dans le cœur est presque nulle.
- Beaucoup de paramètres liés au sandwich et à son hétérogénéité intrinsèque influent directement sur la valeur de la contrainte  $\tau$ 13.

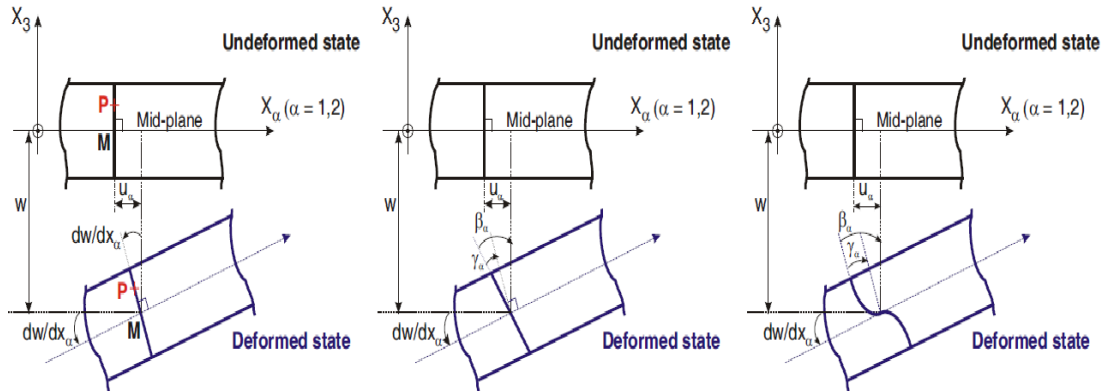
#### 4.4. La cinématique des différentes approches de définir le cisaillement transverse

La prise en compte du cisaillement transverse dans l'étude des matériaux composites peut s'avérer prépondérante pour obtenir des résultats cohérents et exploitables. Plusieurs approches existent pour le prendre en compte dans les structures composites. Ce phénomène a été étudié depuis très longtemps par les scientifiques, et plusieurs niveaux de complexité se distinguent dans la prise en compte du cisaillement transverse.

Le choix des hypothèses cinématiques de plus en plus élaborées peut servir à classer les nombreuses théories existantes sur les plaques.

La prise en compte du cisaillement transverse s'observe généralement par l'intermédiaire d'une fonction  $f(x_3)$ . Celle-ci est présentée dans le modèle général de déplacement d'un point M appartenant à la structure considérée, issue de la théorie des plaques multicouches.

Figure 4.20. Représente les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love, de Reissner-Mindlin et de Reddy pour la coupe transversale. Ces hypothèses sont directement liées à la modélisation de la déformation par cisaillement. La théorie classique des plaques laminées (CLPT) basée sur les hypothèses cinématiques de Kirchhoff-Love ne prend pas en compte le cisaillement à travers l'épaisseur, alors que la théorie du cisaillement de premier ordre (FOST) avec les hypothèses de Reissner-Mindlin et les théories du cisaillement d'ordre supérieur (HOST) développées par Reddy, et ensuite par Touratier représentent avec plus ou moins de précision le phénomène de cisaillement. Une autre approche consiste à prendre en compte les phénomènes liés aux interfaces entre les peaux et le cœur, comme la continuité des contraintes et des déformations à travers l'épaisseur du composite. Ainsi, les théories « zig-zig » ont été développées pour une meilleure prise en compte des phénomènes locaux liés aux empilements de couches. La première et la plus simple théorie de Kirchhoff-Love est assez précise pour les plaques minces. Une section transversale normale au plan médian reste droite et orthogonale au plan médian après flexion. Pour les plaques épaisses et molles, le cisaillement ne peut pas être négligé, il est pris en compte en enrichissant la formulation de déplacement sur toute l'épaisseur. De nombreuses améliorations existent, de l'approximation linéaire aux théories d'ordre supérieur.



**Figure 4.20** les théories de Kirchhoff-love, Reissner-Mindlin, et Reddy [17].

Il est intéressant de noter que la majorité de ces différentes fonctions de cisaillement transverse, permettant de considérer un gauchissement des sections, sont basées sur un modèle de développement polynomial, de puissances impaires, de la fonction  $f(x_3)$  de la forme suivante : [17].

$$f(x_3) = a_1 x_3 - a_3 \cdot \left( \frac{\pi^2}{3!} \cdot \frac{x_3^3}{h^2} \right) + a_5 \cdot \left( \frac{\pi^4}{3!} \cdot \frac{x_3^5}{h^4} \right) + \dots + (-1)^{\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot a_n \cdot \left( \frac{\pi^{(n-1)}}{n!} \cdot \frac{x_3^3}{h^{(n-1)}} \right) \quad (4.11)$$

La construction des fonctions  $f(x_3)$  s'établit alors par le choix des coefficients  $a_n$  induits par l'ordre choisi pour le développement. De très nombreuses études sont présentes dans la littérature, on distinguera

1. Kirchhoff-Love  $f(x_3) = 0$
2. Reissner-Mindlin  $f(x_3) = X_3$
3. Reddy  $f(X_3) = X_3 \left( 1 - \frac{4X_3^2}{3h^2} \right)$
4. Touratier  $f(X_3) = \frac{h}{\pi} \sin\left(\frac{\pi X_3}{h}\right)$
5. Karama  $f(X_3) = X_3 e^{-2\left(\frac{X_3}{h}\right)^2}$
6. Mantari  $f(X_3) = \sin\left(\frac{\pi X_3}{h}\right) e^{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi X_3}{h}\right)} + \frac{\pi}{2h} X_3$

Dans cette partie on va étudier le comportement mécanique des poutres en matériaux composite sandwich en évaluant le déplacement  $u_3$  dans la section de la poutre ( $x_1, x_2$ ).

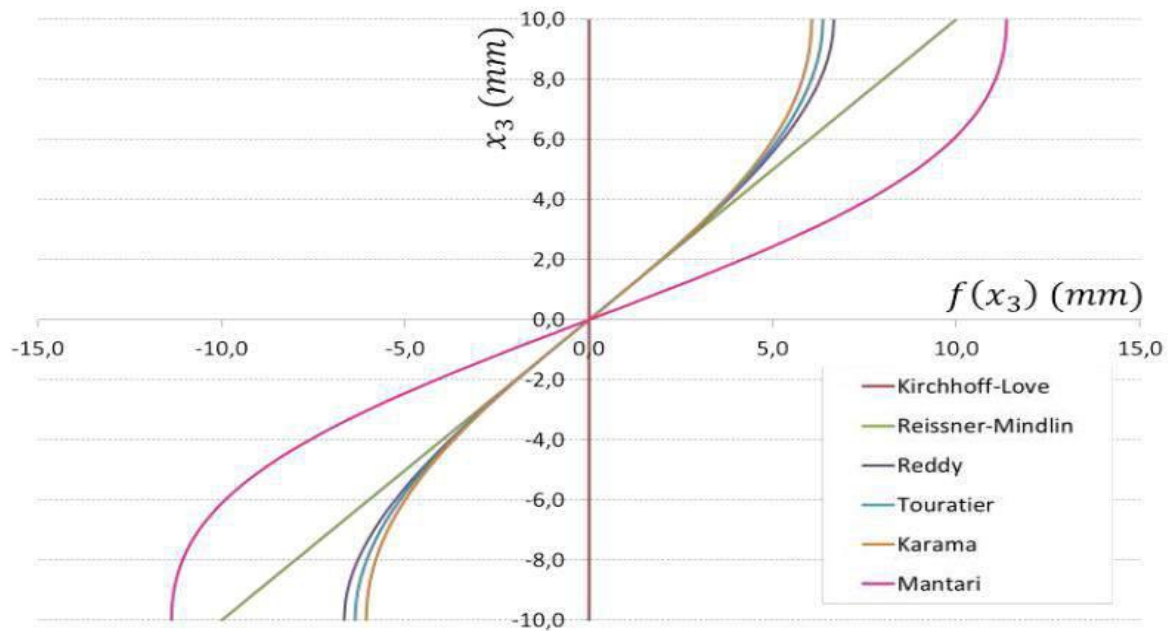


Figure 4.21 Exemple des fonctions de cisaillement transverse [19].

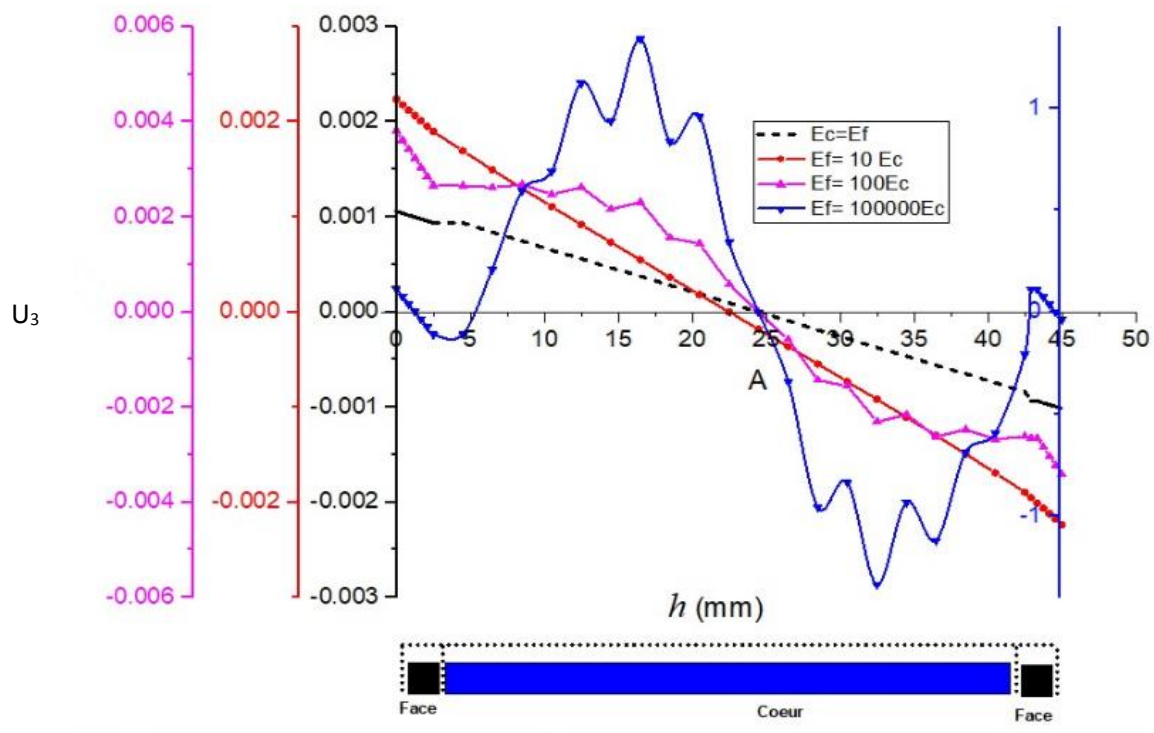


Figure 4.22. La variation de déplacement  $U_3$  à travers l'épaisseur de la poutre en fonction du rapport de rigidité  $E_f/E_c$ .

La figure 4.22 présente la variation de déplacement  $U_3$  à travers l'épaisseur de la poutre en fonction de rigidité  $E_f/E_c$ , on remarque que le gauchissement de la section est maximale lorsque  $E_f=100000E_c$ , les théories « zig-zig » et une valeur minimale lorsque  $E_c=E_f$  (section homogène), la théorie de Kirchhoff-Love.

## 4.5. Homogénéisation Analytique et Modélisation Numérique de nid d'abeilles

### 4.5.1. Introduction

L'intérêt de l'étude est de pouvoir homogénéiser le nida indépendamment des peaux, en remplaçant le nida de géométrie compliquée par un matériau homogène de propriétés mécaniques similaires dans les modèles analytiques et numériques. Le nid-d'abeilles est assimilable à un matériau orthotrope. Son homogénéisation passe tout d'abord par la détermination des constants élastiques de l'ingénieur qui sont les modules d'élasticité, les coefficients de Poisson et les modules de cisaillement. La connaissance du comportement mécanique des âmes, en particulier en cisaillement, est évidemment indispensable lors de la phase de conception des structures sandwich. L'estimation de ce comportement consiste à s'appuyer sur la structure répétitive des nids-d'abeilles pour réaliser des calculs d'homogénéisation. On peut prédire de nombreux coefficients élastiques toutefois, dans le cas général, les modules de cisaillement peuvent seulement être bornés avec ce type d'approche [27].

### 4.5.2. Approches existantes dans la littérature [27]

Trois constants élastiques caractérisent principalement le comportement du nid-d'abeilles. C'est le module d'élasticité  $E_3$  dans la direction perpendiculaire au plan 1-2, et les deux modules de cisaillement hors du plan  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ . Les autres modules de cisaillement sont généralement faibles. De plus, il s'avère que les nids-d'abeilles n'ont pas des coefficients de Poisson connus. Parmi les approches actuellement disponibles dans la littérature nous citons :

1. Une première solution proposée par Bitzer [34] est de prendre les deux modules d'élasticité dans le plan,  $E_1$ ,  $E_2$  égaux à un pour cent (1%) du module de la troisième direction. Le module de cisaillement  $G_{12}$  égal à un pour cent (1%) de la moyenne de  $G_{13}$  et  $G_{23}$  et tous les coefficients de poisson égaux à 0.1.
2. Une deuxième solution proposée par Chamis [35] est de réaliser un modèle E.F tridimensionnel détaillé de la structure nids d'abeilles, dans l'objectif de déterminer les propriétés équivalentes du cœur avec des chargements spécifiques.
3. Une troisième solution proposée par Grédiac [36] est d'effectuer la même analyse que celle proposée par Chamis, mais sur une seule cellule de base et d'en déduire les modules transverses de cisaillement équivalents.

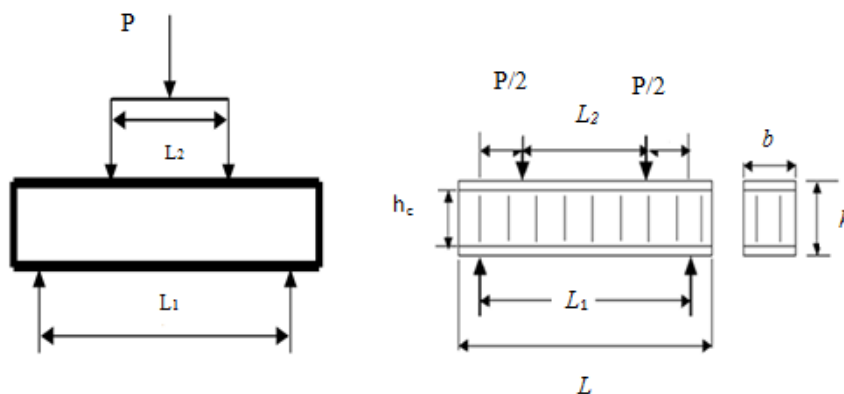
4. Une quatrième solution basée sur l'application des équations de la théorie de l'élasticité, proposée par Gibson [25] permet de calcul des différents modules dans le plan, en fonction des paramètres géométriques et mécaniques.

Dans cette partie nous allons explorer les solutions suivantes :

- a. Une solution basée sur l'homogénéisation des structures périodiques sur la base des travaux de Gibson [25].
- b. Une analyse par élément fini basée sur les travaux de HARKATI [27].

### 4.5.3. Travail effectué

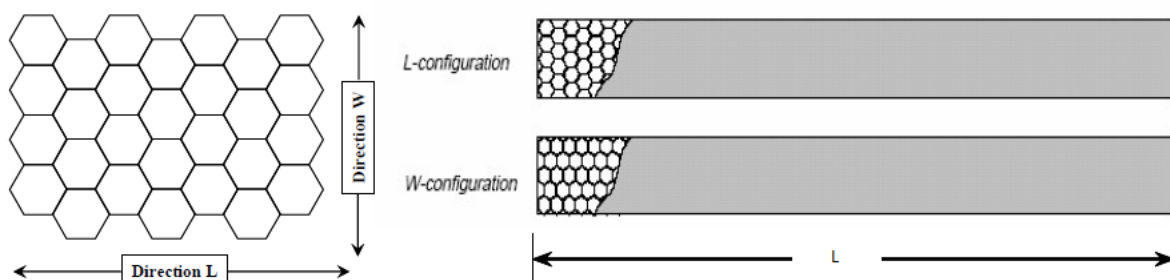
➤ **Géométrie et notations**



**Figure 4.23.** Poutre sandwich soumise à la flexion 4-point.

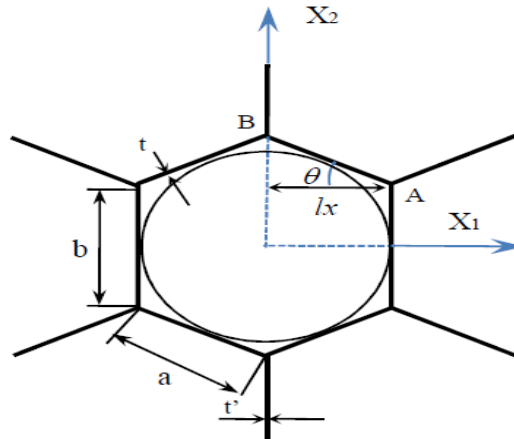
**Tableau 4.1.** Caractéristique géométrique des poutres.

	L (mm)	b (mm)	h (mm)	hc (mm)	tf (mm)	L2 (mm)	L1 (mm)	D=hc+tf (mm)
Poutre1	500	250	10	8.80	0.60	210	420	9.40
Poutre2	300	40	10	8.80	0.60	120	240	9.40



**Figure 4.24.** Configurations L et W et dimensions du panneau sandwich à nid d'abeilles [27].

Un nid d'abeille peut être caractérisé par un angle de cellule et quatre paramètres définis à partir des caractéristiques données dans le tableau 4.2.



**Figure 4.25.** Géométrie d'une cellule nida, vue de dessus.

**Tableau 4.2** paramètres géométriques de la cellule [27].

paramètres	Définition
$\theta$	Angle de cellule
$\phi$	Diamètre de cellule
$b$	Longueur d'une paroi centrale
$a$	Longueur d'une paroi inclinée
$t'$	Epaisseur d'une paroi centrale
$t$	Epaisseur d'une paroi inclinée
$h$	Hauteur du nid d'abeilles

➤ **Propriétés mécaniques des poutres**

**Tableau 4.3** Propriétés mécaniques des âmes.

Sandwich	Aluminium
	Aluminium
Ame	ECM

Taille de la cellule (mm)	6.4
Densité (Kg/m <sup>3</sup> )	82
Résistance au cisaillement (direction L) (MPa)	2.4
Module de cisaillement (direction L) (MPa)	430
Résistance au cisaillement (direction W) (MPa)	1.4
Module de cisaillement (direction W) (MPa)	220
Résistance à la compression (MPa)	4.5
Module de Yong (MPa)	70000
Résistance à la rupture (MPa)	268
Résistance à la traction (MPa)	367
Elongation à rupture (%)	13
Masse volumique de fusion (g/cm <sup>3</sup> )	2.73
Intervalle de fusion [°C]	640-655
Coefficient de poisson	0.33
Conductivité thermique [W/m°C]	180

#### ➤ Description du nid d'abeilles Alu-Alu ECM\*

ECM est un nid-d'abeilles métallique ultra léger utilisé principalement comme noyau dans les structures sandwiches, il est fabriqué à partir de feuilles en aluminium d'une épaisseur de 80 ou de 60 micromètres.

Le nid-d'abeilles ECM combine de façon idéale un poids très faible à une haute résistance mécanique. En plus, il possède une excellente conductibilité thermique et électrique et résiste parfaitement à la corrosion et à la chaleur.

Grâce à ces propriétés, le nid-d'abeilles ECM constitue un matériel idéal pour les constructions légères et comme surface d'appui pour les machines de découpe au jet d'eau.

Applications typiques :

· Carrosseries pour camions • conteneurs



- Bateaux • trains
- Mécanique • machines de découpe au jet d'eau
- Façades légères • matériels de sport.

➤ **Caractérisation du nid-d'abeilles**

L'étude se concentre sur le nid d'abeilles en Aluminium 3003 H19 / ECM 6.4-82 dont les caractéristiques géométriques sont :

$$\phi = 6.4mm ; a = b = \phi / \sqrt{3} = 3.695 ; t = 75\mu m ; h = 8.8mm$$

$$\theta = 30^\circ ; R_3 = 2.382$$

#### 4.6. Approches analytiques

Les différents modèles analytiques s'appuient sur la théorie d'élasticité avec des hypothèses sur les mécanismes de déformation des parois des cellules. Lorsqu'ils sont chargés dans le plan, les nidas peuvent se déformer par flexion et étirement des parois des cellules et aussi par pivotement des parois à leurs jonctions.

Plusieurs chercheurs ont formulé des modèles mathématiques basés sur l'un ou deux de ces mécanismes. Gibson a modélisé les modules dans le plan en supposant que les parois de cellule fléchissent comme des poutres.

**Tableau 4.5** Modules homogénéisée [25].

Module	Module homogénéisée
Module d'élasticité dans la direction X1	$E_1 = E_s \left( \frac{t}{a} \right)^3 \frac{(b/a + \sin \theta)}{\cos^3 \theta}$
Module de Young dans la direction X2	$E_2 = E_s \left( \frac{t}{a} \right)^3 \frac{(\cos \theta)}{(b/a + \sin \theta) \sin^2 \theta}$
Module de cisaillement dans le plan (X1-X2)	$G_{12} = E_s \left( \frac{t}{a} \right)^3 \frac{(b/a + \sin \theta)}{(b/a)^2 (1 + 2b/a) \cos \theta}$
Coefficient de Poisson dans le plan (X1-X2)	$\nu_{21} = \frac{(b/a + \sin \theta) \sin \theta}{\cos^2 \theta}$

Coefficient de Poisson dans le plan (X2-X1)	$\nu_{12} = \frac{\cos^2 \theta}{\left(\frac{b}{a} + \sin \theta\right) \sin \theta}$
Module d'élasticité dans la direction X3	$E_3 = E_s \left(\frac{t}{a}\right) \frac{\left(\frac{b}{a} + 2\right)}{2\left(\frac{b}{a} + \sin \theta\right) \cos \theta}$
Cisaillement transverse	$G_{23} = G_s \left(\frac{t}{a}\right) \frac{\cos \theta}{\left(\frac{b}{a} + \sin \theta\right)}$
Cisaillement transverse	$G_{13} \leq G_s \left(\frac{t}{a}\right) \frac{\left(\frac{b}{a} + \sin^2 \theta\right)}{\cos \theta \left(\frac{b}{a} + \sin \theta\right)}$ $G_{13} \geq G_s \left(\frac{t}{a}\right) \frac{\left(\frac{b}{a} + \sin \theta\right)}{\cos \theta \left(1 + \frac{b}{a}\right)}$
Coefficient de Poisson	$\nu_{32} = \nu_{31} = \nu \text{ (matériau solide)}$
	$\nu_{13} = \frac{E_1}{E_3} \nu_{31} \quad \nu_{23} = \frac{E_2}{E_3} \nu_{32}$

Ces propriétés mécaniques et les paramètres géométriques associés à chaque nida permettent d'évaluer leurs modules élastiques homogénéisés.

**Tableau 4.6** Modules élastiques homogénéisés du nida ECM 6.4-82.

Densité	82 (Kg/m <sup>3</sup> )
	L=3.69mm
E1	1.101
E2	1.101
E3	1533.342
G12	0.276
G13	294.873 max

G13	94.910 min
G23	491.455 max
G23	294.873 min
v12/	0.999
v21	0.999
v13	0.000
v23	0.000

#### 4.6.1. Calcul de module de rigidité D, le module de cisaillement en flexion N, le module de cisaillement de l'âme Ga et la flèche [28]

L'équation (4.12) donne la valeur du module de rigidité en flexion D (Nmm<sup>2</sup>).

$$D = \frac{P_1 L_1 \left[ 1 - \left( \frac{11L_1^2}{8L_2^2} \right) \right]}{48w_1 \left[ 1 - \left( \frac{2P_1 L_1 w_2}{P_2 L_2 w_1} \right) \right]} \quad (4.12)$$

L'équation (4.13) définit le module de cisaillement en flexion N exprimé en *Newtons*.

$$N = \frac{P_1 L_1 \left[ \left( \frac{8L_1^2}{11L_2^2} \right) - 1 \right]}{4w_1 \left[ \left( \frac{16P_1 L_1^3 w_2}{11P_2 L_2^3 w_1} \right) - 1 \right]} \quad (4.13)$$

Le module de cisaillement de l'âme du sandwich est obtenu par l'équation (4.14) ou (4.15) exprimé en MPa.

$$G_a = \frac{P_1 L_1 h_c \left[ \left( \frac{8L_1^2}{11L_2^2} \right) - 1 \right]}{w_1 b (h + h_c)^2 \left[ \left( \frac{16P_1 L_1^3 w_2}{11P_2 L_2^3 w_1} \right) - 1 \right]} \quad (4.14)$$

$$G_a = N \frac{4h_c}{(h + h_c)^2 b} \quad (4.15)$$

La déflexion totale d'une poutre en flexion quatre points est due à la flexion des peaux et au cisaillement du cœur à cause du faible module de cisaillement du noyau par rapport aux peaux.

$$\Delta = \frac{P(2L_1^3 - 3L_1L_2^2 + L_2^3)}{8Eb(h^3 - h_c^3)} + \frac{P(L_1 - L_2)h_c}{4GbD^2} \tag{4.16}$$

On remarque que cette équation lie directement les caractéristiques géométriques de l'échantillon, le module d'Young des peaux et le module de cisaillement du noyau à la déflexion totale. Cette relation peut donc être utilisée pour mesurer indirectement G.

$$G = \frac{p(L_1 - L_2)h_c}{4(h - A)bD^2}$$

avec (4.17)

$$A = \frac{p(2L_1^3 - 3L_1L_2^2 + L_2^3)}{8Eb(h^3 - h_c^3)}$$

Avec :

P1 et P2 : les charges en (N) ;

L1: distance entre appui (mm) ;

L2 : distance entre charge (mm) ;

h<sub>c</sub> : épaisseur de l'âme (mm) ;

b : largeur (mm) ;

h : hauteur totale (m) ;

w<sub>1</sub> et w<sub>2</sub> : les flèches (mm).

E,G module de Yong et de cisaillement (MPa).

D : distance entre ½ de la peau + cœur (mm).

**4.6.1.1. Analyse et comparaison entre module de rigidité et modules de cisaillement**

**Tableau 4.7** les différent propriétés de sandwich en flexion 4-point.

Sandwich	module de rigidité en flexion D (Nmm <sup>2</sup> ).	module de cisaillement en flexion (N).	Module de cisaillement de l'âme du sandwich Ga (MPa)	Module de cisaillement homogénéisé (MPa)	Module de cisaillement technique (MPa)	Déplacement Δ (mm)
ECM (Alu-Alu), 82 kg/m <sup>3</sup>						
P1	9642.86	14052.04	459.7	491.455	430	3.370
P2	5510.20	8029.74	399.8	491.455	430	7.575

D'après le tableau 4.7

- La rigidité du sandwich est proportionnelle à la géométrie de la poutre.
- Les coefficients élastiques obtenus par les différentes méthodes d'homogénéisations sont très satisfaisants.
- Les modèles analytiques présentés ci-dessus sont d'un grand intérêt dès qu'il s'agit d'apprécier l'influence des paramètres géométriques et mécaniques. Toutefois, pour les paramètres de cisaillement, ils ne donnent que des indications sur les bornes.

#### 4.6.2. Conclusion

- On conclut que la hauteur des cellules joue un rôle très important sur l'évaluation de  $G_a$ .
- Le module  $E_z$  est très important dans le comportement des structures sandwich, mais reste difficile à atteindre par le calcul analytique et les simulations numériques.
- La rigidité du sandwich croît avec l'augmentation des dimensions des poutres.

#### 4.7. Approches numériques

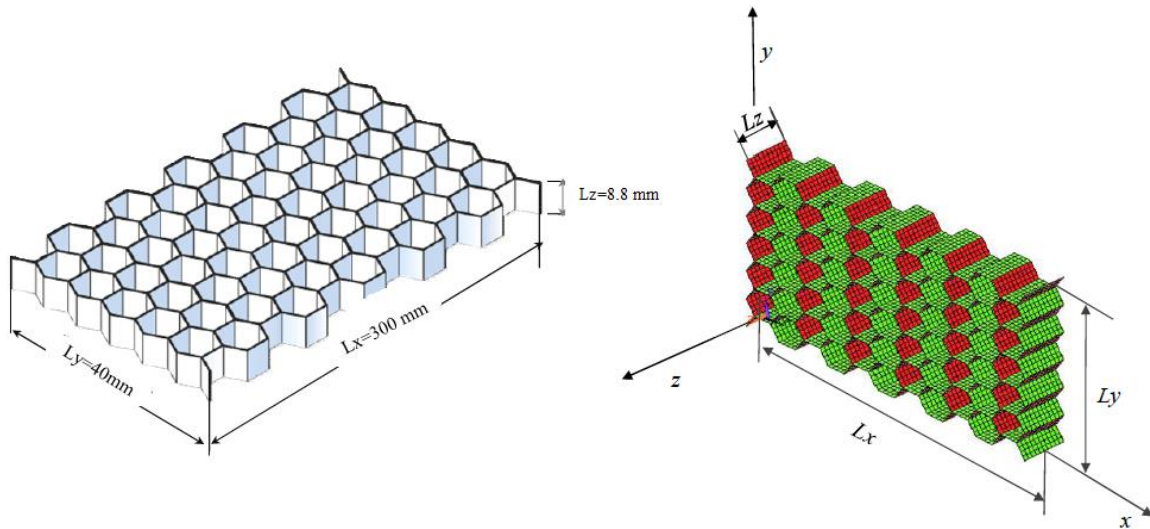
L'objectif de cette partie est le développement numérique par le logiciel (ABAQUS) pour l'homogénéisation d'une structure sandwich en nids-d'abeilles (nida) de deux poutres différentes. Le résultat analytique sera comparé à la simulation numérique.

##### 4.7.1 Principe d'homogénéisation numérique

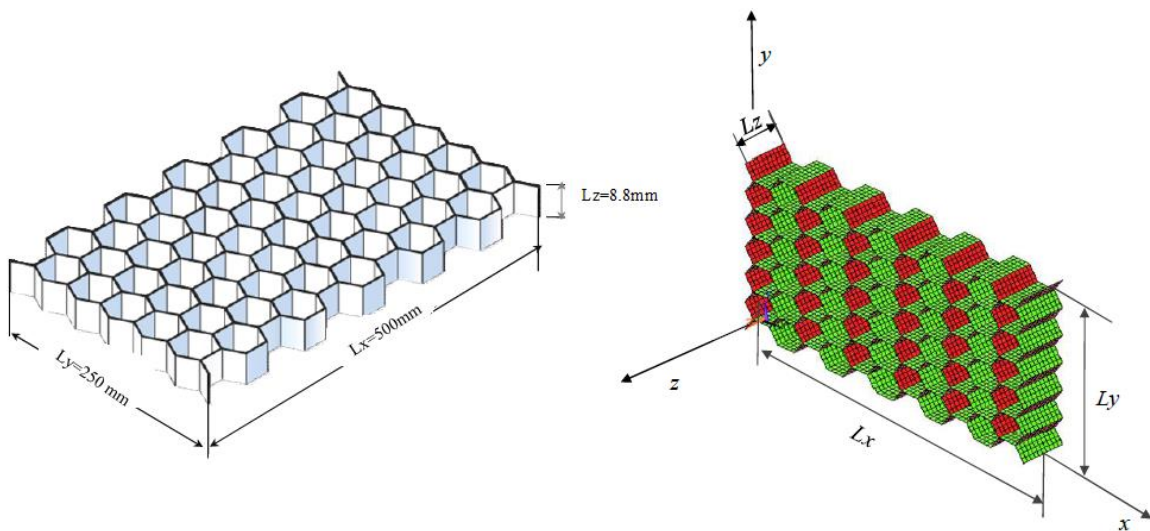
Pour calculer les différents modules, un déplacement est imposé sur une face du V.E.R. dans une direction donnée, la face opposée étant fixe. Les symétries sont prises en compte au niveau des conditions initiales. Six simulations sont nécessaires pour déterminer les neuf constants élastiques du nida.

L'approche numérique pour la détermination des constants élastiques a été effectuée sur le code de calcul ABAQUS. Le modèle de nida prend en compte 60 cellules maillées avec des éléments coques à 4 nœuds et 6 degrés de liberté par nœud (Shell de l'ABAQUS). Le maillage choisi permet de ne pas alourdir le calcul tout en gardant une bonne précision sur les résultats. Chaque clinquant contient 40 éléments, 10 éléments suivant la hauteur et 4 suivant la longueur. La géométrie est à base des cellules hexagonales régulières. Les dimensions du V.E.R figures (4.26), (4.27) sont :

$L_x=300mm$ ,  $L_y=40mm$  et  $L_z=8.8mm$ . ,  $L_x=500mm$ ,  $L_y=250mm$  et  $L_z=8.8mm$ .

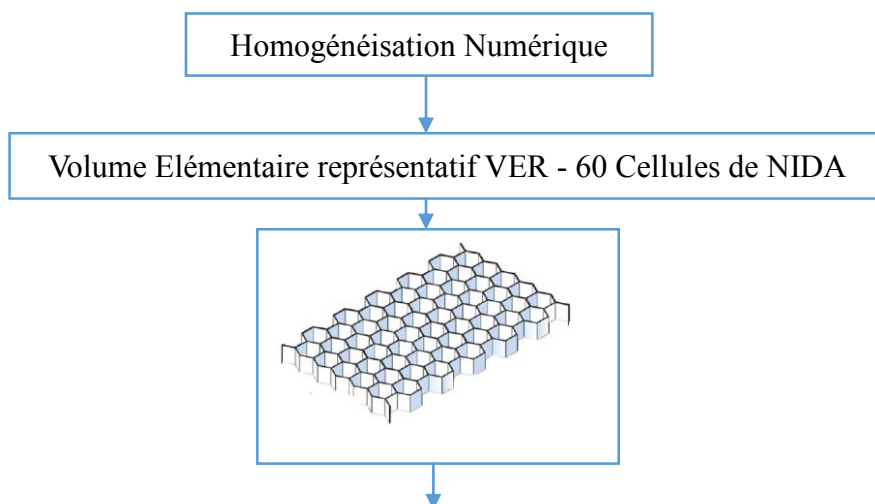


**Figure 4.26.** V.E.R d'un d'abeilles P1.



**Figure 4.27.** V.E.R du nid d'abeilles P2.

**4.7.2. Organigramme d'homogénéisation numérique**



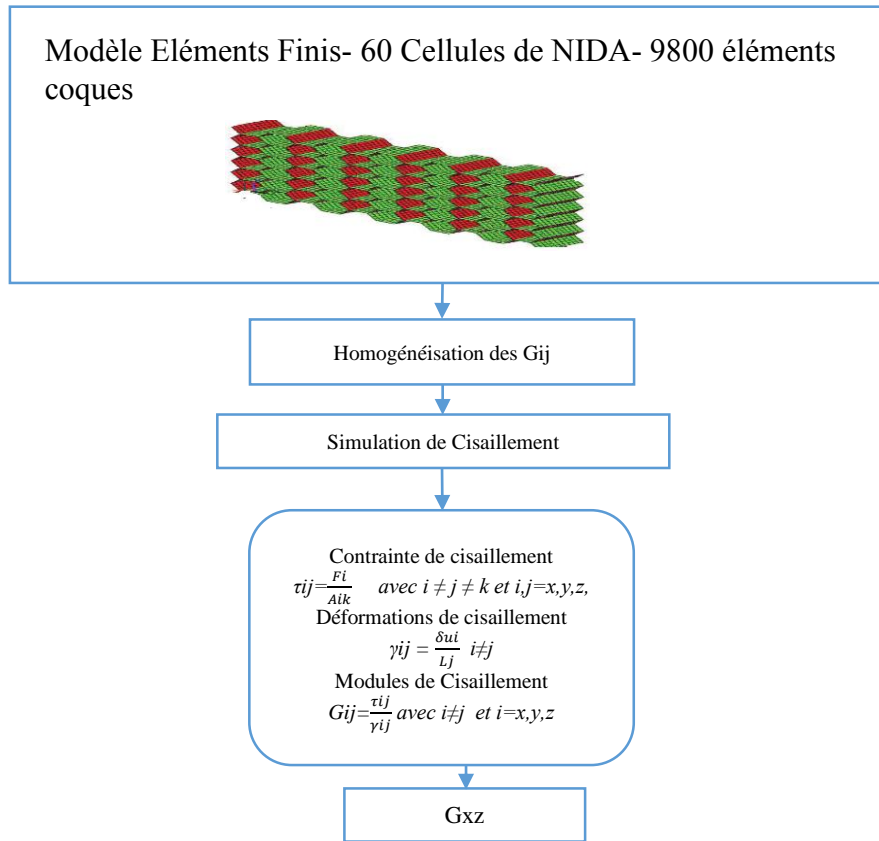


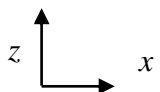
Figure 4.28. Organigramme du processus adopté pour le calcul numérique des modules de cisaillement.

### 4.7.3 Homogénéisation de $G_{xz}$

Déplacements imposés dans le plan XZ

Tableau 4.8 Conditions aux limites et résultats de l’homogénéisation de GXZ.

Conditions aux limites	Géométrie déformée après simulation	Résultat Poutre 01	Résultat Poutre 02
$U_x = 0mm$ $Z=0$ $U_y = 0mm$ $U_z = 0mm$		<i>Abaqus</i> $G_{xz} = 6.284MPa$	<i>Abaqus</i> $G_{xz} = 2.625$

$U_x=0.1mm$ $Z=L_z \quad U_y=0mm$ $U_z=0mm$ <div style="text-align: center;">  </div>	<p><i>Homogénéisé</i></p> $G_{xz,min}=4.455 \text{ MPa}$ $G_{xz,max}=6.910 \text{ MPa}$	<p><i>Homogénéisé</i></p> $G_{xz,min}=1.647 \text{ MPa}$ $G_{xz,max}=2.910 \text{ MPa}$
--	---	---

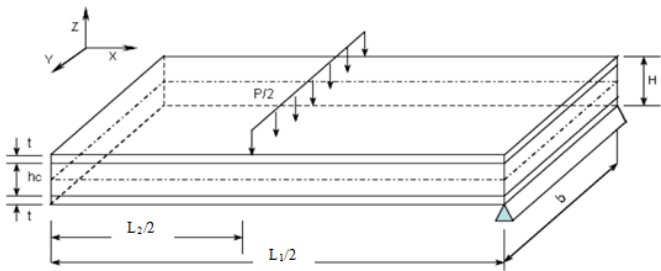


Figure 4.29. Modélisation de la moitié de la poutre en flexion 4 Points.

4.7.4 Modèles développés

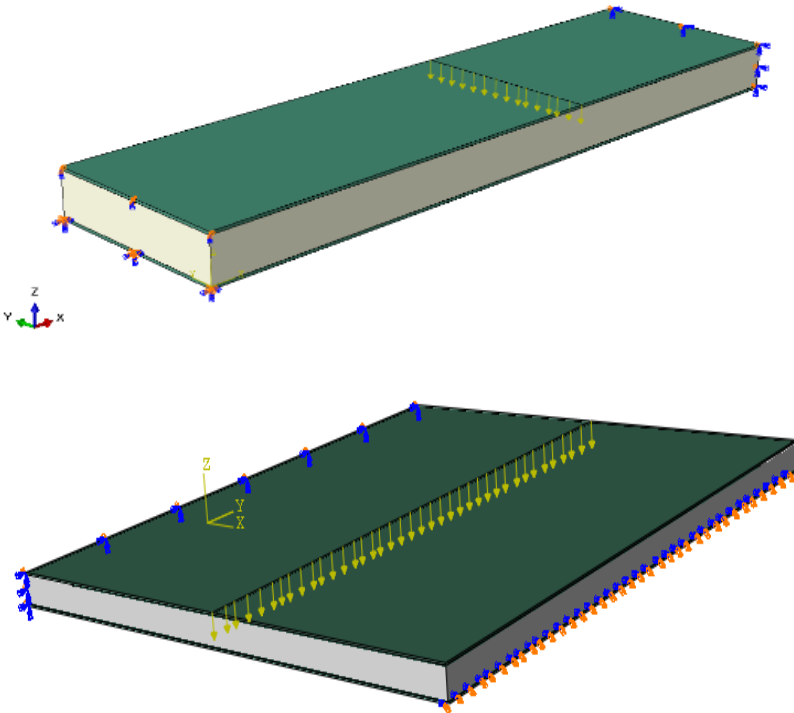


Figure 4.30. Poutre sandwich P1 et P2 à section homogénéisé.



La modélisation numérique par éléments finis nécessite l'étude de convergence du maillage afin de valider les résultats obtenus par approximation. Le modèle homogénéisé classique ne permettait pas de rendre compte des complexités locales des phénomènes de propagation des contraintes de cisaillement transversales dans le milieu du nid d'abeille. Pour cela, nous avons étudié la poutre sandwich en nid d'abeille avec deux modélisations différentes :

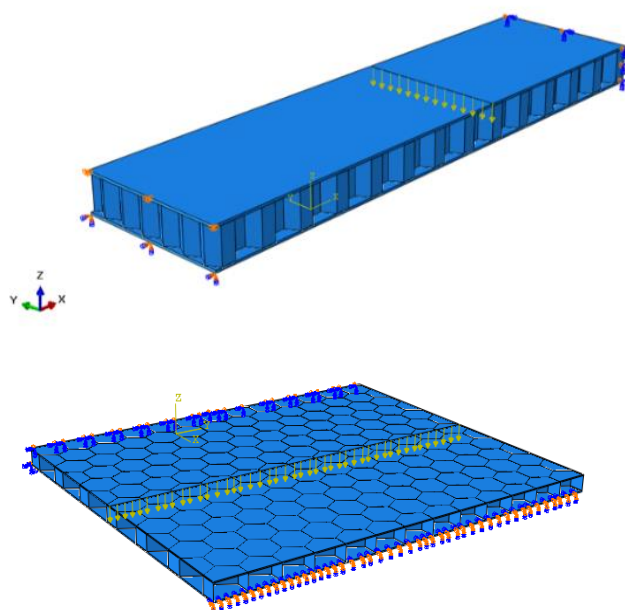
- (1) par un milieu orthotrope équivalent (modèle homogénéisé) ;
- (2) géométriquement exacte (ce qui donne la solution numérique de référence).

La modélisation 3D de la moitié de la poutre sandwich soumise à la flexion, quatre points, a été effectuée en considérant deux types de représentations de cœur :

Modèle M1 - Dans le premier modèle, le cœur est pris comme homogène et orthotrope, ils ont les caractéristiques mécaniques qui sont calculées précédemment par l'homogénéisation analytique du nida (Tableau 4.6). Le maillage est réalisé avec des éléments de volume 3D Stress C3D8.

Les éléments de volume sont des éléments tridimensionnels dont toutes les dimensions sont du même ordre de grandeur. La géométrie de ces éléments est explicitement décrite dans l'espace. Nous utilisons alors les éléments linéaires de forme hexaèdre C3D8. Ils sont définis par huit nœuds, comportant trois degrés de liberté (les trois déplacements). L'intégration de ces éléments s'effectue à l'aide de huit points d'intégration. Ces points sont situés dans leurs volumes.

Modèle M2 – Dans ce modèle la géométrie et la répartition des clinquants et des différentes partie dans le volume de la moite de la poutre sont exactement représentées.

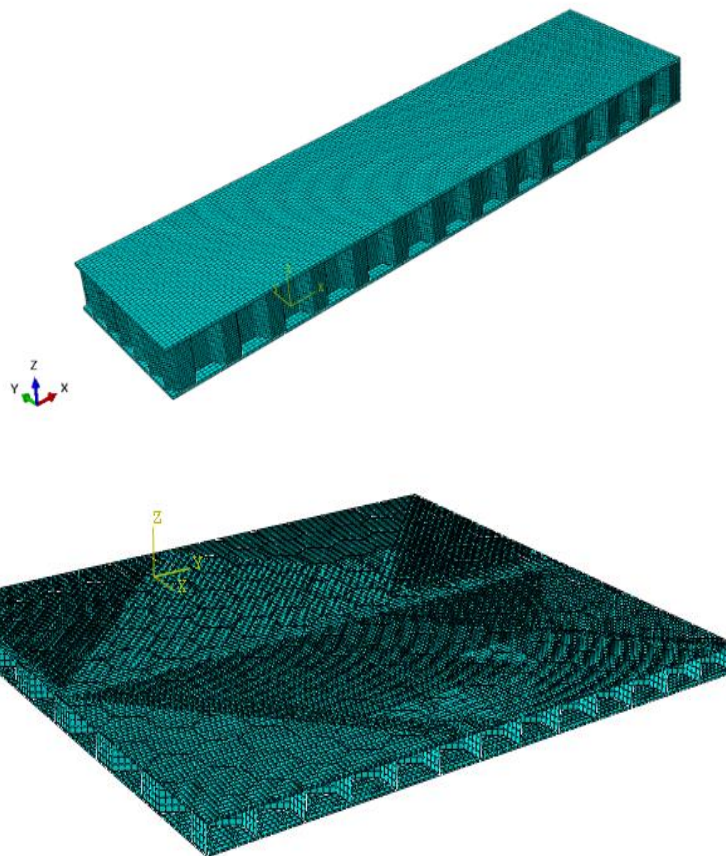


**Figure 4.31.** Poutre sandwich P1 et P2 à section exacte.

Une représentation géométriquement exacte, qui tient compte de la distribution réelle des cellules (clinquants) a été modélisée sur le code ABAQUS en utilisant 30184 éléments, répartis en 10944 éléments solides linéaires à huit nœuds C3D8 dans les peaux et 19240 éléments coques à quatre nœuds S4R dans le cœur.

Le milieu dans le modèle (peaux+coeur) devient isotrope avec les caractéristiques mécaniques suivantes :

$$E=70000 \text{ MPa } \nu=0.33$$



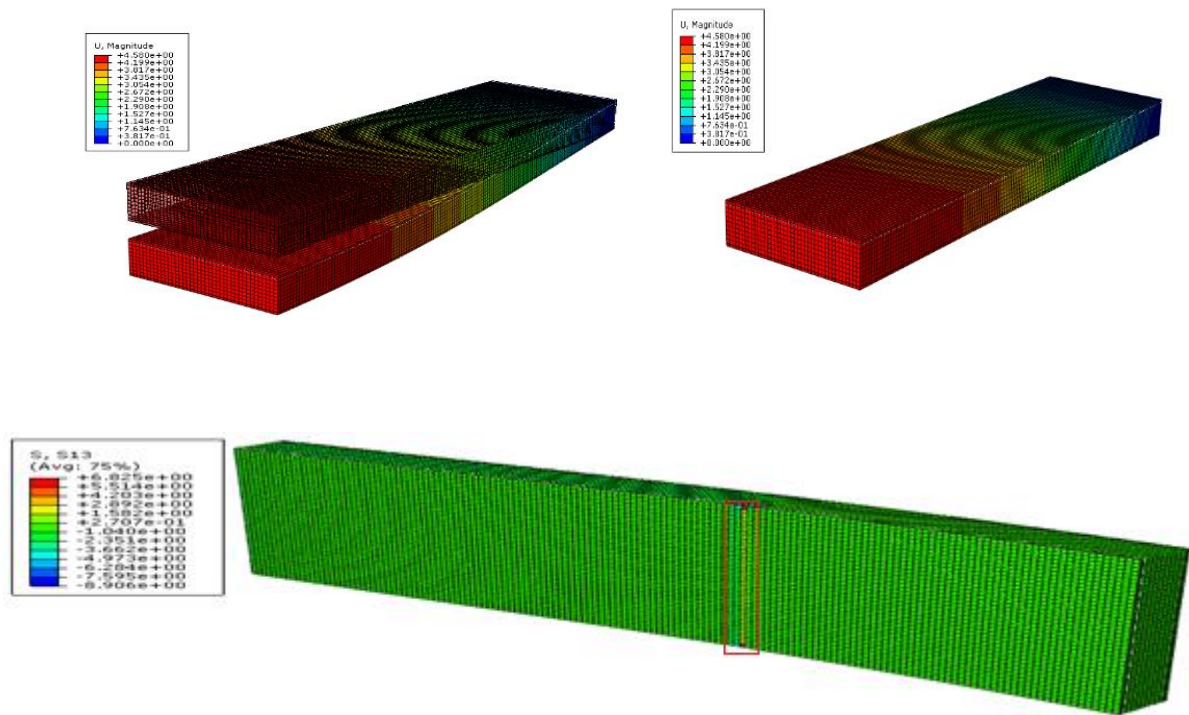
**Figure 4 .32.** Maillage des poutres 1 et 2.

#### 4.7.5. Résultats des simulations «4 points »

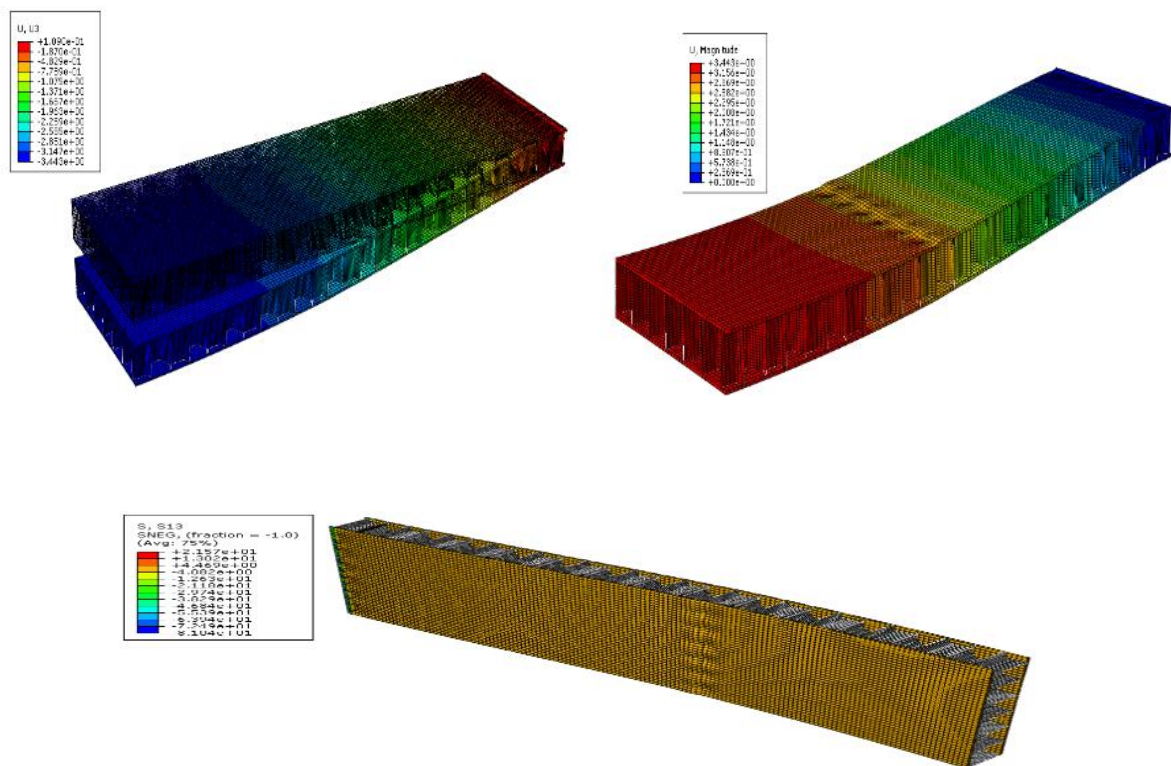
- Comparaison de la flèche et les contraintes  $\tau_{13}$

Les résultats d'essais statiques flexion quatre points effectués sur les poutres sandwichs en nid-d'abeilles de deux dimensions, Ont été validés par un calcul analytique (la théorie des poutres sandwichs), et comparé aux résultats obtenus par les deux modèles éléments finis exécutés sur le code ABAQUS.

➤ **Poutre 01 :**



**Figure 4.33.** Contrainte  $\tau_{13}$  et déplacement  $U_3$  d'un sandwich homogénéisé.



**Figure 4.34.** Contrainte  $\tau_{13}$  et déplacement  $U_3$  d'un sandwich exact.

➤ Poutre O2 :

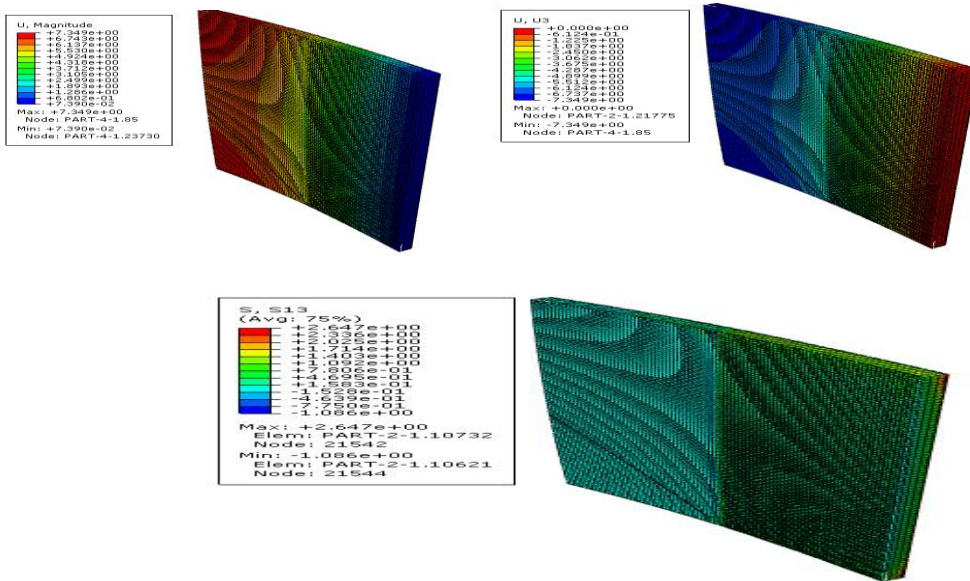


Figure 4.35. Contrainte  $\tau_{13}$  et déplacement  $U_3$  d'un sandwich homogénéisée p2.

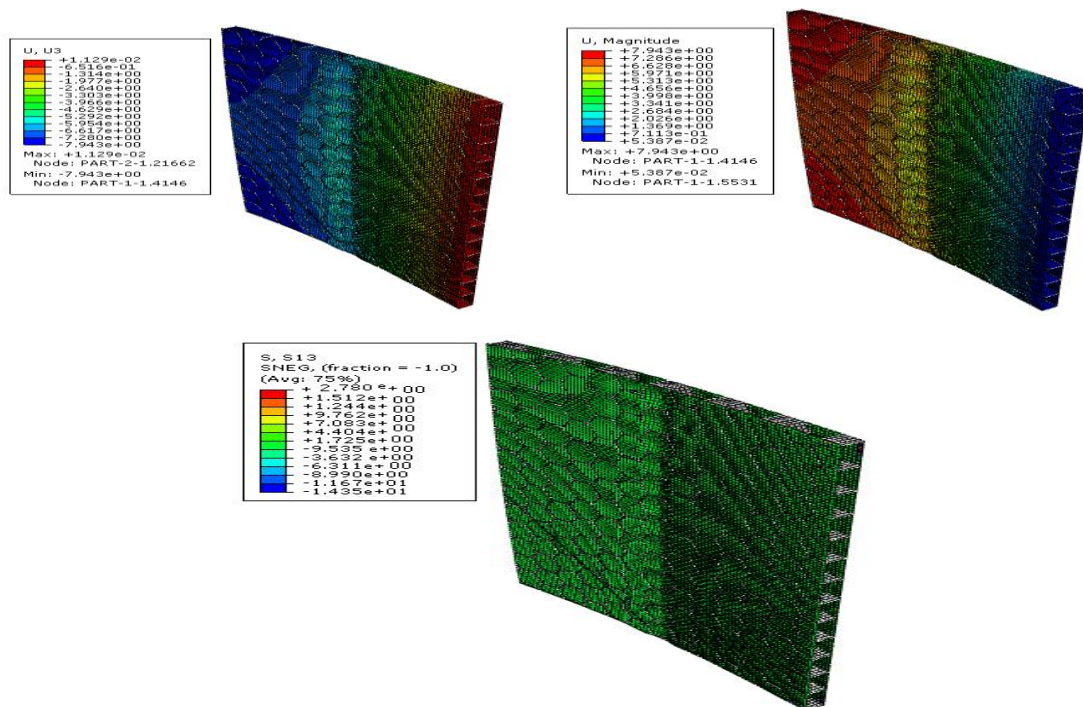


Figure 4.36. Contrainte  $\tau_{13}$  et Déplacement  $U_3$  d'un sandwich exact.

4.7.6. Flexion 4 Point

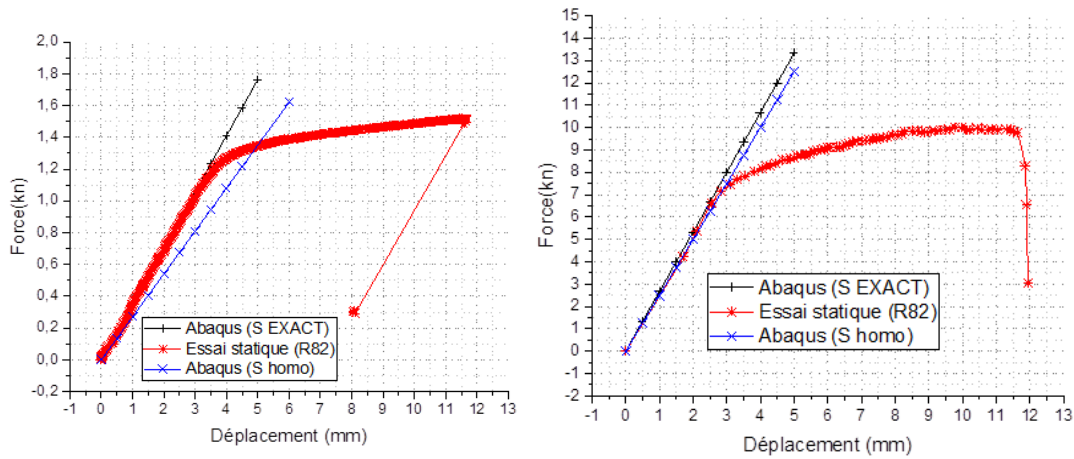


Figure 4.37. Courbe charge déplacement de sandwich EMC82 de poutre 1 et poutre 2.

- **Poutre 1**

**Tableau 4.9** Comparaison des résultats.

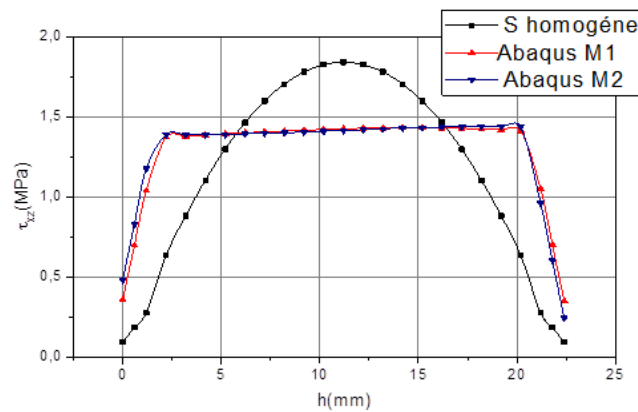
Modèle	Flexion 4 Points (P= 3000 N)	
	w (mm)	$\sigma_{xz}(MPa)$
Analytique	3.370	6.176
ABAQUS modèle 1(M1)	3.443	6.825
ABAQUS modèle 2(M2)	3.580	6.284
Essai statique	3.039	

- **Poutre 2**

**Tableau 4.10** Comparaison des résultats

Modèle	Flexion 4 Points (P= 3000 N)	
	w (mm)	$\sigma_{xz}(MPa)$
Analytique	7.575	2.625
ABAQUS modèle 1(M1)	7.349	2.647
ABAQUS modèle 2(M2)	7.943	2.780
Essai statique	7	

- Variation des contraintes de cisaillement à travers l'épaisseur



**Figure 4.38.** Distribution des contraintes de cisaillement dans l'épaisseur.

#### 4.7.7. Analyse des résultats des différentes simulations

La nécessité d'accroître la précision et l'efficacité des modèles a motivé le développement du deuxième modèle. Ce modèle a l'avantage de représenter correctement la distribution géométrique des cellules dans le cœur du sandwich, ce qui conduit à une estimation fiable de la rigidité de la poutre sandwich.

L'étude est effectuée sur un sandwich à cœur et à peaux en aluminium. La comparaison des résultats obtenus par l'application du modèle analytique et les simulations numériques sur ABAQUS permet de tirer les remarques suivantes :

- Le modèle analytique classique surestime la rigidité globale des poutres sandwichs, l'erreur commise est considérable.
- La contrainte de cisaillement  $\tau_{xz}$  est plus importante dans les peaux et quasi nulle dans le cœur dans le modèle M2 (figure 4 .38),
- Les résultats obtenus par l'homogénéisation du cœur (modèle M1) montrent que la rigidité globale de la poutre est légèrement sous-estimée.
- Les résultats de la simulation numérique sont toujours supérieurs aux résultats du modèle analytique (Théorie classique des poutres sandwichs).
- Les résultats du modèle M2 sont plus précis que les deux autres modèles.
- Les résultats obtenus par le modèle M1 sont jugés très satisfaisants. Ils sont en parfait accord avec les résultats expérimentaux (écart inférieur à 2% pour les valeurs des déplacements). Cependant, pour les contraintes de cisaillement, les résultats ne suivent plus les résultats obtenus par le modèle M2.

- Une bonne concordance des résultats montre l'efficacité et la précision du modèle d'homogénéisation.

#### 4.8. Modélisation du comportement de la structure sandwich à base de mousse H100

L'âme joue un rôle très important dans le concept des structures sandwich. Ce concept permet ainsi d'augmenter l'inertie de flexion des panneaux en augmentant les moments quadratiques de flexion qu'induit l'éloignement des plans moyens par rapport à celui de la structure. Ainsi, l'âme supporte mieux les efforts tranchants.

L'âme de la structure sandwich étudiée est en mousse Divinycell, de type PVC cellulaire, rigide et réticulé. Elle est fabriquée dans une variété de densités telles que les propriétés mécaniques augmentent avec la densité. La référence utilisée dans cette mémoire est la H100 d'une densité nominale de 100 kg/m<sup>3</sup>. Les propriétés physiques et mécaniques de la mousse H100 sont résumées dans le tableau 4.11.

**Tableau 4.11** Propriétés physiques et mécaniques de la mousse Divinycell H100

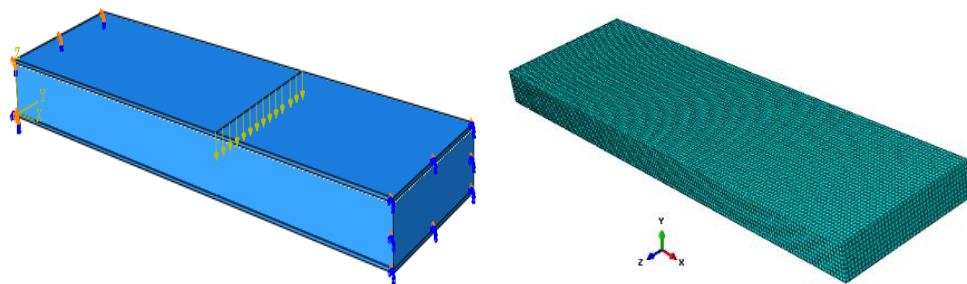
	Densité nominale (kg/m <sup>3</sup> )	E (MPa)	G(MPa)	v
H100	100	130	35	0.35

Les peaux sont en aluminium.

##### 4.8.1. Modèles développés

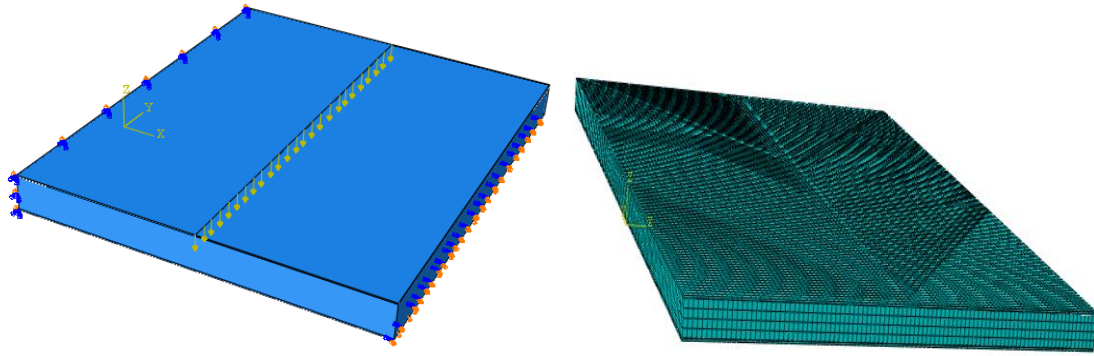
La géométrie des poutres est indiquée dans le tableau 4.1.

- **Poutre 01**



**Figure 4.39.** Condition aux limites et maillage d'une Poutre sandwich P1 en âme mousse Divinycell H100.

- **Poutre 02**

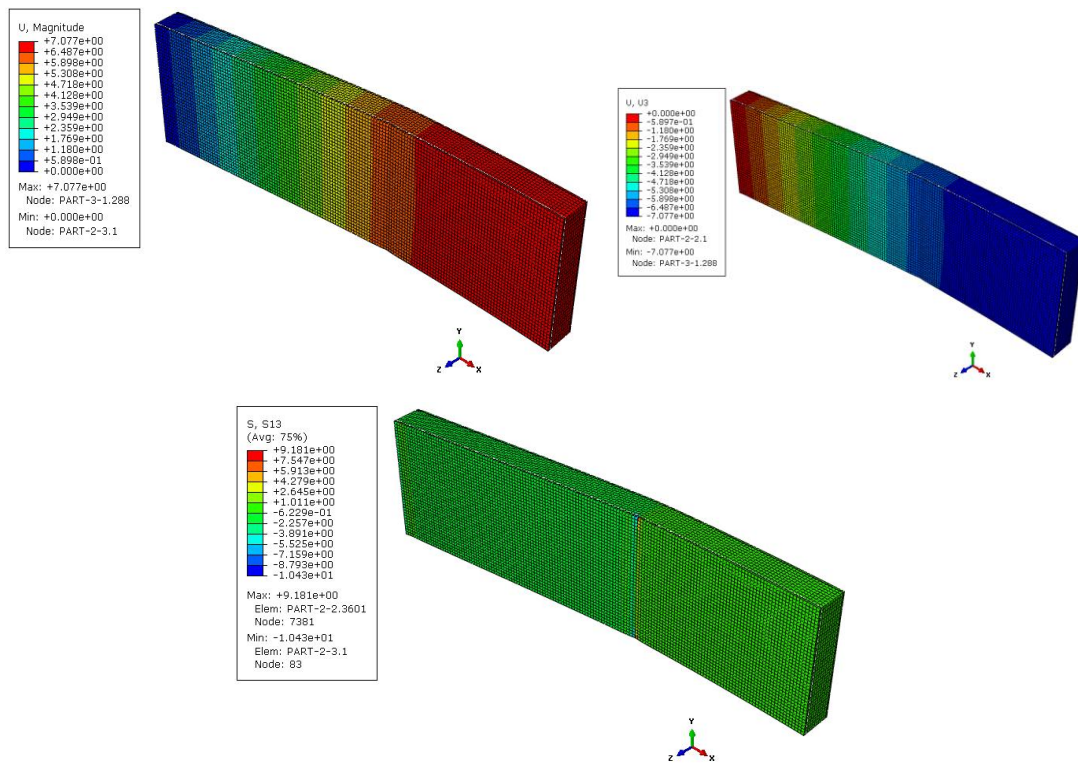


**Figure 4.40.** Condition aux limites et maillage d'une Poutre sandwich P2 en âme moue Divinycell H100.

**4.8.2. Résultats des simulations «4 points »**

- Comparaison de la flèche et les contraintes  $\tau_{13}$

Les résultats obtenus pour les deux poutres exécutés sur le code ABAQUS



**Figure 4.41.** Déformée, Déplacement  $U_3$  et Contrainte  $\tau_{13}$  d'un sandwich en âme moue Divinycell H100.



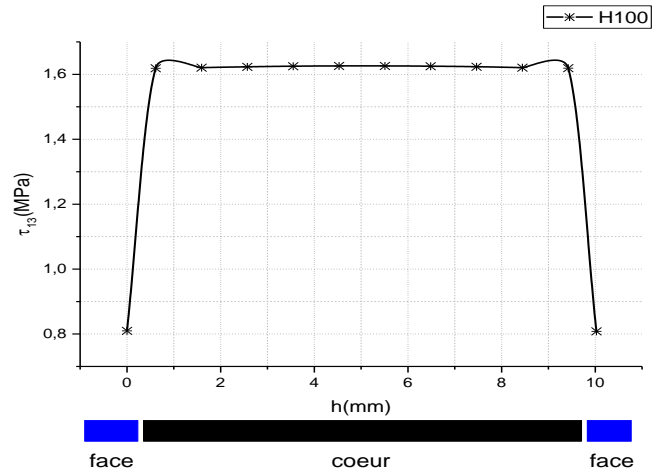


Figure 4.42. La variation de la contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  à travers l'épaisseur de la poutrel.

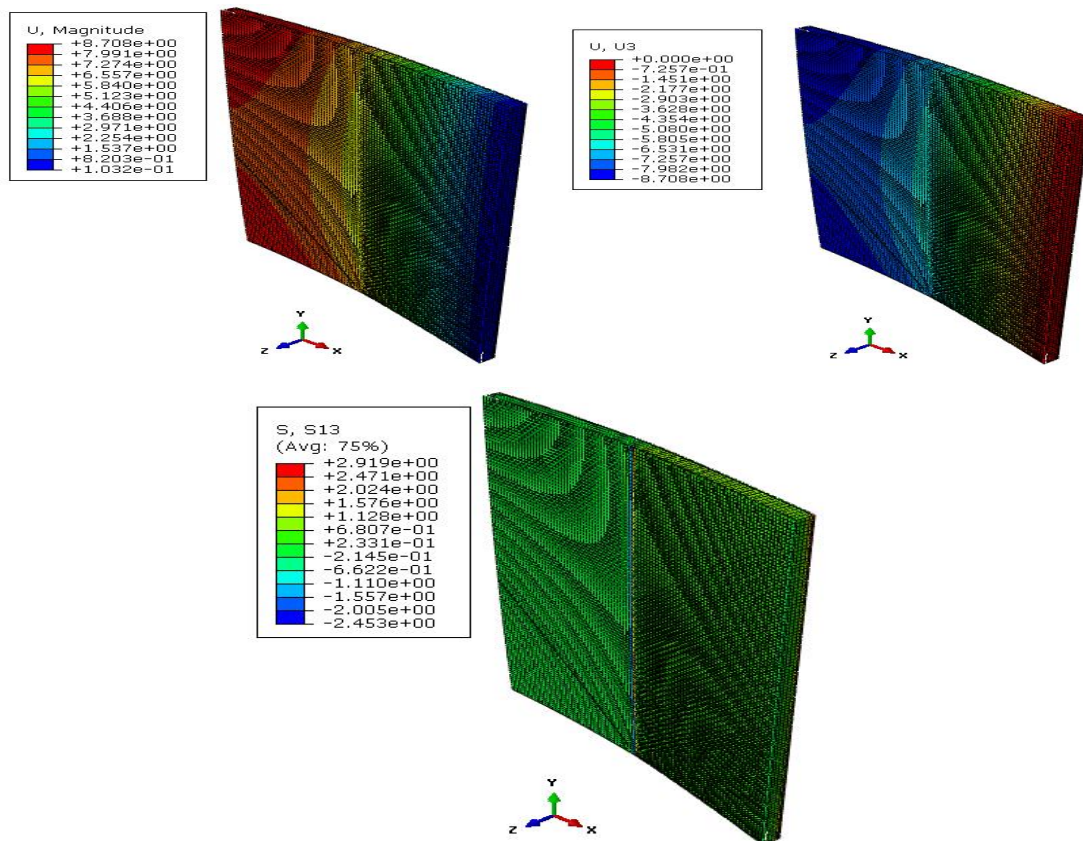
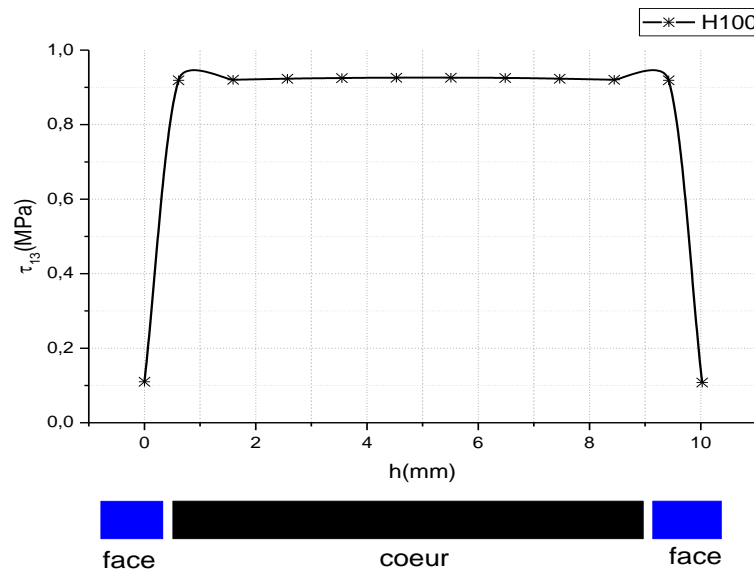


Figure 4.43. Contrainte  $\tau_{13}$  et Déplacement  $U_3$  d'un sandwich en âme moussé Divinycell H100.



**Figure 4.44.** La variation de la contrainte de cisaillement  $\tau_{13}$  à travers l'épaisseur de la poutre sandwich 2.

D'après les figures 4.43 et 4.45 on remarque que

- Le cœur supporte bien la contrainte de cisaillement.
- Lorsqu'on augmente la section de la poutre la contrainte dans le cœur diminue.

#### 4.9. Conclusion

Il s'agit d'un sandwich à âme souple et à peaux très rigides. On est amené à comparer les résultats des différents modèles analytiques et ceux obtenus par des simulations numériques sur ABQUS.

Le modèle analytique utilisé est basé sur la théorie classique des sandwiches. Il ne tient pas compte du rapport des rigidités entre l'âme et les peaux, l'erreur devient considérable dans le cas d'une âme très molle, ce qui est le cas des sandwiches à âme en nid-d'abeilles.

Le Nida étant une structure anisotrope, ses propriétés varient selon le sens transversal ou longitudinal des alvéoles (taille de mailles). De plus, la taille de celles-ci, l'épaisseur des parois du Nida et la méthode de mise en œuvre sont des paramètres qui influencent la résistance au cisaillement transversal et longitudinal du Nida. Il existe plusieurs théories de plaques pour calculer des structures sandwiches. Certaines ont été établies dans un premier temps pour des plaques homogènes et ont été étendues par la suite aux plaques composites et sandwiches (exemples : Mindlin, Reissner, Reddy) ; ces théories dites « globales » considèrent des déformations de cisaillement continues aux interfaces. D'autres ont été établies pour les structures sandwiches à âme molle pour tenir compte des contrastes de rigidité entre couches,

celles-ci font des hypothèses différentes sur les champs de déplacement et de contrainte dans toute l'épaisseur de la plaque.

Les théories classiques des sandwichs et les théories d'ordre supérieur en déformations de cisaillement ne sont pas sensibles aux rapports de rigidités face-cœur ( $E_f/E_c$ ). En effet, la flèche  $w$ , reste presque constante quand les rapports des rigidités changent. À partir de ceci, nous pouvons assurer que les rigidités globales sont indépendantes du rapport des rigidités. Par ailleurs, ces modèles surestiment la rigidité globale des poutres sandwichs de façon inacceptable, lorsque le cœur est mou.

Concernant la modélisation des structures sandwichs, le modèle analytique nécessite une cinématique plus riche, qui doit être capable à la fois de simuler correctement la contrainte de cisaillement au cœur et de prendre en compte le rapport des rigidités.

Le but de cette étude est de faire la lumière sur l'importance des classes de matériaux composites qui sont les sandwichs à âme en nid-d'abeilles et à âme en mousse. Des aspects techniques ont été abordés. L'intérêt scientifique pour ces types de structures est conforté par un intérêt industriel très croissant. Ce dernier est justifié par la multifonctionnalité et l'avantage de faible poids couplé à une forte rigidité. Un des aspects les plus importants de la présente recherche est de généraliser les méthodes d'analyse par homogénéisation présentée dans le cadre de la présente recherche à d'autres types de structures notamment aux plaques et aux coques sandwichs, afin d'élargir leur champ d'applications.

# Conclusion et perspective

---

Comme les pioches et le prolongement de la main de l'homme, les jumelles le prolongement de ses yeux. L'ordinateur est le prolongement de sa pensée . . .

J.MAALO

---

## Conclusion & Perspectives

L'objectif de ce travail est divisé en deux parties indépendantes. La première réservée à l'étude de l'influence de l'orientation et le type de matériau sur la distribution de champ de contrainte de cisaillement à travers l'épaisseur des stratifiés symétriques. La deuxième partie a comme objet : la détermination des constants élastiques du matériau par une homogénéisation numérique et une validation expérimentale. Les résultats obtenus dans les différents chapitres permettent de conclure.

L'étude statique des stratifiés croisés a permis de mettre en évidence l'influence de la séquence d'empilement, le type de matériau choisi et les effets des épaisseurs des couches orientées à  $0^\circ$  et à  $90^\circ$  sur la distribution des contraintes de cisaillement.

Les résultats obtenus par les modèles M.E.F sont en très bonne concordance avec la théorie des stratifiés.

Pour les poutres et plaques composites, le rôle des déformations de cisaillement transversal dépend non seulement des caractéristiques géométriques (l'élancement  $L/h$ ), mais également des caractéristiques mécaniques représentées par le rapport  $E/G$ .

Les théories classiques des sandwichs et les théories d'ordre supérieur en déformations de cisaillement ne sont pas sensibles aux rapports de rigidités cœur-face ( $E_c/E_f$ ). En effet, la flèche  $w$ , et la contrainte  $\sigma_{xz}$  restent presque constantes quand les rapports des rigidités changent. À partir de ceci, nous pouvons assurer que les rigidités globales sont indépendantes du rapport des rigidités. Par ailleurs, ces modèles surestiment la rigidité globale des poutres sandwichs de façon inacceptable, lorsque le cœur est mou. Concernant la modélisation des structures sandwich, le modèle analytique nécessite une cinématique plus riche, qui doit être capable à la fois de simuler correctement la contrainte de cisaillement au cœur et de prendre en compte le rapport des rigidités.

En perspective. Le travail présenté dans cette mémoire peut être étendu et enrichi par le traitement des points suivants :

- 1- Développement d'une nouvelle approche analytique de mieux prédire les champs de cisaillement dans d'autres section géométriquement plus complexes.
- 2- Comportement en cisaillement dans les matériaux à gradient fonctionnel.
- 3- L'effet de cisaillement sur le comportement dynamique des plaques et poutres en sandwich.

## Références

- [1] Kirchohoff.G « Vorlesungen umber mathematics the physic », volume 1 B.G. teubner Leipzig, Germany (1876).
- [2] A.E.H.Love, « A Treatise on the mathematical theory of Elasticity », Dover, new York.randern, annalen der physic 28 737-736 (1994).
- [3] S.Timoshenko « on the correction of transverse shear deformation of the differential Equation for transverse vibration of prismatic Bars » Philosophical Magazine, 41(series 6) 744-746(1921).
- [4] Pizhong Qiao et al « Transverse Shear Stiffness of Composite Honeycomb Cores and Efficiency of Material », Mechanics of Advanced Materials and Structures, Volume 12, 2005, p.159-172. <https://doi.org/10.1080/15376490590913576>.
- [5] Rickard Juntikka et al « Shear Characterization of Sandwich Core Materials Using Four-point Bending », Journal of Sandwich Structures and Materials, Stockholm, Sweden, 2007. <http://jasm.sagepub.com/content/9/1/67>.
- [6] H. Zainuddin et al «Enhancing Fatigue Performance of Sandwich Composites with Nano phased Core S. », Journal of Nanomaterials, Volume 2010. <https://doi.org/10.1155/2010/712731>.
- [7] Gabriel Bianchi et al «Static and Fatigue Behaviour of Hexagonal Honeycomb Cores under In-plane Shear Loads », Applied Composite Materials, volume 19, 2011, p. 97–115. <https://link.springer.com/article/10.1007/s10443-010-9184-5>.
- [8] A. Mir et al « Caractérisation mécanique d'un panneau sandwich à âme en liège et peaux jute/époxy », 17èmes Journées Nationales sur les Composites (JNC17), Jun 2011, Poitiers-Futuroscope, France. pp.25. hal-00597889.
- [9] Michael Osei et al « Shear mechanical characterization of balsa wood as core material of composite sandwich panels », Construction and Building Materials, Volume 41, 2013, P. 231-238. <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2012.11.009>

- [10] H. Judawisastra et al « Determination of core shear properties of three-dimensional woven sandwich composites », *Plastics, Rubber and Composites Macromolecular Engineering*, volume 28, 2013, P. 452 -457.  
<https://doi.org/10.1179/146580199101540628>.
- [11] B. Rabia et al « Calcul des Déplacements et des Contraintes de Cisaillement pour les Plaques Sandwiches à Gradient Variable type FGM », *Nature & Technology*, 2014.
- [12] F. Amir et al « Full-field shear analyses of sandwich core materials using Digital Image Correlation (DIC) », *Composites Part B: Engineering*, Volume 70, 2015, P. 156-166  
<https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2014.10.045>.
- [13] A. Saoula et al « Analyse des plaques sandwiches FGM sous l'effet des charges mécaniques et dans un environnement thermiques », volume 60, 2019, p.60-67.
- [14] W. Mo-Nan et al « Mechanical Respond and Failure Mode of Large Size Honeycomb Sandwiched Composites under In-Plane Shear Load », *US National Library of Medicine National Institutes of Health*, volume 24, 2019. [10.3390/molecules24234248](https://pubmed.ncbi.nlm.nih.gov/33390/molecules24234248).
- [15] k. Zemani et al « Etude des vibrations libres des plaques épaisses en matériaux à gradient fonctionnel (FGM) reposant sur un support élastique de winkler-pasternak », mémoire de master, 2015.
- [16] M. Karim et al « Mechanical Characterization of a Composite Sandwich Core under Shear Stress Based on a Torsion Test », *International Conference on Advances in Mechanical Engineering and Mechanics*, 5 august 2020, p. 299-305
- [17] François Horel 2013, « Modélisation analytique de l'amortissement des poutres sandwich contenant des couches viscoélastiques », thèse de doctorat, UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL-PARIS.
- [18] Harkati Amine 2017, « Etude analytique et numérique de la concentration des contraintes dans les plaques composites », Mémoire de master, Université Larbi tébessi – Tébessa.
- [19] Kaskas Saliha 2010, « Etude de l'effet du cisaillement transverse sur le comportement mécanique de poutres composites », Mémoire de Magister, Université mentouri-constantine.
- [20] Jean Marie Berthelot 2012, « Mécanique des Matériaux et des Structures Composites », Edition Tec & Doc, 5ème édition.

- [21] Arbaoui Jamal Eddine 2009, « Etude comparative et caractérisations mécaniques des structures sandwichs multicouches », thèse de doctorat, Université Paul Verlaine-Metz.
- [22] H. G. Allen, «Analysis and design of structural sandwich panels». Pergamon Press, 1993.
- [23] D. Zenkert, «An introduction to sandwich construction». UK, 1995.
- [24] Y. Frostig et al «High-order theory for sandwich-beam behavior with transversely flexible core» Journal of Engineering Mechanics, volume 118, 1992, p. 1026–1043.
- [25] L. J. Gibson et al, «Cellular Solids: Structure and Properties». Cambridge Université Press, 1999.
- [26] Reid Evrard Ngouama Ngolo 2014, «Mise en Œuvre et Caractérisation du Comportement Mécanique d'un Eco-Matériau Sandwichs », Mémoire de Master, Université de Technologie de TROYES.
- [27] Harkati el-haddi 2008, « Analyse du comportement et de l'endommagement des matériaux composites stratifiés et sandwichs», Mémoire de doctorat, UNIVERSITE 8 MAI 45 GUELMA.
- [28] Fahmi Alila 2017 «Analyse de la tenue en fatigue de structures composites sandwichs », thèse de doctorat, université de Nantes sous le sceau de l'université Bretagne Loire.
- [29] G. Caprino et al «Study of a Three-Point Bending Specimen for Shear characterisation of Sandwich Cores», Journal of Composite Materials, volume 34, 2000, p. 791–814.
- [30] O'Connor et al « An Evaluation of Test Methods for Shear Modulus of Sandwich Cores», the International Journal of Cement Composites and Lightweight Concrete, volume6, 1984, p.3–12.
- [31] ASTM C 273-00 « Standard Test Method for Shear Properties of Sandwich Core Materials», Annual Book of the ASTM Standards, the American Society for Testing and Materials, USA, 2000.
- [32] D. Benderly et al « Shear Testing of Polymer Foams», Journal of Testing and Evaluation, volume 31, 2003, p.405–412.
- [33] M. Arcan, « Method to Produce Uniform Plane stress States with Applications to fiber-reinforced Materials», Experimental Mechanics, volume 18,1978, p. 141–146.
- [34] Bitzer, T. « Useful Analysis Methods for Sandwich Structures», California, tome 1, 1994.
- [35] C.Chamis et al « Fiber composite sandwich thermo structural behaviour», Journal of composite technology & research, vol. 10, 1988, p. 93-99.



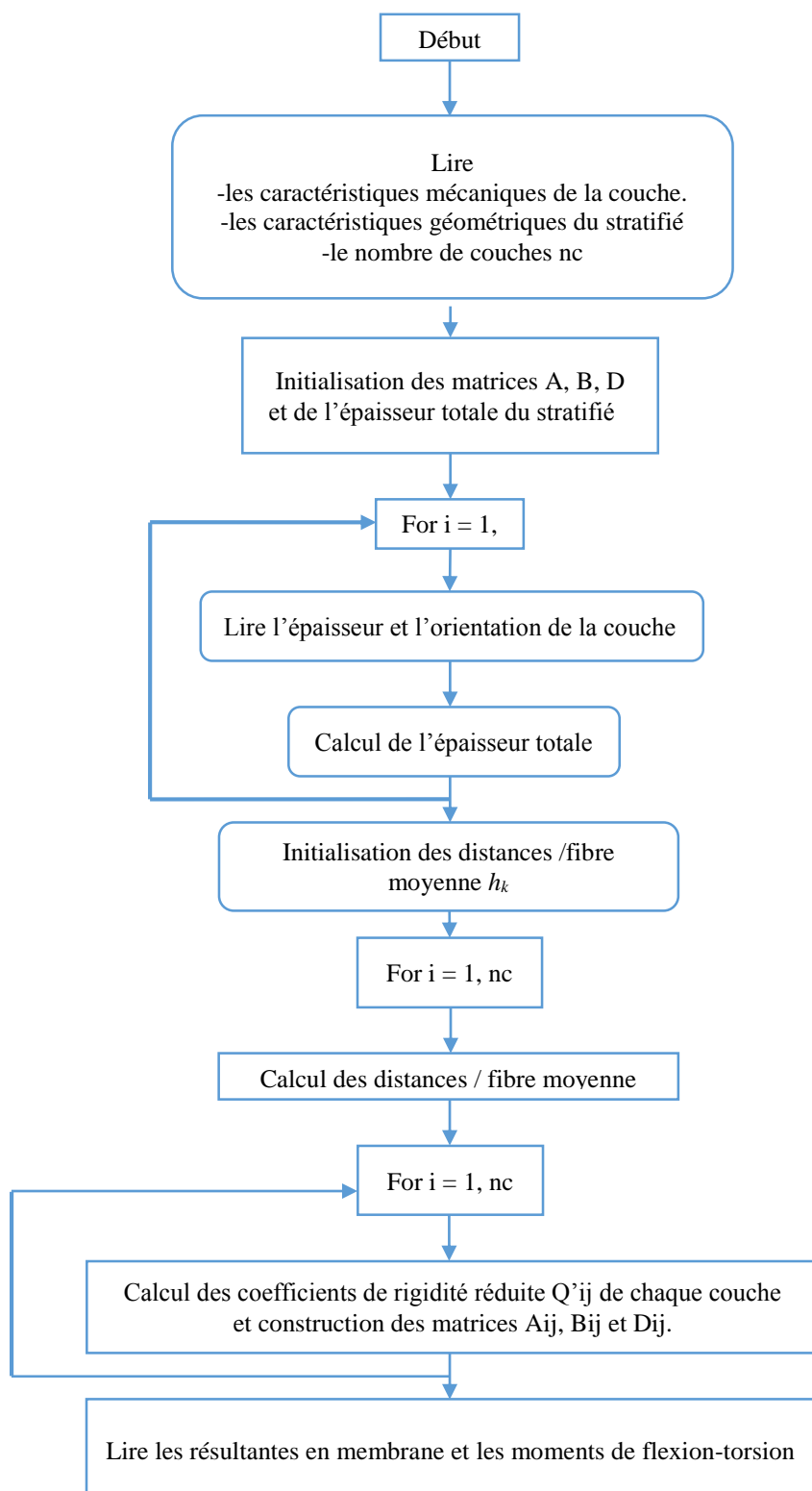
- [36] M. Grédiac « A finite element study of the transverse shear in honeycomb Cores», International Journal of Solids and Structures, volume 30, 1993, p. 1777-1788
- [37] E. Carrera et al « guidelines and recommendations to construct theories for metallic and composite plates », Journal of composite technology & research, volume 48, 2010.
- [38] D'Ottavio et al « variable-kinematics approach for linearized buckling analysis of laminated plates and shells », AIAA journal, volume 48, 2010.
- [39] H. Thai et al « free vibration of laminated composite plates using two variable refined plate theory », international journal of mechanical sciences, 2010
- [40] H.Thai et al « a refined plate theory for functionally graded plates resting on elastic foundation », international journal of mechanical sciences, 2011.

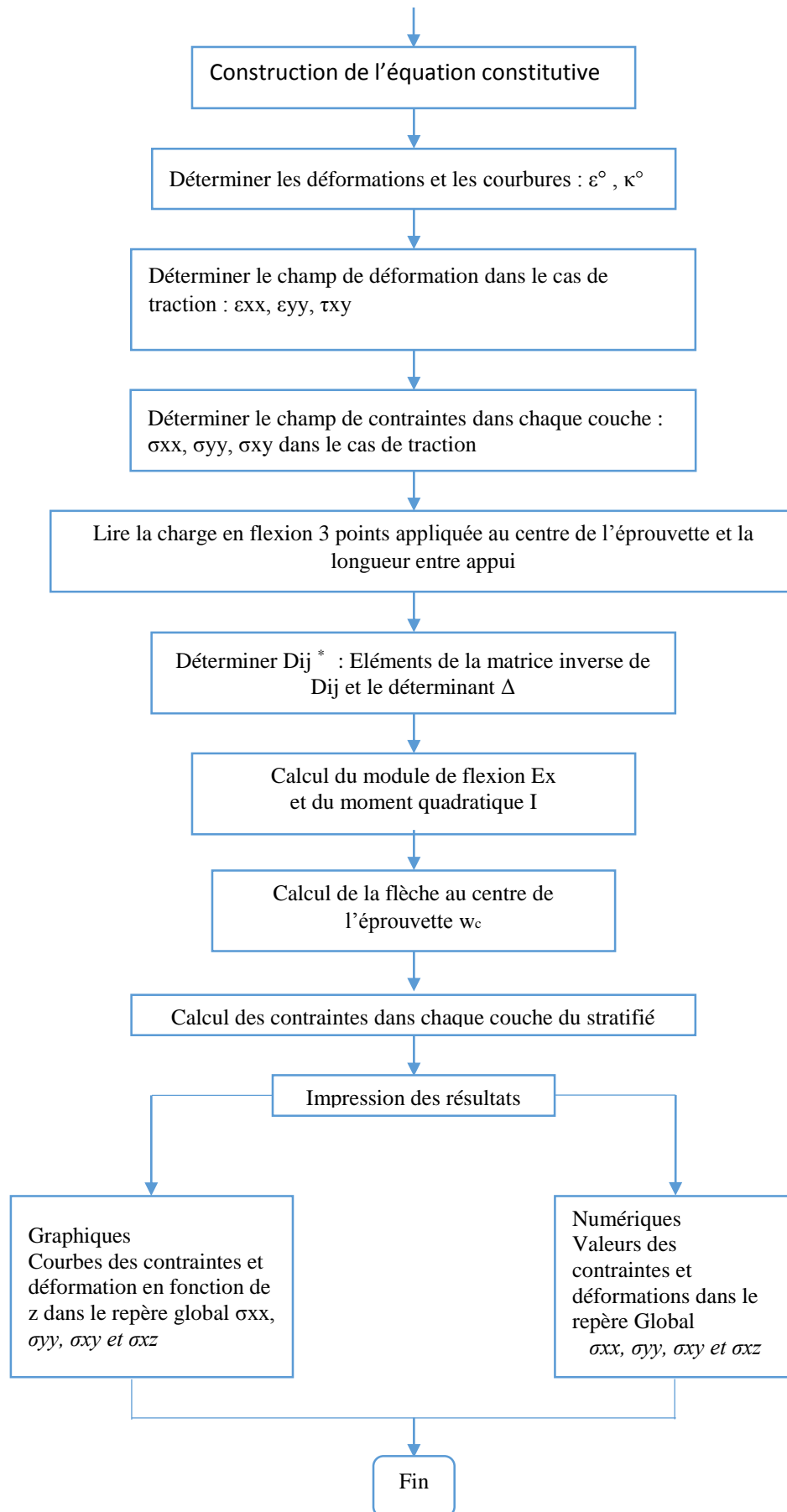
## Annexe A

### Présentation du programme de calcul

L'algorithme du programme que nous avons conçu pour le calcul des stratifiés est écrit en langage FORTRAN. Les différentes étapes de calcul sont basées sur les principales relations de la théorie classique des stratifiés.

- **Algorithme**





Différentes étapes de calcul.