

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA

RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DE TEBESSA



FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIE

DEPARTEMENT DE GENIE ELECTRIQUE

MEMOIRE DE MAGISTER

Présenté par :

Kahla Sami

En vue de l'obtention du diplôme de Magister en Automatique

Option : Automatique et Traitement du signal

Thème :
**COMMANDE PAR INTERVALLE DES
SYSTEMES LINEAIRES**

Soutenue le : 03/07/2013

Devant le jury d'examen composé de :

Pr. Chenikher Salah	Professeur	Université de Tébessa	Président
Dr. Guerfi Noureddine	M.C.A	Université de Mila	Rapporteur
Dr. Dib Djallel	M.C.A	Université de Tébessa	Examineur
Pr. Harkat Mohamed Faouzi	Professeur	Université d'Annaba	Examineur
Dr. Megri Fayçal	M.C.B	Université d'Oum el Bouaghi	invité

Table des matières

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Liste des symboles

Introduction générale

Chapitre 1

Théorie de la logique floue

1.1	Théorie des ensembles flous	1
1.1.1	Définition de sous-ensembles flous	1
1.1.2	Support d'un ensemble flou	2
1.1.3	Noyau d'un ensemble flou	2
1.1.4	Hauteur d'un ensemble flou	2
1.1.5	Cardinal d'un ensemble flou	2
1.1.6	Concepts flous :	3
1.1.7	Relations et quantités floues	4
1.2	Théorie des possibilités	4
1.2.1	Mesure et distribution de possibilités	4
1.2.2	Mesure de nécessité	5

1.3	Les systèmes flous	7
1.3.1	Différents types des systèmes flous :	7

Chapitre 2

Arithmétique floue pour les différents types des nombres flous

2.1	Définitions	8
2.1.1	Une quantité floue	8
2.1.2	Un intervalle flou	8
2.1.3	La notion de α – coupe	9
2.1.4	Nombres flous et vecteurs flous	9
2.2	Opérations arithmétiques élémentaires flous	13
2.2.1	Les nombres flous L-R	15
2.2.2	Les nombres flous Discrétisés	23
2.2.3	Les nombres flous décomposés	32
2.3	Arithmétique floue standard	39
2.3.1	Définition de l’arithmétique floue Standard	39
2.3.2	Inconvénients et limites de l’arithmétique floue Standard	41

Chapitre 3

L’arithmétique floue avancée-La méthode de transformation

3.1	Introduction	52
3.2	Simulation et analyse des modèles incertains	53
3.2.1	Simulation par la méthode de transformation	53
3.2.2	Application	56
3.3	Conclusion	61

Chapitre 4

Résultats de simulation

4.1	Présentation	62
4.2	Double pendule inversé	63
4.2.1	Modèle dynamique non linéaire	63
4.2.2	Modèle linéarisé et représentation d’état	64
4.3	Conception du contrôleur	65
4.4	Conception du LQR floue pour le système incertain	66

4.4.1	Option 1 : Défuzzification la sortie du régulateur	67
4.4.2	Option 2 : Défuzzification le vecteur de retour d'état	68
4.4.3	Option 3 : Défuzzification des pôles et des pôles de placement	69
4.5	Résultats de simulation	70
4.5.1	Paramètres pour la conception LQR classique	71
4.5.2	Paramètres pour la conception LQR combiné avec l'arithmétique floue . . .	71
4.5.3	Paramètres supplémentaires	72

Conclusions générale et perspectives

Bibliographie

Table des figures

1.1	Support, hauteur, noyau et α -coupe d'un ensemble flou [1].	3
2.1	(a) Nombre flou triangulaire (b) Nombre flou Gaussien	11
2.2	Singleton flou	12
2.3	Deux dimensions d'un vecteur \tilde{p} avec le vecteur modal $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^T$ [2]	14
2.4	Evaluation du principe d'extension pour l'addition de deux nombres flous.	15
2.5	La représentation L-R des nombres flous	16
2.6	(a) Le produit exact $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ et leur approximation tangente \tilde{q}_t (b) Le produit exact $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ et leur approximation sécante \tilde{q}_s	21
2.7	Un nombre flou discrétisé \tilde{p}_i	25
2.8	Nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 et leurs représentations discrétisées \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* pour $m = 2$. . .	28
2.9	Contrepartie additionnelle pour la multiplication de deux nombres flous positifs discrétisés.	30
2.10	Produit des nombres flous $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ et sa représentation discrétisée $\tilde{Q}^* = \tilde{P}_1^*.\tilde{P}_2^*$ pour $m=2$	32
2.11	Décomposition d'un nombre flou \tilde{p}_i dans les intervalles.	34
2.12	Nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 et leurs représentations décomposées P_1 et P_2 pour $m = 2$. .	38
2.13	Produit de nombre flou $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ et sa représentation floue décomposée $Q = P_1.P_2$ pour $m = 2$	38
2.14	(a) L'entrée floue \tilde{p} ; (b) Le résultat $f_D(\tilde{p})$ de l'évaluation directe (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $f(\tilde{p})$ (ligne pointillée).	42
2.15	(a) Le résultat $f_H(\tilde{p})$ de l'évaluation de la forme de Horner (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $f(\tilde{p})$ (ligne pointillée), (b) Le résultat $f_F(\tilde{p})$ de l'évaluation de la forme factorisée (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $f(\tilde{p})$ (ligne pointillée).	43

2.16 (a) Le résultat $g_D(\tilde{p})$ de l'évaluation directe (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $g(\tilde{p})$ (ligne pointillée), (b) Le résultat $g_{HF}(\tilde{p})$ de l'évaluation de la forme de Horner ou la forme factorisée (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $g(\tilde{p})$ (ligne pointillée). 46

2.17 (a) Les entrées floues \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 ; (b) Le résultat $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ de l'évaluation directe (ligne continue) et les courbes identiques à le résultat de la forme simplifiée $h_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ et le résultat de l'arithmétique floue $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ (ligne pointillée). 48

3.1 Décomposition d'un nombre flou \tilde{p}_i 54

3.2 Le paramètre \tilde{p} décomposé (ici $m = 20$) 57

3.3 Le résultat $f_T(\tilde{p})$ obtenu par la méthode de transformation réduite. 59

3.4 Les paramètres décomposés \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 (ici $m = 20$) 60

3.5 Le résultat $h_T(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ obtenu par la méthode de transformation réduite. 61

4.1 Double pendule inversé [2] 64

4.2 Les angles de bras interne du pendule : $\varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \varphi^{(3)}(t)$ pour les différents options de défuzzification (ligne continue); $\varphi^*(t)$ pour la conception LQR classique (ligne pointillée). 73

4.3 Les angles de bras externe du pendule : $\psi^{(1)}(t), \psi^{(2)}(t), \psi^{(3)}(t)$ pour les différents options de défuzzification (ligne continue); $\psi^*(t)$ pour la conception LQR classique (ligne pointillée). 73

4.4 Les vitesses angulaires de bras interne du pendule : $\dot{\varphi}^{(1)}(t), \dot{\varphi}^{(2)}(t), \dot{\varphi}^{(3)}(t)$ pour les différents options de défuzzification (ligne continue); $\dot{\varphi}^*(t)$ pour la conception LQR classique (ligne pointillée). 74

4.5 Les vitesses angulaires de bras externe du pendule : $\dot{\psi}^{(1)}(t), \dot{\psi}^{(2)}(t), \dot{\psi}^{(3)}(t)$ pour les différents options de défuzzification (ligne continue); $\dot{\psi}^*(t)$ pour la conception LQR classique (ligne pointillée). 74

Liste des tableaux

2.1	Formules d'approximations tangente et sécante pour la multiplication des nombres flous L-R	22
2.2	Formules approximatives pour la division des nombres flous L-R (basées sur l'approximation tangente double).	23
2.3	Conditions de compatibilité et les combinaisons valides pour les opérations élémentaires sur les nombres flous discrétisés	27
2.4	Evaluation du principe d'extension pour l'exemple 2.2(Etape1).	29
2.5	Evaluation du principe d'extension pour l'exemple 2.2(Etape2).	30
4.1	Paramètres du modèle avec leurs valeurs supposées et leurs valeurs réelles.	71
4.2	Les valeurs moyennes et les écarts-types des fonctions d'appartenances pour les paramètres du modèle incertain.	72
4.3	Mesure de la performance et le degré d'amélioration relative des contrôleurs flous paramétrés en référence à la conception LQR classique.	75
4.4	Les intervalles originaux W_i , et les intervalles de stabilité S_i pour les paramètres du modèle incertain pour l'option de commande 3.	76

Résumé

La majorité des stratégies de commande développées au sein de la commande automatique utilisent des entrées précises cependant les informations délivrées par les organes de mesure sont par nature imprécises. Dans ce cadre, si on place dans schéma de commande conventionnelle, il serait intéressant d'analyser et d'intégrer les effets induits par l'utilisation des entrées imprécises sur la stratégie de commande et sur le comportement dynamique du système piloté.

L'objectif de ce travail consiste à étudier et à intégrer l'influence des entrées imprécises sur la performance des algorithmes de commande conventionnelle.

Mots-clés : intervalles flous, système linéaire, logique floue, opérateurs d'agréations, commande par intervalles.

Abstract

The majority of the control strategies developed in the automation control using specific inputs, however, the information delivered by the measuring means are inherently imprecise. In this context, if we place in conventional control scheme, it would be interesting to analyze and integrate the effects induced by the use of inaccurate entries on the control strategy and the dynamic behavior of the controlled system.

The objective of this work is to study and incorporate the influence of inaccurate entries on the performance of conventional control algorithms.

Keywords : fuzzy intervals, linear system, fuzzy logic, aggregation operations, control intervals.

Remerciements

Mes remerciements vont tout premièrement, à Dieu le tout puissant qui m'a donné la foi, le courage et la patience de parvenir à finir ce modeste travail.

J'adresse mes vifs remerciements à Monsieur GUERFI Noureddine (Maitre de conférences à l'université de MILA) d'avoir accepté de diriger ce travail et pour ses nombreux conseils judicieux, qu'il trouve ici ma sincère gratitude.

Je remercie également Monsieur MEGRI Faycel (Maitre de conférences à l'université d'OUM EL BOUAGHI) co-encadrant de ce travail de thèse, pour sa sympathie, sa disponibilité, ses idées et conseils, ainsi que pour son aide précieuse de tous les jours.

Je remercie chaleureusement Monsieur CHENIKHER Salah (Professeur à l'université de TEBESSA) pour avoir accepté de juger ce travail et de présider le jury.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Monsieur DIB Djallel, (Maitre de conférences à l'université de TEBESSA), pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de l'examiner et d'en être rapporteurs.

Je remercie Monsieur HARKAT Mohamed Faouzi (Professeur à l'université d'ANNABA) pour avoir accepté de juger ce travail qu'il trouve ici une marque d'estime et de respect de ma part.

Je garde un très bon souvenir de l'ensemble des personnes que j'ai rencontrées et avec qui j'ai travaillé. Ma gratitude s'adresse à tous ceux qui d'une manière ou d'une autre ont contribué à l'élaboration de ce travail.

Mes sincères remerciements vont aussi à mes amis : Brahim, Abdou, Djahdou, Akrem, Atef, Riadh, Abdallah Mohcene, Toufik.....

Enfin, je suis reconnaissante envers ma petite famille : ma mère, mon père, mon beau frère, ma belle soeur qui ont été une source constante d'encouragement, de soutien et de joie.

Liste des symboles

X	Un ensemble classique
A	Un sous-ensemble flou
$\text{sup}(A)$	Le support d'un ensemble flou A
$\text{Ker}(A)$	Le noyau d'un ensemble flou A
$H(A)$	La hauteur d'un ensemble flou A
$\text{Card}(A)$	La cardinalité d'un ensemble flou A
$\text{Proj}_{x_1}(A)$	La projection d'un ensemble flou A sur X_1
Π	Mesure de possibilité
N	Mesure de nécessité
$\text{Coupe}_\alpha(\tilde{A})$	α – coupe d'un nombre flou
\tilde{p}	Nombre flou
$\mu_{\tilde{p}}(x)$	Fonction d'appartenance
\bar{x}	Valeur modale
α_r et α_l	Les écarts gauche et droite par rapport à la valeur modale
\tilde{q}	Sortie floue
E	Fonction symbolise l'une des opérations arithmétiques élémentaires
L et R	Fonctions des références pour les nombres flous L-R
\tilde{q}_t	Sortie floue pour l'approximation tangente
\tilde{q}_s	Sortie floue pour l'approximation sécante
m	Nombre de la décomposition
f	Expression rationnelle floue
P_i	Représentations décomposées
$X_i^{(j)}$	Les intervalles des représentations décomposées
f_D	Expression rationnelle floue direct
f_H	Expression rationnelle floue sous forme de Horner
f_D	Expression rationnelle floue sous forme factorisée
wth	Largeur d'un intervalle
Ω_M	Degré de surestimation local

Ω_G	Degré de surestimation global
$\tilde{X}_i^{(j)}$	Tableau de transformation
$k_{\hat{z}^{(j)}}$	Le $k^{\text{ème}}$ élément $k_{\hat{z}^{(j)}}$ du tableau $\hat{Z}^{(j)}$
L	Lagrangien
T	L'énergie cinétique
V	L'énergie potentielle.
m_1 et m_2	Les masses des bras interne et externe du pendule
d_1 et d_2	Les facteurs de friction
a_1 et a_2	Les distances des centres de gravité des charnières respectives
k_1^2 et k_2^2	Les rayons de giration carré
J_1 et J_2	Les moments d'inertie
l_1 et l_2	La longueur des bras du pendule
φ et ψ	Les angles de bras interne et externe du pendule
$\dot{\varphi}$ et $\dot{\psi}$	Les vitesses angulaires de bras interne et externe du pendule
k	Le gain de kalman
Q et R	Matrices de pondération définies positives
J	Critère à minimiser
v^\diamond	Valeur défuzzifiée
Γ	L'écart quadratique moyen

Introduction générale

Les systèmes industriels manipulent de nombreux signaux et paramètres recueillis en ligne afin d'améliorer la qualité globale de la performance en présence de certaines dérives naturelles du système et d'éventuels aléas de fonctionnement.

La majorité des stratégies de commande développées au sein de la communauté automatique [1] utilisent des entrées précises cependant les informations délivrées par les organes de mesure sont par nature imprécises. Dans ce cadre, si on se place dans un schéma de commande conventionnelle, il serait intéressant d'analyser et d'intégrer les effets induits par l'utilisation des entrées imprécises sur la stratégie de commande employée et sur le comportement dynamique du système piloté.

Pour cela, beaucoup de travaux sont menés au sein de la communauté scientifique. Cette problématique reste d'actualité et plusieurs chercheurs essaient de proposer et/ou d'exploiter des nouveaux opérateurs de décision pour améliorer la performance des systèmes, la fiabilité et la tolérance qu'on peut associer à un système pendant son cycle de fonctionnement. Dans ce cadre, il suffit de citer les travaux de [2][3][4] pour s'apercevoir de l'intérêt et l'importance de cette problématique.

Un autre aspect sera aussi abordé, à savoir l'élargissement des techniques de commande développées pour des systèmes dynamiques incertains. Dans ce cadre, si on se place dans un schéma de commande en boucle fermée, il serait intéressant d'analyser et d'intégrer les effets induits par l'utilisation des entrées imprécises sur la performance des algorithmes de commande employés. Dans ce contexte, une attention particulière sera donnée à la représentation des grandeurs numériques incertaines par l'approche arithmétique floue.

Considérant un modèle paramétrique à base d'intervalles, la problématique de commande est orientée vers l'étude de la stabilité et de la robustesse en fonction des variations des paramètres. En effet, la représentation des paramètres d'un système par des intervalles conduit la sortie de ce dernier à évoluer dans une enveloppe délimitée par deux bornes. Dans ce contexte, la stratégie de commande réside dans la recherche d'un correcteur à base d'intervalles, obtenu à partir du modèle incertain du procédé, et synthétisée de façon à assurer la stabilité et permettre l'étude de la performance de la boucle de commande.

Dans ce cas, contrairement à une représentation par intervalles conventionnels, toutes les valeurs dans un intervalle flou ne sont pas également possibles. La distribution de possibilité est représentée

par la fonction d'appartenance de l'intervalle flou où le support fait référence à l'intervalle de toutes les valeurs possibles et le noyau représente l'ensemble des meilleures valeurs d'un paramètre. Dans ce cas, on peut dire que les intervalles flous encapsulent dans un seul formalisme le cas optimiste (la connaissance précise) et le cas pessimiste (maximum de l'incertitude).

Ce mémoire est organisé comme suit :

Dans le **premier chapitre**, une introduction sur la logique floue, son historique ainsi que sa méthodologie est donnée.

Dans le **deuxième chapitre**, a pour vocation de donner de manière informelle les définitions et les principaux outils algébriques utilisés par Arithmétique floue, ainsi les principes de l'arithmétique floue seront exploités.

Une transformation sur l'arithmétique floue est détaillée dans le **troisième chapitre**. Dans ce cadre, une nouvelle méthodologie plus efficace sera proposée.

A travers des exemples d'applications, le **quatrième chapitre** présente les performances et l'efficacité de la commande imprécise.

Pour finir, nous proposons une conclusion générale dans laquelle seront soulignés les principaux résultats de ce travail ainsi que quelques éléments de perspectives.

Chapitre 1

Théorie de la logique floue

La logique floue (en anglais «fuzzy logic») est un axe de recherche important sur lequel se focalisent de nombreux scientifiques. Des retombées technologiques sont d'ores et déjà disponibles, tant dans le domaine grand public (appareils photos, machines à laver,...) que dans le domaine industriel (réglage et commande de processus complexes liés à l'énergie, aux transports, à la transformation de la matière, à la robotique, aux machines-outils)[3]. Dans ce chapitre, nous présentons les éléments de base de la théorie de la logique en insistant sur les contrôleurs à logique floue.

1.1 Théorie des ensembles flous

On introduit la théorie des ensembles flous comme théorie mathématique basée sur la théorie des ensembles, mais qui présente l'intérêt de l'étendre, en modifiant la définition même d'un ensemble ou plus précisément celle d'un sous-ensemble car on considère toujours un ensemble ordinaire comme référence pour définir des ensembles flous.

1.1.1 Définition de sous-ensembles flous

Soit X un ensemble classique de référence.

Définition : Un sous-ensemble flou A de X est défini par une fonction d'appartenance qui associe à chaque élément x de X le degré $\mu_A(x)$, compris entre 0 et 1.

Les sous-ensembles flous servent à décrire des concepts vagues, imprécis, des propriétés graduelles ou des événements incertains. Les notions d'inclusion, de réunion, intersection, complément, relation, convexité, ...etc., sont étendues à de tels ensembles, et diverses propriétés de ces notions dans le contexte des ensembles flous sont établies.

1. Egalité : $A = B$ si $\forall x \in X : \mu_A(x) = \mu_B(x)$.

2. Inclusion : $A \subset B$ si $\forall x \in X : \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

3. Intersection : $A \cap B = C$ telque : $\forall x \in X : \mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

4. Union : $A \cup B = D$ telque : $\forall x \in X : \mu_D(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))$.

5. Complément d'un sous-ensemble flou : $\forall x \in X : \mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x)$.

Cependant, il existe d'autres opérateurs utilisables pour définir ces opérateurs. Les plus connus sont les normes triangulaires pour l'intersection, les conormes triangulaires pour l'union et les négations pour le complément.

1.1.2 Support d'un ensemble flou

Le support d'un ensemble flou A noté $\text{sup}(A)$ est la partie X sur laquelle la fonction d'appartenance $\mu_A(x)$ n'est pas nulle.

$$\text{sup}(A) = \{x \in X; \mu_A(x) \neq 0\} \tag{1.1}$$

1.1.3 Noyau d'un ensemble flou

Le noyau de A noté $\text{Ker}(A)$ est l'ensemble des éléments de X pour lesquels la fonction d'appartenance normalisée de A vaut 1.

$$\text{Ker}(A) = \{x \in X; \mu_A(x) = 1\} \tag{1.2}$$

1.1.4 Hauteur d'un ensemble flou

La hauteur, notée $H(A)$, d'un ensemble flou A de X est le plus grand degré d'appartenance de A .

$$H(A) = \max(\mu_A(x); x \in X) \tag{1.3}$$

1.1.5 Cardinal d'un ensemble flou

La cardinalité d'un ensemble flou A de X est le degré global avec lequel des éléments de X appartiennent à A . Elle est définie par :

$$\text{Card}(A) = \sum_{x \in \text{sup}(A)} \mu_A(x) \quad \text{on note aussi } |A| \tag{1.4}$$

Si A est un ensemble ordinaire de X , sa hauteur est égale à 1 ; il est normalisé et identique à son support et à son noyau ; sa cardinalité est le nombre d'éléments qui le composent selon la définition classique.

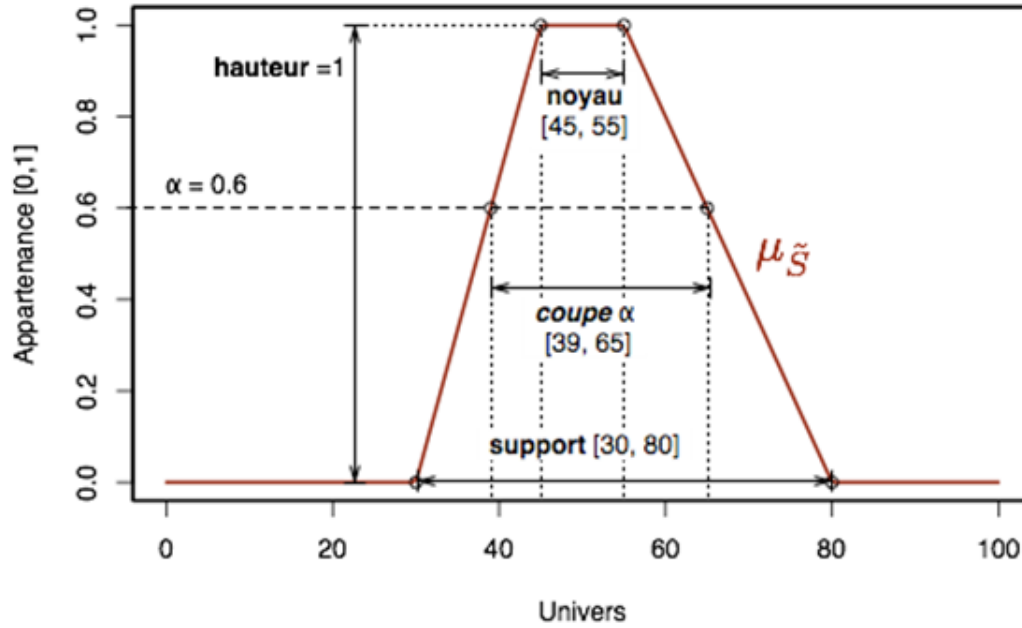


FIG. 1.1 – Support, hauteur, noyau et α -coupe d'un ensemble flou [1].

1.1.6 Concepts flous :

- Un sous-ensemble flou A de \mathbb{R} est dit **convexe** si, sa fonction d'appartenance est convexe.
- **Le produit cartésien** de deux sous-ensemble flous A_1 et A_2 est défini par :

$$A = A_1 \times A_2, \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in X, \mu_A(x) = \min(\mu_{A_1}(x), \dots, \mu_{A_n}(x)). \quad (1.5)$$

- **La projection** sur X_1 d'un sous-ensemble flou A de $X_1 \times X_2$ est le sous-ensemble flou $\text{Pr } o_{j_{X_1}}(A)$, dont la fonction d'appartenance est définie par :

$$\forall x_1 \in X_1, \mu_{\text{proj}_{X_1}(A)}(x_1) = \sup_{x_2 \in X_2} \mu_A((x_1, x_2)). \quad (1.6)$$

- **Principe d'extension** : Zadeh a introduit le principe d'extension, l'un des plus importants de la théorie des sous-ensembles flous, pour permettre d'exploiter nos connaissances classiques dans le cas de données floues : Arithmétique floue, relations floues, ...

Soit A un sous-ensemble flou de X et φ une application de X vers Y .

Le principe d'extension définit un sous-ensemble flou B de Y associé à A (image directe) par l'intermédiaire de φ par :

$$\forall y \in Y, \mu_B(y) = \sup_{\{x, \varphi(x)=y\}} \mu_A(x), \quad (1.7)$$

avec la convention : $\sup_{\Phi} \mu_A(x)$.

1.1.7 Relations et quantités floues

- Une **relation floue** R entre n ensembles de référence X_1, X_2, \dots, X_n est un sousensemble flou de $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$, de fonction d'appartenance μ_R .

Si $n = 2$, $X_1 = X_2 = X$; R est dite relation binaire floue sur X .

- La **composition** de deux relations floues R_1 sur $X \times Y$ et R_2 sur $Y \times Z$ définit une relation floue $R = R_1 \circ R_2$ sur $X \times Z$ de fonction d'appartenance définie par :

$$\forall (x, z) \in X \times Z, \mu_R(x, z) = \sup_{y \in Y} \min(\mu_{R_1}(x, y), \mu_{R_2}(y, z)). \quad (1.8)$$

Cette définition correspond à la composition $\sup - \min$. Il est cependant possible de remplacer l'opérateur \min par un autre opérateur T , par exemple une norme triangulaire, pour définir la composition $T - \sup$.

On peut généraliser les notions de relations d'équivalence et de relations d'ordre pour définir les relations de similarité et les relation d'ordre floues.

1.2 Théorie des possibilités

La théorie des sous-ensembles flous permet de traiter les imprécisions et constitue une interface entre descriptions symboliques et descriptions numériques. Cependant, elle ne permet de traiter que les imprécisions (incertitudes de type épistémique) dans les connaissances. C'est pourquoi la théorie des possibilités a été introduite en 1978 par Zadeh [4], puis développée par Dubois et Prade [5], dans le but d'obtenir un cadre permettant de traiter à la fois les concepts d'imprécisions et d'incertitudes. La théorie des possibilités fournit donc un moyen pour formaliser des incertitudes subjectives sur des événements, c'est-à-dire un moyen de dire dans quelle mesure la réalisation d'un événement est possible et dans quelle mesure nous sommes certain, sans toutefois avoir à sa disposition l'évaluation de la probabilité de cette réalisation [6].

1.2.1 Mesure et distribution de possibilités

Une mesure de possibilité Π attribuée à chaque sous-ensemble A de l'ensemble de référence Ω un réel dans $[0, 1]$ évaluant à quel point l'événement A est possible [5]. Ainsi, Π est une fonction de $S(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω à valeurs dans $[0, 1]$, telle que :

$$\Pi(\emptyset) = 0 \quad (1.9)$$

$$\Pi(\Omega) = 1 \tag{1.10}$$

$$\forall A_i \in \mathcal{S}(\Omega) \quad \Pi(\cup_i A_i) = \sup_i \Pi(A_i) \tag{1.11}$$

Dans le cas de deux sous-ensembles A et B, la dernière égalité se réduit à :

$$\Pi(A \cup B) = \max(\Pi(A), \Pi(B)) \tag{1.12}$$

Elle exprime que la réalisation de l'un des deux événements A ou B, pris indifféremment, est affectée du même coefficient de possibilité que la réalisation de l'événement le plus possible. Une mesure de possibilité n'est donc pas additive, mais suradditive.

Un événement est tout à fait possible si la mesure de sa possibilité est égale à 1, et impossible si elle est égale à 0. Une mesure de possibilité permet de déterminer le degré avec lequel l'union d'événements, dont on sait à quel point ils sont possibles, sera elle-même un événement possible.

La mesure de possibilité associée à l'intersection de parties de Ω est un réel majoré par la plus petite des mesures attribuées à chacune des parties.

Si enfin nous étudions un événement A et son contraire, l'un au moins est tout à fait possible et :

$$\max(\Pi(A), \Pi(\bar{A})) = 1 \tag{1.13}$$

$$\Pi(A) + \Pi(\bar{A}) \geq 1 \tag{1.14}$$

Une mesure de possibilité est totalement définie si toute partie de Ω se voit attribuer un réel dans $[0, 1]$. Ainsi, si $|\Omega| = n$, il faut déterminer 2^n coefficients pour connaître complètement . Pour définir cette mesure plus simplement, il suffit d'indiquer les coefficients attribués aux singletons de Ω (un sous-ensemble quelconque de Ω pouvant être vu comme l'union de tels singletons), ramenant le problème à la détermination de n coefficients. Une telle définition repose sur la donnée d'une autre fonction, une distribution de possibilité π , qui attribue à tout singleton de Ω un réel dans $[0, 1]$, et qui vérifie de plus (cas où Ω contient un événement certain) :

$$\sup_{x \in \Omega} \pi(x) = 1 \tag{1.15}$$

1.2.2 Mesure de nécessité

Une mesure de possibilité Π donne une information sur l'occurrence d'un événement A relatif à l'ensemble de référence Ω , mais elle ne suffit pas pour décrire l'incertitude existante sur cet

événement [5]. Par exemple, si $\Pi(A) = 1$, il est tout à fait possible que A soit réalisé mais on peut avoir en même temps :

$-\Pi(\bar{A}) = 1$, qui exprime une indétermination complète sur la réalisation de A ;

$-\Pi(\bar{A}) = 0$, qui met en évidence le fait que A seul peut être réalisé.

Pour compléter l'information sur A, une mesure de nécessité N permet d'indiquer le degré avec lequel la réalisation de A est certaine. N est la grandeur duale de la mesure de possibilité. Cette mesure attribue à tout A un réel dans $[0, 1]$. La nécessité d'un événement correspond à l'impossibilité de l'événement contraire :

$$\forall A \in \Omega \quad N(A) = 1 - \Pi(\bar{A}) \quad (1.16)$$

Une mesure de nécessité vérifie les propriétés suivantes :

$$N(\emptyset) = 0 \quad (1.17)$$

$$N(\Omega) = 1 \quad (1.18)$$

$$\forall A_i \in S(\Omega) \quad N(\bigcap_i A_i) = \inf_i \Pi(A_i) \quad (1.19)$$

Dans le cas de deux sous-ensembles A et B, la dernière égalité se réduit à :

$$N(A \cap B) = \min(N(A), N(B)) \quad (1.20)$$

Les degrés de possibilité et de nécessité sont liés par les relations suivantes :

$$N(A) > 0 \implies \Pi(A) = 1 \quad (1.21)$$

$$\Pi(A) < 1 \implies N(A) = 0 \quad (1.22)$$

Ces deux relations indiquent que tout événement dont nous sommes au moins un peu certain est tout à fait possible, et que nous ne pouvons avoir la moindre certitude sur un événement qui n'est pas complètement possible.

1.3 Les systèmes flous

1.3.1 Différents types des systèmes flous :

Selon la forme des conclusions des règles floues, deux types principaux de modèles flous peuvent être distingués :

1.3.1.1 Les modèles flous linguistiques

Dans les modèles linguistiques, les quantités floues sont décrites par des termes linguistiques, et le modèle flou constitue une description du système dans une langue naturelle. Ce type est caractérisé par des règles floues ayant des prémisses et des conclusions floues. Ils permettent une description linguistique du système par une base de règles floues de la forme :

$$R_i : \text{Si } X \text{ est } A_i \text{ et } Y \text{ est } B_i \text{ Alors } Z \text{ est } C_i, i = 0, \dots, n \quad (1.23)$$

Les modèles les plus connus de ce type sont celui de Mamdani et celui de Larsen.

Ces modèles présentent l'avantages d'être facilement interprétables, et bien adaptés à l'utilisation des entrées floues. En revanche, ils ont une capacité de représentation limitée.

1.3.1.2 Modèles flous de Takagi-Sugeno-Kang (TSK)

un modèle de TSK est constitué par une base de règles floues de la forme :

$$R_i : \text{Si } X \text{ est } A_i \text{ et } Y \text{ est } B_i \text{ Alors } Z = F_i(x, y), i = 0, \dots, n \quad (1.24)$$

où F_i sont des fonctions crisp, généralement linéaires, affines ou même constantes. Le modèle global est obtenu par interpolation entre les modèles locaux. Cela nous permet d'accroître la précision du système, mais au détriment de sa lisibilité.

Les modèles de TSK permettent de décrire des situations où la structure physique du système est bien connue et d'approcher un système complexe par une collection de modèles locaux, généralement linéaires. Les modèles de TSK ont une capacité de représentation importante. Toutefois, les règles n'ont pas toujours une signification sémantique claire comme dans le cas des modèles linguistiques et ne permettent pas d'intégrer l'expérience humaine formulée par des règles linguistiques.

Chapitre 2

Arithmétique floue pour les différents types des nombres flous

Depuis la publication en 1965 des travaux pionniers de L. Zadeh sur les sous ensembles flous [7], de nombreux « systèmes flous » émergent durant les deux décennies suivantes : logique floue, contrôleur flou, systèmes experts flous, etc.

L'engouement général pour l'intelligence artificielle accompagne ainsi le développement de l'arithmétique floue, qui, bien qu'initialement considérée comme un exercice académique, se concrétise dans les années 80 avec la notion des nombres flous L-R introduit par Dubois et Prade en 1978 [8] et avec les travaux de R. Yager [9] qui en 1986, détaille le principe d'extension initialement du à Zadeh.

Viennent ensuite les nombres flous discrétisés initialement proposés par M. Hanss, mais surtout les nombres flous décomposés proposés par Kaufman et Gupta au début des années 90 [10], qui dressent un parallèle entre l'arithmétique floue et l'arithmétique des intervalles.

2.1 Définitions

2.1.1 Une quantité floue

est un sous-ensemble flou normalisé de \mathbb{R} . Une valeur de degré d'appartenance 1 est dite valeur modale.

2.1.2 Un intervalle flou

est une quantité floue convexe.

2.1.3 La notion de α – coupe

Une α – coupe de A_α de A est un sous-ensemble de X , défini par :

$$\text{coupe}_\alpha(\tilde{A}) = A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha; \alpha \in [0, 1]\} \quad (2.1)$$

Les α –coupes vérifient :

- $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$.
- $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$.
- $A \subset B \implies A_\alpha \subset B_\alpha$.
- $A_1 = \text{noyau}(A)$.
- $A_0 = X$.

2.1.4 Nombres flous et vecteurs flous

Parmi les différents types d'ensembles flous, ceux qui sont définies sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} , sont d'une importance particulière.

Ils peuvent, sous certaines conditions, être considérés comme des nombres flous, qui reflètent la perception humaine de la quantification numérique incertaine. De même, ce qu'on appelle les vecteurs flous peuvent être présentés comme une classe particulière des relations floues qui sont définies dans l'ensemble \mathbb{R}^n de l'espace euclidien n .

Ils peuvent être utilisés comme des représentations des grandeurs vectorielles incertaines en coordonnées cartésiennes et peuvent donc être considérés comme des nombres flous de n dimensions généralisée, qui inclue la classe des nombres flous réguliers pour le cas particulier $n = 1$ [2].

2.1.4.1 Nombres flous

Définitions de base Un ensemble flou $\tilde{P} \in \tilde{P}(\mathbb{R})$ est appelé un nombre flou \tilde{p} s'il satisfait aux conditions suivantes :

1. \tilde{P} est normal, c'est-à-dire que sa hauteur est égale à 1. Plus formellement on écrira : $H(\tilde{P}) = 1$.
2. \tilde{P} est convexe, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de α – coupe disjointe.
3. Il y a exactement un $\bar{x} \in \mathbb{R}$ avec $\mu_{\tilde{p}}(\bar{x}) = 1$, c'est-à-dire : $\text{Ker}(\tilde{P}) = \bar{x}$.
4. Sa fonction d'appartenance est $\mu_{\tilde{p}}(x), x \in \mathbb{R}$, est continue par morceaux.

La valeur $\bar{x} = \text{Ker}(\tilde{p})$ qui montre le degré maximal de la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{p}}(\bar{x}) = 1$ est appelée la valeur modale du nombre flou \tilde{p} .

La valeur modale peut aussi être désignée sous le nom de valeur crête, valeur centrale, ou valeur moyenne, où les deux dernières expressions sont utilisées de préférence pour des nombres flous symétriques .

Un nombre flou $\tilde{p} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$ est appelée symétrique si sa fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{p}}(x)$ satisfait à la condition :

$$\mu_{\tilde{p}}(\bar{x} + x) = \mu_{\tilde{p}}(\bar{x} - x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.2)$$

Un nombre flou $\tilde{p} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$ est appelé (strictement) positive, symbolisé par $\tilde{p} > 0$ ou $sgn(\tilde{p}) = +1$, si

$$\sup(\tilde{p}) \subseteq]0, +\infty[, \quad (2.3)$$

Ou strictement négative symbolisé par $\tilde{p} < 0$ ou $sgn(\tilde{p}) = -1$, si

$$\sup(\tilde{p}) \subseteq]-\infty, 0[, \quad (2.4)$$

Un nombre flou $\tilde{p} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$ sera appelé zéro (flou), symbolisé par $sgn(\tilde{p}) = 0$, S'il ni positive ni négative, ceci, si

$$0 \in \sup(\tilde{p}) \quad (2.5)$$

Types des nombres flous Parmi le nombre infini possibilités de sous-ensembles flous dans $\tilde{p} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$ qui sont considérés comme des nombres flous, certains types des fonctions d'appartenances $\mu_{\tilde{p}}(x)$ sont d'une importance particulière, surtout en ce qui concerne l'application des nombres flous dans l'arithmétique floue.

Nombre triangulaire floue (Nombre flou linéaire) En raison de sa fonction d'appartenance plutôt simple de type linéaire, le nombre flou triangulaire ou le nombre flou linéaire est l'un des nombres flous le plus fréquemment utilisé. En forme abrégée, on peut introduire la notation

$$\tilde{p} = tfn(\bar{x}, \alpha_l, \alpha_r) \quad (2.6)$$

Pour définir un nombre flou triangulaire $\tilde{p} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$ avec la fonction d'appartenance

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq \bar{x} - \alpha_l \\ 1 + (x - \bar{x})/\alpha_l & \text{pour } \bar{x} - \alpha_l < x < \bar{x} \\ 1 - (x - \bar{x})/\alpha_r & \text{pour } \bar{x} < x < \bar{x} + \alpha_r \\ 0 & \text{pour } x \geq \bar{x} + \alpha_r \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \min\{\max[0, 1 - (x - \bar{x})/\alpha_l], \max[0, 1 - (x - \bar{x})/\alpha_r]\} \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.8)$$

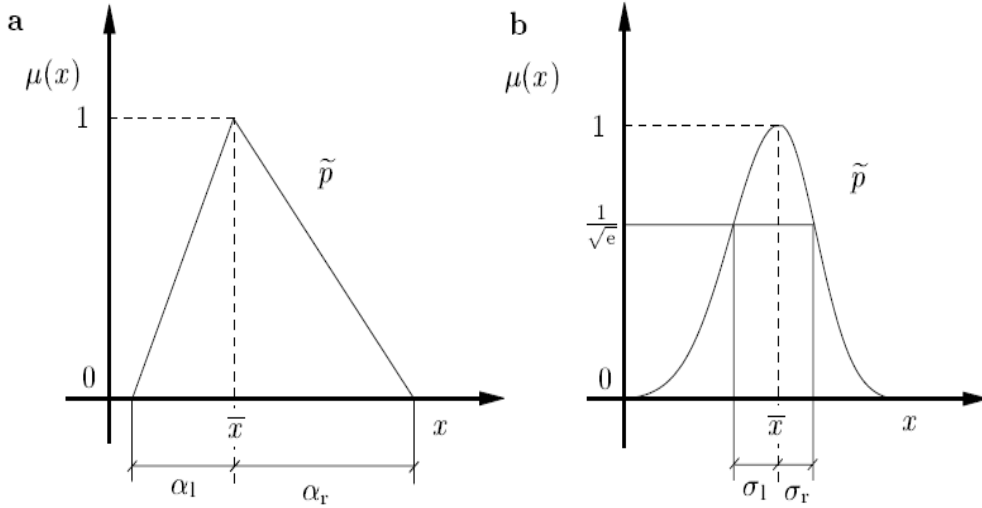


FIG. 2.1 – (a) Nombre flou triangulaire (b) Nombre flou Gaussien

Le paramètre \bar{x} désigne la valeur modale du nombre flou, et α_l et α_r sont les écarts gauche et droite par rapport à la valeur modale (Figure 2.1(a)).

L'ensemble des valeurs visées par le nombre flou est appelé intervalle W du nombre flou \tilde{p} et doit être défini comme

$$W = [w_l, w_r] = [\bar{x} - \alpha_l, \bar{x} + \alpha_r] = \text{sup}(\tilde{p}) \cup \{\bar{x} - \alpha_l, \bar{x} + \alpha_r\}. \quad (2.9)$$

Nombre flou Gaussien Un autre type important de nombre flou est le nombre flou gaussien, où la fonction d'appartenance est caractérisée par une distribution gaussienne. Nous pouvons introduire une notation réduite sous la forme

$$\tilde{p} = gfn(\bar{x}, \sigma_l, \sigma_r) \quad (2.10)$$

Pour définir un nombre flou gaussien $\tilde{p} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$ avec la fonction d'appartenance

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} \exp[-(x - \bar{x})^2 / (2\sigma_l^2)] & \text{pour } x < \bar{x} \\ \exp[-(x - \bar{x})^2 / (2\sigma_r^2)] & \text{pour } x \geq \bar{x} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.11)$$

La valeur modale est désigné par le paramètre \bar{x} et σ_l et σ_r correspondant à l'écart-type de la distribution gaussienne (Figure 2.1(b)).

Nombre flou quasi-gaussien Nous pouvons introduire une notation de la forme

$$\tilde{p} = gfn^*(\bar{x}, \sigma_l, \sigma_r) \quad (2.12)$$

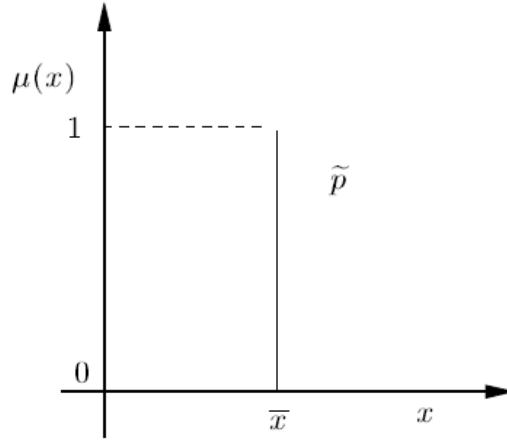


FIG. 2.2 – Singleton flou

Pour définir un nombre quasi-gaussien $\tilde{p} \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$ avec la fonction d'appartenance

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \leq \bar{x} - 3\sigma_l \\ \exp[-(x - \bar{x})^2 / (2\sigma_l^2)] & \text{pour } \bar{x} - 3\sigma_l < x < \bar{x} \\ \exp[-(x - \bar{x})^2 / (2\sigma_r^2)] & \text{pour } \bar{x} < x \leq \bar{x} + 3\sigma_l \\ 0 & \text{pour } x \geq \bar{x} + 3\sigma_r \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.13)$$

Singleton flou Conformément à la théorie des ensembles flous où les ensembles classiques sont inclus dans la classe des super coordonnée des ensembles flous, les nombres nets (crisp) peuvent être considérés comme un cas particulier des nombres flous, car ils possèdent toutes leurs propriétés.

Dans ce contexte, un certain nombre net \bar{x} peut être exprimé par un nombre flou défini par la fonction d'appartenance

$$\mu_{\tilde{p}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < \bar{x} \\ 1 & \text{pour } x = \bar{x} \\ 0 & \text{pour } x > \bar{x} \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (2.14)$$

Lorsque les nombres nets sont considérés comme des nombres flous, ils sont généralement appelés singletons flous (Figure 2.2).

2.1.4.2 Vecteurs Flous

Une relation floue $\tilde{P} \in \tilde{P}'(\mathbb{R}^n)$ est appelée un vecteur flou de n -dimensions \tilde{p} si elle satisfait aux conditions suivantes :

1. \tilde{P} est normal, c'est-à-dire : $H(\tilde{P}) = 1$.

2. \tilde{P} est convexe.

3. Il ya exactement un $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = 1$, qui est, $Ker(\tilde{P}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

4. La fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{P}}(x_1, x_2, \dots, x_n), (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ est au moins continue par morceaux.

Conformément à la notation des nombres flous, le vecteur net \bar{x} avec $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T = Ker(\tilde{p})$ et $\mu_{\tilde{P}}(\bar{x}) = 1$ est appelé le vecteur modal du vecteur flou \tilde{p} .

Contrairement aux nombres flous réguliers, les vecteurs flous de dimension $n > 1$ sont d'importance secondaire dans le cadre de l'application de l'arithmétique floue. Néanmoins, deux vecteurs flous peuvent être d'un intérêt particulier dans le contexte des nombres complexes.

Figure 2.3 montre un exemple d'un vecteur \tilde{p} avec le vecteur modal $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^T$. Si l'axe- x_1 est interprété comme axe réel et l'axe- x_2 que l'imaginaire. Le vecteur flou \tilde{p} représente le nombre flou complexe \tilde{c} avec sa valeur modale complexe

$$\bar{c} = \bar{x}_1 + i\bar{x}_2 \in \mathbb{C}, \bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \mathbb{R} \tag{2.15}$$

2.2 Opérations arithmétiques élémentaires flous

L'objectif principal de l'arithmétique floue est de définir les opérations arithmétiques élémentaires floues comme homologues des opérations élémentaires appropriées : l'addition, soustraction, multiplication et division des nombres nets.

Etant donné deux nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 avec leurs fonctions d'appartenances $\mu_{\tilde{p}_1}(x_1), x_1 \in \mathbb{R}$, et $\mu_{\tilde{p}_2}(x_2), x_2 \in \mathbb{R}$.

L'objectif de l'arithmétique élémentaire floue est de déterminer la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{q}}(z), z \in \mathbb{R}$, du nombre floue

$$\tilde{q} = E(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) \tag{2.16}$$

Lorsque la fonction E symbolise l'une des opérations arithmétiques élémentaires

$$\begin{aligned} E_a(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 & E_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 \\ E_m(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 & E_d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) &= \tilde{p}_1 / \tilde{p}_2 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Une approche formelle de la solution de ce problème est fournie par le principe d'extension de Zadeh, qui permet l'évaluation des fonctions arbitraires avec des ensembles flous comme leurs valeurs d'arguments.

Après la réécriture de [1] avec les nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 comme arguments et avec l'opération binaire E que la cartographie fonctionnelle, la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{q}}(z)$ du nombre flou \tilde{q} qui

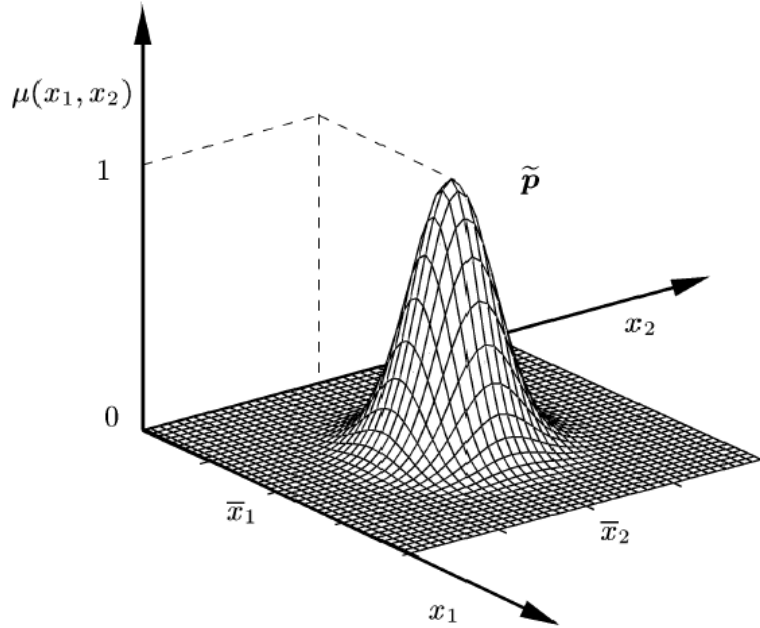


FIG. 2.3 – Deux dimensions d’un vecteur \tilde{p} avec le vecteur modal $\bar{x} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2]^T$ [2]

en résulte peut être obtenue à partir

$$\mu_{\tilde{q}}(z) = \sup_{z=E(x_1, x_2)} \min\{\mu_{\tilde{p}_1}(x_1), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2)\} \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

Par conséquent, une définition effective de l’arithmétique floue élémentaire exige la mise en œuvre pratique de 2.18 pour les opérations arithmétiques élémentaires E_a , E_s , E_m , et E_d , et pour les nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 avec des fonctions d’appartenance arbitraires $\mu_{\tilde{p}_1}(x_1)$ et $\mu_{\tilde{p}_2}(x_2)$.

Pour illustrer la méthode d’évaluation du principe d’extension dans 2.18 pour les opérations arithmétiques élémentaires entre les nombres flous, considérons l’addition $\tilde{q} = E_a(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$ de deux nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 comme indiqué sur la Figure 2.4.

Lorsqu’on a sélectionné les valeurs d’entrées $x_1 = 8$ et $x_2 = 3$ on obtient la valeur de sortie $z = x_1 + x_2 = 11$ avec un degré d’appartenance intermédiaire donnée par $\min\{\mu_{\tilde{p}_1}(x_1 = 8), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2 = 3)\}$ tel qu’illustré par les lignes horizontales pointillés sur la Figure 2.4.

Toutefois, la même valeur de sortie $z = 11$ peut être obtenue par d’autres combinaisons des valeurs d’entrées, conduisant alors à des degrés d’appartenance intermédiaires de valeurs différentes. Par exemple, la combinaison $x_1 = 7$ et $x_2 = 4$ conduit au degré d’appartenance intermédiaire $\min\{\mu_{\tilde{p}_1}(x_1 = 7), \mu_{\tilde{p}_2}(x_2 = 4)\}$ comme illustré par les lignes horizontales continues dans la Figure 2.4.

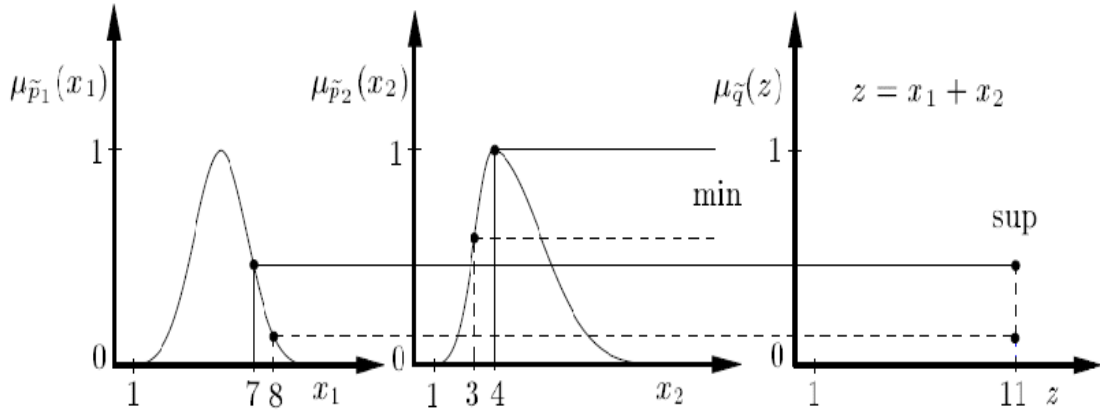


FIG. 2.4 – Evaluation du principe d'extension pour l'addition de deux nombres flous.

2.2.1 Les nombres flous L-R

L'idée fondamentale de la représentation L-R des nombres flous est de diviser la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{p}_i}(x_i)$ d'un nombre flou \tilde{p}_i en deux courbes $\mu_{l_i}(x_i)$ et $\mu_{r_i}(x_i)$ à gauche et à droite de la valeur modale \bar{x}_i , conformément à la Figure 2.5. La fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{p}_i}(x_i)$ peut alors être exprimée au moyen des fonctions de référence paramétrées ou les fonctions de forme L et R

$$\mu_{\tilde{p}_i}(x_i) = \begin{cases} \mu_{l_i}(x_i) = L[(\bar{x}_i - x_i)/\alpha_i] & \text{pour } x_i < \bar{x}_i \\ \mu_{r_i}(x_i) = R[(x_i - \bar{x}_i)/\beta_i] & \text{pour } x_i \geq \bar{x}_i \end{cases} \quad (2.19)$$

Ainsi, en plus de la valeur modale \bar{x}_i , le nombre flou \tilde{p}_i , est caractérisé par des écarts α_i et β_i , correspondant à les déviations gauche et droite de la fonction d'appartenance, respectivement.

Comme une notation abrégée, on peut définir un nombre flou L-R, avec la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{p}_i}(x_i)$ à 2.19 par

$$\tilde{p}_i = \langle \bar{x}_i, \alpha_i, \beta_i \rangle \quad (2.20)$$

Où L et R spécifient le type des fonctions des références.

Les propriétés que les fonctions $L(u)$ et $R(u)$, $u \in \mathbb{R}_0^+$, doivent posséder pour être admissible à titre de fonction de référence pour les nombres flous L-R sont les suivantes :

1. $L(u) \in [0, 1] \forall u$ et $L(u) \in [0, 1] \forall u$.
2. $L(0) = R(0) = 1$.
3. $L(u)$ et $R(u)$ sont en décroissance dans $[0, \infty[$.
4. $L(1) = 0$ si $\min_u L(u) = 0$,
 $\lim_{u \rightarrow \infty} L(u) = 0$ si $L(u) > 0 \forall u$,

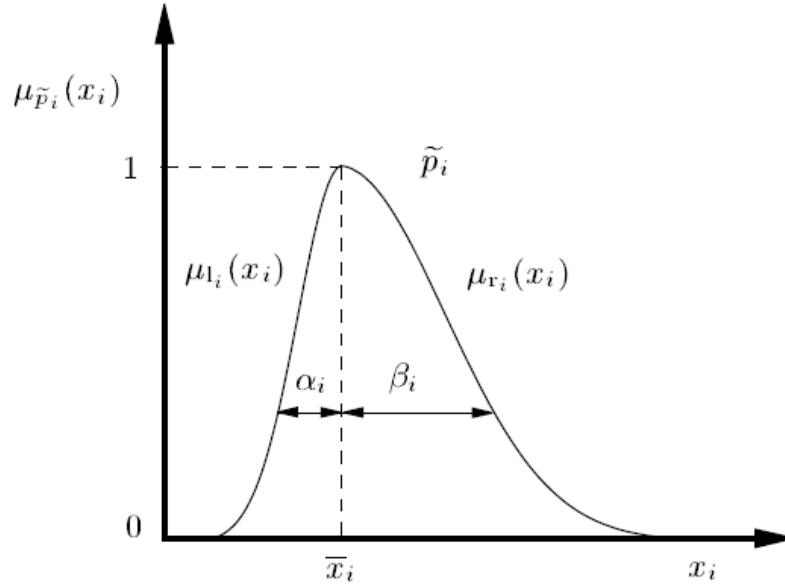


FIG. 2.5 – La représentation L-R des nombres flous

Et

$$R(1) = 0 \text{ si } \min_u R(u) = 0,$$

$$\lim_{u \rightarrow \infty} R(u) = 0 \text{ si } R(u) > 0 \forall u,$$

Un certain nombre floue $L - R$ est appelé semi-symétrique si les fonctions de références L et R sont identiques, c'est-à-dire : $L(u) = R(u) \forall u \in \mathbb{R}_0^+$. En outre, si les écarts α_i et β_i d'un certain nombre flou \tilde{p}_i semi symétrique, sont égaux, c'est à dire, $\alpha_i = \beta_i$, le nombre flou L-R est dit symétrique.

Pour la plupart des types utilisés fréquemment pour des nombres flous introduit dans [1], une représentation adéquate comme du nombre flou $L - R$ semi- symétrique peut être fournie par la définition des fonctions de référence appropriée comme suit :

* Nombre triangulaire floue (Nombre flou linéaire) :

$$\tilde{p}_i = tfn(\bar{x}_i, \alpha_{li}, \alpha_{ri}) = \langle \bar{x}_i, \alpha_{li}, \alpha_{ri} \rangle_{ll}, \quad (2.21)$$

$$l(u) = \max[0, 1 - u] = L(u) = R(u) \quad (2.22)$$

* Nombre flou Gaussien :

$$\tilde{p}_i = gfn(\bar{x}_i, \sigma_{li}, \sigma_{ri}) = \langle \bar{x}_i, \sigma_{li}, \sigma_{ri} \rangle_{gg}, \quad (2.23)$$

$$g(u) = \exp(-u^2/2) = L(u) = R(u) \quad (2.24)$$

* Nombre flou Quadratique :

$$\tilde{p}_i = qfn(\bar{x}_i, \beta_{li}, \beta_{ri}) = \langle \bar{x}_i, \beta_{li}, \beta_{ri} \rangle_{qq}, \quad (2.25)$$

$$q(u) = \max[0, 1 - u^2] = L(u) = R(u) \quad (2.26)$$

* Nombre flou Exponentielle :

$$\tilde{p}_i = efn(\bar{x}_i, \tau_{li}, \tau_{ri}) = \langle \bar{x}_i, \tau_{li}, \tau_{ri} \rangle_{ee}, \quad (2.27)$$

$$e(u) = \exp(-u) = L(u) = R(u) \quad (2.28)$$

2.2.1.1 Opérations sur les nombres flous L-R

Dans la suite, les formules pour les opérations élémentaires entre les nombres flous L-R seront présentées.

Addition des nombres flous L-R Etant donné deux nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 représentés comme des nombres flous L-R de la forme

$$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R} \quad (2.29)$$

La somme $E_a = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{q} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$ est encore un nombre flou L-R de la forme

$$\tilde{q} = \langle \bar{z}, \alpha, \beta \rangle_{L,R} \quad (2.30)$$

Avec la valeur modale

$$\bar{z} = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 \quad (2.31)$$

Et les écarts

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \quad \text{et} \quad \beta = \beta_1 + \beta_2 \quad (2.32)$$

En bref, nous pouvons écrire

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_1} + \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_2} = \underbrace{\left\langle \overbrace{\bar{x}_1 + \bar{x}_2}^{\bar{z}}, \overbrace{\alpha_1 + \alpha_2}^{\alpha}, \overbrace{\beta_1 + \beta_2}^{\beta} \right\rangle_{L,R}}_{\tilde{q}} \quad (2.33)$$

Pour les nombres flous L-R \tilde{p}_1 , \tilde{p}_2 et \tilde{q} de type différents, on peut déduire en générale la formule pour l'addition L-R $\tilde{q} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$:

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L_1, R_1}}_{\tilde{p}_1} + \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L_2, R_2}}_{\tilde{p}_2} = \underbrace{\langle \bar{x}_1 + \bar{x}_2, 1, 1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{q}} \quad (2.34)$$

Avec

$$L = (\alpha_1 L_1^{-1} + \alpha_2 L_2^{-1})^{-1} \quad \text{et} \quad R = (\beta_1 R_1^{-1} + \beta_2 R_2^{-1})^{-1} \quad (2.35)$$

Soustraction des nombres flous L-R Faisant usage de l'opposé $-\tilde{p}$ de le nombre flou L-R \tilde{p} , qui est défini

$$-\tilde{p} = -\langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R} = \langle -\bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R} \quad (2.36)$$

Nous pouvons en déduire la formule suivante à partir de 2.33 pour la soustraction $\tilde{q} = E_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2$ des nombres flous L-R :

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_1} - \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{R,L}}_{\tilde{p}_2} = \underbrace{\left\langle \overbrace{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}^{\bar{z}}, \overbrace{\alpha_1 + \alpha_2}^{\alpha}, \overbrace{\beta_1 + \beta_2}^{\beta} \right\rangle_{L,R}}_{\tilde{q}} \quad (2.37)$$

A noter que dans le cas de la soustraction des nombres flous L-R, les nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 doivent être de type L-R opposée à garantir la clôture de l'opération.

Pour les nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 de type L-R arbitraire, nous obtenons de 2.34 et 2.37

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L_1, R_1}}_{\tilde{p}_1} - \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L_2, R_2}}_{\tilde{p}_2} = \underbrace{\langle \bar{x}_1 - \bar{x}_2, 1, 1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{q}} \quad (2.38)$$

Avec

$$L = (\alpha_1 L_1^{-1} + \beta_2 R_2^{-1})^{-1} \quad \text{et} \quad R = (\beta_1 R_1^{-1} + \alpha_2 L_2^{-1})^{-1} \quad (2.39)$$

Multiplication des nombres flous L-R Prenons à nouveau deux nombres flous L-R \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 donné par les représentations L-R

$$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R} \quad (2.40)$$

En outre, si nous supposons que les deux nombres floue \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 sont positifs $\tilde{p}_1 > 0$ et $\tilde{p}_2 > 0$, nous pouvons construire la courbe droite $\mu_r(z)$ du produit $\tilde{q} = E_m(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$ sur le base des courbes droites

$$\mu_{r_1}(x_1) = R[(x_1 - \bar{x}_1)/\beta_1] \quad \text{et} \quad \mu_{r_2}(x_2) = R[(x_2 - \bar{x}_2)/\beta_2] \quad (2.41)$$

Des nombres flous L-R \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 . Conformément à la déduction de la formule de l'addition L-R, les valeurs des arguments qui tiennent sur le degré d'appartenance $\mu^* \in [0, 1]$ sont

$$x_1^* = \bar{x}_1 + \beta_1 R^{-1}(\mu^*) \quad \text{et} \quad x_2^* = \bar{x}_2 + \beta_2 R^{-1}(\mu^*) \quad (2.42)$$

Cela implique

$$z^* = x_1^* x_2^* = \bar{x}_1 \bar{x}_2 + (\bar{x}_1 \beta_2 + \bar{x}_2 \beta_1) R^{-1}(\mu^*) + \beta_1 \beta_2 [R^{-1}(\mu^*)]^2 \quad (2.43)$$

En raison de terme quadratique 2.43, l'opération de multiplication s'avère être ouvert à des nombres flous de type L-R. Pour contourner cet inconvénient, deux approximations ont été proposées [11], qui sera soumis à la rapprochement tangente et la rapprochement sécante dans les domaines suivants :

1. Rapprochement tangent :

Pourvu qu'un α_1 et α_2 sont faibles par rapport à \bar{x}_1 et \bar{x}_2 ou μ^* dans le voisinage de 1. Nous ne pouvons négliger le terme quadratique $[R^{-1}(\mu^*)]^2$ en 2.43 et nous obtenons pour la courbe droite $\mu_r(z)$ du produit \tilde{q}_t une expression de la forme

$$\mu_r(z) = \mu^* = R[(z^* - \bar{z})/\beta] \quad (2.44)$$

Avec

$$\bar{z} = \bar{x}_1 \bar{x}_2 \quad \text{et} \quad \beta = \bar{x}_1 \beta_2 + \bar{x}_2 \beta_1 \quad (2.45)$$

En utilisant le même raisonnement pour les courbes gauches de \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 et \tilde{q}_t on en déduit la formule suivante pour l'ensemble de la multiplication des nombres flous L-R

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_1} \cdot \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_2} \approx \underbrace{\left\langle \overbrace{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}^{\bar{z}}, \overbrace{\bar{x}_1 \alpha_2 + \bar{x}_2 \alpha_1}^{\alpha}, \overbrace{\bar{x}_1 \beta_2 + \bar{x}_2 \beta_1}^{\beta} \right\rangle_{L,R}}_{\tilde{q}} \quad (2.46)$$

2.Rapprochement sécant :

Si les écarts ne sont pas négligeables par rapport aux valeurs modales \bar{x}_1 et \bar{x}_2 le produit $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ peut être estimé en rapprochant le terme quadratique $[R^{-1}(\mu^*)]^2$ en 2.43 par le terme linéaire $[R^{-1}(\mu^*)]$.

Cela donne la courbe droite de produit approximatif \tilde{q}_s sous la forme

$$\mu_r(z) = \mu^* = R[(z^* - \bar{z})/\beta] \tag{2.47}$$

Avec

$$\bar{z} = \bar{x}_1\bar{x}_2 \quad \text{et} \quad \beta = \bar{x}_1\beta_2 + \bar{x}_2\beta_1 + \beta_1\beta_2 \tag{2.48}$$

Avec le même raisonnement pour les courbes gauches de \tilde{p}_1, \tilde{p}_2 et \tilde{q}_s de la formule générale de la multiplication des nombres flous L-R , on obtient :

$$\underbrace{\langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_1} \cdot \underbrace{\langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,R}}_{\tilde{p}_2} \approx \underbrace{\left\langle \overbrace{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2}^{\bar{z}}, \overbrace{\bar{x}_1\alpha_2 + \bar{x}_2\alpha_1 - \alpha_1\alpha_2}^{\alpha}, \overbrace{\bar{x}_1\beta_2 + \bar{x}_2\beta_1 + \beta_1\beta_2}^{\beta} \right\rangle_{L,R}}_{\tilde{q}} \tag{2.49}$$

Exemple 2.2.1 Prenons les nombres flous triangulaires positifs

$$\tilde{p}_1 = tfn(2, 1, 1) \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 = tfn(4, 2, 4) \tag{2.50}$$

Qu'on peut réécrire comme des représentations L-R sous la forme

$$\tilde{p}_1 = tfn(2, 1, 1)_{l,l} \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 = tfn(4, 2, 4)_{l,l} \tag{2.51}$$

Si le rapprochement tangent 2.46 est utilisé, le produit $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ est approché par le nombre flou triangulaire L-R

$$\tilde{q}_t = \langle 8, 8, 12 \rangle_{l,l} \tag{2.52}$$

Dans le cas de l'approximation sécante en fonction de 2.49, le résultat de la multiplication des \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 est approchée par

$$\tilde{q}_s = \langle 8, 6, 16 \rangle_{l,l} \tag{2.53}$$

Le résultat exacte \tilde{q} pour le produit des nombres flous triangulaires L-R \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 ainsi que les

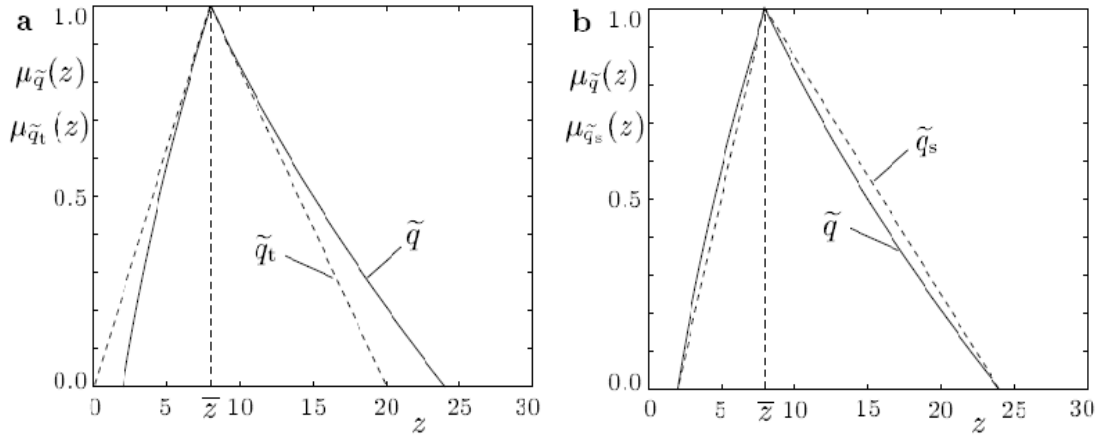


FIG. 2.6 – (a) Le produit exact $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ et leur approximation tangente \tilde{q}_t (b) Le produit exact $\tilde{q} = \tilde{p}_1\tilde{p}_2$ et leur approximation sécante \tilde{q}_s .

approximations \tilde{q}_t et \tilde{q}_s sont présentées sur la Figure 2.6.

Pour cet exemple, il peut être vu que l’approximation sécante donne des meilleurs résultats de manière significative, en particulier parce que $\sup(\tilde{q}_s) = \sup(\tilde{q})$.

Lorsque nous omettons la restriction que les deux nombres flous L-R \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 peuvent être positif, et nous leur permettons d’être positif ou négatif, nous devons distinguer trois cas, pour chacun d’eux, le rapprochement tangent et sécant peuvent être formulées.

Une liste complète des formules qui en résultent peuvent être trouvés dans le tableau 2.1.

Division des nombres flous L-R Une formulation appropriée pour le quotient $\tilde{q} = E_d(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1/\tilde{p}_2$ de deux nombres flous L-R \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 peut être obtenue en réduisant la division des nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 à la multiplication de \tilde{p}_1 avec l’inverse $\tilde{p}_2^{-1} = 1/\tilde{p}_2$ de \tilde{p}_2 .

L’inversion d’un certain nombre flou L-R est une opération non fermée par rapport au type de fonctions de référence, les approximations sont encore nécessaires, elles sont similaires à la multiplication des nombres flous L-R.

Si l’on considère un nombre flou \tilde{p} qui est soit positif ou négatif, ceci $0 \notin \sup(\tilde{p})$ donnée par la représentation L-R

$$\tilde{p} = \langle \bar{x}, \alpha, \beta \rangle_{L,R} \tag{2.54}$$

L’approximation tangente $(\tilde{p}^{-1})_t$ pour l’inverse \tilde{p}^{-1} est défini par

$$(\tilde{p}^{-1})_t = \left\langle \frac{1}{\bar{x}}, \frac{\alpha}{\bar{x}}, \frac{\beta}{\bar{x}} \right\rangle_{R,L} \approx \tilde{p}^{-1} \tag{2.55}$$

Et l’approximation sécante $(\tilde{p}^{-1})_s$ par

$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R} > 0$, $\tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{R,L} > 0$:
Approximation tangente : $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_t = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \alpha_2 + \bar{x}_2 \alpha_1, \bar{x}_1 \beta_2 + \bar{x}_2 \beta_1 \rangle_{L,R}$
Approximation sécante : $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_s = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_1 \alpha_2 + \bar{x}_2 \alpha_1 - \alpha_1 \alpha_2, \bar{x}_1 \beta_2 + \bar{x}_2 \beta_1 + \beta_1 \beta_2 \rangle_{L,R}$
$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R} < 0$, $\tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{R,L} < 0$:
Approximation tangente : $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_t = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2, -\bar{x}_1 \beta_2 - \bar{x}_2 \beta_1, -\bar{x}_1 \alpha_2 - \bar{x}_2 \alpha_1 \rangle_{R,L}$
Approximation sécante : $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_s = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2, -\bar{x}_1 \beta_2 - \bar{x}_2 \beta_1 - \beta_1 \beta_2, -\bar{x}_1 \alpha_2 - \bar{x}_2 \alpha_1 + \alpha_1 \alpha_2 \rangle_{R,L}$
$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R} < 0$, $\tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{R,L} > 0$:
Approximation tangente : $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_t = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_2 \alpha_1 - \bar{x}_1 \beta_2, \bar{x}_2 \beta_1 - \bar{x}_1 \alpha_2 \rangle_{R,L}$
Approximation sécante : $\tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_s = \langle \bar{x}_1 \bar{x}_2, \bar{x}_2 \alpha_1 - \bar{x}_1 \beta_2 + \alpha_1 \beta_2, \bar{x}_2 \beta_1 - \bar{x}_1 \alpha_2 - \beta_1 \alpha_2 \rangle_{R,L}$

TAB. 2.1 – Formules d’approximations tangente et sécante pour la multiplication des nombres flous L-R .

$$(\tilde{p}^{-1})_s = \left\langle \frac{1}{\bar{x}}, \frac{\beta}{\bar{x}(\bar{x} + \beta)}, \frac{\alpha}{\bar{x}(\bar{x} - \alpha)} \right\rangle_{R,L} \approx \tilde{p}^{-1} \quad (2.56)$$

L’approximation tangente $(\tilde{p}^{-1})_t$ est généralement le seule type d’approximation pour l’inverse \tilde{p}^{-1} d’un nombre flou L-R \tilde{p} dont il est question dans la littérature [12].[11]. Il peut être considéré comme une bonne approximation tant qu’elle est évaluée dans le voisinage de la valeur modale.

Si ce n’est pas le cas, l’approximation sécante permet d’obtenir de meilleurs performances, et en particulier pour les nombres flous L-R de type linéaire et quadratique, elle garantie $\sup[(\tilde{p}^{-1})_s] = \sup[\tilde{p}^{-1}]$.

En utilisant l’identité $\tilde{p}_1/\tilde{p}_2 = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2^{-1}$, les formules d’approximations ci-dessus pour la multiplication des nombres flous L-R d’un côté et ceux de l’inverse d’un nombre flou L-R, d’autre part, un certain nombre des différentes représentations L-R approximative pour le quotient \tilde{p}_1/\tilde{p}_2 peut être formulée. Pour des raisons de simplicité, toutefois, seules les formules basées sur l’approximation tangente à la fois pour la multiplication et l’inversion sont énumérés dans le tableau 2.2.

. Contrairement à la multiplication, où trois cas ont été différenciés en ce qui concerne le signe algébrique des opérands, quatre cas doivent être pris en considération pour la division, en duo à la non-commutativité de l’opération.

En résumé, nous pouvons conclure que la notion des nombres flous L-R doit être regardée comme assez mal adapté aux applications pratiques de l’arithmétique floue. L’objectif à long terme d’une arithmétique floue qui peut être appliquées pour l’évaluation des problèmes du monde réel de complexité arbitraire ne peut certainement pas être atteint, puisque l’objectif à court terme de l’arith-

$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,R} > 0$	$, \tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{R,L} > 0 :$
$\tilde{p}_1/\tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_{tt} = \langle \bar{x}_1/\bar{x}_2, (\bar{x}_1\beta_2 + \bar{x}_2\alpha_1)/\bar{x}_2^2, (\bar{x}_1\alpha_2 + \bar{x}_2\beta_1)/\bar{x}_2^2 \rangle_{L,R}$	
$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,L} < 0$	$, \tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,L} < 0 :$
$\tilde{p}_1/\tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_{tt} = \langle \bar{x}_1/\bar{x}_2, (\bar{x}_1\alpha_2 - \bar{x}_2\beta_1)/\bar{x}_2^2, (\bar{x}_1\beta_2 - \bar{x}_2\alpha_1)/\bar{x}_2^2 \rangle_{L,L}$	
$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,L} < 0$	$, \tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,L} > 0 :$
$\tilde{p}_1/\tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_{tt} = \langle \bar{x}_1/\bar{x}_2, (\bar{x}_2\alpha_1 - \bar{x}_1\alpha_2)/\bar{x}_2^2, (\bar{x}_2\beta_1 - \bar{x}_1\beta_2)/\bar{x}_2^2 \rangle_{L,L}$	
$\tilde{p}_1 = \langle \bar{x}_1, \alpha_1, \beta_1 \rangle_{L,L} > 0$	$, \tilde{p}_2 = \langle \bar{x}_2, \alpha_2, \beta_2 \rangle_{L,L} < 0 :$
$\tilde{p}_1/\tilde{p}_2 \approx \tilde{q}_{tt} = \langle \bar{x}_1/\bar{x}_2, (\bar{x}_1\beta_2 - \bar{x}_2\beta_1)/\bar{x}_2^2, (\bar{x}_1\alpha_2 - \bar{x}_2\alpha_1)/\bar{x}_2^2 \rangle_{L,L}$	

TAB. 2.2 – Formules approximatives pour la division des nombres flous L-R (basées sur l’approximation tangente double).

métique floue élémentaire échoue à de nombreux points. Explicitement, les principaux inconvénients de l’arithmétique élémentaire floue L-R sont les suivantes :

- Les opérations élémentaires sur les nombres flous L-R sont souvent ouvertes à l’égard du type des fonctions de référence. Cela nécessite la mise en place de procédures de rapprochement, qui conduisent finalement à une perte importante d’informations
- D’autres restrictions s’appliquent au type de fonctions de référence qui permettent la compatibilité des opérandes. Seulement les opérandes avec des fonctions de référence compatibles sont acceptés, les autres combinaisons sont exclues.
- Les opérations élémentaires ne sont définies que pour les nombres flous négatifs ou positifs.

2.2.2 Les nombres flous Discrétisés

L’inconvénient majeur de l’approche directe de la mise en œuvre de l’arithmétique floue élémentaire réside dans le fait qu’il existe un nombre infini de combinaisons des valeurs d’entrées x_1 et x_2 qui conduisent à la même valeur de la production z .

Dans ce contexte, une solution pratique à cette limitation est motivée par l’idée de discrétiser les fonctions d’appartenances continues des nombres flous dans le style de l’échantillonnage des signaux continus-temps [13]. De cette façon, les chiffres sont exprimés par des ensembles flous discrétisés, pour lesquels le principe d’extension peut être appliqué sans problème.

On peut distinguer deux façons de discrétiser la fonction d’appartenance $\mu_{\tilde{p}_i}(x_i)$ d’un nombre flou \tilde{p} . Lorsqu’on veut que la discrétisation soit équidistante, on peut subdiviser, soit l’axe x_i ou l’axe- μ en intervalles de longueur définie.

Dans le premier cas, l’axe- x_i est divisé en éléments distincts x_{ij} qui sont espacées par un intervalle constant $\Delta x_i = x_{i,j+1} - x_{i,j}$. Dans ce cas dernier, l’axe- μ est subdivisé en éléments distincts μ_j , avec l’espacement constant $\Delta \mu = \mu_{j+1} - \mu_j$. Bien que la première approche semble être la plus simple, cette méthode de discrétisation échoue pour un certain nombre des raisons, la plus évidente étant :

1. La représentation discrète du nombre flou \tilde{p} doit contenir la valeur modale, où $\mu_{\tilde{p}_i}(x_i) = 1$, ainsi que les valeurs limites avec $\mu_{\tilde{p}_i}(x_i) = 0$. Cela ne peut être garanti pour toute discrétisation de l'axe- x_i avec un intervalle choisi arbitrairement Δx_i .

2. Il est difficile de définir des intervalles de discrétisation cohérents et raisonnables $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ pour chacun des nombres flous $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n$ en particulier quand ils présentent des paramètres de dimensions physiques différentes.

3. Les valeurs fixes de la discrétisation $\Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n$, ne peuvent généralement être maintenues, car elles sont soumises à des changements selon les opérations arithmétiques qui sont réalisés. En outre, l'équidistance de la discrétisation est violée pour les opérations non linéaires.

La discrétisation de l'axe- μ , cependant, permet d'éviter ces problèmes de manière efficace et se distingue par les propriétés suivantes :

1. Les valeurs modales, ainsi que les bornes inférieures et supérieures des nombres flous \tilde{p}_i représentée par l'axe des abscisses pour les valeurs limitent des ordonnées $\mu = 1$ et $\mu = 0$, sont toujours inclus dans l'homologues discrétisé.

2. Pour tous les paramètres flous, la discrétisation des intervalles identiques $\Delta\mu$, peut être définie, car la plage des valeurs pour les degrés de la fonction d'appartenance $\mu(x_i)$ est toujours égale à l'intervalle fermé $[0, 1]$, indépendante de la dimension physique réelle des paramètres flous $\tilde{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$.

3. L'intervalle de discrétisation $\Delta\mu$ est invariant par rapport à toute les opérations arithmétiques qui sont effectuées pour les nombres flous $\tilde{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$.

Lorsque nous supposons l'axe- μ que le peut être divisé en intervalles de la longueur m

$$\Delta\mu = \frac{1}{m} \tag{2.57}$$

Ou m est appelé le nombre de discrétisation, les ordonnées discrètes sont donnés

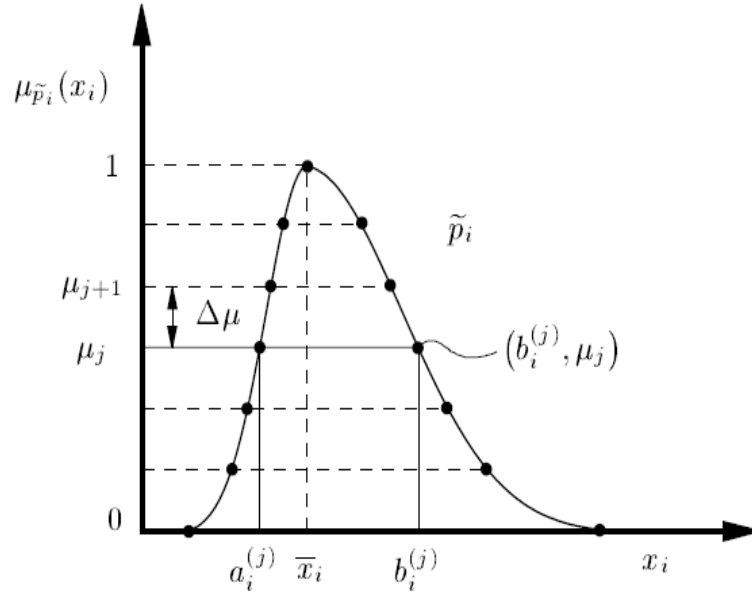
$$\mu_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \tag{2.58}$$

Avec les propriétés

$$\mu_0 = 0, \mu_m = 1,$$

$$\mu_{j+1} = \mu_j + \Delta\mu, j = 0, 1, \dots, m - 1, \tag{2.59}$$

Le nombre flou \tilde{p}_i peut alors être représenté dans sa forme discrétisée par l'ensemble flou discret (Figure 2.7)


 FIG. 2.7 – Un nombre flou discrétisé \tilde{p}_i .

$$\tilde{P}_i^* = \{(a_i^{(0)}, \mu_0), (a_i^{(1)}, \mu_1), \dots, (a_i^{(m)}, \mu_m), (b_i^{(m-1)}, \mu_{m-1}), (b_i^{(m-2)}, \mu_{m-2}), \dots, (b_i^{(0)}, \mu_0)\}, \quad (2.60)$$

Où $a_i^{(j)}$ et $b_i^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, m$,

$$\mu_{\tilde{p}_i}(a_i^{(j)}) = \mu_j \text{ et } \left. \frac{d\mu_{\tilde{p}_i}(x_i)}{dx_i} \right|_{x_i=a_i^{(j)}} > 0, j = 1, 2, \dots, (m-1), \quad (2.61)$$

$$\mu_{\tilde{p}_i}(b_i^{(j)}) = \mu_j \text{ et } \left. \frac{d\mu_{\tilde{p}_i}(x_i)}{dx_i} \right|_{x_i=b_i^{(j)}} > 0, j = 1, 2, \dots, (m-1), \quad (2.62)$$

$$a_i^{(0)} = w_{l_i}, b_i^{(0)} = w_{r_i} \text{ avec }]w_{l_i}, w_{r_i}[= \sup(\tilde{p}_i) \quad (2.63)$$

$$a_i^{(m)} = b_i^{(m)} = \bar{x}_i = \text{noyau}(\tilde{p}_i) \quad (2.64)$$

Ici, w_{l_i} et w_{r_i} correspondent les déviations maximales des nombres flous, tel que présenté par leurs formes répandues dans 2.9. En outre, il convient de noter que, selon la définition des sous-ensembles flous discrets, les éléments $(2m+1)$ de \tilde{P}_i^* sont énumérés dans l'ordre croissant, et l'élément $(b_i^{(m)}, \mu_m)$ est omis en raison à son identité à $(a_i^{(m)}, \mu_m)$.

2.2.2.1 Les opérations sur les nombres flous discrétisés

Les nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 de signe quelconque, la procédure générale suivante peut être formulée :

1. La discrétisation des nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 , selon 2.57 à 2.60, conduisant à des nombres flous discrétisés

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1^* = \{ & (a_1^{(0)}, \mu_0), (a_1^{(1)}, \mu_1), \dots, (a_1^{(2)}, \mu_2), \\ & (b_1^{(m-1)}, \mu_{m-1}), (b_1^{(m-2)}, \mu_{m-2}), \dots, (b_1^{(0)}, \mu_0) \} \quad \text{et} \end{aligned} \quad (2.65)$$

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2^* = \{ & (a_2^{(0)}, \mu_0), (a_2^{(1)}, \mu_1), \dots, (a_2^{(2)}, \mu_2), \\ & (b_2^{(m-1)}, \mu_{m-1}), (b_2^{(m-2)}, \mu_{m-2}), \dots, (b_2^{(0)}, \mu_0) \} \end{aligned} \quad (2.66)$$

2. Application du principe de l'extension avec l'ensemble flou discret \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* que les ensembles d'entrée floue, ce qui entraîne l'ensemble flou discret

$$\tilde{Q}' = \{(z, \mu_{\tilde{Q}'}(z)) \mid z \in E(\text{sup}(\tilde{P}_1^*) \times \text{sup}(\tilde{P}_2^*))\}, \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{Q}'}(z) = \sup_{Z=E(x_1, x_2)} \min\{ & \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1), \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2) \}, \\ x_1 \in \text{sup}(\tilde{P}_1^*), & x_2 \in \text{sup}(\tilde{P}_2^*), \end{aligned} \quad (2.68)$$

3. Détermination de la représentation discrétisée \tilde{Q}^* du nombre flou \tilde{q} à $(2m+1)$ des éléments stables $(z, \mu(z))$ de \tilde{Q}' . Pour être élément stable admissible, les valeurs

$$z = E(x_1, x_2), x_1 \in \text{sup}(\tilde{P}_1^*), x_2 \in \text{sup}(\tilde{P}_2^*), \quad (2.69)$$

Doivent résulter des combinaisons valides (x_1, x_2) et des éléments $(x_1, \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1))$ et $(x_2, \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2))$ qui satisfaisant les conditions suivantes :

a) Les éléments $(x_1, \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1))$ et $(x_2, \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2))$ doit être attribués au même degré d'appartenance $\mu = \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1) = \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2)$. Cela est vraie si

$$\begin{aligned} x_1 = x_1^{(j)} \in \{ & (a_1^{(j)}, b_1^{(j)}) \} \wedge x_2^{(j)} \in \{(a_2^{(j)}, b_2^{(j)})\}, \\ j = & 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Opération élémentaire	signes de $x_1^{(j)}$ et $x_2^{(j)}$	Conditions de compatibilité
+	toute	conforme
-	toute	non-conforme
·	égal inégal	conforme non-conforme
/	égal inégal	non-conforme conforme

Tab. 2.3 – Conditions de compatibilité et les combinaisons valides pour les opérations élémentaires sur les nombres flous discrétisés

b) Les éléments correspondants $(x_1^{(j)}, \mu_j)$ et $(x_2^{(j)}, \mu_j)$ doivent être situés sur les courbes compatibles. Sur la base de considérations supplémentaires, conformes à celles décrites dans la Figure 2.9, les conditions de compatibilité pertinentes peuvent être formulées en fonction du type d'opération élémentaire et sur les signes réels des arguments croustillants $x_1^{(j)} \in \{(a_1^{(j)}, b_1^{(j)})\}$ et $x_2^{(j)} \in \{(a_2^{(j)}, b_2^{(j)})\}$. Les conditions de compatibilité qui en découlent, pour chaque degré de la fonction d'appartenance déterminent les deux combinaisons valides sur les quatre possibles, elles sont énumérées dans le tableau 2.3.

Notons que la condition de compatibilité peut changer dans l'évaluation globale d'une opération élémentaire sur les nombres flous discrétisés. Cela se produit pour les opérations de multiplication et de division si au moins l'un des opérandes sauf pour le diviseur, est bien sûr un zéro floue. Dans ce cas, différents types de conditions de compatibilité peuvent s'appliquer selon le degré réel de la fonction d'appartenance μ_j .

Dans le cas exceptionnel ou à la fois le multiplicande et le multiplicateur sont donnés par un zéro flou, l'état correspondant de compatibilité dans le tableau 2.3 ne sera pas suffisant pour filtrer les combinaisons valides. En fait, toutes les quatre combinaisons possibles à un degré d'appartenance seront valable, appelant à faire d'autres considérations.

Encore une fois, suivant le principe d'extension, il peut être démontré que, dans ce cas, les combinaisons valides sont ceux pour lesquels le produit $x_1^{(j)}x_2^{(j)}, x_1^{(j)} \in \{(a_1^{(j)}, b_1^{(j)})\}$ et $x_2^{(j)} \in \{(a_2^{(j)}, b_2^{(j)})\}$ atteint sa valeur minimale et maximale, respectivement.

Pour expliquer la méthodologie de l'exécution des opérations élémentaires sur les nombres flous discrétisés, nous allons utiliser un exemple en rappelant la multiplication des nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 de l'exemple 2.2.1.

Exemple 2.2.2 *Nous considérons que les nombres flous triangulaire positifs \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 proposés par*

$$\tilde{p}_1 = tfn(2, 1, 1) \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 = tfn(4, 2, 4) \tag{2.71}$$

Comme tracée sur la Figure 2.8. Par souci de simplicité et de clarté, nous définissons le nombre de

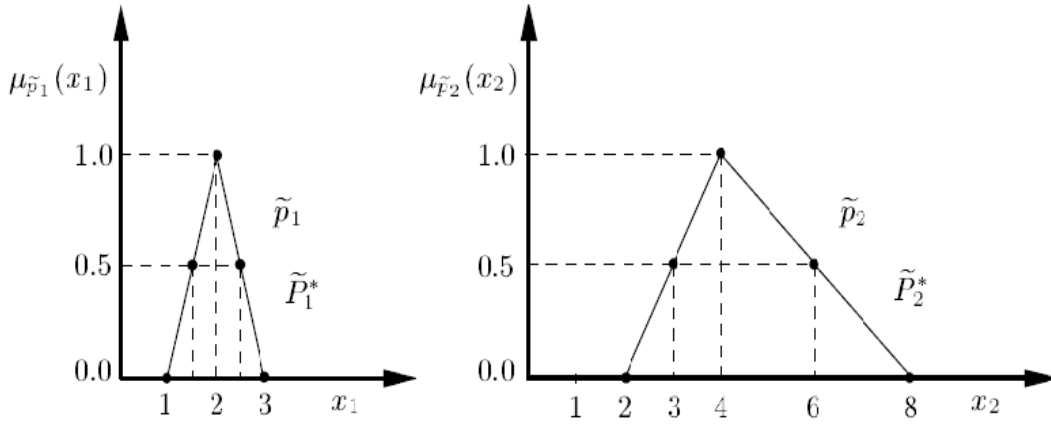


FIG. 2.8 – Nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 et leurs représentations discrétisées \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* pour $m = 2$.

discrétisation $m = 2$, ce qui correspond à un espacement de longueur $\Delta\mu = 0.5$ de l'axe- μ . En raison de la discrétisation, on obtient les ensembles flous discrets

$$\begin{aligned}\tilde{P}_1^* &= \{(1, 0.0), (1.5, 1.5), (2, 1.0), (2.5, 2.5), (3, 0)\} \\ \tilde{P}_2^* &= \{(2, 0.0), (3, 0.5), (4, 1.0), (6, 0.5), (8, 0)\}\end{aligned}\quad (2.72)$$

Les représentations discrétisées des nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 dans la Figure 2.8. L'opération élémentaire de la multiplication est :

$$\tilde{q} = E_m(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1\tilde{p}_2 \quad (2.73)$$

Peut alors évaluer en appliquant le principe d'extension avec des ensembles flous discrets \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* que l'entrée des ensembles flous conformément aux tableaux 2.4 et 2.5.

L'ensemble flou discrets \tilde{Q}' , qui résulte de la multiplication des ensembles flou discret \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* peut être déduite de la colonne droite du tableau 2.5, et nous obtenons

$$\begin{aligned}\tilde{Q}' &= \{(2, 0.0), (3, 0.0), (4, 0.0), (4.5, 0.5), (5, 0.0), (6, 0.5), \\ &\quad (7.5, 0.5), (8, 1.0), (9, 0.5), (10, 0.5), (12, 0.5), \\ &\quad (15, 0.5), (16, 0.0), (18, 0.0), (20, 0.0), (24, 0.0)\}\end{aligned}\quad (2.74)$$

Ce résultat, cependant, n'est pas conforme à la structure caractéristique des nombres flous discrétisés, tel que présenté dans 2.60. Premièrement, l'ensemble flou discret \tilde{Q}' , présente plus de $(2m + 1)$ éléments, et la seconde, une reconstitution imaginaire de la contrepartie en continu de l'ensemble

$x_1 \left\langle \mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1) \right\rangle$	$x_2 \left\langle \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2) \right\rangle$	$2^{(0.0)}$	$3^{(0.5)}$	$4^{(1.0)}$	$6^{(0.5)}$	$8^{(0.0)}$
		$1^{(0.0)}$	$1.5^{(0.5)}$	$2^{(1.0)}$	$2.5^{(0.5)}$	$3^{(0.0)}$
		$2^{(0.0)}$	$3^{(0.0)}$	$4^{(1.0)}$	$6^{(0.0)}$	$8^{(0.0)}$
		$3^{(0.0)}$	$4.5^{(0.5)}$	$6^{(0.5)}$	$9^{(0.5)}$	$12^{(0.0)}$
		$4^{(0.0)}$	$6^{(0.5)}$	$8^{(1.0)}$	$12^{(0.5)}$	$16^{(0.0)}$
		$5^{(0.0)}$	$7.5^{(0.5)}$	$10^{(0.5)}$	$15^{(0.5)}$	$20^{(0.0)}$
		$6^{(0.0)}$	$9^{(0.0)}$	$12^{(0.0)}$	$18^{(0.0)}$	$24^{(0.0)}$
		$z \left\langle \min[\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1), \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2)] \right\rangle, z = x_1 x_2$				

TAB. 2.4 – Evaluation du principe d’extension pour l’exemple 2.2(Etape1).

flou au moyen d’une connexion line entre les éléments (z, μ) ne conduit pas à un nombre flou acceptable, lorsque la propriété fondamentale de la convexité est violée $z = 5$.

La raison de cet inconvénient est que les ensembles flous \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* traités dans le principe d’extension la plus régulière des ensembles flous de type discret, ignorant complètement leur origine comme des représentations discrétisées du nombre flou \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 .

Ce sont ces propriétés caractéristiques qui qualifient les ensembles flous lorsque les nombres flous n’ont pas été intégrés dans cette procédure à tout moment.

Pour contourner cette limitation, un élément supplémentaire doit être fait, il vise finalement à exclure les éléments non valides à partir du résultat provisoire \tilde{Q}' pour atteindre le bon résultat \tilde{Q}^* . Pour l’exemple actuel de multiplication de deux nombres flous positifs, cette considération est spécifiée comme suit.

Nous supposons qu’il existe deux nombres flous positifs \tilde{p}'_1 et \tilde{p}'_2 nécessairement identiques aux nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 de cet exemple qui doivent être multipliés, comme le montre la Figure 2.9. Pour tout les degrés d’appartenances $\mu' \in]0, 1[$ pour quatre abscisses, à savoir, $x'_{1_l}, x'_{1_r}, x'_{2_l}, x'_{2_r}$ sont disponibles qui remplissent la condition

$$\mu(x'_{i_l}) = \mu(x'_{i_r}) = \mu', i = 1, 2. \tag{2.75}$$

Pour résumer ces résultats pour l’exemple actuel, nous pouvons classer les éléments $(x_1^{(j_1)}, \mu_{j_1})$ et $(x_2^{(j_2)}, \mu_{j_2})$ de la discrétisation des ensembles flous \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* ,

Avec

$$x_1^{(j_1)} \in \{a_1^{(j_1)}, b_1^{(j_1)}\}, x_2^{(j_2)} \in \{a_2^{(j_2)}, b_2^{(j_2)}\}, j_1, j_2 = 0, 1, \dots, m \text{ et } \mu_j = \frac{j}{m}$$

Pour être une combinaison valable que si elles remplissent les conditions suivantes :

1. Les éléments $(x_1^{(j_1)}, \mu_{j_1})$ et $(x_2^{(j_2)}, \mu_{j_2})$ doivent être attribués au même niveau de la fonction d’appartenance $j_1 = j_2 = j$.

$z = x_1 x_2$	$\min [\mu_{\tilde{P}_1^*}(x_1), \mu_{\tilde{P}_2^*}(x_2)]$		max
2	0.0		0.0
3	0.0	0.0	0.0
4	0.0	0.0	0.0
4.5	0.5		0.5
5	0.0		0.0
6	0.0	0.0 0.5 0.5	0.5
7.5	0.5		0.5
8	1.0	0.0	1.0
9	0.0	0.5	0.5
10	0.5		0.5
12	0.0	0.0 0.5	0.5
15	0.5		0.5
16	0.0		0.0
18	0.0		0.0
20	0.0		0.0
24	0.0		0.0
z			$\mu_{\tilde{B}}(z)$

TAB. 2.5 – Evaluation du principe d’extension pour l’exemple 2.2(Etape2).

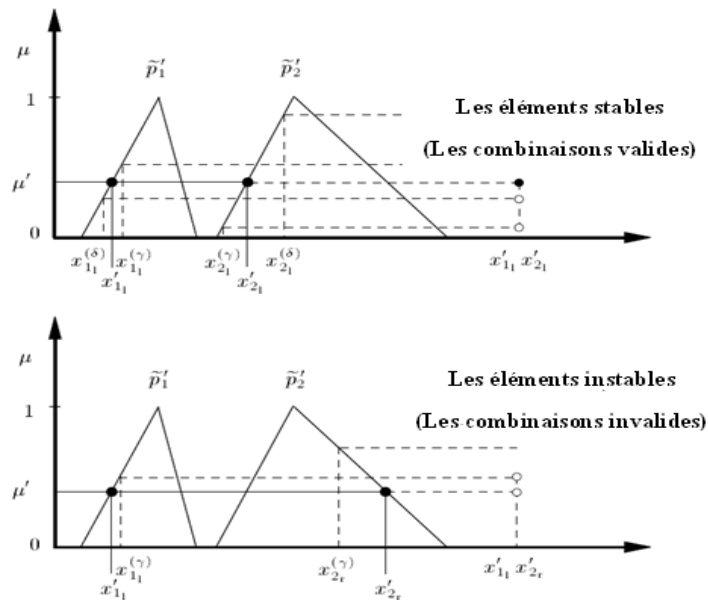


FIG. 2.9 – Contrepartie additionnelle pour la multiplication de deux nombres flous positifs discrétisés.

2. Les éléments individuels correspondants $(x_1^{(j1)}, \mu_{j1})$ et $(x_2^{(j2)}, \mu_{j2})$ doivent être situés sur des courbes compatibles.

Pour la multiplication des nombres flous positifs \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 cette condition est remplie si les éléments $x_1^{(j1)}$ et $x_2^{(j2)}$ sont à la fois situés sur la gauche des courbes (compatibilité L-L) ou sur la droite des courbes (compatibilité R-R).

Nous pouvons appeler ce type de compatibilité « conformité » et nous pouvons le formuler comme suit

$$(x_1^{(j1)}, x_2^{(j2)}) \in \{(a_1^{(j1)}, a_2^{(j2)}), (b_1^{(j1)}, b_2^{(j2)})\}, j = 0, 1, \dots, m. \quad (2.76)$$

Conformément à cette formulation, l'antonyme de non-conformité peut être utilisé si les éléments sont compatibles L-R ou R-L, respectivement.

Par conséquent, le produit de deux nombres flous positifs discrétisés \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* de la forme

$$\begin{aligned} \tilde{P}_1^* &= \{(a_1^{(0)}, \mu_0), (a_1^{(1)}, \mu_1), \dots, (a_1^{(2)}, \mu_2), \\ &\quad (b_1^{(m-1)}, \mu_{m-1}), (b_1^{(m-2)}, \mu_{m-2}), \dots, (b_1^{(0)}, \mu_0)\} \quad \text{et} \\ \tilde{P}_2^* &= \{(a_2^{(0)}, \mu_0), (a_2^{(1)}, \mu_1), \dots, (a_2^{(2)}, \mu_2), \\ &\quad (b_2^{(m-1)}, \mu_{m-1}), (b_2^{(m-2)}, \mu_{m-2}), \dots, (b_2^{(0)}, \mu_0)\} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Est donnée par le nombre flou discrétisé

$$\begin{aligned} \tilde{Q}^* &= \{(a^{(0)}, \mu_0), (a^{(1)}, \mu_1), \dots, (a^{(2)}, \mu_2), \\ &\quad (b^{(m-1)}, \mu_{m-1}), (b^{(m-2)}, \mu_{m-2}), \dots, (b^{(0)}, \mu_0)\} \end{aligned} \quad (2.78)$$

Avec

$$a^{(j)} = a_1^{(j)} a_2^{(j)} \quad b^{(j)} = b_1^{(j)} b_2^{(j)} \quad , j = 0, 1, \dots, m. \quad (2.79)$$

Pour la discrétisation de deux nombres flous \tilde{P}_1^* et \tilde{P}_2^* de l'exemple actuel, compte tenu de 2.72, les résultats de produits dans \tilde{Q}^*

$$\tilde{Q}^* = \{(2, 0.0), (4.5, 0.5), (8, 1.0), (15, 0.5), (24, 0.0)\}. \quad (2.80)$$

Dans les tableaux 2.4 et 2.5, les éléments $(2m + 1)$ de \tilde{Q}^* sont marqués par des cadres, caractérisant les éléments stables de \tilde{Q}' . Figure 2.10 montre l'ensemble flou \tilde{Q}^* comme la représentation discrétisée

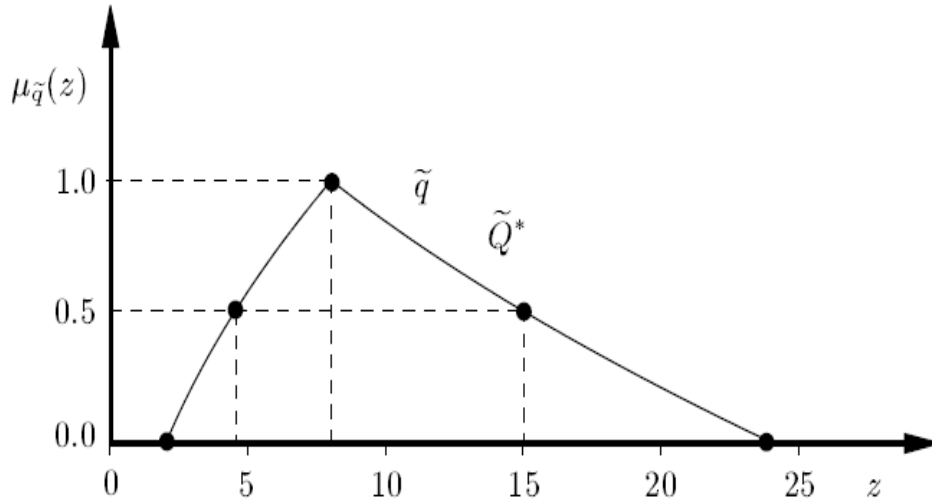


FIG. 2.10 – Produit des nombres flous $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$ et sa représentation discrétisée $\tilde{Q}^* = \tilde{P}_1^* \cdot \tilde{P}_2^*$ pour $m=2$.

de produit $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$ des nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 , initialement défini dans 2.71 .

Quand on compare les concepts des nombres flous discrétisés et les nombres flous L-R sur la base des Figure 2.6 et Figure 2.10, nous voyons que le concept des nombres flous discrétisés ne présente pas toutes les erreurs méthodologiques. En fait, les éléments $(z^{(j)}, \mu_j)$, $j = 0, 1, \dots, m$, le nombre flou discrétisé \tilde{Q}^* coïncident avec les points correspondants sur le graphe de la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{q}}(z)$ de le nombre flou exact $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$, qui est $\mu_{\tilde{q}}(z^{(j)}) = \mu_j$.

Ainsi, contrairement à la procédure pour la multiplication de nombres flous L-R, la notion de nombres flous discrétisé donne la solution exacte de l'opération arithmétique avec un degré de raffinement qui peut être prédéfini par le nombre de discrétisation m .

L'extension de la méthodologie appliquée dans l'exemple 2.2.1 à la multiplication des nombres flous positifs pour le cas de toutes les opérations élémentaires donne :

$$\tilde{q} = E(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 \star \tilde{p}_2, E \in \{E_a, E_s, E_m, E_d\}, \star \in \{+, -, \cdot, / \}, \quad (2.81)$$

2.2.3 Les nombres flous décomposés

2.2.3.1 Décomposition des nombres flous

Fondamentalement, le concept de décomposition des nombres flous découle du théorème de décomposition tel qu'il est formulé pour les réguliers, à une dimension de sous-ensembles flous dans [1]. Il affirme que tout ensemble flou \tilde{A} peut uniquement être représenté par la séquence de ses associés une α – coupe $\text{coupe}_\alpha(\tilde{A})$ par la formule :

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \mu_{coupe-\alpha(\tilde{A})}(x) \quad (2.82)$$

Où $\mu_{coupe-\alpha(\tilde{A})}(x)$, est la fonction caractéristique de l'ensemble classique $coupe_{\alpha}(\tilde{A})$.

Dans la même mesure, ce théorème est valable pour tout nombre \tilde{p}_i comme un cas particulier d'un ensemble flou et peut être réécrite sous la forme

$$\mu_{\tilde{p}_i}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \alpha \mu_{\alpha-coupe(\tilde{p}_i)}(x) \quad (2.83)$$

Pour rendre ce théorème de décomposition utilisables pour des applications pratiques, le nombre infini résultant d'un α -coupe d'une $\alpha \in [0, 1]$ doit être réduite à un nombre fini des coupures en ne permettant qu'une séquence des valeurs discrètes $\alpha_j = \mu_j$ être sélectionnés pour α .

A cette fin, nous supposons l'intervalle $[0, 1]$ pour être subdivisé en intervalles de la longueur m

$$\Delta\mu = \frac{1}{m} \quad (2.84)$$

Similaires à la subdivision de l'axe- μ de la notion des nombres flous discrétisés. Les valeurs discrètes μ_j sont alors données par

$$\mu_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (2.85)$$

Avec les propriétés

$$\mu_0 = 0, \mu_m = 1,$$

$$\mu_{j+1} = \mu_j + \Delta\mu, j = 0, 1, \dots, m - 1, \quad (2.86)$$

Le paramètre m , qui caractérise le degré de raffinement de la décomposition, est dénommé le nombre de décomposition.

L'application du théorème de décomposition au nombre fini d'une α -coupe, le nombre flou \tilde{p}_i , peut être représenté sous sa forme décomposée par l'ensemble

$$P_i = \{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\} \quad (2.87)$$

De $(m + 1)$ intervalles

$$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}] = coupe_{\mu_j}(\tilde{p}_i), a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.88)$$

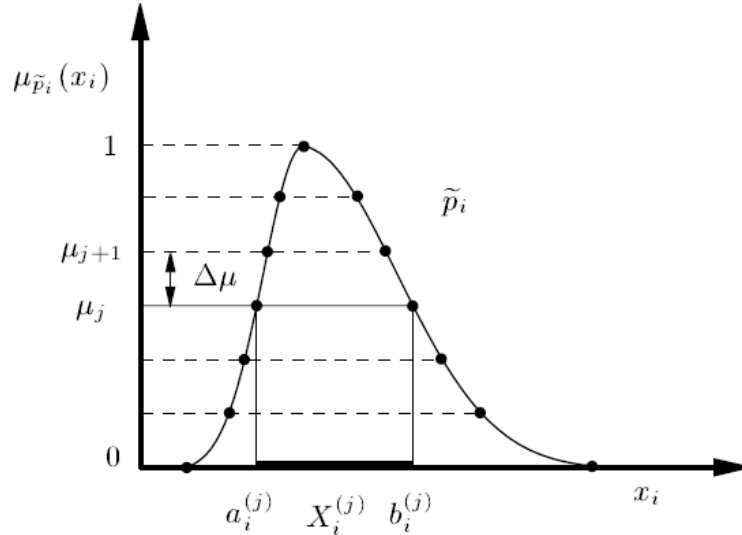


FIG. 2.11 – Décomposition d'un nombre flou \tilde{p}_i dans les intervalles.

$$X_i^{(0)} = [a_i^{(0)}, b_i^{(0)}] = [w_{l_i}, w_{r_i}] \text{ avec }]w_{l_i}, w_{r_i}[= \sup(\tilde{p}_i), \quad (2.89)$$

Comme illustré dans la figure Figure 2.11. Dans le contexte de l'arithmétique floue, ces intervalles sont aussi appelés les intervalles de confiance [14].

Depuis $\text{coupe}_0(\tilde{p}_i)$ est infini et égal à \mathbb{R} , l'intervalle $X_i^{(0)}$ attribué au plus bas degré de la fonction d'appartenance μ_0 est défini par l'intervalle des déviations maximaux $[w_{l_i}, w_{r_i}]$ avec $]w_{l_i}, w_{r_i}[= \text{coupe}_{0+}(\tilde{p}_i) = \sup(\tilde{p}_i)$ (voir 2.9). En outre, il convient de noter que dans la représentation décomposée P_i du nombre flou \tilde{p}_i dans 2.87, l'affiliation de $(m + 1)$ intervalles $X_i^{(j)}$ au degré réel de la fonction d'appartenance $\mu_j, j = 0, 1, 2, \dots, m$, est inhérent à l'ordre des éléments d'intervalle estimé de P_i . C'est le premier élément de P_i correspond au plus bas degré de la fonction d'appartenance, et le dernier au plus haut. En outre, le $\text{coupe} - X_i^{(m)}$ correspond le haut degré de la fonction d'appartenance $\mu_m = 1$ est exprimée par un intervalle de longueur zéro dégénéré à cause de l'égalité de $a_i^{(m)}$ et $b_i^{(m)}$.

2.2.3.2 Les opérations sur les nombres flous décomposées

Basé sur le concept de la décomposition des nombres flous, les opérations élémentaires

$$\tilde{q} = E(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 \star \tilde{p}_2, \star \in \{+, -, \cdot, /\}, \quad (2.90)$$

Sur les nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 peut être effectuée en appliquant les opérations séparément pour chaque degré d'appartenance $\mu_j, j = 0, 1, 2, \dots, m$, pour les paires d'intervalles $X_1^{(j)}$ et $X_2^{(j)}$ des nombres flous décomposés P_1 et P_2 . C'est, le résultat $\tilde{q} = E(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 \star \tilde{p}_2$ de l'opération élémen-

taire peut être écrit sous sa forme décomposée de la manière :

$$Q = E(P_1, P_2) = P_1 \star P_2 = \{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}\} \quad (2.91)$$

Avec

$$\begin{aligned} Z^{(j)} &= [a^{(j)}, b^{(j)}] = [a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \star [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = X_1^{(j)} \star X_2^{(j)}, \\ j &= 0, 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.92)$$

Comme les arguments $X_1^{(j)}$ et $X_2^{(j)}$ dans 2.92 sont flous, mais de valeur de l'intervalle, les opérations élémentaires doivent être effectuées par une arithmétique particulière, à savoir, l'arithmétique d'intervalle.

Même si l'utilisation des traces des intervalles de retour à ARCHIMEDES, lorsqu'il a défini le nombre irrationnelle π par l'intervalle $[3\frac{10}{71}, 3\frac{1}{7}]$, l'évolution récente de l'arithmétique d'intervalle sont largement basées sur les travaux de Moore [15].

L'idée fondamentale de l'arithmétique d'intervalles classiques est de redéfinir les opérations élémentaires d'addition, soustraction, multiplication et division pour les opérandes intervalle de grande valeur, qui est, pour déterminer le résultat de

$$\begin{aligned} [a_1, b_1] \star [a_2, b_2] &= \{x_1 \star x_2 \mid a_1 \leq x_1 \leq b_1, a_2 \leq x_2 \leq b_2\}, \\ \star &\in \{+, -, \cdot, /\} \end{aligned} \quad (2.93)$$

Lorsque l'expression $[a_1, b_1]/[a_2, b_2]$ n'est pas définie si $0 \in [a_2, b_2]$. En adoptant les notations de 2.92, nous pouvons donner les définitions suivantes pour les opérations élémentaires de l'arithmétique d'intervalles, qui sont équivalentes à 2.93 et disposent d'une structure algébrique par rapport les intervalles résultant aux limites :

Addition

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] + [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [\underbrace{a_1^{(j)} + a_2^{(j)}}_{a^{(j)}}, \underbrace{b_1^{(j)} + b_2^{(j)}}_{b^{(j)}}]. \quad (2.94)$$

Soustraction

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] - [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = [\underbrace{a_1^{(j)} - b_2^{(j)}}_{a^{(j)}}, \underbrace{b_1^{(j)} - a_2^{(j)}}_{b^{(j)}}]. \quad (2.95)$$

Multiplication

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \cdot [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = \underbrace{[\min(M^{(j)}), \max(M^{(j)})]}_{a^{(j)}}, \quad (2.96)$$

$$M^{(j)} = \{a_1^{(j)} a_2^{(j)}, a_1^{(j)} b_2^{(j)}, b_1^{(j)} a_2^{(j)}, b_1^{(j)} b_2^{(j)}\}. \quad (2.97)$$

Division

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] / [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = \underbrace{[\min(D^{(j)}), \max(D^{(j)})]}_{a^{(j)}}, \quad (2.98)$$

$$D^{(j)} = \{a_1^{(j)} / a_2^{(j)}, a_1^{(j)} / b_2^{(j)}, b_1^{(j)} / a_2^{(j)}, b_1^{(j)} / b_2^{(j)}\}.$$

$$\text{Avec } 0 \notin [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}].$$

Utilisation de l'opérateur général $\star \in \{+, -, \cdot, /\}$, on peut réécrire 2.94 à 2.98 sous la forme généralisée

$$[a_1^{(j)}, b_1^{(j)}] \star [a_2^{(j)}, b_2^{(j)}] = \underbrace{[\min(G^{(j)}), \max(G^{(j)})]}_{a^{(j)}}, \quad (2.99)$$

$$G^{(j)} = \{a_1^{(j)} \star a_2^{(j)}, a_1^{(j)} \star b_2^{(j)}, b_1^{(j)} \star a_2^{(j)}, b_1^{(j)} \star b_2^{(j)}\}.$$

Les équations 2.94 à 2.99 suivi du fait que $E(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}) = X_1^{(j)} \star X_2^{(j)}$ une fonction continue sur un compact. Par conséquent, la fonction $E(X_1^{(j)}, X_2^{(j)})$ prend la plus petite et la plus grande valeur ainsi que toutes les valeurs entre les deux.

L'intervalle de $Z^{(j)} = X_1^{(j)} \star X_2^{(j)}$ est de nouveau un intervalle fermé sur \mathbb{R} . Pour illustrer la méthodologie de l'exécution des opérations élémentaires sur les nombres flous décomposés, nous rappelons que la multiplication des nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 , comme dans l'exemple 2.2.1 et exemple 2.2.2 Respectivement.

Exemple 2.2.3 On considère à nouveau deux nombres flous triangulaires positifs \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 proposés par :

$$\tilde{p}_1 = \text{tfn}(2, 1, 1) \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 = \text{tfn}(4, 2, 4) \quad (2.100)$$

Comme tracée sur la Figure 2.12. Par souci de simplicité et de comparaison avec l'exemple 2.2.2, nous définissons le nombre de décomposition comme $m = 2$, ce qui correspond à un espacement de

degré d'appartenance discret par $\Delta\mu = 0.5$.

A la suite de la décomposition, nous obtenons l'ensemble des intervalles

$$P_1 = \{[1, 3], [1.5, 2.5], [2, 2]\} \text{ et } P_2 = \{[2, 8], [3, 6], [4, 4]\} \quad (2.101)$$

Les représentations décomposées des nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 (Figure 2.12). L'opération élémentaire de la multiplication

$$\tilde{q} = E_m(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2 \quad (2.102)$$

Peut alors être évaluée en appliquant l'arithmétique d'intervalles séparément à chaque degré d'appartenance $\mu_j, j = 0, 1, 2$:

$$\mu_0 = 0.0 : Z^{(0)} = X_1^{(0)} X_2^{(0)} = [1, 3]. [2, 8] = [2, 24] \quad (2.103)$$

$$\mu_1 = 0.5 : Z^{(1)} = X_1^{(1)} X_2^{(1)} = [1.5, 2.5]. [3, 6] = [4.5, 15] \quad (2.104)$$

$$\mu_2 = 1.0 : Z^{(2)} = X_1^{(2)} X_2^{(2)} = [2, 2]. [4, 4] = [8, 8] \quad (2.105)$$

On obtient le produit $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$ dans sa forme décomposée

$$Q = P_1.P_2 = \{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}\} = \{[2, 24], [4.5, 15], [8, 8]\} \quad (2.106)$$

Quand on compare les concepts des nombres flous discrétisés et décomposés sur la base des Figure 2.10 et Figure 2.13, nous voyons que les résultats sont absolument identiques.

En conformité avec le concept des nombres flous discrétisés, l'approche de l'arithmétique floue sur la base de décomposition ne présentent pas toutes les erreurs méthodologiques, qui est, les limites supérieures et inférieures des intervalles $Z^{(j)}$ au degré d'appartenance $\mu_j, j = 0, 1, 2, \dots, m$, en coïncident avec les points correspondants sur le graphe de la fonction d'appartenance $\mu_{\tilde{q}}(z)$ le nombre flou exact $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$. Ainsi, par rapport à l'approche de discrétisation, la notion de décomposition des nombres flous donne la solution exacte de l'opération de l'arithmétique avec un degré de raffinement qui peut être prédéfini par le nombre de décomposition m .

Extension du champ d'application du présent exemple, on peut conclure que l'identité des concepts des nombres flous discrétisés et décomposés en ce qui concerne les résultats des opérations arithmétiques élémentaires flous est une propriété générale.

Cela est dû au fait que la condition nécessaire pour la validité des combinaisons dans l'approche des nombres flous discrétisés, qui exige que les éléments relatifs être attribués au même degré

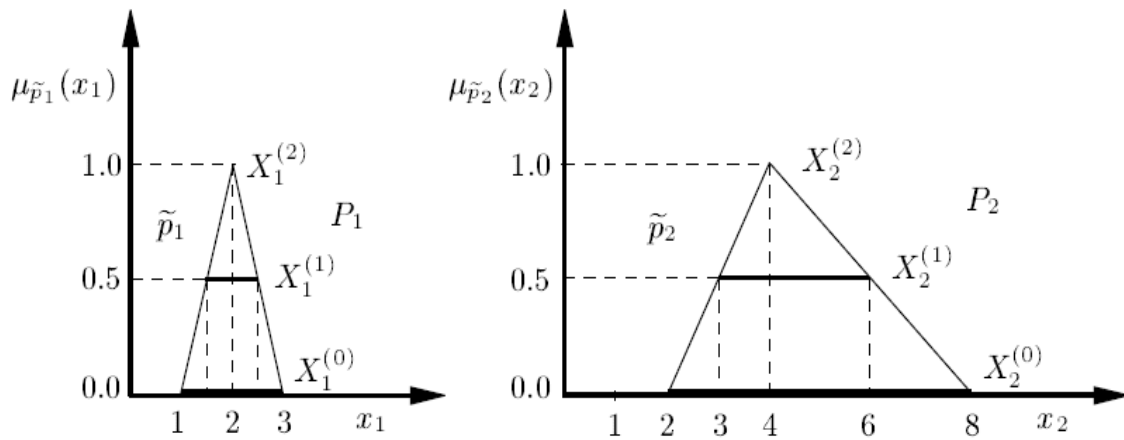


FIG. 2.12 – Nombres flous \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 et leurs représentations décomposées P_1 et P_2 pour $m = 2$.

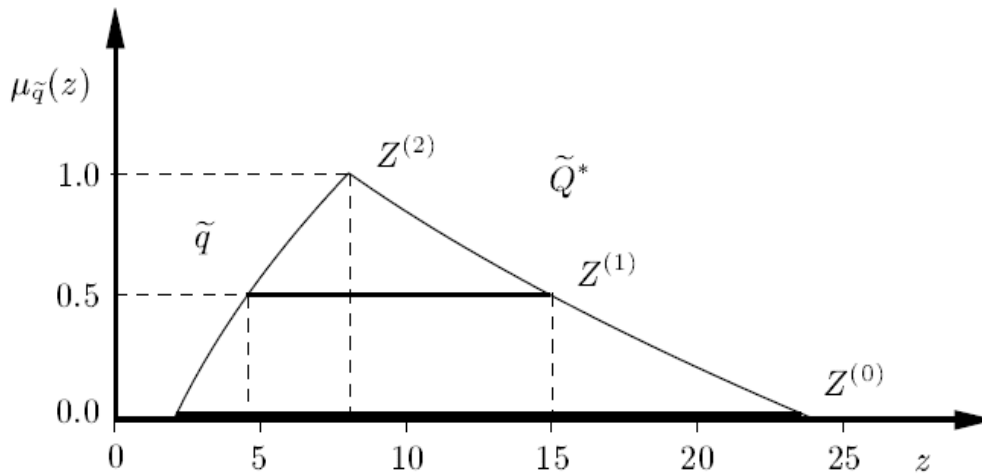


FIG. 2.13 – Produit de nombre flou $\tilde{q} = \tilde{p}_1 \tilde{p}_2$ et sa représentation floue décomposée $Q = P_1.P_2$ pour $m = 2$.

d'appartenance, est remplie par l'application séparée de l'arithmétique d'intervalles à chaque degré d'appartenance à l'approche de décomposition des nombres flous. En outre, la condition requise pour la compatibilité des combinaisons à la notion de discrétisation correspond directement à l'application de l'opérateur minimum et maximum dans le concept de décomposition.

En résumé, nous voyons que les concepts des nombres flous discrétisés et décomposés dépassent clairement l'approche des nombres flous L-R dans son application pratique. L'arithmétique sur la base des concepts anciens s'avère être fermée à l'égard de toutes les opérations élémentaires, et aucune restriction ne s'applique à la forme des opérandes flous évalués. Bien que les approches de discrétisation et de décomposition soient également valables, cette dernière fondée sur l'arithmétique d'intervalles, peut être préférée à cause de sa simplicité de mise en œuvre. Pour ces raisons, le concept de décomposition des nombres flous sera adopté par la suite pour former la base de l'arithmétique que l'on appellera arithmétique floue standard.

2.3 Arithmétique floue standard

2.3.1 Définition de l'arithmétique floue Standard

Dans le prolongement des opérations de l'arithmétique floue élémentaire binaire, nous définissons la norme arithmétique floue que l'exécution successive des différentes opérations élémentaires, basée sur le concept de la décomposition des nombres flous, pour évaluer une expression rationnelle floue de la forme

$$f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n). \tag{2.107}$$

Les arguments $\tilde{p}_i \in \tilde{P}'(\mathbb{R})$ sont des nombres flous proposés par les fonctions d'appartenances $\mu_{\tilde{p}_i}(x_i), x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n$, et f est une application fonctionnelle de la forme

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \tag{2.108}$$

Cela ne se compose que des opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division. En outre, nous supposons que l'expression de la valeur floue peut être évaluée dans un nombre d'étapes fini, c'est-à :

$f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$ est une expression rationnelle floue finie.

Sur la base des principes de l'arithmétique élémentaire floue décomposée des nombres flous dans la Sect. 2.2.3, la procédure générale suivante pour l'évaluation des expressions rationnelles floues peuvent être formulées :

1. Décomposition de l'entrée floue

Dans un premier temps, l'intervalle $[0, 1]$ de l'axe- μ est divisé en m intervalles de longueur $\Delta\mu = 1/m$ (voir Figure 2.11), et les valeurs discrètes μ_j de $(m + 1)$ degrés d'appartenances sont alors donnés par

$$\mu_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (2.109)$$

Dans une deuxième étape, les arguments $\tilde{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$ de l'expression rationnelle floue, sont décomposés en une α -coupe, aboutissant à des représentations décomposées

$$P_i = \{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\} \quad (2.110)$$

Parmi les nombres flous \tilde{p}_i , où chaque ensemble flou P_i se compose de $(m + 1)$ intervalles

$$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}] = \text{coupe}_{\mu_j}(\tilde{p}_i), a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, j = 1, 2, \dots, m, \quad (2.111)$$

$$X_i^{(0)} = [a_i^{(0)}, b_i^{(0)}] = [w_{li}, w_{ri}] \text{ avec }]w_{li}, w_{ri}[= \text{sup}(\tilde{p}_i), \quad (2.112)$$

2. Application de l'arithmétique d'intervalles

L'expression rationnelle floue

$$\tilde{q} = f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n). \quad (2.113)$$

Est calculée en évaluant la valeur d'intervalle correspondre

$$Z^{(j)} = f(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, \dots, X_n^{(j)}), j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.114)$$

Séparément à chaque degré d'appartenance μ_j . L'évaluation de ces expressions rationnelles d'intervalle est réalisée par l'exécution successive de l'arithmétique élémentaire d'intervalles selon les définitions des opérations de base des équations 2.94 à 2.98, si l'on considère, par exemple, l'expression rationnelle floue

$$\tilde{q} = f(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3, \tilde{p}_4) = (\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2)(\tilde{p}_3 - \tilde{p}_4), \quad (2.115)$$

L'expression rationnelle d'intervalle correspondant

$$\begin{aligned} Z^{(j)} &= f(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}, X_3^{(j)}, X_4^{(j)}) \\ &= (X_1^{(j)} + X_2^{(j)})(X_3^{(j)} - X_4^{(j)}), j = 0, 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (2.116)$$

Est évaluée dans les étapes pour chaque j

$$\begin{aligned} Z_1^{(j)} &= X_1^{(j)} + X_2^{(j)} = E_a(X_1^{(j)}, X_2^{(j)}), \\ Z_2^{(j)} &= X_3^{(j)} - X_4^{(j)} = E_s(X_3^{(j)}, X_4^{(j)}), \\ Z^{(j)} &= Z_1^{(j)} \cdot Z_2^{(j)} = E_m(Z_1^{(j)}, Z_2^{(j)}). \end{aligned} \tag{2.117}$$

3.Recomposition l'intervalle de sortie

A la suite de l'application de l'arithmétique d'intervalles, la valeur de l'expression rationnelle floue est disponible dans sa représentation décomposée

$$Q = \{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}\}. \tag{2.118}$$

En recomposant les intervalles $Z^{(j)}, j = 0, 1, \dots, m$, de Q en fonction de leurs degrés d'appartenances μ_j , la valeur de l'expression rationnelle floue \tilde{q} , peut être obtenue.

2.3.2 Inconvénients et limites de l'arithmétique floue Standard

Dans [2], le phénomène fondamental de l'arithmétique floue standard, composé de la surestimation des résultats en fonction de la forme actuelle de l'expression rationnelle floue, a été montré pour un problème pratique de la mécanique. Dans la suite, les exemples 2.3.1 et 2.3.2 se concentrent sur les expressions rationnelles floues de seule variable floue \tilde{p} ; l'exemple 2.3.3 traite avec une expression de deux variables \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 .

Exemple 2.3.1 *Nous considérons l'expression rationnelle floue*

$$f(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - \tilde{p}^2 - 17\tilde{p} - 15, \tag{2.119}$$

Qui seront évalués pour le nombre flou

$$\tilde{p} = gfn^*(4.5, 0.1667, 0.1667) \tag{2.120}$$

De forme quasi-gaussienne, symétrique, comme le montre la Figure 2.14(a).

Lorsque l'on applique l'arithmétique floue standard directement à l'expression originale de la forme

$$f_D(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - \tilde{p}^2 - 17\tilde{p} - 15, \tag{2.121}$$

Nous obtenons la valeur du résultat floue $f_D(\tilde{p})$, tel que tracé dans la Figure 2.14(b). L'expression rationnelle floue dans 2.119 peut, toutefois, être réécrite sous la forme de **Horner**, où les opérations

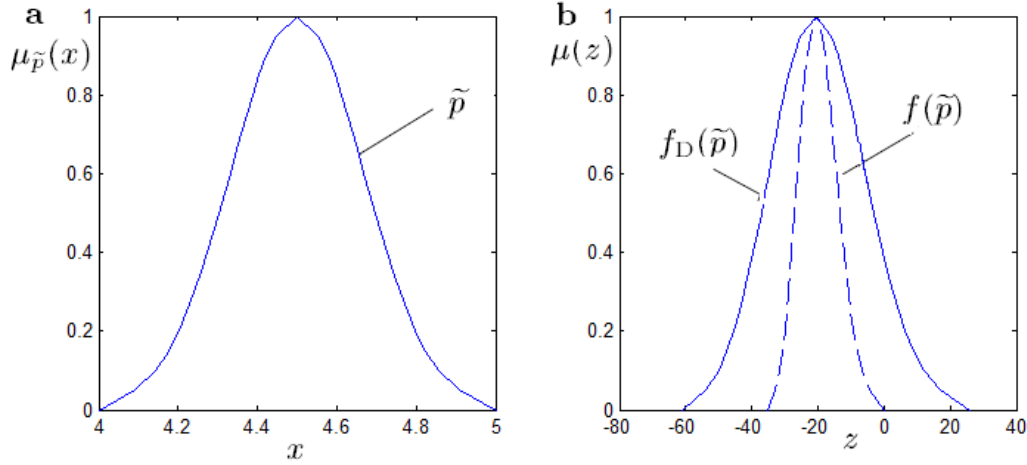


FIG. 2.14 – (a) L'entrée floue \tilde{p} ; (b) Le résultat $f_D(\tilde{p})$ de l'évaluation directe (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $f(\tilde{p})$ (ligne pointillée).

de multiplication sont emboîtés selon

$$f_H(\tilde{p}) = [(\tilde{p} - 1)\tilde{p} - 17]\tilde{p} - 15, \quad (2.122)$$

Son évaluation conduit alors au résultat $f_H(\tilde{p})$, comme le montre la Figure 2.15(a).

En fin de compte, l'expression de 2.119 peut être évaluée en appliquant la norme de l'arithmétique floue à sa forme factorisée

$$f_F(\tilde{p}) = (\tilde{p} + 3)(\tilde{p} + 1)(\tilde{p} - 5), \quad (2.123)$$

Ce qui conduit au résultat $f_F(\tilde{p})$, tel que tracé dans la Figure 2.15(b).

A titre de comparaison, le bon résultat de l'arithmétique floue $f(\tilde{p})$ est également affichée dans les Figure 2.14(b). Figure 2.15(a) et Figure 2.15(b). Il peut, par exemple, être obtenue par une optimisation numérique, où la valeur maximale et minimale de la fonction f est déterminée pour chaque intervalle d'entrée $X^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, m$.

Nous pouvons voir dans les Figure 2.14(a) à Figure 2.15(b) que l'inconvénient fondamental de l'arithmétique floue standard peut encore être clairement détecté.

De toute évidence, la solution du problème de l'arithmétique floue conduit à des résultats différents, selon le type de prétraitement symbolique de l'expression rationnelle floue a été soumis. En outre, nous constatons qu'aucune des résultats ainsi obtenus soient conformes à la solution du problème de l'arithmétique floue adéquate. En fait, tous les résultats surestiment la solution adéquate à un ou moindre mesure plus grande.

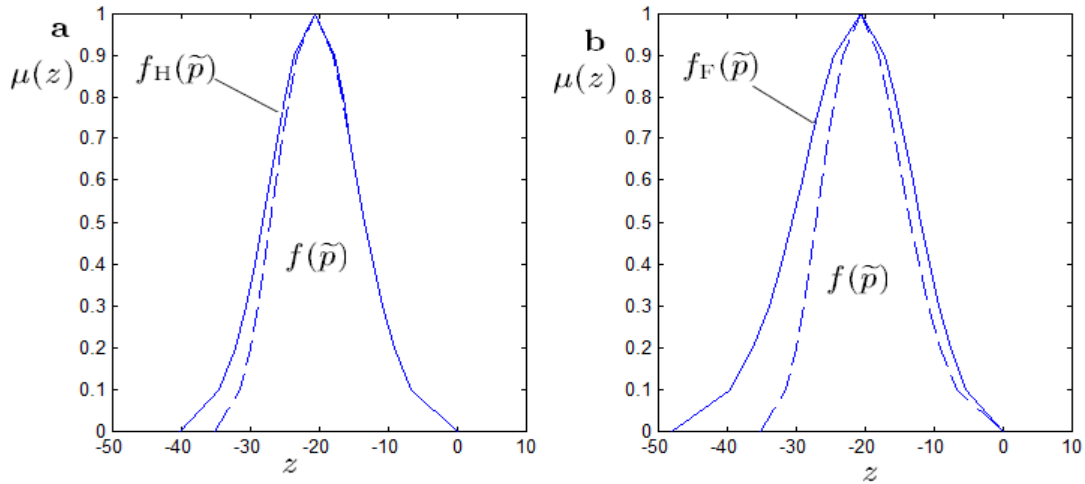


FIG. 2.15 – (a) Le résultat $f_H(\tilde{p})$ de l'évaluation de la forme de Horner (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $f(\tilde{p})$ (ligne pointillée), (b) Le résultat $f_F(\tilde{p})$ de l'évaluation de la forme factorisée (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $f(\tilde{p})$ (ligne pointillée).

Pour retracer cet effet, nous concentrons sur les déviations maximaux des nombres flous, donnés à le degré d'appartenance $\mu_0 = 0$. À cet égard, il convient de mentionner que chaque nombre réel c est équivalent à un intervalle $[c, c]$, ce qui est dit dégénéré.

Nous allons, cependant, conserver la notation non-intervalle dans ces cas pour des raisons de simplicité.

Dans le cas de l'évaluation directe de l'expression de la valeur d'intervalle

$$f_D(X^{(0)}) = (X^{(0)})^3 - (X^{(0)})^2 - 17X^{(0)} - 15, \quad (2.124)$$

Pour l'intervalle d'entrée $X^{(0)} = [4, 5]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} Z_D^{(0)} &= f_D(X^{(0)}) \\ &= [4, 5].[4, 5].[4, 5] - [4, 5].[4, 5] - 17[4, 5] - 15 \\ &= [-61, 26]. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Lorsque nous évaluons, au contraire, sous forme de **Horner**

$$f_H(X^{(0)}) = [(X^{(0)} - 1)X^{(0)} - 17]X^{(0)} - 15 \quad (2.126)$$

Pour l'intervalle d'entrée $X^{(0)} = [4, 5]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 Z_H^{(0)} &= f_H(X^{(0)}) & (2.127) \\
 &= (([4, 5] - 1)[4, 5] - 17)[4, 5] - 15 \\
 &= [-40, 0].
 \end{aligned}$$

Et l'évaluation de la forme factorisée

$$f_F(X^{(0)}) = (X^{(0)} + 3)(X^{(0)} + 1)(X^{(0)} - 5), \quad (2.128)$$

Pour l'intervalle d'entrée $X^{(0)} = [4, 5]$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 Z_F^{(0)} &= f_F(X^{(0)}) & (2.129) \\
 &= ([4, 5] + 3)([4, 5] + 1)([4, 5] - 5) \\
 &= [-48, 0].
 \end{aligned}$$

Le bon résultat de l'arithmétique floue $Z^{(0)}$ Toutefois, est donnée par

$$Z^{(0)} = f([4, 5]) = [-35, 0] \quad (2.130)$$

Afin de quantifier l'effet de la surestimation attribuée à une expression rationnelle floue donnée dans la forme et évalués par l'utilisation de l'arithmétique floue standard, nous allons introduire le degré de surestimation locale à un degré spécifique de la fonction d'appartenance μ_j sous la forme

$$\Omega_M(X^{(j)}) = \frac{wth [f_M(X^{(j)})] - wth [f(X^{(j)})]}{wth [f(X^{(j)})]} \quad (2.131)$$

$$= \frac{wth(Z_D^{(j)}) - wth(Z^{(j)})}{wth(Z^{(j)})}, j = 0, 1, \dots, (m - 1), \quad (2.132)$$

Lorsque l'opérateur "wth " exprime la largeur d'un intervalle, définie comme

$$wth([a, b]) = b - a \quad (2.133)$$

Pour les différentes formes $f_D(X^{(0)})$, $f_H(X^{(0)})$ et $f_F(X^{(0)})$ de l'expression rationnelle de l'intervalle au plus bas degré de la fonction d'appartenance μ_0 les degrés locaux de surestimation

$$\Omega_D^{(0)} = 148\%, \quad \Omega_H^{(0)} = 143\%, \quad \Omega_F^{(0)} = 37\%. \quad (2.134)$$

Dans une large mesure de la surestimation de l'expression rationnelle floue, on peut en outre présenter le degré global de surestimation $\omega_G(\tilde{p})$ comme une valeur moyenne de $\Omega_M(X^{(j)})$ définis localement par rapport au nombre total m de degré d'appartenance $\mu_j, j = 0, 1, \dots, (m - 1)$, sous la forme

$$\omega_G(\tilde{p}) = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{m-1} \Omega_M(X^{(j)}). \quad (2.135)$$

Exemple 2.3.2 *Considérons maintenant l'expression rationnelle floue*

$$g(\tilde{p}) = 2\tilde{p} - \tilde{p}^2 \quad (2.136)$$

Qui doit être évaluées pour le nombre flou linéaire symétrique

$$\tilde{p} = \text{tfn}(1.5, 1.5, 1.5), \quad (2.137)$$

Lorsque l'on applique l'arithmétique floue standard directement à l'expression originale de la forme

$$g_D(\tilde{p}) = 2\tilde{p} - \tilde{p}^2 \quad (2.138)$$

Nous obtenons la valeur floue $g_D(\tilde{p})$, tel que tracé dans la Figure 2.16(a).

L'expression rationnelle floue dans 2.136 peut, toutefois, être réécrite sous la forme

$$g_{HF}(\tilde{p}) = (2 - \tilde{p})\tilde{p}, \quad (2.139)$$

Qui peut être considéré comme la forme de **Horner** ou la forme factorisée de $g(\tilde{p})$. Son évaluation conduit à un résultat $g_{HF}(\tilde{p})$, comme le montre la Figure 2.16(b).

Le bon résultat de l'arithmétique floue $g(\tilde{p})$ est affichée dans les Figure 2.16(a) et Figure 2.16(b) pour des raisons de comparaison.

Similaire à l'exemple 2.3.1, l'effet de la surestimation est clairement observable dans les Figure 2.16(a) et Figure 2.16(b).

Pour sa reconstruction, nous concentrons sur les déviations maximaux des intervalles des nombres flous, donnés à degré d'appartenance $\mu_0 = 0$. Dans le cas de l'évaluation directe de l'expression d'intervalle

$$g_D(X^{(0)}) = 2X^{(0)} - (X^{(0)})^2 \quad (2.140)$$

Pour l'intervalle d'entrée $X^{(0)} = [0, 3]$, nous obtenons

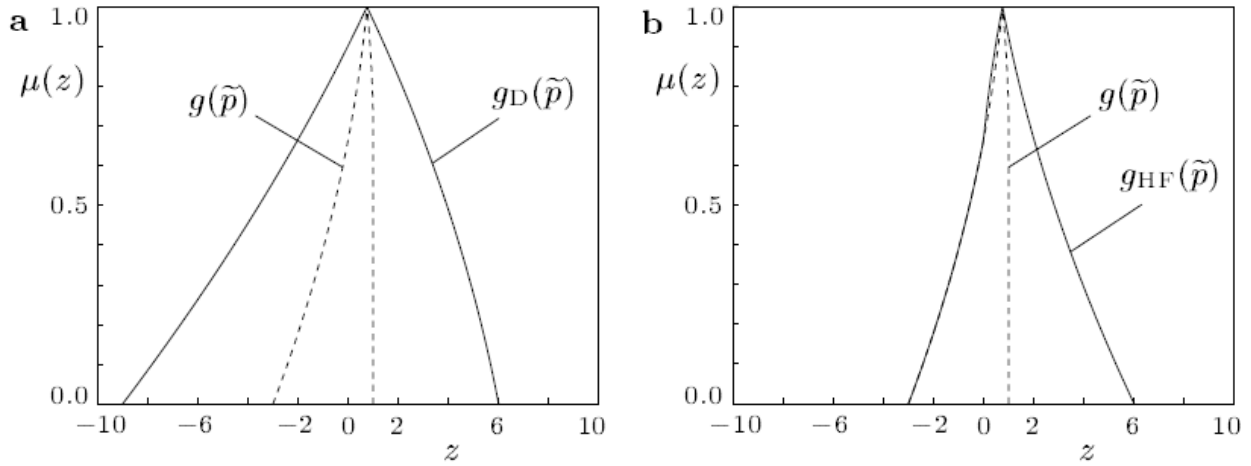


FIG. 2.16 – (a) Le résultat $g_D(\tilde{p})$ de l'évaluation directe (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $g(\tilde{p})$ (ligne pointillée), (b) Le résultat $g_{HF}(\tilde{p})$ de l'évaluation de la forme de Horner ou la forme factorisée (ligne continue) et le résultat de l'arithmétique floue $g(\tilde{p})$ (ligne pointillée).

$$Z_D^{(0)} = g_D(X^{(0)}) = 2[0, 3] - [0, 3].[0, 3] = [-9, 6]. \quad (2.141)$$

Lorsque nous évaluons, au contraire, sous forme de **Horner** ou la forme factorisée, respectivement,

$$g_{HF}(X^{(0)}) = (2 - X^{(0)})X^{(0)}, \quad (2.142)$$

Pour l'argument $X^{(0)} = [0, 3]$, nous obtenons

$$Z_{HF}^{(0)} = g_{HF}(X^{(0)}) = (2 - [0, 3])[0, 3] = [-3, 6]. \quad (2.143)$$

Le bon résultat de l'arithmétique floue $Z^{(0)}$ Toutefois, est donnée par

$$Z^{(0)} = g([0, 3]) = [-3, 1], \quad (2.144)$$

Représentant la portée réelle des valeurs de $g(X^{(0)})$ pour $X^{(0)} = [0, 3]$. La quantification de la surestimation des différentes formes $g_D(X^{(0)})$ et $g_{HF}(X^{(0)})$ de l'expression rationnelle d'intervalle $g(X^{(0)})$ en utilisant les degrés locaux de surestimation au rendement de degré d'appartenance $\mu_0 = 0$.

$$\Omega_D^{(0)} = 275\% \quad \text{et} \quad \Omega_{HF}^{(0)} = 125\% . \quad (2.145)$$

En utilisant le degré global de la surestimation de quantifier la surestimation globale de l'expression rationnelle floue, on obtient pour un certain nombre de décomposition de $m = 10$

$$\omega_D(\tilde{p}) \approx 356\% \quad \text{et} \quad \omega_{HF}(\tilde{p}) \approx 114\% . \quad (2.146)$$

Exemple 2.3.3 Comme un problème de plus d'une variable, nous considérons l'expression rationnelle floue

$$h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}, \quad (2.147)$$

Qui seront évalués pour les nombres flous linéaires symétriques

$$\tilde{p}_1 = tfn(2, 1, 1) \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 = tfn(4.5, 0.5, 0.5) \quad (2.148)$$

Comme le montre la Figure 2.17(a).

Lorsque l'on applique l'arithmétique floue standard directement à l'expression originale de la forme

$$h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}, \quad (2.149)$$

Nous obtenons la valeur floue de $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, tel que tracé dans la Figure 2.17(b).

L'expression rationnelle floue dans 2.147 peut être, toutefois, prétraitées symboliquement selon

$$\frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} = \underbrace{\frac{\tilde{p}_1}{\tilde{p}_1}}_{=1} + \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} \quad (2.150)$$

Et réécrit sous la forme simplifiée

$$h_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = 1 + \frac{\tilde{p}_2}{\tilde{p}_1} \quad (2.151)$$

Son évaluation conduit à un résultat $h_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$, comme le montre la Figure 2.17(b). En outre, le bon résultat de l'arithmétique floue $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ est affiché dans la Figure 2.17(b), s'avère être identique $h_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$.

L'effet de surestimation peut être clairement observé pour le résultat $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ de l'évaluation directe, mais il n'est évidemment pas une surestimation du résultat de la forme simplifiée $h_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$.

Pour vérifier cette observation, nous concentrons sur les déviations maximales des intervalles des nombres flous, donnés au degré d'appartenance $\mu_0 = 0$.

Dans le cas de l'évaluation directe de l'expression d'intervalle.

$$h_D(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) = \frac{X_1^{(0)} + X_2^{(0)}}{X_1^{(0)}} \quad (2.152)$$

Pour les intervalles d'entrées $X_1^{(0)} = [1, 3]$, et $X_2^{(0)} = [4, 5]$, nous obtenons

$$Z_D^{(0)} = h_D(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) = \frac{[1, 3] + [4, 5]}{[1, 3]} = \frac{[5, 8]}{[1, 3]} = \left[\frac{5}{3}, 8\right]. \quad (2.153)$$

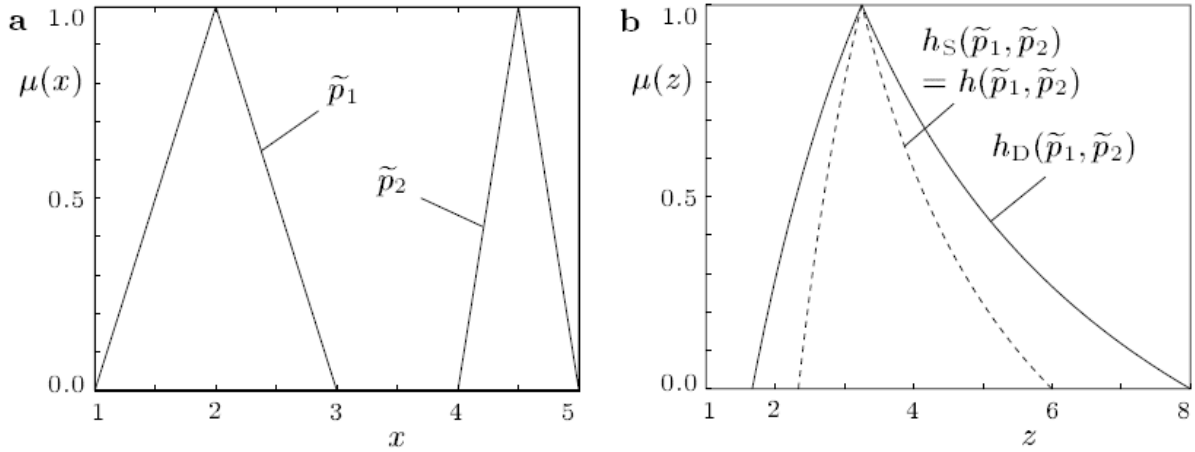


FIG. 2.17 – (a) Les entrées floues \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 ; (b) Le résultat $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ de l'évaluation directe (ligne continue) et les courbes identiques à le résultat de la forme simplifiée $h_S(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ et le résultat de l'arithmétique floue $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ (ligne pointillée).

Lorsque nous évaluons, au contraire, le forme simplifiée

$$h_s(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) = 1 + \frac{X_2^{(0)}}{X_1^{(0)}} \quad (2.154)$$

Pour les arguments $X_1^{(0)} = [1, 3]$, et $X_2^{(0)} = [4, 5]$, nous obtenons

$$h_s(X_1^{(0)}, X_2^{(0)}) = 1 + \frac{[4, 5]}{[1, 3]} = 1 + \left[\frac{4}{3}, 5\right] = \left[\frac{7}{3}, 6\right], \quad (2.155)$$

Le bon résultat de l'arithmétique floue $Z^{(0)}$ représentant la portée réelle des valeurs de $h(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$ pour $X_1^{(0)} = [1, 3]$, et $X_2^{(0)} = [4, 5]$, est donnée par

$$Z^{(0)} = g([1, 3], [4, 5]) = \left[\frac{7}{3}, 6\right]. \quad (2.156)$$

La quantification de surestimation des différentes formes $h_D(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$ et $h_s(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$ de l'expression rationnelle d'intervalle $h(X_1^{(0)}, X_2^{(0)})$ l'aide du le degré de surestimation locale au rendement de degré d'appartenance μ_0

$$\Omega_D^{(0)} = 73\% \quad \text{et} \quad \Omega_s^{(0)} = 0\% . \quad (2.157)$$

En utilisant le degré global de la surestimation de quantifier la surestimation globale de l'expression rationnelle floue, on obtient pour un certain nombre de décomposition $m = 10$

$$\omega_D(\tilde{p}) \approx 73\% \quad \text{et} \quad \omega_s(\tilde{p}) \approx 0\% . \quad (2.158)$$

Résumant les principaux points des exemples de 2.3.1 à 2.3.3, nous arrivons à la conclusion que l'application de l'arithmétique floue standard pour l'évaluation des expressions rationnelles floues conduites à des résultats généralement surestimer appropriés de problème.

A cet égard, le degré de surestimation dépend en grande partie de la forme actuelle de l'expression rationnelle floue, allant de l'absence surestimation à des degrés de façon significative.

En fait, cet effet une surestimation est bien connue comme un inconvénient grave de calcul par intervalles. Il est souvent désigné comme le problème de dépendance (par exemple [16]) et parfois en tant que propriété du conservatisme de l'arithmétique d'intervalles. MOORE [15] simplement attribué cet effet à l'apparition de multiples d'un intervalle variable une valeur dans l'expression à évaluer. En fait, cette circonstance constitue une condition nécessaire à une surestimation de se produire, et donc, c'est l'inverse que la surestimation peut jamais survenir si un intervalle de valeur-variable apparaît notamment qu'une seule fois dans une expression. Toutefois, pour être plus précis, l'origine de l'effet de surestimation réside dans le fait que la norme de l'arithmétique floue indépendamment de savoir si elle est fondée sur les nombres flous décomposés ou discrétisés effectue toutes les opérations élémentaires entre les nombres flous comme une opération entre des opérands indépendantes complètement.

La réalité, cependant, ne se conforme pas à cette hypothèse dans la plupart des cas. En d'autres termes, l'effet de surestimation résulte de l'application incorrecte de l'arithmétique élémentaire de la manière que certaines combinaisons des éléments de la charge des jeux concernés sont mal prises en compte, car ils ne peuvent pas se produire dans la réalité.

Quand on se rappelle les exemples 2.3.1 et 2.3.2, nous voyons qu'il ya un seul variable flou \tilde{p} . Cela implique que les parties de la valeur floue de l'expression $f(\tilde{p})$ et $g(\tilde{p})$, qui apparaîtront au cours de leur évaluation de l'arithmétique floue successives, sont étroitement dépendantes. Par conséquent, les opérations entre ces parties ne doivent pas être effectuées en utilisant la définition de l'arithmétique élémentaire floue, car elle suppose des opérands d'être indépendant. La survenue d'une surestimation de l'évaluation des expressions $f_D(\tilde{p})$, $f_H(\tilde{p})$ et $f_F(\tilde{p})$ est donc inévitable.

Dans l'exemple 2.3.3, il ya deux variables indépendantes \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 et le numérateur $\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2$ de l'expression $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ de 2.147 n'est ni strictement dépendante de celle-ci sur le dénominateur \tilde{p}_1 ni tout à fait indépendante. Par conséquent, l'application de l'arithmétique floue standard directement au l'expression $h_D(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ va certainement conduire à une surestimation du résultat réel.

Par l'utilisation de prétraitement symbolique, cependant, l'expression rationnelle floue peut être divisée en deux parties, comme indiqué dans 2.151 : l'un de deux avec strictement dépendante, mais opérands identiques, et l'autre avec tout les variables indépendantes. En exploitant le fait que le quotient de deux valeurs identiques doit être égal à l'unité et croquantes, l'expression $h_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ peut enfin être réalisée, où les nombres flous d'entrée \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 se produisent qu'une seule fois. C'est, du l'expression reste $h_s(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ ne contient que des opérands indépendante, afin que l'application de

l'arithmétique floue doit conduire au résultat correct.

Cependant, quelques-unes des idées de base dans ce domaine doit être définies dans le texte suivant.

- Un simple, mais efficace étape à venir à bout du problème de dépendance à la multiplication d'intervalle est une définition particulière de la puissance $n^{\text{ème}}$ de X^n d'un intervalle de X , plutôt que de reproduire l'opération comme un facteur de multiplication n (par exemple [16]). Utilisation ce terme, l'élargissement des résultats indésirables peuvent être évités si les pouvoirs des zéros flous sont à déterminer. Cette affaire, cependant, prouve l'exception, par rapport à toutes les origines possibles de surestimation, qui pour la plupart, restent inchangées.
- Une autre approche est basée sur la dite centrée formulaire afin d'une expression rationnelle d'intervalle, qui a été proposé par MOORE [15] et largement étudié par HANSEN [17]. Dans cette méthode, l'expression rationnelle d'intervalle est réécrite sous une forme où les points centraux des arguments des intervalles $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ jouent un rôle important. L'objectif final de ce prétraitement symbolique est d'obtenir une expression dont l'évaluation aboutit à un intervalle de largeur réduite de façon significative. Néanmoins, un inconvénient de cette méthode réside dans le fait que le projet de réduction de l'effet de surestimation peut être garanti que si les largeurs des arguments des intervalles sont suffisamment petites. Si ce n'est pas le cas, l'évaluation de l'expression modifiée peut conduire à des résultats qui sont même plus larges que celles des originaux.
- Revenant sur une idée qui a été initialement présentée par MOORE [15], le resserrement des enceintes de l'intervalle réel évalués les résultats peuvent être obtenus par de un tel appelé intervalle fractionnement. Dans cette approche, qui a été implémenté avec succès comme un algorithme pratique par SKELBOE [18], chacun des intervalles d'entrée, $X_i, i = 1, 2, \dots, n$ est d'abord divisé en N sous-intervalles de largeur égale.

L'arithmétique d'intervalles est ensuite appliquée séparément à tous les problèmes qui se posent sous les sous-intervalles comme arguments, et enfin, le résultat global est obtenu en faisant l'union des résultats partiels. Compte tenu du fait que l'évitement complet de la surestimation est théoriquement garantie que pour les $N \rightarrow \infty$, le coût de calcul de cette méthode peut être assez élevé si une grande valeur suffisamment pour N est choisi.

- Enfin, KLIR [19] propose la définition de soi-disant contraintes d'égalité nécessaires pour permettre l'identité des entités en arithmétique floue standard. Pour l'expression rationnelles floue de n variables, ces contraintes peuvent être formulées par n dimensions des relations et peut être incorporé dans les formes existantes de l'arithmétique floue élémentaire, l'arithmétique d'intervalles, ou le principe d'extension, par la combinaison conjonctive. Néanmoins, la mise en œuvre pratique de ce concept pour la solution de l'arithmétique floue des problèmes de grande échelle apparaît encore très difficile.

En plus des obstacles individuels attribués à chacune des approches ci-dessus mentionnés, il ya quelques limitations rigoureuses qui s'appliquent généralement, même si à des degrés différents, si

la norme de l'arithmétique floue est destinée à être utilisée pour la solution des problèmes du monde réel. Ils sont énumérés dans le texte suivant.

- Conformément à la définition de l'arithmétique floue, son application est dans un premier temps limitée à l'évaluation des fonctions floues rationnelles, qui, de préférence devrait être disponible sous forme analytique.
- Sans d'autres définitions, la norme de l'arithmétique floue ne peut pas accomplir l'évaluation de la transcendance des fonctions courantes, telles que le «sin», «cos», ou «exp». Les extensions appropriées à ces fins sont assez simples pour les fonctions monotones, tels que «exp», où seuls les bornes des arguments des intervalles à prendre en considération. Pour les fonctions non monotone, comme le «sin» et «cos», cependant, les extrema internes doivent être déterminés à obtenir des résultats d'arithmétique floue corrects. Une approche de la mise en œuvre algorithmique d'une vérification rapide des extrema interne peut être trouvée dans [20].
- L'effet de la surestimation ne peut pas être pro-estimé la taille. Il ne peut être réduite à un ou moins grande mesure de plus, mais ne peut pas être complètement évité à un coût raisonnable. En raison de ces limitations, une arithmétique floue avancée, basée sur la méthode de transformation, alors, est introduit dans le chapitre suivant.

Son champ d'application dépasse l'évaluation des expressions rationnelles floues et permet à une solution de l'arithmétique floue des systèmes complexes avec une valeur des paramètres du modèle flou.

Chapitre 3

L'arithmétique floue avancée-La méthode de transformation

3.1 Introduction

Fondamentalement, les incertitudes sur les paramètres du modèle peuvent être classées dans différents types selon leur origine. Ces incertitudes peuvent surgir en raison des imprécisions ou d'un manque de l'information, soit si l'information disponible est incomplète (imprécise, vague, ...) ou si l'information disponible est contradictoire (variabilité, conflit), D'autre part, il semble illusoire de considérer une absolue précision des données. De ce fait, tout système de mesure a ses limites en termes de précision, plutôt que de masquer le problème, il peut paraître intéressant au contraire d'intégrer la connaissance que l'on a de l'imprécision dans l'analyse. Nous pensons que le cadre le plus adapté à la représentation et la manipulation des mesures imprécises est celui des ensembles flous [7].

Ainsi, on voit se développer depuis quelques années un intérêt croissant pour des méthodes d'analyse de données imparfaites. Nous présentons dans ce chapitre une approche très pratique pour la simulation des systèmes à paramètres incertains qui est la représentation des paramètres du modèle sous forme de nombres flous [6], suivie de l'utilisation de l'arithmétique floue basée sur la méthode de transformation [2-13-22] pour effectuer l'évaluation des équations du modèle.

Un schéma général pour la mise en œuvre pratique de l'approche sera donné, et son efficacité testée sur deux exemples, le premier est un modèle linéaire et le second un modèle non linéaire.

3.2 Simulation et analyse des modèles incertains

Dans ce chapitre, nous étudions les modèles de type linéaires et non linéaires à paramètres incertains. Nous nous intéresserons aux modèles incertains de la forme suivante :

$$\tilde{q} = F(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n) \quad (3.1)$$

La seule information disponible réside dans la connaissance des bornes des intervalles auxquels appartiennent ces paramètres $\tilde{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$.

3.2.1 Simulation par la méthode de transformation

La transformation floue a été fortement théorisée par Hans-Michael [2], elle peut être vue comme la décomposition d'un modèle incertain. Le calcul arithmétique sur les nombres flous peut alors être utilisé pour réaliser des opérations approximatives sur les intervalles décomposés aboutissant à leur modification ou à leur analyse.

La transformation inverse permet alors de recomposer le système original après certaines manipulations.

Autrement dit, la méthode de transformation a été proposée comme un outil pour la simulation et l'analyse des systèmes incertains. Jusqu'à présent, cette méthode a été connue sous deux formes : une forme générale, et une forme réduite, ce qui permet de réduire le cout de calcul.

3.2.1.1 La décomposition des entrées floues

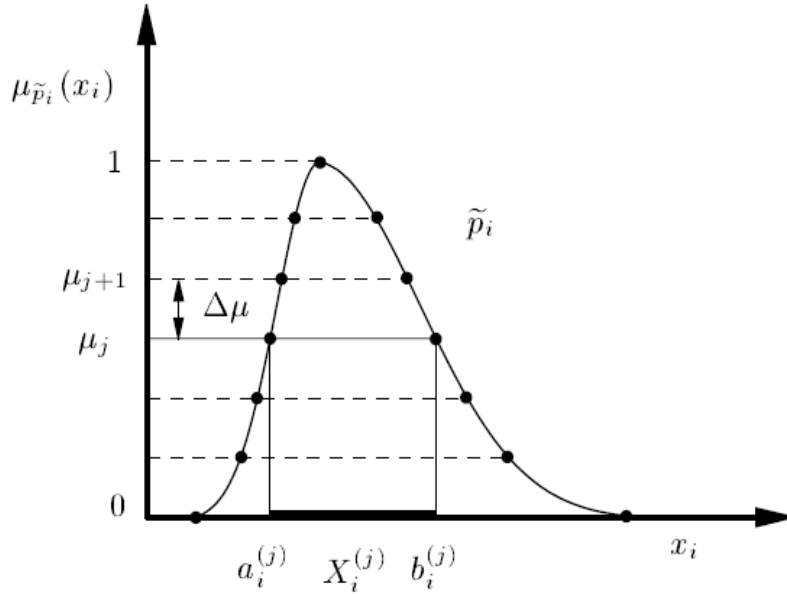
Pour simuler un modèle flou paramétré à l'aide de la méthode de transformation réduite, chaque paramètre flou est tout d'abord décomposé en α - coupe.

L'idée des nombres flous décomposés est de représenter un nombre flou par l'ensemble de ses α - coupes. L'arithmétique floue se réduit alors à l'arithmétique des intervalles appliqués à différents degrés d'appartenance.

- Dans la première étape l'intervalle $[0, 1]$ de l'axe μ est divisé en m intervalles de longueur équidistante $\Delta\mu = 1/m$ (Figure 3.1) où m est le facteur de décomposition, la valeur discrète des fonctions d'appartenances μ_j des $(m + 1)$ intervalles est donnée par :

$$\mu_j = \frac{j}{m}, \quad j = 0, 1, \dots, m, \quad (3.2)$$

- Dans la seconde étape les paramètres flous du modèle $\tilde{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$, sont décomposés en


 FIG. 3.1 – Décomposition d'un nombre flou \tilde{p}_i .

α – coupes conduisant à la représentation suivante :

$$P_i = \{X_i^{(0)}, X_i^{(1)}, \dots, X_i^{(m)}\} \quad , i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.3)$$

Où chaque ensemble P_i est composé de $(m + 1)$ intervalles.

$$X_i^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}] = \text{coupe}_{\mu_j}(\tilde{p}_i), \text{ avec } a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, \text{ pour } j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.4)$$

$$X_i^{(0)} = [a_i^{(0)}, b_i^{(0)}] = [w_{l_i}, w_{r_i}] \text{ avec }]w_{l_i}, w_{r_i}[= \text{sup}(\tilde{p}_i), \quad (3.5)$$

La Figure 3.1 illustre une décomposition en un ensemble de m α – coupes , cette décomposition offre l'avantage de capturer systématiquement le noyau des ensembles flous, assurant une représentation cohérente.

3.2.1.2 Transformation des intervalles d'entrée

Dans le cas de la méthode de transformation réduite, les intervalles $X_i^{(j)}, i = 1, 2, \dots, n$ de chaque degré de la fonction d'appartenance $\mu_j, j = 0, 1, \dots, m$ sont transformés en tableaux $\tilde{X}_i^{(j)}$ de la forme

$$\tilde{X}_i^{(j)} = \overbrace{((\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}), (\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}), \dots, (\alpha_i^{(j)}, \beta_i^{(j)}))}^{2^{i-1} \text{ paires}} \quad (3.6)$$

Avec

$$\alpha_i^{(j)} = \underbrace{(a_i^{(j)}, \dots, a_i^{(j)})}_{2^{n-i} \text{ elements}}, \beta_i^{(j)} = \underbrace{(b_i^{(j)}, \dots, b_i^{(j)})}_{2^{n-i} \text{ elements}}. \quad (3.7)$$

On remarque que seulement les bornes $a_i^{(j)}$ et $b_i^{(j)}$ de l'intervalle $X_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$, sont utilisées dans ce schéma de transformation ce qui est suffisant pour la simulation des problèmes qui sont monotone à l'égard de tous les paramètres [2], ou si le problème est caractérisé par un seul paramètre incertain du modèle, autrement dit, si $n = 1$.

Dans le cas contraire, la méthode de transformation générale est recommandée. Où des points supplémentaires au sein des intervalles $X_i^{(j)}$ sont ajoutés dans la transformation, ainsi les intervalles $X_i^{(j)}$ sont transformés en tableaux $\tilde{X}_i^{(j)}$ de la forme suivante :

$$\tilde{X}_i^{(j)} = \underbrace{((\gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+j-1),i}^{(j)}), \dots, (\gamma_{1,i}^{(j)}, \gamma_{2,i}^{(j)}, \dots, \gamma_{(m+j-1),i}^{(j)}))}_{(m-j+1)^{i-1}(m-j+1)\text{-tuples}} \quad (3.8)$$

Avec

$$\gamma_{l,i}^{(j)} = \underbrace{(c_{l,i}^{(j)}, \dots, c_{l,i}^{(j)})}_{(m-j+1)^{n-i} \text{ elements}} \quad (3.9)$$

Et

$$c_{l,i}^{(j)} = \begin{cases} a_i^{(j)} & \text{pour } l = 1 \text{ et } j = 0, 1, \dots, m \\ \frac{1}{2}(c_{l-1,i}^{(j)} + c_{l,i}^{(j)}) & \text{pour } l = 2, 3, \dots, m - j \text{ et } j = 0, 1, \dots, m - 2 \\ b_i^{(j)} & \text{pour } l = m - j + 1 \text{ et } j = 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.10)$$

3.2.1.3 Évaluation du modèle

En supposant que le modèle flou paramétré soit donné par l'expression fonctionnelle F dans l'équation 3.1, son estimation sera effectuée en évaluant l'expression de chacune des colonnes des tableaux séparément, en utilisant l'arithmétique classique pour les nombres réels.

Ainsi, la sortie décomposée du système \tilde{q} peut être transformée par le tableau $\hat{Z}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, m$, le $k^{\text{ème}}$ élément $k_{\hat{z}^{(j)}}$ du tableau $\hat{Z}^{(j)}$ est donné par :

$$k_{\hat{z}^{(j)}} = F(k_{\hat{x}_1^{(j)}}, k_{\hat{x}_2^{(j)}}, \dots, k_{\hat{x}_n^{(j)}}), \quad (3.11)$$

Où $k_{\hat{x}_i^{(j)}}$ désigne le $k^{\text{ème}}$ élément du tableau $\hat{X}_i^{(j)}$.

3.2.1.4 La transformation inverse de la sortie

Comme son nom l'indique, la transformation floue inverse doit être perçue comme l'inversion de l'équation 3.1 . Elle consiste en fait à obtenir une estimation du modèle.

La représentation décomposée de la sortie du modèle flou \tilde{q} , exprimée par l'ensemble

$$Q = \{Z^{(0)}, Z^{(1)}, \dots, Z^{(m)}\} \quad (3.12)$$

Qui est constitué de $(m + 1)$ intervalles, avec :

$$Z^{(j)} = [a_i^{(j)}, b_i^{(j)}] = \text{coupe}_{\mu_j}(\tilde{q}), \text{ avec } a_i^{(j)} \leq b_i^{(j)}, \text{ pour tout } j = 1, 2, \dots, m, \quad (3.13)$$

$$Z^{(0)} = [a_i^{(0)}, b_i^{(0)}] = [w_{l_i}, w_{r_i}] \text{ avec }]w_{l_i}, w_{r_i}[= \text{sup}(\tilde{q}), \quad (3.14)$$

Peut être obtenue par retransformation du tableau $\hat{Z}^{(j)}$ en utilisant les équations récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned} a^{(j)} &= \min_k(a^{(j+1)}, k_{\hat{z}^{(j)}}) \quad \text{et} \quad b^{(j)} = \max_k(b^{(j+1)}, k_{\hat{z}^{(j)}}), \\ j &= 0, 1, \dots, m - 1 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Avec

$$a^{(m)} = \min(k_{\hat{z}^{(m)}}) = \max(k_{\hat{z}^{(m)}}) = b^{(m)}. \quad (3.16)$$

3.2.1.5 Reconstruction de la sortie

La reconstruction de la sortie, est obtenue en recomposant les intervalles $Z^{(j)}, j = 0, 1, \dots, m$, de l'ensemble Q en fonction de leurs degré d'appartenance μ_j , Donc une approximation de la sortie floue du modèle \tilde{q} est atteinte [22].

3.2.2 Application

L'efficacité de la méthode sera démontrée par des exemples, un model linéaire et un autre non linéaire.

Exemple 01 :

Comme premier exemple, on considère un modèle statique d'ordre $n = 1$ qui est linéaire par rapport

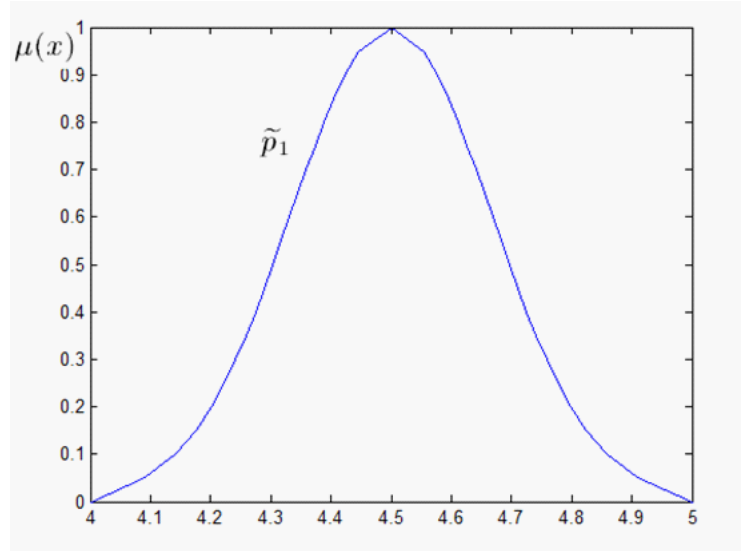


FIG. 3.2 – Le paramètre \tilde{p} décomposé (ici $m = 20$)

à l'incertitude de son paramètre [2]. Le modèle est donné par :

$$f(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - \tilde{p}^2 - 17\tilde{p} - 15, \quad (3.17)$$

Où le paramètre flou \tilde{p} sera évalué par une fonction gaussienne symétrique

$$\tilde{p} = gfn^*(4.5, 0.1667, 0.1667) \quad (3.18)$$

Comme l'illustre la Figure 3.2.

Sur ce modèle, on applique la méthode de transformation sous sa forme réduite, avec un nombre de décomposition $m = 20$. Et cette transformation est effectuée en quatre étapes principales, comme on a vu précédemment :

Etape 1 : la décomposition de l'entrée des nombres flous

Dans un premier temps, l'intervalle de l'axe μ est subdivisé en vingt et un intervalles de longueur $\Delta\mu = 1/20 = 0.05$, où les valeurs discrètes de ces vingt et une fonctions d'appartenance sont données par :

$$\mu_j = \frac{j}{20}, j = 0, 1, \dots, 20. \quad (3.19)$$

Comme le modèle flou dépend d'un seul paramètre flou (avec, $n = 1$), la représentation de sa forme décomposée est la suivante :

$$P_1 = \{X_1^{(0)}, X_2^{(1)}, \dots, X_1^{(20)}\} \quad (3.20)$$

on remarque que cette dernière, est composée de vingt et un intervalles définis comme suit :

$$P_1 = \{[a_1^{(0)}, b_1^{(0)}], [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}], [a_1^{(2)}, b_1^{(2)}], \dots, [a_1^{(20)}, b_1^{(20)}]\} \text{ avec } a_1^{(20)} = b_1^{(20)} \quad (3.21)$$

Etape 2 : Transformation des entrées

Dans le cas de la méthode de transformation réduite, les intervalles de $X_1^{(j)}, j = 0, 1, \dots, 20$, sont transformés en un tableau $\widehat{X}_1^{(j)}$ composé de deux éléments ($2^n = 2^1$) pour chaque degré d'appartenance $j = 0, 1, \dots, 20$. Le tableau $\widehat{X}_1^{(j)}$ est donné comme suit :

$$\widehat{X}_1^{(j)} = \begin{bmatrix} [a_1^{(0)}, b_1^{(0)}] \\ [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}] \\ [a_1^{(2)}, b_1^{(2)}] \\ \vdots \\ [a_1^{(20)}, b_1^{(20)}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [4, 5] \\ [4.092, 4.908] \\ [4.142, 4.857] \\ \vdots \\ [4.5, 4.5] \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Etape 3 : L'évaluation du modèle

Dans cette étape, la fonction du modèle $(\tilde{p}) = \tilde{p}^3 - \tilde{p}^2 - 17\tilde{p} - 15$, est appliquée à chaque borne du tableau $\widehat{X}_1^{(j)}$ et pour chaque degré d'appartenance qui aboutit au tableau $\widehat{Z}_1^{(j)}$:

$$\widehat{Z}_1^{(j)} = \begin{bmatrix} [f(a_1^{(0)}, f(b_1^{(0)}))] \\ [f(a_1^{(1)}, f(b_1^{(1)}))] \\ [f(a_1^{(2)}, f(b_1^{(2)}))] \\ \vdots \\ [f(a_1^{(20)}, f(b_1^{(20)}))] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-35, 0] \\ [-32.789, -4.300] \\ [-31.500, -6.551] \\ \vdots \\ [-20.625, -20.625] \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Et en appliquant les équations récurrentes 3.15 et 3.16 qui dépendent des éléments du tableau $\widehat{Z}_1^{(j)}$. On obtient la représentation décomposée de la sortie du système \tilde{q} .

Etape 4 : La retransformation du tableau de sortie

La représentation décomposée du modèle flou \tilde{q} obtenue est de la forme suivante :

$$Q = \begin{bmatrix} Z^{(0)} \\ Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \\ \vdots \\ Z^{(20)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [-35, 0] \\ [-32.789, -4.3] \\ [-31.5, -6.551] \\ \vdots \\ [-20.625, -20.625] \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Enfin la sortie du système sera obtenue a partir de l'ensemble Q .

La sortie estimée $f_T(\tilde{p})$ du système est illustré par la Figure 3.3

Exemple 02 :

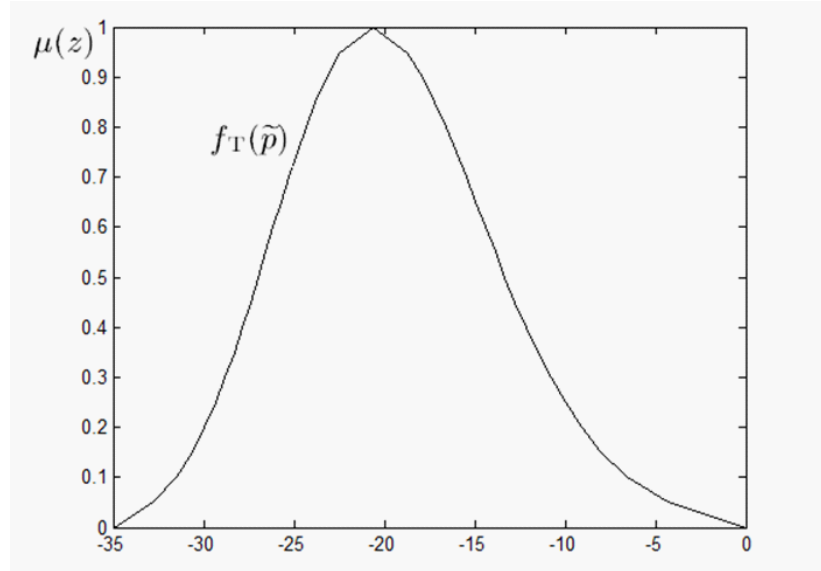


FIG. 3.3 – Le résultat $f_T(\tilde{p})$ obtenu par la méthode de transformation réduite.

Comme deuxième exemple, on a choisi un modèle statique d'ordre $n = 2$, et qui est considéré comme non-linéaire [2]. Le modèle est donnée par :

$$h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}, \quad (3.25)$$

Ces paramètres sont évalués par deux fonctions triangulaires symétriques (Voir Figure 3.4) de la forme :

$$\tilde{p}_1 = tfn(2, 1, 1) \quad \text{et} \quad \tilde{p}_2 = tfn(4.5, 0.5, 0.5) \quad (3.26)$$

En utilisant un nombre de décomposition $m = 20$. La méthode de transformation peut être appliquée comme suit :

Etape 1 : décomposition de l'entrée des nombres flous

Dans cet exemple, le modèle flou $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ dépend de deux paramètres flous (avec, $n = 2$), la représentation de sa forme décomposée est la suivante :

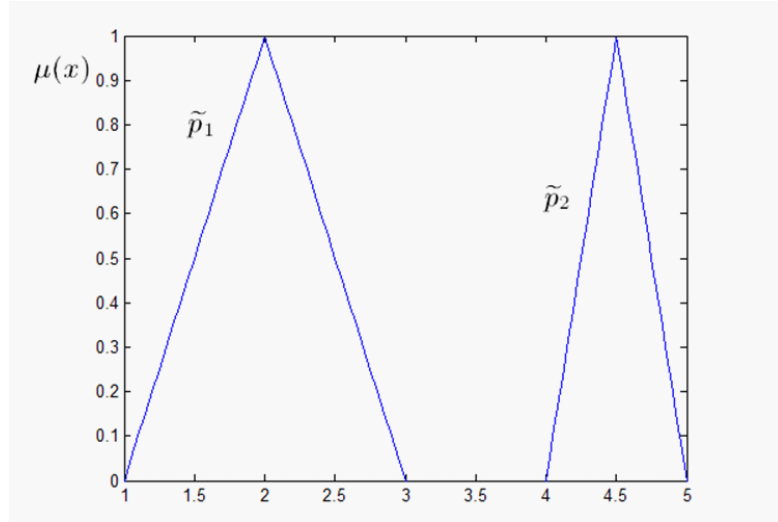
$$P_1 = \{[a_1^{(0)}, b_1^{(0)}], [a_1^{(1)}, b_1^{(1)}], [a_1^{(2)}, b_1^{(2)}], \dots, [a_1^{(20)}, b_1^{(20)}]\} \quad \text{avec} \quad a_1^{(20)} = b_1^{(20)} \quad (3.27)$$

$$P_2 = \{[a_2^{(0)}, b_2^{(0)}], [a_2^{(1)}, b_2^{(1)}], [a_2^{(2)}, b_2^{(2)}], \dots, [a_2^{(20)}, b_2^{(20)}]\} \quad \text{avec} \quad a_2^{(20)} = b_2^{(20)} \quad (3.28)$$

Où chaque ensemble flou est composé de vingt et un intervalles.

Etape 2 : la Transformation des intervalles d'entrées

Les intervalles de $X_1^{(j)}$ et $X_2^{(j)}$ avec $j = 0, 1, \dots, 20$, sont transformés en un tableau $\hat{X}^{(j)}$ composé de quatre éléments ($2^n = 2^2$) pour chaque degré d'appartenance $j = 0, 1, \dots, 20$. Le tableau $\hat{X}^{(j)}$ est


 FIG. 3.4 – Les paramètres décomposés \tilde{p}_1 et \tilde{p}_2 (ici $m = 20$)

donné comme suit :

$$\hat{X}^{(j)} = \begin{bmatrix} a_1^{(j)} & a_1^{(j)} & b_1^{(j)} & b_1^{(j)} \\ a_2^{(j)} & b_2^{(j)} & a_2^{(j)} & b_2^{(j)} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Etape 3 : L'évaluation du modèle

Dans cette étape l'évaluation du modèle est effectuée en appliquant la relation du modèle $h(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2) = \frac{\tilde{p}_1 + \tilde{p}_2}{\tilde{p}_1}$ sur chaque élément du tableau $\hat{X}^{(j)}$ et pour chaque degré d'appartenance.

Enfin La sortie du système \tilde{q} dans sa forme décomposée sera donnée sous la forme suivante :

$$\hat{Z}^{(j)} = \begin{bmatrix} h(a_1^{(0)}, a_2^{(0)}) & h(a_1^{(0)}, b_2^{(0)}) & h(b_1^{(0)}, a_2^{(0)}) & h(b_1^{(0)}, b_2^{(0)}) \\ h(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}) & h(a_1^{(1)}, b_2^{(1)}) & h(b_1^{(1)}, a_2^{(1)}) & h(b_1^{(1)}, b_2^{(1)}) \\ h(a_1^{(2)}, a_2^{(2)}) & h(a_1^{(2)}, b_2^{(2)}) & h(b_1^{(2)}, a_2^{(2)}) & h(b_1^{(2)}, b_2^{(2)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ h(a_1^{(20)}, a_2^{(20)}) & h(a_1^{(20)}, b_2^{(20)}) & h(b_1^{(20)}, a_2^{(20)}) & h(b_1^{(20)}, b_2^{(20)}) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Etape 4 : Retransformation du tableau de la sortie

La représentation décomposée de la sortie floue \tilde{q} exprimée par l'ensemble :

$$Q = [Z^{(0)}, Z^{(1)}, Z^{(2)}, \dots, Z^{(20)}] \quad (3.31)$$

Peut être obtenue par la retransformation $\hat{Z}^{(j)}$ selon les formules récursives 3.15 et 3.16.

Donc la sortie est obtenue par l'ensemble Q :

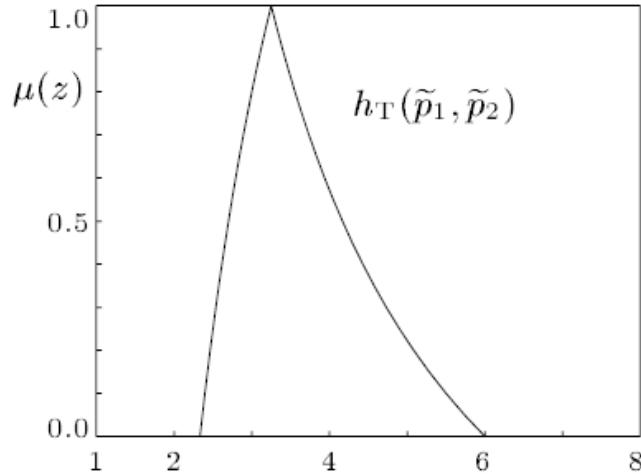


FIG. 3.5 – Le résultat $h_T(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ obtenu par la méthode de transformation réduite.

$$Q = \begin{bmatrix} Z^{(0)} \\ Z^{(1)} \\ Z^{(2)} \\ \vdots \\ Z^{(20)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [2.3333, 6] \\ [2.6344, 5.7381] \\ [2.3966, 5.5] \\ \vdots \\ [3.25, 3.25] \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

En recomposant les intervalles $Z^{(j)}, j = 0, 1, \dots, 20$ de la matrice Q , la sortie $h_T(\tilde{p}_1, \tilde{p}_2)$ du modèle flou est obtenue comme le montre la Figure 3.5 .

3.3 Conclusion

L'approche présentée dans ce chapitre qui est la transformation floue a démontré sa capacité à identifier pratiquement l'incertitude des paramètres des modèles linéaires ou non linéaires. L'efficacité de la méthode a exemplairement été démontrée pour les deux modèles statiques, où les résultats obtenus sont considérés très satisfaisants, en dépit du caractère non linéaire du modèle et l'incertitude assez importante des paramètres par rapport à des applications réelles. Ainsi la méthode a déjà été appliquée avec succès pour les modèles dynamique de génie mécanique et géo-mécanique [2].

Chapitre 4

Résultats de simulation

4.1 Présentation

La conception d'un contrôleur classique a besoin de modèles avec des paramètres dont les valeurs sont précises pour garantir l'exécution efficace du contrôleur. Dans la pratique, les informations délivrées par les organes de mesure sont par nature imprécises, et les modèles présentent des incertitudes.

Afin de garantir un contrôle efficace et de préférence stable des systèmes incertains, des contrôleurs robustes devraient être appliqués, et différents concepts ont déjà été élaborés à cet effet (par exemple, [29]).

Contrairement aux concepts classiques de la commande robuste, une nouvelle méthodologie est introduite dans ce chapitre, qui suit l'approche proposée par Hanss et Kistner [30].

Elle aborde le problème du régulateur quadratique linéaire (LQR) pour la conception de systèmes structurés, avec des incertitudes paramétriques, et fournit une solution qui est basée sur une combinaison de conception de contrôleur classique et l'arithmétique floue.

Explicitement, nous considérons le problème d'un double pendule inversé, qui doit être contrôlé dans sa position verticale instable.

L'incertitude sera incorporée sous la forme de valeurs floues pour plusieurs paramètres du modèle, tels que la masse, le moment d'inertie, la friction dans les charnières, ainsi que la position du centre de gravité de l'intérieur et de l'extérieur du pendule.

Par la suite, les équations de la conception classique LQR seront évaluées au moyen de la méthode de transformation, conduisant à un vecteur de retour d'état optimal flou.

Enfin, pour obtenir un signal de sortie estimé en tant que stabilisant pour le couple du pendule inversé, les quantités floues dans le concept de contrôle flou doivent être défuzzifiées. Différents concepts pour atteindre cet objectif seront présentés et comparés.

4.2 Double pendule inversé

Un double pendule inversé est une inversion verticale d'un double pendule normal (Figure 4.1). Contrairement à un double pendule normal, un double pendule inversé est intrinsèquement instable. Une façon de le faire rester debout sous perturbation est de l'attacher à une base oscillatoire. Si l'oscillation est strictement verticale, sa fréquence est assez élevée, et son amplitude est assez grande, le double pendule inversé peut être stabilisé. Un double pendule inversé est beaucoup plus compliqué qu'un pendule inversé.

La trajectoire de l'extrémité de masse peut être irrégulière et ne peut pas afficher une périodicité ou une symétrie autour de l'axe vertical, et le système est intrinsèquement chaotique.

Le double pendule inversé est constitué d'un bras intérieur et extérieur, chacun d'eux caractérisé par sa masse $m_{1/2}$, sa longueur $l_{1/2}$, son moment d'inertie $J_{1/2}$ (par rapport au centre de gravité), et la distance $a_{1/2}$ de son centre de gravité $C_{1/2}$ de la charnière respectives.

4.2.1 Modèle dynamique non linéaire

Le modèle dynamique non linéaire du double pendule inversé est obtenu en appliquant le formalisme de Lagrange. Cette approche nécessite le calcul du Lagrangien en fonction des énergies cinétiques et potentielles des différents composants du système en fonction des coordonnées généralisées.

Le Formalisme de Lagrange repose sur l'équation de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \tilde{Q}_i \quad , i = 1, 2, \quad (4.1)$$

Où $L = T - V$ est le Lagrangien, avec T l'énergie cinétique, et V l'énergie potentielle. q_i et \dot{q}_i sont les vecteurs de positions et vitesses généralisées. \tilde{Q}_i est le vecteur des forces généralisées.

Finalement les équations non linéaires des mouvements peuvent être obtenues sous la forme :

$$A\ddot{\varphi} + B\ddot{\psi} + C = M(t) \quad (4.2)$$

$$D\ddot{\varphi} + E\ddot{\psi} + F = 0 \quad (4.3)$$

Avec

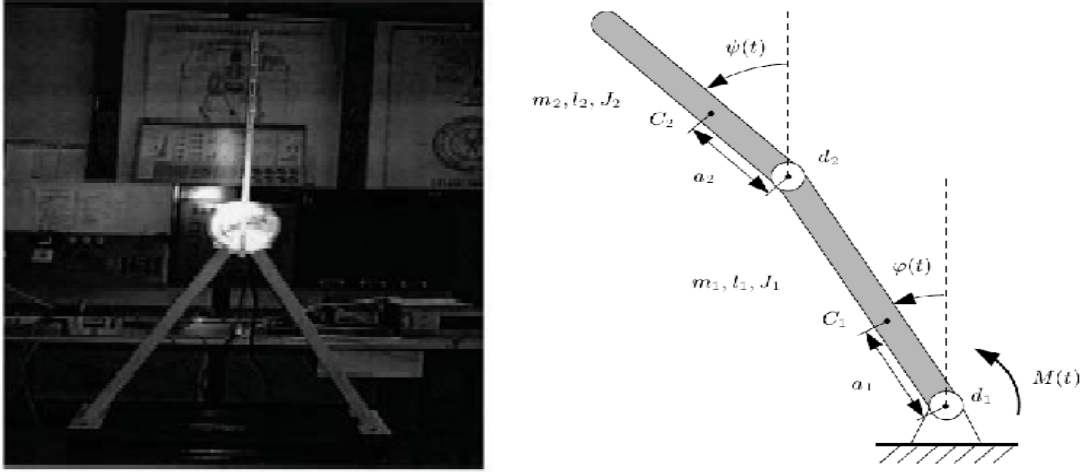


FIG. 4.1 – Double pendule inversé [2]

$$A = J_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_2^2 \quad (4.4)$$

$$B = m_2 l_1 a_2 \cos(\varphi - \psi) \quad (4.5)$$

$$C = m_2 l_1 a_2 \dot{\psi}^2 \sin(\varphi - \psi) - (m_1 a_1 + m_2 l_1) g \sin \varphi + (d_1 + d_2) \dot{\varphi} - d_2 \dot{\psi} \quad (4.6)$$

$$D = m_2 l_1 a_2 \cos(\varphi - \psi) \quad (4.7)$$

$$E = J_2 + m_2 a_2^2 \quad (4.8)$$

$$F = -m_2 l_1 a_2 \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi - \psi) - m_2 a_2 g \sin \psi - d_2 (\dot{\varphi} - \dot{\psi}) \quad (4.9)$$

4.2.2 Modèle linéarisé et représentation d'état

Les équations non linéaires du mouvement cités dans l'équation 4.2 à 4.9 doivent être linéarisés autour du point fixe instable $\varphi^* = 0$ et $\psi^* = 0$. Après l'introduction du vecteur d'état

$$x = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T = [\varphi(t), \psi(t), \dot{\varphi}(t), \dot{\psi}(t)]^T \quad (4.10)$$

Et l'entrée du système

$$u = M(t), \quad (4.11)$$

Le modèle linéarisé du double pendule inversé peut être exprimé sous la forme d'état linéaire

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \quad (4.12)$$

Avec

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Et

$$a_{21} = \frac{1}{G}(J_2 + m_2 a_2^2)(m_1 a_1 + m_2 l_1)g \quad (4.14)$$

$$a_{22} = -\frac{1}{G}(m_2 l_1 a_2 d_2 + (J_2 + m_2 a_2^2)(d_1 + d_2)) \quad (4.15)$$

$$a_{23} = -\frac{1}{G}m_2^2 a_2^2 l_1 g \quad (4.16)$$

$$a_{24} = \frac{1}{G}d_2(J_2 + m_2 a_2(l_1 + a_2)) \quad (4.17)$$

$$a_{41} = -\frac{1}{G}m_2 a_2 l_1(m_1 a_1 + m_2 l_1)g \quad (4.18)$$

$$a_{42} = \frac{1}{G}((J_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1(l_1 + a_2))d_2 + m_2 l_1 a_2 d_1) \quad (4.19)$$

$$a_{43} = \frac{1}{G}m_2 a_2(J_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2)g \quad (4.20)$$

$$a_{44} = -\frac{1}{G}d_2(J_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1(l_1 + a_2)) \quad (4.21)$$

$$b_2 = \frac{1}{G}(J_2 + m_2 a_2^2) \quad (4.22)$$

$$b_4 = -\frac{1}{G}m_2 l_1 a_2 \quad (4.23)$$

$$G = (J_2 + m_2 a_2^2)(J_1 + m_1 a_1^2 + m_2 l_1^2) - m_2^2 l_1^2 a_2^2. \quad (4.24)$$

4.3 Conception du contrôleur

La commande optimale Linéaire Quadratique (LQ ou LQR : 'Linear Quadratic Regulator') consiste en la recherche d'une matrice de gain de retour k , telle que la commande par retour d'état $u = -k^T x(t)$ minimise le critère :

$$J = \frac{1}{2} \int [x(t)^T Q x(t) + u(t)^T R u(t)] dt \quad (4.25)$$

Où Q et R sont des matrices de pondération définies positives. Ce problème LQ dispose d'une solution unique obtenue par l'utilisation des principes d'optimalité et donnée par :

$$u^*(t) = -\frac{1}{R}P^{*T}b^*x(t) = -k^{*T}x(t) \quad (4.26)$$

Où k est le gain de Kalman et $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice symétrique définie positive, solution de l'équation algébrique de Riccati :

$$A^{*T}P^* + P^*A^* - \frac{1}{R}P^*b^*b^{*T}P^* + Q = 0. \quad (4.27)$$

L'un des intérêts de la commande optimale LQ consiste à garantir une bonne robustesse vis-à-vis des erreurs. Cependant il n'est pas possible d'imposer a priori les dynamiques en boucles fermées qui correspondent à l'optimalité d'un critère quadratique.

4.4 Conception du LQR floue pour le système incertain

Suite à l'approche de l'arithmétique floue, l'incertitude dans les paramètres du modèle est prise en compte sous la forme de paramètres flous.

Les matrices dans les équations de la conception LQR floue sont ensuite évaluées, et la méthode de transformation doit être appliquée pour déterminer le vecteur optimal de retour d'état flou k . Les équations correspondantes, peuvent se présenter comme

$$\tilde{A}^T \tilde{P} + \tilde{P} \tilde{A} - \frac{1}{R} \tilde{P} \tilde{b} \tilde{b}^T \tilde{P} + Q = 0, \quad (4.28)$$

$$\tilde{k} = \frac{1}{R} \tilde{P}^T \tilde{b}. \quad (4.29)$$

Le contrôleur qui résulte de ce concept est dérivé à partir des équations de la conception LQR classique d'une part, et se caractérise par des paramètres flous, d'autre part, il est appelé **contrôleur optimal à paramètres flous**.

L'opérateur de défuzzification qui est utilisé dans ce contexte repose sur les définitions suivantes :

-La méthode de transformation réduite :

$$v^\diamond = \frac{1}{2^n(m+1)} \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^{2^n} k_{\tilde{v}^{(j)}}. \quad (4.30)$$

-La méthode de transformation générale :

$$v^\diamond = \frac{1}{(m+1-j)^n(m+1)} \sum_{j=0}^m \sum_{k=1}^{(m+1-j)^n} k_{\tilde{v}^{(j)}}. \quad (4.31)$$

Où $k_{\widehat{p}(j)}$ désigne le $k^{\text{ème}}$ élément du tableau $\widehat{X}_i^{(j)}$.

-Pour un nombre flou indépendant $\widetilde{p}_i, i = 1, 2, \dots, n$, la valeur défuzzifié est :

$$v^\diamond = defuzz(\widetilde{p}_i) = \frac{1}{2(m+1)} \sum_{j=0}^m a_i^{(j)} + b_i^{(j)} \quad (4.32)$$

avec

$$[a_i^{(j)}, b_i^{(j)}] = coupe_{\mu_j}(\widetilde{p}_i), \mu_j = \frac{j}{m}, j = 1, 2, \dots, m, \quad (4.33)$$

4.4.1 Option 1 : Défuzzification la sortie du régulateur

Après avoir intégré le vecteur optimal de retour d'état \widetilde{k} de Equation 4.29 dans la loi de commande dans Equation 4.26 , on obtient la sortie floue du régulateur

$$\widetilde{u}(t) = -\widetilde{k}^T x(t) \quad (4.34)$$

Comme l'approche la plus simple en apparence, une représentation claire estimée $u^{(1)}(t)$ de la variable d'entrée optimale du système peut être réalisée directement en défuzzifier la sortie floue du contrôleur $\widetilde{u}(t)$ de Equation 4.34 en fonction de

$$u^{(1)}(t) = u^\diamond(t) = defuzz(\widetilde{u}(t)). \quad (4.35)$$

Cette approche, cependant, s'avère problématique, car elle montre un tirage grave à l'égard de deux aspects importants de la théorie du contrôle :

- **fonctionnement en temps réel**

Le calcul de la sortie du contrôleur $\widetilde{u}(t)$ et son défuzzification $u^{(1)}(t)$ doivent être effectués en ligne afin d'assurer l'applicabilité de succès pour les systèmes de contrôle du monde réel. Toutefois, cet objectif ne peut être atteint en raison des exigences excessives de calcul, surtout si la méthode de transformation est appliquée dans sa forme générale et si le nombre des paramètres n du modèle d'incertitude est élevé.

- **Stabilité**

Considérant les représentations transformées du vecteur de retour d'état \widetilde{k} et la sortie du contrôleur $\widetilde{u}(t)$, chaque ensemble des éléments correspondants de ces tableaux se dresse pour l'une des configurations spécifiques des paramètres du système avec son signal de contrôleur optimal assigné. Même si chacune de ces configurations présentent séparément le comportement du contrôle stable, cette propriété ne peut pas être garantie pour le contrôleur avec la sortie défuzzifiée $u^{(1)}(t)$ si elle est appliquée à une configuration arbitraire du système incertain.

En dépit de ces inconvénients, les résultats de cette méthode seront traités pour comparaison.

4.4.2 Option 2 : Défuzzification le vecteur de retour d'état

Comme une seconde approche, le vecteur de retour d'état flou \tilde{k} peut être défuzzifié comme suit :

$$k^\diamond = defuzz(\tilde{k}) \quad (4.36)$$

Avant son incorporation dans la loi de commande. Une sortie du régulateur peut alors être obtenue :

$$u^{(2)}(t) = -k^{\diamond T} x(t) = defuzz(\tilde{k}^T)x(t). \quad (4.37)$$

Cette méthode réduit clairement les inconvénients de l'option 1 dans les domaines de fonctionnement en temps réel et de la stabilité :

- **fonctionnement en temps réel**

La détermination de vecteur par retour d'état \tilde{k} ainsi que son défuzzification k^\diamond peuvent être effectués hors-ligne, l'applicabilité en ligne du contrôleur est garantie.

- **Stabilité**

Sur la base de vecteur défuzzifié k^\diamond . Les pôles incertains du système en boucle fermée peuvent être déterminés par le calcul des valeurs propres de la matrice en boucle fermée du système

$$\tilde{A}_{cl}^{(2)} = \tilde{A} - \tilde{b}k^{\diamond T}. \quad (4.38)$$

Les pôles sont alors disponibles sous la forme de nombres flous complexes $\tilde{\pi}_1^{(2)}, \tilde{\pi}_2^{(2)}, \tilde{\pi}_3^{(2)}, \tilde{\pi}_4^{(2)}$, représentés par un vecteur flou de deux dimensions au cours de l'ensemble universel \mathbb{C} des nombres complexes. Comme une généralisation de la condition de stabilité de la notion des pôles flous, le système incertain peut être caractérisé comme stable si les α - coupes

$$coupe_\alpha(\tilde{\pi}_r^{(2)}) = \{c \in \mathbb{C} \mid \mu_{\tilde{\pi}_r^{(2)}}(c) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1], \quad (4.39)$$

des pôles $\tilde{\pi}_r^{(2)}, r = 1, 2, 3, 4$, se composent de nombres complexes avec des parties réelles négatives pour tout $\alpha \in [0, 1]$. Si cette condition ne peut pas être satisfaite pour tout $\alpha \in [0, 1]$, il existe, une certaine $\alpha_s \in [0, 1]$ de telle sorte que la stabilité du système en boucle fermée peut être garantie pour tous $\alpha \geq \alpha_s$.

La valeur seuil peut être interprétée comme le degré minimum qui est nécessaire pour le paramètre du modèle incertain pour garantir la stabilité du système en boucle fermée.

Compte tenu la correspondance entre le degré d'appartenance et l'intervalle d'incertitude pour un certain nombre flou décomposé, ce degré minimal α_s correspond à un montant maximum de

l'incertitude qui est encore acceptable pour les paramètres du modèle.

4.4.3 Option 3 : Défuzzification des pôles et des pôles de placement

Dans la troisième approche, le vecteur de retour d'état est conservé incertain, et nous pouvons formuler la matrice du système incertain en boucle fermée comme suit :

$$\tilde{A}_{cl}^{(3)} = \tilde{A} - \tilde{b}k^T. \quad (4.40)$$

Cette formulation suppose le signal incertain de retour d'état $\tilde{u}(t)$ agissant dans le système en boucle fermée. Même si cette option ne peut pas être mise en œuvre dans la réalité, il peut être considéré théoriquement aussi longtemps que toutes les variables incertaines sont utilisées dans leurs représentations transformées.

Dans une étape ultérieure, les pôles flous "intermédiaires" $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3$ et $\tilde{\lambda}_4$ doivent être déterminés, ce sont les valeurs propres de la matrice du système en boucle fermée $\tilde{A}_{cl}^{(3)}$. Ils sont defuzzifiés comme :

$$\lambda_r^\diamond = defuzz(\tilde{\lambda}_r), r = 1, 2, 3, 4. \quad (4.41)$$

Avec les représentations defuzzifiées de la matrice du système en boucle ouverte \tilde{A} et la matrice \tilde{b}

$$A^\diamond = defuzz(\tilde{A}) \quad \text{et} \quad b^\diamond = defuzz(\tilde{b}), \quad (4.42)$$

Le vecteur de retour d'état $k^{(3)}$ peut être déterminé par placement des pôles, c'est à dire les quatre éléments inconnus de la matrice colonne $k^{(3)}$ sont choisis de telle sorte que les valeurs propres de la matrice (4x4)

$$A^\diamond - b^\diamond k^{(3)T} \quad (4.43)$$

soient égaux aux quatre pôles défuzzifiés intermédiaires $\lambda_1^\diamond, \lambda_2^\diamond, \lambda_3^\diamond$ et λ_4^\diamond . Le signal de sortie du contrôleur est ensuite déterminé par

$$u^{(3)}(t) = -k^{(3)T}x(t). \quad (4.44)$$

De même que pour l'option 2, cette méthode réduit les inconvénients de l'option 1 en termes de fonctionnement en temps réel et de la stabilité :

- **fonctionnement en temps réel**

La détermination du vecteur de retour d'état \tilde{k} et les pôles intermédiaires $\lambda_1^\diamond, \lambda_2^\diamond, \lambda_3^\diamond$ et λ_4^\diamond , ainsi que les procédures de défuzzification et le placement des pôles final peuvent être effectuées hors-ligne, de telle sorte que l'applicabilité en ligne du contrôleur est garantie.

• **Stabilité**

Conformément à l'option 2, les pôles incertains du système en boucle fermée peuvent être déterminés par le calcul des valeurs propres de la matrice du système en boucle fermée

$$\tilde{A}_{cl}^{(3)} = \tilde{A} - \tilde{b}k^{(3)T}. \quad (4.45)$$

Les pôles sont alors disponibles sous la forme des nombres flous complexes $\tilde{\pi}_1^{(3)}, \tilde{\pi}_2^{(3)}, \tilde{\pi}_3^{(3)}$ et $\tilde{\pi}_4^{(3)}$, et le système de contrôle incertain peut être caractérisé comme stable si les α - coupe

$$coupe_\alpha(\tilde{\pi}_r^{(3)}) = \{c \in \mathbb{C} \mid \mu_{\tilde{\pi}_r^{(3)}}(c) \geq \alpha\}, \alpha \in [0, 1], \quad (4.46)$$

des pôles $\tilde{\pi}_r^{(2)}$, $r = 1, 2, 3, 4$, sont tous caractérisés par des parties réelles négatives pour tout $\alpha \in [0, 1]$. Encore une fois, si cette condition ne peut être satisfaite pour tout $\alpha \in [0, 1]$, un seuil $\alpha_s \in [0, 1]$ peut être défini de telle sorte que la stabilité du système en boucle fermée peut être garantie pour tout $\alpha \geq \alpha_s$.

4.5 Résultats de simulation

Pour illustrer la performance de l'approche LQR pour les systèmes incertains en évitant les effets indésirables, tels que le bruit, et en garantissant des conditions égales pour tous les tests, nous appliquons les différentes versions des contrôleurs flous à des simulations numériques du modèle non-linéaire du pendule inversé proposée par 4.2 à 4.9.

Les paramètres réels sont dérivées à partir d'un montage expérimental, en identifiant les paramètres de test s'exécute à la fois pour l'état intact et le démontage partiellement mis en place.

Dans le suivi, les paramètres l_1 et l_2 pour la longueur des bras sont considérés comme des valeurs réelles avec les valeurs suivantes :

$$l_1 = l_2 = 0.45m \quad (4.47)$$

Les paramètres suivants du modèle, cependant, sont considérés comme incertains : les masses m_1 et m_2 , les facteurs de friction d_1 et d_2 , les distances a_1 et a_2 des centres de gravité des charnières respectives, et les rayons de giration carré k_1^2 et k_2^2 qui quantifient les moments d'inertie J_1 et J_2 par

$$J_1 = m_1 k_1^2 \quad \text{et} \quad J_2 = m_2 k_2^2. \quad (4.48)$$

Paramètre	Valeur supposée	Valeur réelle
$p_1 = m_1$	0.80 kg	0.89 kg
$p_2 = m_2$	0.10 kg	0.11 kg
$p_3 = a_1$	0.225 m	0.076 m
$p_4 = a_2$	0.225 m	0.210 m
$p_5 = k_1^2$	0.01688 m ²	0.03802 m ²
$p_6 = k_2^2$	0.01688 m ²	0.02517 m ²
$p_7 = d_1$	0 Nm s rad ⁻¹	0.001 Nm s rad ⁻¹
$p_8 = d_2$	0 Nm s rad ⁻¹	0.001 Nm s rad ⁻¹

TAB. 4.1 – Paramètres du modèle avec leurs valeurs supposées et leurs valeurs réelles.

4.5.1 Paramètres pour la conception LQR classique

En supposant que certaines estimations des paramètres du modèle sont disponibles, la conception LQR classique peut être effectuée avec les paramètres estimés d'être incorporés dans des matrices A^* et b^* 4.25 à 4.27.

Certaines des estimations peuvent résulter des mesures simples, tandis que d'autres peuvent être dérivées à partir d'hypothèses de lois physiques.

Le dernier cas s'applique surtout pour les valeurs des paramètres $a_{1/2}$ et $k_{1/2}^2$, qui proviennent de l'hypothèse que les bras du pendule sont homogènes.

Dans ce qui suit, les paramètres estimés seront désignés comme des paramètres supposés du modèle. Les valeurs réelles du modèle de simulation non linéaire et les valeurs supposées de la conception classique LQR sont énumérés dans le tableau 4.1.

Le contrôleur obtenu par la conception LQR classique servira en tant que contrôleur de référence, et les signaux qui en résultent pour les angles de bras interne et externe du pendule sont dénotés par $\varphi^*(t)$ et $\psi^*(t)$.

4.5.2 Paramètres pour la conception LQR combiné avec l'arithmétique floue

Dans la conception classique LQR les valeurs sont supposées fournir directement les paramètres, mais ces valeurs ne servent que les valeurs modales des nombres flous utilisés pour représenter les paramètres du modèle incertain dans la conception LQR combiné avec l'arithmétique floue.

Les paramètres p_1, p_2, \dots, p_8 du modèle sont remplacés par les paramètres incertains $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_8$ qui sont considérés comme $n = 8$ paramètres indépendants du modèle. Ils sont quantifiés par nombre flou quasi-gaussienne \tilde{p}_i de la forme

$$\tilde{p}_i = gfn^*(\bar{x}_i, \sigma_{l_i}, \sigma_{r_i}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.49)$$

Paramètre	\bar{x}_i	σ_{l_i}	σ_{r_i}	$W_i = [w_{l_i}, w_{r_i}]$
$\tilde{p}_1 = \tilde{m}_1$	0.80 kg	1% \bar{x}_1	10% \bar{x}_1	[0.776,1.04]
$\tilde{p}_2 = \tilde{m}_2$	0.10 kg	10% \bar{x}_2	10% \bar{x}_2	[0.07,0.13]
$\tilde{p}_3 = \tilde{a}_1$	0.225 m	30% \bar{x}_3	1% \bar{x}_3	[0.0225,0.2318]
$\tilde{p}_4 = \tilde{a}_2$	0.225 m	10% \bar{x}_4	10% \bar{x}_4	[0.1575,0.2925]
$\tilde{p}_5 = \tilde{k}_1^2$	0.01688 m ²	1% \bar{x}_5	30% \bar{x}_5	[0.01617,0.03207]
$\tilde{p}_6 = \tilde{k}_2^2$	0.01688 m ²	1% \bar{x}_6	30% \bar{x}_6	[0.01617,0.03207]
$\tilde{p}_7 = \tilde{d}_1$	0	0	0.0033 Nm s rad ⁻¹	[0,0.01] Nm s rad ⁻¹
$\tilde{p}_8 = \tilde{d}_2$	0	0	0.0033 Nm s rad ⁻¹	[0,0.01] Nm s rad ⁻¹

TAB. 4.2 – Les valeurs moyennes et les écarts-types des fonctions d'appartenances pour les paramètres du modèle incertain.

Avec les paramètres $\bar{x}_i, \sigma_{l_i},$ et $\sigma_{r_i},$ ainsi que les intervalles W_i , énumérés dans le tableau 4.2.

Après avoir intégré les paramètres flous $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_8$ dans la matrices \tilde{A} et \tilde{b} de 4.28 et 4.29, trois contrôleurs flous différents peuvent être atteints, selon l'option de défuzzification appliquée.

Les signaux résultent pour les angles du bras interne et externe du pendule sont $\varphi^{(1)}(t)$ et $\psi^{(1)}(t),$ $\varphi^{(2)}(t)$ et $\psi^{(2)}(t),$ et de $\varphi^{(3)}(t)$ et $\psi^{(3)}(t),$ avec le super script exprimant l'option de défuzzification.

4.5.3 Paramètres supplémentaires

Enfin, les matrices des pondérations Q et R dans les équations de la conception du contrôleur sont choisis pour

$$Q = I \quad \text{et} \quad R = 1, \tag{4.50}$$

Où I désigne la matrice identité. Le nombre $m,$ en définissant le raffinement des nombres flous discrétisés , est $m = 10.$

La méthode de transformation est appliquée dans sa forme générale. Le temps de simulation est choisi comme $t_{sim} = 4s$, et le temps d'échantillonnage $\Delta t = 0.01s$.

Enfin, les conditions initiales x_0 sont être supposés

$$\varphi(0) = 5^\circ \approx 0.09 \text{ rad} \quad \psi(0) = \varphi(0) = -5^\circ \approx -0.09 \text{ rad} \tag{4.51}$$

$$\dot{\varphi}(0) = 0 \text{ rad s}^{-1} \quad \dot{\psi}(0) = 0 \text{ rad s}^{-1} \tag{4.52}$$

Les courbes obtenues pour les angles $\varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \varphi^{(3)}(t), \varphi^*(t)$ et $\psi^{(1)}(t), \psi^{(2)}(t), \psi^{(3)}(t), \psi^*(t)$ et les vitesses angulaires $\dot{\varphi}^{(1)}(t), \dot{\varphi}^{(2)}(t), \dot{\varphi}^{(3)}(t), \dot{\varphi}^*(t)$ et $\dot{\psi}^{(1)}(t), \dot{\psi}^{(2)}(t), \dot{\psi}^{(3)}(t), \dot{\psi}^*(t)$ des contrôleurs flous-paramétrés (options 1 à 3) et du contrôleur classique de référence sont présentés dans Figure 4.2

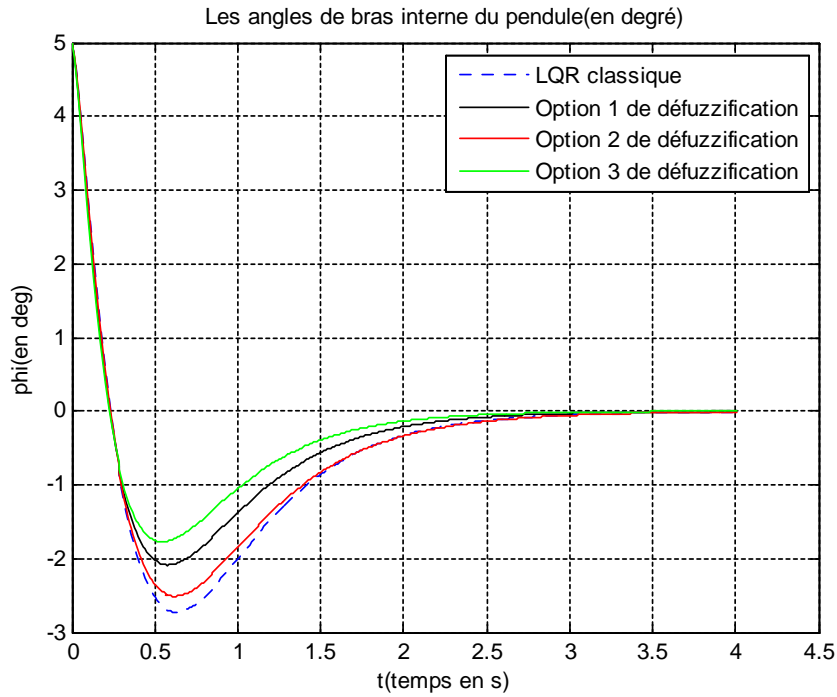


FIG. 4.2 – Les angles de bras interne du pendule : $\varphi^{(1)}(t), \varphi^{(2)}(t), \varphi^{(3)}(t)$ pour les différents options de défuzzification (ligne continue) ; $\varphi^*(t)$ pour la conception LQR classique (ligne pointillée).

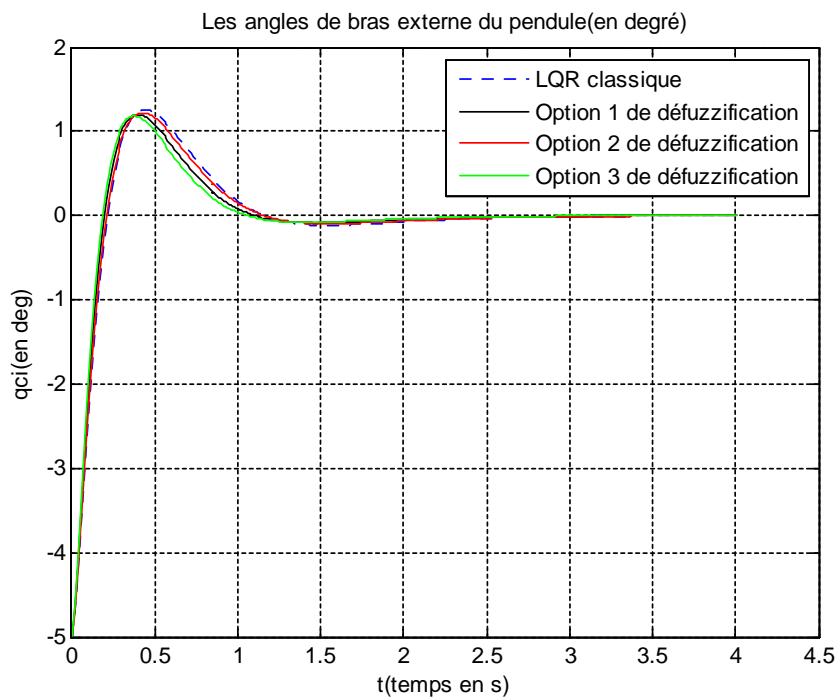


FIG. 4.3 – Les angles de bras externe du pendule : $\psi^{(1)}(t), \psi^{(2)}(t), \psi^{(3)}(t)$ pour les différents options de défuzzification (ligne continue) ; $\psi^*(t)$ pour la conception LQR classique (ligne pointillée).

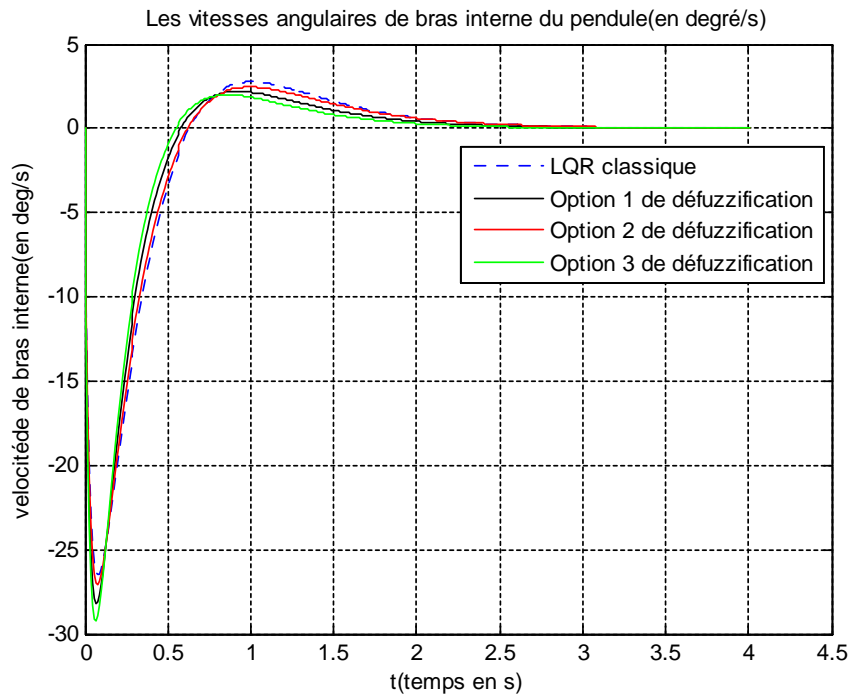


FIG. 4.4 – Les vitesses angulaires de bras interne du pendule : $\dot{\varphi}^{(1)}(t)$, $\dot{\varphi}^{(2)}(t)$, $\dot{\varphi}^{(3)}(t)$ pour les différents options de défuzzification (ligne continue) ; $\dot{\varphi}^*(t)$ pour la conception LQR classique (ligne pointillée).

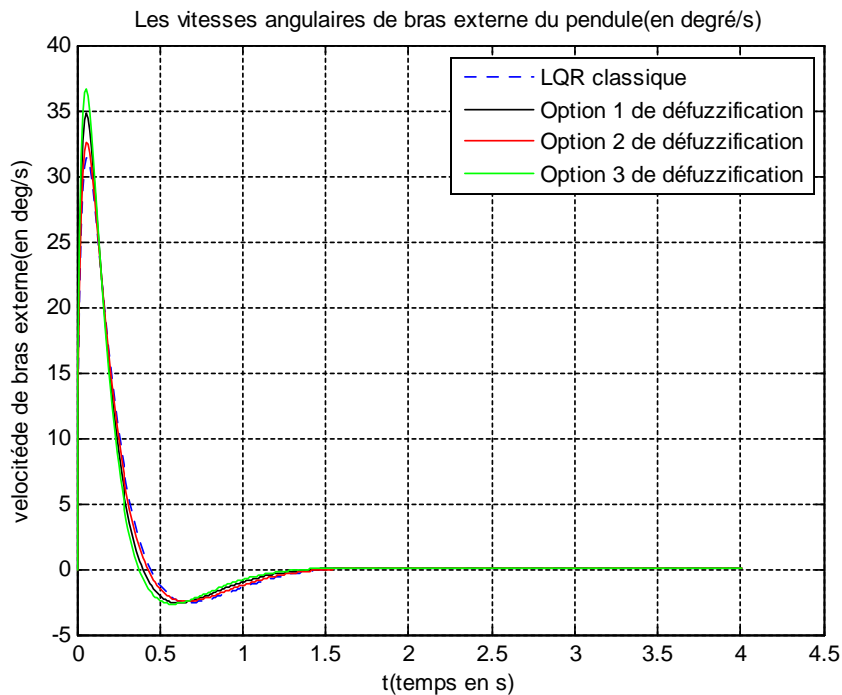


FIG. 4.5 – Les vitesses angulaires de bras externe du pendule : $\dot{\psi}^{(1)}(t)$, $\dot{\psi}^{(2)}(t)$, $\dot{\psi}^{(3)}(t)$ pour les différents options de défuzzification (ligne continue) ; $\dot{\psi}^*(t)$ pour la conception LQR classique (ligne pointillée).

Concept de contrôleur	Mesure de la performance	Amélioration
Classique	$\Gamma^* = 2.7608$	
Option de défuzzification 1	$\Gamma^1 = 2.1745$	21.24%
Option de défuzzification 2	$\Gamma^2 = 2.5770$	6.65%
Option de défuzzification 3	$\Gamma^3 = 1.8041$	34.47%

TAB. 4.3 – Mesure de la performance et le degré d’amélioration relative des contrôleurs flous paramétrés en référence à la conception LQR classique.

, Figure 4.3, Figure 4.4 et Figure 4.5.

Comme on peut le voir à partir de ces courbes, pour l’option 3 du contrôleur flou montre une performance nettement plus améliorée par rapport au contrôleur classique de référence.

En particulier, le bras intérieur du pendule, qui est caractérisé par l’angle $\varphi(t)$, accueillant la position souhaitée en position verticale dans un temps beaucoup plus court. Le contrôleur flou pour l’option 1 occupe le deuxième rang tandis que l’option 2 occupe le troisième rang.

Ces observations peuvent être justifiées comme une mesure de performance, l’écart quadratique moyen Γ de la position verticale des bras est introduite selon

$$\Gamma = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \varphi(k \Delta t)^2 + \psi(k \Delta t)^2. \quad (4.53)$$

Où Δt est le temps d’échantillonnage et N le nombre des points de données inclus dans l’échantillon au sein de l’intervalle de temps $[0, t_{sim}]$, c.-à-dire : $N = 1 + t_{sim}/\Delta t$.

La valeur moyenne quadratique des déviations $\Gamma^{(1)}$, $\Gamma^{(2)}$, et $\Gamma^{(3)}$ des contrôleurs flous ainsi que la valeur de référence Γ^* de la conception classique sont énumérés dans le tableau 4.3.

Les résultats quantitatifs soulignent les conclusions déjà tirées des parcelles de simulation et ils affirment le rôle éminent fourni par le concept de l’option 3.

Des résultats similaires peuvent être obtenus par un concept de commande encore plus simple où les paramètres du modèle flou sont défuzzifiés juste après leur définition, et la conception conventionnelle LQR est appliquée avec les valeurs des paramètres utilisés comme des paramètres défuzzifiés. Ce concept montre une amélioration relative de 5.96% par rapport à la commande de référence et se classe ainsi juste derrière l’option 2.

En ce qui concerne la stabilité du système incertain contrôlé par l’approche LQR combiné avec l’arithmétique floue pour l’option 3, le seuil de stabilité peut être déterminé sur la base des équations 4.45 et 4.46.

Pour le paramètre de configuration donné et le nombre de discrétisation $m = 10$, les résultats de seuil en tant que $\alpha_s = 0.1$, ce qui est égal à $\Delta u = 1/m$.

Cela implique un rétrécissement des écarts des intervalles originales W_i pour les paramètres in-

Paramètre	$W_i = [w_{l_i}, w_{r_i}]$	$S_i = [s_{l_i}, s_{r_i}]$ pour $\alpha_s = 0.1$
$\tilde{p}_1 = \tilde{m}_1$	[0.776,1.04] kg	[0.7828,0.9717] kg
$\tilde{p}_2 = \tilde{m}_2$	[0.07,0.13] kg	[0.0785,0.1215] kg
$\tilde{p}_3 = \tilde{a}_1$	[0.0225,0.2318] m	[0.0801,0.2298] m
$\tilde{p}_4 = \tilde{a}_2$	[0.1575,0.2925] m	[0.1767,0.2733] m
$\tilde{p}_5 = \tilde{k}_1^2$	[0.01617,0.03207] m ²	[0.01652,0.02775] m ²
$\tilde{p}_6 = \tilde{k}_2^2$	[0.01617,0.03207] m ²	[0.01652,0.02775] m ²
$\tilde{p}_7 = \tilde{d}_1$	[0,0.01] Nm s rad ⁻¹	[0,0.0071] Nm s rad ⁻¹
$\tilde{p}_8 = \tilde{d}_2$	[0,0.01] Nm s rad ⁻¹	[0,0.0071] Nm s rad ⁻¹

TAB. 4.4 – Les intervalles originales W_i , et les intervalles de stabilité S_i pour les paramètres du modèle incertain pour l’option de commande 3.

certain du modèle $\tilde{p}_i, i = 1, 2, \dots, 8$, au les écarts des intervalles modifiés S_i pour lesquelles la stabilité du système en boucle fermée peut être garantie (le tableau 4.4).

Enfin, il convient de mentionner que même si une seule condition initiale spécifique pour le pendule inversé a été prise en compte dans cet exemple, l’approche par l’arithmétique floue dépasse le contrôleur classique dans sa performance indépendamment des conditions initiales définies.

Par ailleurs, le régulateur flou ne montre aucun inconvénient grave par rapport au contrôleur classique, même si le cas est considéré comme marginal lorsque les valeurs supposées des paramètres du modèle coïncident avec les valeurs réelles.

Conclusion générale et perspectives

Dans ce travail nous avons considéré l'application de la théorie des intervalles flous pour la commande des systèmes linéaires. Après avoir introduit les éléments de base de la théorie, nous avons accompli une étude détaillée sur l'arithmétique floue pour les différents types de nombres flous. Ainsi nous avons fait une étude sur l'arithmétique floue basée sur la méthode de transformation.

Une approche de l'arithmétique floue pour la commande robuste des systèmes à paramètres incertains du modèle s'est avérée très réussie. L'approche est essentiellement basée sur une combinaison des méthodes classiques et l'arithmétique floue, pouvant être considérée comme une généralisation de la théorie du contrôle classique vers des nombres flous.

Chaque application dans le monde réel du contrôleur nécessite une valeur de sortie nette pour manipuler la commande. Le problème fondamental du contrôleur optimal est de trouver une stratégie pratique de défuzzification pour obtenir une réponse nette à la sortie du régulateur.

Trois options différentes pour atteindre cet objectif sont présentées et discutées en termes de fonctionnement en temps réel et de stabilité :

- **Option 1** : Défuzzification de la sortie du régulateur.
- **Option 2** : Défuzzification le vecteur de retour d'état.
- **Option 3** : Défuzzification des pôles et des pôles de placement.

L'option 3 du contrôleur montre une performance nettement plus améliorée par rapport au contrôleur classique de référence. En particulier, le bras intérieur du pendule, accueillant la position souhaitée en position verticale dans un temps beaucoup plus court. Le contrôleur flou-paramétré pour l'option 1 occupe le deuxième rang tandis que l'option 2 occupe le troisième rang, montrant seulement une amélioration légère par rapport à l'approche LQR conventionnelle.

La force du concept de l'option 3 réside dans la combinaison spéciale de conception de contrôleur classique et l'arithmétique floue associée à une phase de défuzzification dirigé vers la quantification constitutive du système (les pôles).

En perspective Il serait intéressant de poursuivre ce travail en approfondissant les points suivants :

* Appliquer cette technique (méthode de transformation) sur un autre système à paramètres incertains (génie mécanique, énergétique).

* Etudier l'influence des entrées imprécises de cette méthode sur des algorithmes de commande conventionnelle (la commande linéaire quadratique avec estimateur, la commande robuste,...) pour une meilleure performance (stabilité et rapidité) sur des procédés pilotes.

Bibliographie

- [1] K. Zhou, J.C. Doyle, and K. Glover. Robust and Optimal Control. Prentice Hall, New Jersey, 1995.
- [2] Michael Hanss, Applied Fuzzy Arithmetic : An Introduction with Engineering Applications, Berlin, Springer-Verlag, 2005, 256 p
- [3] K.M. Passino and S. Yurkovich, Fuzzy Control, Reading, MA :Addison-Wesley, 1998.
- [4] L. Zadeh. Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility. Fuzzy Sets and Systems,1 :3–28, 1978.
- [5] H. Prade and D. Dubois. A review of fuzzy set aggregation connectives.Information sciences, 36 :85–121, 1985.
- [6] S. Sandri. La combinaison de l'information incertaine et ses aspects algorithmiques.PhD thesis, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 1991.
- [7] L. Zadeh. Fuzzy sets. Information and Control, 8 :338–353, 1965.
- [8] D.Dubois and H.Prade.Fuzzy real algebra :Some results.Fuzzy Sets and Systems,2 :237 348,1978.
- [9] Ronald R. Yager, « A characterization of the extension principle », dans Fuzzy Sets and Systems, vol. 18, 1986, p.205–217
- [10] Arnold Kaufman et Madan M. Gupta, An Introduction to Fuzzy Arithmetic : Theory and Applications, New York, Van Nostrand Reinhold Company Inc., 1991, 394 p.
- [11] D.Dubois and H.Prade.Fuzzy Sets and Systems :Theory and Application. Mathematics in Science and Engineering,Vol.144.Academic Press,New York-London,1980.
- [12] B.Btewer. Fuzzy -Methoden : praxisrelevante Rechenmodell und Fuzzy-Programmiersprachen.Springer-Verlag,Berlin,1997.
- [13] M.Hanss.On the implementation of fuzzy arithmetical operations for engineering problems.In Proc.of the 18th International Conference of th North American Fuzzy Information Processing Society NAFIPS '99,pages 462 466,New Yorkn,NY,USA,1999.

-
- [14] A.Kaufmann and M.M.Gupta.Introduction to Fuzzy Arithmetic.Van Nostrand Reinhold,New York,1991.
- [15] R.E.Moore.Interval Analysis,Prentice-Hall,Englewood Cliffs,NJ,1996.
- [16] E.R.Hansen. Global Optimzation Using Interval Analysis.Marcel Dakker,Inc.,New York,1992.
- [17] E.R.Hansen.In the centred form.In E.R.Hansen,editor,Topics in Interval Analysis,pages 102 106,London,1969,Oxford University Press.
- [18] S.Skelboe.Computing of rational interval functions.BIT,14 :87 95,1974.
- [19] G.j.Klir.Fuzzy arithmetic with requisite constraints.Fuzzy Sets and Systems,91 :165 175,1997.
- [20] L.Jaulin, M.Kieffer, O.Didrit, and E.Walter. Applied Interval Analysis.Springer,London,2001.
- [21] M.Hanss,S.Hurlebaus,and L.Gaul.Fuzzy sensitivity analysis for the identification of material properties for orthotropic plates from natural frequencies.Mechanical Systems and Signal Processing,16(5) :769 784,2002.
- [22] M.Hanss and A.Klimke.On the reliability of the influence measure in the trasformation method of fuzzy arithmetic.Fuzzy Sets and Systems,143(3) :317 390.2004.
- [23] W.Dong and H.C.Shah.Vertex method for computing functions of fuzzy variables.Fuzzy Sets and Systems,24 :65 78,1987.
- [24] W.M.Dong and F.S.Wong.Fuzzy weighted averages and implementation of the extension principle.Fuzzy Sets and Systems,21 :183 199,1987.
- [25] A.M.Anile,S.Deodato,and G.Privitera.Implementing fuzzy arithmetic.Fuzzy Sets and Systems,72 :239 250,1995.
- [26] K.N.Otto,A.D.Lewis,and E.K.Antonsson.Approximating α -cuts with the vertex method.Fuzzy Sets and Systems,55 :43 50,1993.
- [27] K.L.Wood,K.N.Otto,and E.K.Antonsson.Engineering design calculations with fuzzy parameters.Fuzzy Sets and Systems,52 :1 20,1992.
- [28] H.Q.Yang,H.Yao,and J.D.Jones.Calculating functions of fuzzy numbers.Fuzzy Sets and Systems,55 :273 283,1993.
- [29] M.Morari and E.Zafiriou.Robust Process Control.Prentice-Hall,Englewood Cliffs,NJ,1989.
- [30] M.Hanss,and A.Kistner.LQR design for systems with uncertain parameters.In Proc .of the 48th International Scientific Colloquium.Ilmenau,2003(CD-ROM).