



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
Republique Algerienne Democratique Et Populaire  
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي



Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة العربي التبسي - تبسة

Université Larbi tébessi – Tébessa –

Faculté des Sciences et de la Technologie

Département de Génie Mécanique

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master Académique**

**En :** (Génie Mécanique)

**Spécialité :** (Construction Mécanique)

**Par :** (Soufiane Menaâ)

**Sujet**

# ETUDE ET SIMULATION DU COMPORTEMENT THERMOMECHANIQUE DE PLAQUES ISOTROPES MINCES

Présenté et soutenu publiquement, devant le jury composé de :

M/ Hadjab Abdellhakim

MAA

Président

M/ Deghboudj Samir

MCA

Rapporteur

M/ Diha Abdellah

MAA

Examineur 1

Promotion : 2020/2021

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## ملخص

يركز هذا العمل على دراسة السلوك الميكانيكي والحراري للصفائح الرقيقة متجانسة الخواص ذات ثقب مركزي تم الاهتمام بشكل خاص بالصفائح التي تم إخضاعها ، إلى إجهادات ميكانيكية (شد أحادي المحور) وحرارية (تمدد حراري) من اجل دراسة و تحليل سلوكهم حسابيا وعدديا. تم الحساب العددي باستخدام برنامج (ABAQUS) اما الجانب الحسابي باستخدام برنامج (MATLAB) الهدف من هذا العمل هو تحديد الإجهادات و التشوهات و الانسحابات مع اختلاف الزاوية في الثقب المركزي .هذا الاقتران في الواقع يحدد واقعا.

## **Abstract**

This work focuses on studying the mechanical and thermal behavior of homogeneous thin sheets with a central hole. Special attention is paid to the sheets that have been subjected, to mechanical (uniaxial tensile) and thermal (thermal expansion) stresses in order to study and analyze their behavior mathematically and numerically. The numerical calculation was done using (ABAQUS) program, while the arithmetic side was done using (MATLAB) program. The aim of this work is to determine the stresses, deformations and withdrawals with different angles in the central hole. This painting is actually determined.

## Résumé

Ce travail porte sur l'étude du comportement mécanique et thermique de tôles minces homogènes avec un trou central. Une attention particulière a été portée aux plaques qui ont été soumises à des sollicitations mécaniques (tension uniaxiale) et thermiques (dilatation thermique) afin d'étudier et d'analyser leur comportement mathématiquement et numériquement. Le calcul numérique a été effectué à l'aide du programme (ABAQUS). Comme pour le côté arithmétique à l'aide du programme (MATLAB), le but de ce travail est de déterminer les contraintes, déformations et retraits avec différents angles dans le trou central. Cet appariement est effectivement déterminé.

## *Remerciements*

*Tout d'abord, nous remercions Dieu pour cela nous donne le courage et la volonté d'accomplir cela Action. Ci-dessous, nous tenons à remercier chaleureusement D. Deghboudj Samir Notre superviseur qui a fait d'énormes efforts à travers Ses informations, conseils et encouragements.*

*Nous remercions également les membres Le jury d'honneur a fait avec nous en acceptant de s'asseoir pour notre défense.*

*Et tous les professeurs du Département de génie mécanique Pour tous ceux qui ont été à un moment ou à un autre et à jamais Le moment où vous participez à ce travail. Notre plus chaud Merci à tous ceux qui ont contribué directement ou indirectement A la fin de cette thèse.*

## Liste de tableaux

|  |    |
|--|----|
| Tableau III.1 Caractéristiques géométriques, thermiques et mécaniques de la plaque.....                              | 28 |
| Tableau III.2 Résultat de calcul analytique de contrainte : comportement mécanique.....                              | 30 |
| Tableau III.3 Résultat de calcul analytique de déformation: comportement mécanique.....                              | 31 |
| Tableau III.4 Résultat de calcul analytique de contrainte : comportement thermomécanique.....                        | 34 |
| Tableau III.5 Résultat de calcul analytique de déformation : comportement thermomécanique.....                       | 35 |
| Tableau III.6 Résultat de calcul analytique de déplacement : comportement thermomécanique.....                       | 36 |
| Tableau. IV.1 Résultat de calcul numérique des facteurs de concentration de contraintes général et net.....          | 43 |
| Tableau IV.2 Résultats numériques de la contrainte et déformation et déplacement : comportement thermomécanique..... | 44 |

## Liste des figures

|   |    |
|---|----|
| Figure. I.1 Géométrie d'une plaque.....   | 5  |
| Figure. I.2 Domaines d'utilisation plaques.....   | 6  |
| Figure. I.3 Déformation d'une plaque mince.....   | 8  |
| Figure. I.4 Etat de contraintes planes.....   | 12 |
| Figure. I.5 Phénomène de dilatation thermique.....  | 15 |
| Figure. I.6 Plaque soumise à champ de température.....  | 16 |
| Figure. II.1 Plaque percée d'un trou circulaire de rayon $\theta$ et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité.....   | 19 |
| Figure. II.2 Un trou circulaire de rayon $a$ dans une plaque infinie sous tension éloignée $r$ . Montré est Contraintes de traction ( $3p$ ) et pression ( $p$ ) maximales autour de la limite du trou..... | 22 |
| Figure. II.3 Schéma du corps libre de la moitié d'une plaque perforée.....  | 25 |
| Figure. III.1 : Plaque minces avec un trou circulaire.....  | 28 |
| Figure. III.2 état de contraintes planes et matériau isotrope.....  | 32 |
| Figure. III.3 : état de contraintes thermomécanique d'une plaque isotrope.....  | 33 |
| Figure. IV.1 : Structure d'une analyse sous (ABAQUS).....   | 40 |
| Figure. IV.2 Géométrie et dimensions de la plaque isotrope.....   | 41 |
| Figure. IV.3 Plaque avec trou central.....  | 41 |
| Figure. IV.4 Conditions aux limites imposées à la plaque.....   | 42 |
| Figure. IV.5 Maillage de la plaque.....   | 42 |
| Figure. IV.6 Contrainte maximale au point de calcul.....  | 43 |
| Figure. IV.7 Simulation et Résultats numérique du comportement mécanique... ..  | 47 |



## Sommaire

|  |            |
|--|------------|
| <i>ملخص</i> .....  | <i>I</i>   |
| <i>ABSTRACT</i> .....  | <i>II</i>  |
| <i>RESUME</i> .....  | <i>III</i> |
| <i>LISTE DES TABLEAUX</i> .....                                  | <i>V</i>   |
| <i>LISTE DES FIGURES</i> .....                                   | <i>VI</i>  |
| <i>INTRODUCTION GENERALE</i> .....                               | <i>1</i>   |
| <i>CHAPITRE I CONCEPTS FONDAMENTAUX DE L'ELASTICIT</i> .....     | <i>3</i>   |
| <i>I.1 Historique des plaques</i> .....                          | <i>3</i>   |
| <i>I.2 Introduction</i> .....                                    | <i>4</i>   |
| <i>I.3 Théorie des plaques</i> .....                             | <i>5</i>   |
| <i>I.3.1 Définition d'une plaque</i> .....                       | <i>5</i>   |
| <i>I.3.2 Domaines d'utilisation des plaques</i> .....            | <i>6</i>   |
| <i>I.3.3 Différents types de comportements des plaques</i> ..... | <i>7</i>   |
| <i>I.3.4 Théorie des plaques minces</i> .....                    | <i>7</i>   |
| <i>I.4 Théorie d'élasticité</i> .....                            | <i>8</i>   |
| <i>I.4.1 Notation de l'ingénieur</i> .....                       | <i>10</i>  |
| <i>I.4.2 Matériau isotrope</i> .....                             | <i>10</i>  |
| <i>I.4.3 Contraintes planes</i> .....                            | <i>11</i>  |
| <i>I.4.4 Déformation planes</i> .....                            | <i>12</i>  |
| <i>I.4.5 Influence de la température</i> .....                   | <i>13</i>  |
| <i>I.5 Dilatation et contraintes thermiques</i> .....            | <i>14</i>  |
| <i>I.5.1 Dilatation thermique</i> .....                          | <i>14</i>  |
| <i>I.5.2 Contraintes thermiques</i> .....                        | <i>15</i>  |

|         |  |    |
|---------|--|----|
| 1.5.2.1 | Contrainte thermique à température uniforme.....   | 15 |
| 1.5.2.2 | Contrainte thermique due à un gradient de température (choc thermique).....                        | 17 |
|         | Chapitre II Analyse du comportement mécanique d'une plaque isotrope trouée en traction.....        | 18 |
| II.1    | Introduction.....  | 18 |
| II. 2   | Comportement d'une plaque isotrope trouée.....   | 18 |
| II.2.1  | Champ de contraintes loin du trou.....   | 19 |
| II.2.2  | Forme générale des contraintes.....  | 19 |
| II.2.3  | Concentration de contrainte au bord du trou.....   | 21 |
| II.2.4  | Facteur de concentration de contrainte.....  | 21 |
| II.3    | Problème de Kirsch: extension d'une plaque perforée.....   | 21 |
| II.3.1  | La dérivation directe pour résoudre le problème de Kirsch.....                                     | 23 |
| II.3.2  | Analyse de l'état de contrainte et concentration sur la contrainte.....                            | 24 |
| II.4    | La concentration de contrainte.....  | 25 |
|         | Chapitre III Analyse du comportement thermomécanique d'une plaque isotrope trouée en traction..... | 27 |
| III.1   | Introduction.....  | 27 |
| III.2   | Etude du comportement des plaques munies d'un trou circulaire.....                                 | 28 |
| III.3   | Position du problème.....  | 28 |
| III.4   | Hypothèses.....  | 29 |
| III.4.1 | Problèmes : trois problèmes.....   | 29 |
| III.4.2 | But de l'analyse.....  | 29 |
| III.5   | comportement mécanique.....  | 29 |
| III.5.1 | résultat de calcul analytique de contraintes mécanique.....  | 29 |
| III.5.2 | résultat de calcul analytique de déformation mécanique.....  | 30 |
| III.6   | comportement thermique.....  | 31 |

|   |           |
|---|-----------|
| <i>III.6.1 résultat de calcul analytique de Contraintes thermique (Plaque non bridée).....</i>                            | <i>31</i> |
| <i>III.6.2 résultat de calcul analytique de Déformations thermique.....</i>   | <i>32</i> |
| <i>III.7 comportement thermomécanique.....</i>  | <i>32</i> |
| <i>III.7.1 Contraintes thermomécanique.....</i>   | <i>33</i> |
| <i>III.7.2 Déformation thermomécanique.....</i>   | <i>34</i> |
| <i>III.7.3 déplacement thermomécanique.....</i>   | <i>35</i> |
| <i>III.7 : Conclusion.....</i>  | <i>37</i> |
| <i>Chapitre IV Simulation numérique du comportement thermomécanique d'une plaque isotrope<br/>trouée en traction.....</i> | <i>38</i> |
| <i>IV.1 Introduction.....</i>   | <i>38</i> |
| <i>IV.2 Simulation numérique.....</i>   | <i>38</i> |
| <i>IV.3 Code de calcul ABAQUS.....</i>  | <i>39</i> |
| <i>IV.3.1 ABAQUS/Standard.....</i>  | <i>39</i> |
| <i>IV.3.2 ABAQUS/Explicit.....</i>  | <i>39</i> |
| <i>IV.3.3 ABAQUS/CAE.....</i>   | <i>39</i> |
| <i>IV.4 Description du problème.....</i>  | <i>40</i> |
| <i>IV.5 Problème mécanique.....</i>   | <i>41</i> |
| <i>IV.6 Problème thermique.....</i>   | <i>44</i> |
| <i>IV.7 Problème thermomécanique.....</i>   | <i>44</i> |
| <i>IV.8 conclusion.....</i>   | <i>47</i> |

## Introduction générale

Les plaques sont couramment utilisées dans tous les domaines de l'ingénierie lors des processus de conception des structures, en particulier dans le domaine de la mécanique et du génie civil. Leurs rôles principaux sont de protéger contre l'effet mécanique et thermique des sollicitations extérieures et ainsi d'assurer les performances thermomécaniques requises.

La longue liquidation et le développement durable de notre civilisation nous ont fourni des stratégies empiriques sur ce sujet. Il s'agit d'une catégorie de recherche importante dans le domaine idiomatique; dans l'aéronautique, la construction navale, le ferroviaire, les matériaux nucléaires, les matériaux innovants en génie civil, etc. La caractéristique requise pour ce type de recherche est la présentation de ses performances, de ses méthodes de fabrication et de coordination.

Les structures en tôle sont très courantes dans les environnements et les paysages de diverses industries, et la modélisation de ce type de structure est devenue une préoccupation majeure pour de nombreux chercheurs pour décrire leur comportement (mécanique, thermique et thermomécanique) et mettre en œuvre des techniques de résolution de problèmes pour les trous qui jouent un rôle de plus en plus important dans les technologies.

### **Problématique**

L'objectif principal de cette thèse est l'étude mécanique, thermique et thermomécanique, où nous nous sommes particulièrement intéressés aux plaques minces aux propriétés homogènes pour les étudier analytiquement et numériquement et étudier leur comportement face aux sollicitations mécaniques et thermiques où la précision des résultats doit être extrêmement importante et c'est de les appliquer dans des domaines nécessitant la sécurité tels que l'aviation.

### **Articulation du mémoire**

Après une introduction générale, ce traité se compose de quatre chapitres. La première Le premier chapitre présente les éléments de la peinture et les concepts de base de la théorie Flexibilité ainsi que concepts de dilatation thermique. Le deuxième chapitre est consacré à Etudier le comportement mécanique de la plaque. Le troisième Le chapitre vise à analyser le comportement thermomécanique de la plaque Avec un trou central à l'aide du programme (MATLAB) Le quatrième chapitre présente l'analyse du comportement thermomécanique de la plaque à trou central à l'aide du programme (ABAQUS).

Enfin, les résultats obtenus aux troisième et quatrième semestres sont comparés. Vient ensuite la conclusion qui constitue la conclusion de ce travail.

# *Chapitre I*

## *Concepts fondamentaux De L'élasticité*

### **I.1 Historique des plaques**

Les plaques sont des éléments structuraux couramment utilisés dans différents types de plaques sont disponibles suivant les besoins du site industriel d'où différentes hypothèses sont nécessaires pour caractériser le modèle analytique d'analyse: (a) les plaques minces avec de petites flèches (Kirchhoff) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est négligée; (b) les plaques minces avec de grandes flèches (Karman); (c) plaques modérées ou épaisses (Mindlin-Reissner) où l'énergie de contribution de l'effet de cisaillement est préservée.

En général diverses forces de différentes natures (volumiques, surfaciques, ponctuelles) peuvent se présenter comme source génératrice d'excitation. Les réponses conséquentes peuvent être exprimées en termes de mouvement que l'on peut décrire par des déplacements, des vitesses ou des accélérations.

Dans le cas de l'analyse libre, on s'intéresse aux paramètres dynamiques naturels, afin de caractériser le comportement propre inhérent à la structure d'intérêt indépendamment des sollicitations extérieures.

D'un point de vue historique, Euler fut l'un des premiers, en 1766, à formuler le premier modèle mathématique du problème représentant le comportement d'une plaque assimilée à une membrane en vibration libre. Puis, le physicien allemand Chladni (1787) découvrit les premiers modes propres de vibrations d'une plaque carrée horizontale, C'est ensuite Lagrange qui développa en 1811 la première équation différentielle correcte pour décrire les vibrations d'une plaque libre d'épaisseur constante, à laquelle doit satisfaire la flexion  $w$ , mais sans démonstration ni explication. Pour les mathématiciens, la détermination des fréquences Naturelles fût une grande priorité.

Sophie Germain a été récompensé en 1816 pour sa contribution au développement de l'équation de la plaque mince. Quelques temps après, Navier (1785-1836) introduit la méthode pour calculer les modes et les fréquences propres d'une plaque pour certaines conditions aux frontières. Ce dernier utilisa les fonctions trigonométriques découvertes par Fourier pour représenter la déformation d'une plaque. Ce n'est qu'en 1850 que

Kirchhoff (1824-1887) a établi de façon correcte pour la première fois des conditions aux limites en partant du principe des déplacements virtuels et de l'expression du travail des contraintes de la plaque.

Lord Rayleigh (1877) ou encore Ritz (1909), furent parmi les premiers à formuler la théorie qu'on connaît aujourd'hui. Ritz, a amélioré la procédure de Rayleigh en se basant sur les fonctions de forme qui caractérisent le mouvement dynamique propre, chacune avec un coefficient d'amplitude indépendant. Cette procédure est appelée « Méthode de Rayleigh Ritz ou Méthode de Ritz ». C'est la méthode approximative la plus populaire et la plus utilisée dans l'analyse des structures en vibrations.

En 1921 Timoshenko montre que la prise en compte des effets respectifs de l'inertie rotatoire et du cisaillement a pour incidence de réduire sensiblement les fréquences propres de vibration des poutres. Dans le même contexte, l'étude vibratoire des plaques a évolué en injectant des hypothèses supplémentaires telles que la prise en compte de l'effet de Cisaillement pour le cas des plaques épaisses. Ce qui a conduit à des modèles plus raffinés comme celui de Love (1944) qui appliqua les travaux de Kirchhoff aux plaque épaisses.

Depuis lors, de très nombreuses études ont été menées, surtout avec le développement des industries navales et aéronautiques. C'est ainsi que dans les années de l'après-guerre, de nouvelles théories des plaques minces élastiques furent élaborées par Reissner (1945). Reissner fut l'un des premiers à proposer une extension de la théorie des plaques avec cisaillement dans le cas statique. Ensuite, Uflyand 1948 et Mindlin (1951). C'est ainsi qu'ils proposèrent pour les plaques une nouvelle approche théorique rigoureuse Waburton et essentiellement Leissa (1969) ont contribué d'après plusieurs travaux de recherche contemporaines à mieux appréhender le problème de vibration des plaques en tenant compte des différentes hypothèses pour la prédiction sensiblement exacte du comportement dynamique inhérent aux vibrations des plaques. En 1973 Leissa proposa un catalogue élargi à différent cas d'hypothèse pour la solution des vibrations libres de plaques rectangulaires. En parallèle, Liew et al (1995) fournissent une contribution effective pour les plaques épaisses. [1]

## **I.2 Introduction**

Les problématiques rencontrées concernent essentiellement des questions de dimensionnement ou de contrôle des vibrations. Pour mieux connaître, la réponse du

comportement dynamique de la structure, il est impératif d'approcher de la manière la plus correcte possible les phénomènes mis en jeu par les plaques qui sont plus ou moins complexes. Ainsi, un tablier d'un pont, un bâtiment une caisse de voiture, une aile d'avion, un bateau... Parmi tous ces domaines d'application, on peut distinguer plusieurs types de plaques : des plaques membranaires, des plaques minces, modérées et épaisses. Dans cette étude nous nous occuperons que de plaques minces homogènes et non homogènes, isotropes .La théorie des plaques est une théorie permettant de calculer les déformations et les contraintes dans une plaque soumise à des charges. [2]

### I.3 Théorie des plaques

#### I.3.1 Définition d'une plaque

Une plaque est un solide défini par une surface de référence plane (plan  $x, y$ ) et par une petite épaisseur (notée  $h(x, y)$ ), par rapport aux autres dimensions ,à savoir la Longueur et la largeur Suivant l'ordre de grandeur de  $h$  par rapport aux autres dimensions, on introduit l'adjectif mince au épaisse aux plaques et aux coques Cependant, ce qualificatif n'implique pas seulement une caractéristique géométrique, Mais définit aussi un rôle particulier des déformations dites de cisaillement transversal (CT). Cette influence est d'autant plus importante que les structures sont minces car l'épaisseur  $h$  varie en sens inverse de l'influence CT. La plaque peut être constituée d'un matériau homogène. [3]

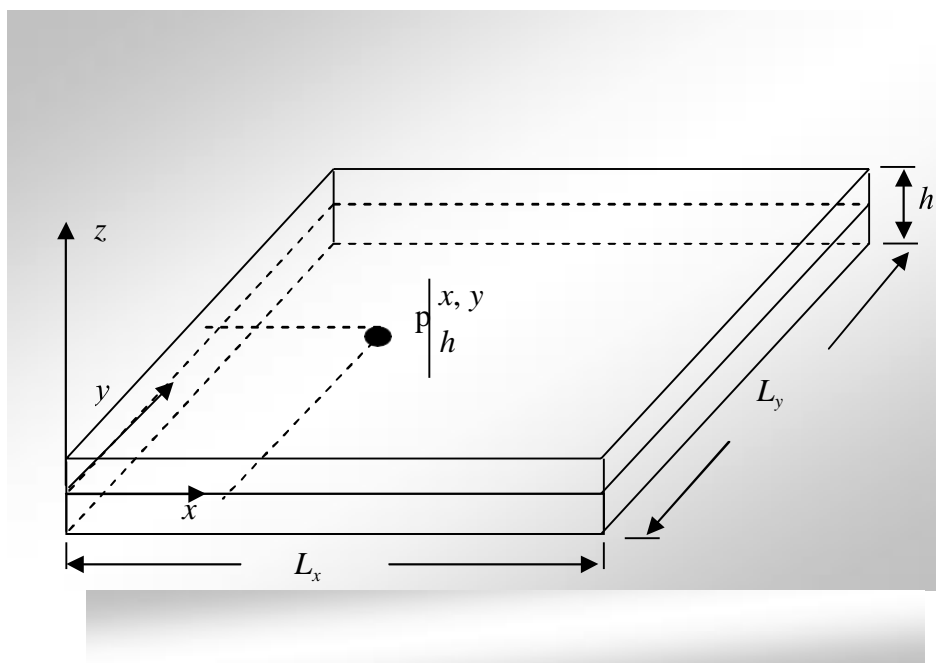


Fig. I.1 Géométrie d'une plaque



Ces plaques sont souvent suivies de l'adjectif mince ou épais suivant la grandeur de l'épaisseur  $h$ , nous admettons généralement

- pour les plaques épaisses  $\frac{1}{20} < \frac{h}{l} < \frac{1}{4}$
- Pour les plaques minces.  $\frac{h}{l} < \frac{1}{20}$

### **I.3.2 Domaines d'utilisation des plaques**

L'utilisation des plaques est très répandue et couvre presque tous les domaines techniques et technologiques et en particulier dans la construction des édifices et des ouvrages d'art en génie civil. On utilise aussi les plaques dans l'industrie automobile, aéronautique et aérospatiale (Figure I.2). Les plaques existent sous différentes formes et géométrie, rectangulaires, circulaires y compris des formes complexes.



Constructions civiles



Aéronautique



Industrie automobile

*Fig. I.2 Domaines d'utilisation plaques*

### **I.3.3 Différents types de comportements des plaques**

L'énergie de déformation d'une plaque peut être décomposée en trois termes principaux: la flexion, la membrane et le cisaillement. Lorsqu'on fait tendre l'épaisseur vers zéro, l'énergie de cisaillement devienne Négligeable et la Déformation subie par la plaque appartient à l'une des trois catégories asymptotiques suivantes en fonction de la géométrie, des conditions aux limites et des forces appliquées :

1-La flexion dominante

2-La membrane dominante

3-Le cas mixte

Dans les deux premières catégories, c'est la partie correspondante de l'énergie de déformation qui est dominante, tandis que dans les cas mixtes aucune partie n'est négligeable par rapport à l'autre. En considérant la même force, matériau et conditions aux limites, une plaque (plaque) peut exhiber des comportements asymptotiques complètement différents en fonction de la nature Géométrique de la surface moyenne.

L'espace continu des déplacements in extensionnels « avec énergies de membrane et cisaillement nul est nommé  $V_0$  » qui joue un rôle fondamental dans le classement évoqué ci-dessus: dans le cas flexion-dominante, le problème limite est formulé dans cet espace qui doit être différent de zéro, tandis que dans le cas membrane-dominante, cet espace est réduit au champ nul. [4]

### **I.3.4 Théorie des plaques minces**

Historiquement, le premier modèle des plaques minces a été développé par Lagrange, Poisson, et Kirchhoff. Aujourd'hui on l'appelle le modèle de Kirchhoff ou simplement plaque de Kirchhoff. Il est dépendant uniquement d'une seule variable: le déplacement vertical  $w(x, y, t)$  On qualifie ce modèle de "flexion pure". Les modèles sont basés sur une distribution linéaire des déplacements dans l'épaisseur. L'hypothèse adoptée est celle de Love Kirchhoff de contraintes planes, les déformations dues au cisaillement sont négligées. C'est ainsi que les années 1950-1960 de nouvelles théories des plaques minces élastiques furent élaborées par Mindlin, Vlasov, Reissner en particulier et aujourd'hui encore nombreux chercheurs travaillent à l'élaboration de théories raffinées (ainsi M. Levinson dont lathéorie date de 1980, Méthode des éléments finis, Méthode des

différences finies...).

La théorie de Kirchhoff est généralement admise comme étant la théorie des plaques minces dont la caractéristique principale, est de permettre l'expression des déformations et des contraintes en fonction de la flèche  $w$  de la surface moyenne.

La validité de la théorie des plaques de Kirchhoff dépend du facteur de l'élanement de la plaque. Une plaque est dite mince si son facteur d'élanement est

$\frac{a}{h}$  ou  $\frac{b}{h} > 20$  où  $a$  et  $b$  sont représentant la dimension dans le plan  $x$ ,  $y$  et  $h$  l'épaisseur de la plaque. [5]

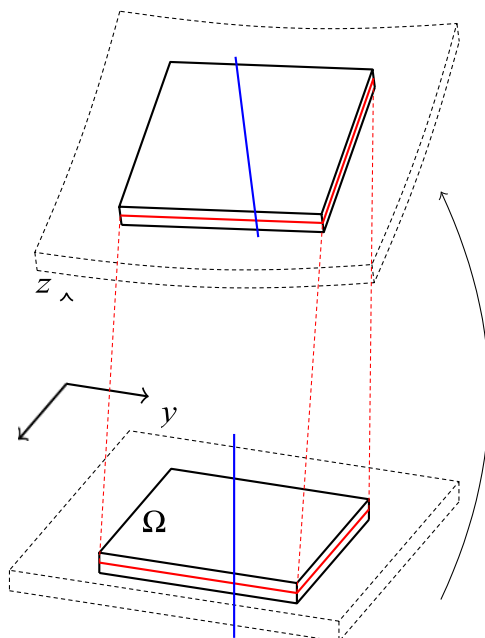


Fig. I.3 Déformation d'une plaque mince

#### I.4 Théorie d'élasticité

La théorie de l'élasticité trouve son origine dans la pratique, le domaine de construction, (pont construction mécanique automobile...), font signe de l'utilisation des propriétés des corps solides ...), capables de supporter et transmettre certaines charges. L'étude des propriétés de la matière permet la compréhension des phénomènes, les prévoir et, de concevoir dans les conditions souhaitables. La théorie de l'élasticité est l'une des branches les plus vigoureuses de la mécanique des milieux continus déformables, ses lois régissent l'étude

de tous les corps solides qui nous environnent, du point de vue de leurs équilibres et leurs mouvements. [6]

$$\varepsilon_{ij} = 3p \cdot \frac{\nu}{E} (\delta_{ij}) + \frac{(1+\nu)}{E} \cdot (\delta_{ij}) \quad (\text{I.1})$$

Les champs de déformation et de contrainte dans un milieu continu sont liés par des lois Appelées lois de comportement. Ces lois caractérisent le comportement mécanique de ce milieu. Le comportement élastique d'un milieu continu est caractérisé par une relation linéaire liant les contraintes aux déformations :

$$[\sigma] = [C] \cdot [\varepsilon] \quad (\text{I.2})$$

En notation indicielle :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{I.3})$$

Le comportement élastique d'un milieu continu est aussi caractérisé par une relation linéaire liant les déformations aux contraintes:

$$[\varepsilon] = [S] \cdot [\sigma] \quad (\text{I.4})$$

En notation indicielle

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (\text{I.5})$$

$(C_{ijkl})$  et  $(S_{ijkl})$  représentent respectivement les tenseurs de rigidité et de souplesse. Compte tenu de la symétrie des deux tenseurs  $(\sigma_{ij})$  et  $(\varepsilon_{ij})$  on peut dire que ces deux tenseurs sont aussi symétrique et on peut écrire que :

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij} \quad (\text{I.6})$$

A cause de sa symétrie, le tenseur d'élasticité :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ \bullet & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ \bullet & \bullet & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ \bullet & \bullet & \bullet & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{55} & C_{56} \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{I.7})$$

Et :

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ \cdot & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ \cdot & \cdot & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{55} & S_{56} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (\text{I.8})$$

#### I.4.1 Notation de l'ingénieur

Les composantes des tenseurs de contraintes et de déformations peuvent être réduites à six composantes indépendantes à cause de la propriété de symétrie de ses deux tenseurs.

Pour des raisons de commodité et de simplification de l'écriture, la notation tensorielle peut être contractée en utilisant la notation suivante appelée notation de l'ingénieur. [7]

- Le tenseur de contrainte :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow [\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (\text{I.9})$$

- Le tenseur de déformation :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow [\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} \quad (\text{I.10})$$

#### I.4.2 Matériau isotrope

Un matériau est isotrope si ses propriétés sont indépendantes du choix des axes de référence. Il n'existe alors pas de direction privilégiée, et la matrice de rigidité (ou souplesse) doit être invariante dans tout changement de bases orthonormées. Le nombre de constantes d'élasticité indépendantes est donc réduit à 2, et conduit à la matrice de rigidité : [8]

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (\text{I.11})$$

La matrice de souplesse a la même forme. Généralement, les constantes de rigidité sont exprimées en introduisant les coefficients de Lamé  $\lambda$  et  $\mu$  :

$$\begin{cases} C_{11} = \lambda + 2\mu \\ C_{12} = \lambda \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

### I.4.3 Contraintes planes

Le tenseur des contraintes a la forme :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.13})$$

Où  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xz}$  sont indépendants de  $z$ .

L'axe  $z$  est donc, une direction principale et la contrainte principale associée est nulle.

La loi de comportement se réduit

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{I.14})$$

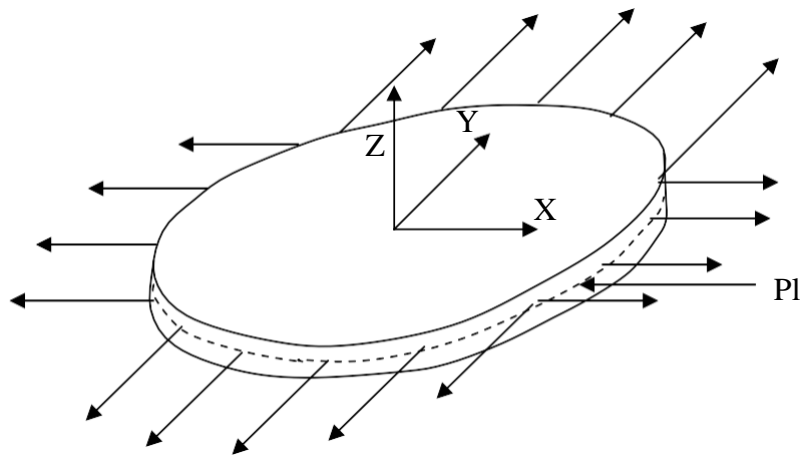


Fig. I.4 Etat de contraintes planes

Avec:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{-V}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{I.15})$$

D'où la forme du tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{I.16})$$

Les déformations et les contraintes ne dépendent que des déplacements  $u(x; y)$  et  $v(x; y)$

Parallèles aux axes  $x$  et  $y$ .

Les équations d'équilibre se réduisent à :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial Y} + f_x = \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial X} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial Y} + f_y = \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

#### I.4.4 Déformation planes

Le champ de déplacement est de la forme :

$$\begin{cases} U = U(X; Y) \\ V = V(X; Y) \\ W = 0 \end{cases} \quad (\text{I.18})$$

On en déduit le tenseur des déformations :

$$[\varepsilon(M)] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.19})$$

Avec :

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial X} ; \varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial Y} ; \gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \quad (\text{I.20})$$

En tout point du solide, la direction z est donc direction principale. Les déformations et les contraintes sont indépendantes de z. [9]

La loi de comportement se réduit à :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{I.21})$$

Avec :

$$\sigma_{zz} = \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad (\text{I.22})$$

D'où le tenseur des contraintes :

$$\{\sigma(M)\} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (\text{I.23})$$

#### I.4.5 Influence de la température

Les objets se dilatent sous l'influence de la température, donc si un milieu continu est exposé à une plage de température variable, cette différence affecte le tenseur de déformation :

$$\varepsilon_{11}^T = \varepsilon_{22}^T = \varepsilon_{33}^T = \alpha \cdot \Delta T \quad (\text{I.24})$$

Et :

$$\gamma_{12}^T = \gamma_{13}^T = \gamma_{23}^T = 0 \quad (\text{I.25})$$

Les composantes du tenseur de déformation deviennent :

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{22} + \sigma_{33}) + \alpha \Delta T \quad (\text{I.26})$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \alpha \Delta T$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\sigma_{33}}{E} + \frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \alpha \Delta T$$



## **I.5 Dilatation et contraintes thermiques**

### **I.5.1 Dilatation thermique**

On peut calculer pour tous les matériaux isotropes la variation de longueur et donc de volume en fonction de la variation de température :

$$\Delta L = \alpha \cdot L_0 \cdot \Delta T \quad (\text{I.27})$$

Avec :

- $\Delta L$  est la variation de longueur en mètre (m)
- $\alpha$  est le coefficient de dilatation linéaire en kelvin puissance moins un ( $k^{-1}$ )
- $L_0$  est la longueur initiale en mètre (m)
- $\Delta T = T - T_0$ , la variation de température en kelvin (K) ou en degré Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ )

### **Remarque**

Puisqu'on utilise une variation (une différence de température) la différence d'origine entre kelvin et degré Celsius s'annule, la distinction n'est donc pas nécessaire. On peut aussi directement calculer la longueur en fonction de la température :

$$L(T) = L_0 + \Delta L = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot (T - T_0)) \quad (\text{I.28})$$

Avec :

- $L(T)$ , la longueur en mètre (m) en fonction de la température
- $T$ , la température considérée en kelvin (K) ou en degré Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ )
- $T_0$ , la température initiale en kelvin (K) ou en degré Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ )

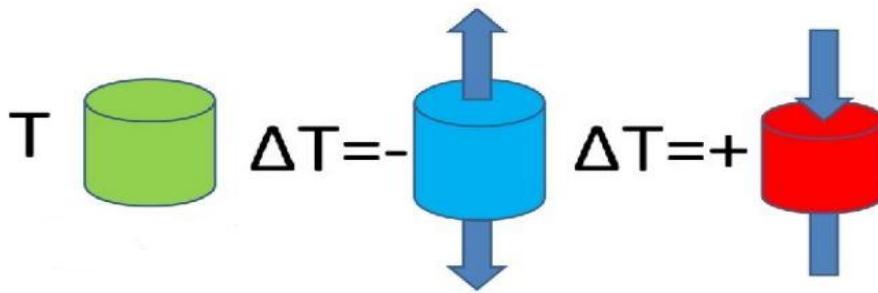


Fig. I.5 Phénomène de dilatation thermique

Tenseur de dilatation thermique :

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{I.29})$$

Ainsi, Pour un cristal orthorhombique par exemple, où  $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$  le tenseur de dilatation est diagonal et  $\alpha_{11}$ ,  $\alpha_{22}$  et  $\alpha_{33}$  décrivent la dilatation le long des trois directions cristallographiques.

Les valeurs propres du tenseur de dilatation thermique, ou coefficients de dilatation linéaires principaux  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ , permettent aussi d'obtenir le coefficient de dilatation volumique, trace du tenseur :  $\beta = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \alpha_{33}$  puisque la trace d'une matrice carré est invariante par changement de base. [10]

### I.5.2 Contraintes thermiques

La contrainte thermique Dans certaines conditions d'utilisation peut être soumise à des variations plus ou moins brusques de température, ces variations entraînent des variations dimensionnelles du matériau. Par conséquent, lorsque le matériau n'est pas libre de se dilater ou de se contracter, il se trouve soumis à des contraintes thermiques. Ces contraintes sont dues aux gradients de déformation qui se développent dans sa structure, dont tous les éléments sont incapables de se déformer librement. [11]

#### I.5.2.1 Contrainte thermique à température uniforme

Considérons un corps qui a subi un changement en température de  $T_0$  à  $T_1$  uniformément réparti. Le corps va se dilater simplement d'une grandeur  $\alpha(T_1 - T_0)$  où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation thermique.

Si le corps est homogène, isotrope et libre de se déplacer, la contrainte ne peut pas se développer. En revanche, il existe un certain cas où le corps est libre de se déplacer mais les contraintes apparaissent à cause de la différence du coefficient de dilatation thermique dans le matériau, par exemple, dans les matériaux composites, poly cristallins avec structure anisotrope..., etc. Considérons un corps homogène et isotrope mais qui ne soit pas libre de se dilater ou de se rétracter. Dans ce corps, une contrainte apparaît à cause des conditions aux limites.

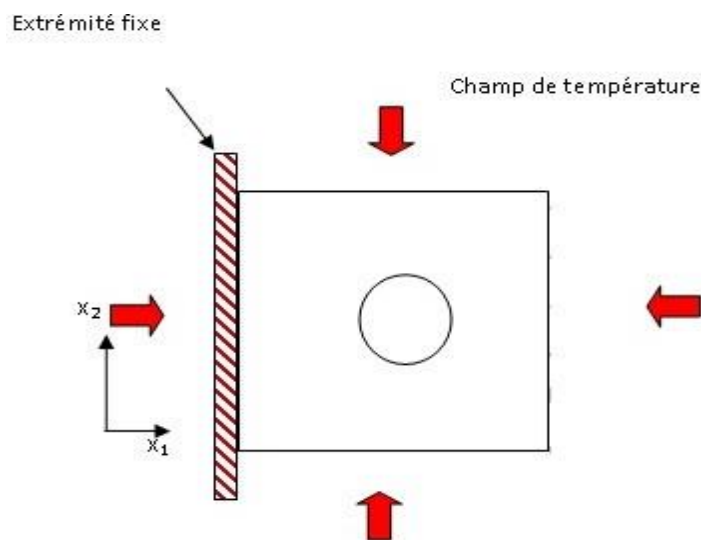


Fig. I.6 Plaque soumise à champ de température

$$\begin{pmatrix} \sigma_{ii} \\ \sigma_{jj} \\ \sigma_{kk} \\ \sigma_{ij} \\ \sigma_{jk} \\ \sigma_{ki} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{ij} - \alpha_i \Delta T \\ \varepsilon_{jj} - \alpha_j \Delta T \\ \varepsilon_{kk} - \alpha_k \Delta T \\ \gamma_{ij} \\ \gamma_{jk} \\ \gamma_{ki} \end{pmatrix} \quad (I.30)$$

Où  $\sigma$  est la tenseur des contraintes,  $\varepsilon$  est la tenseur des déformations,  $\gamma$  est appelé souvent distorsion angulaire,  $C_{ii}$  sont les constantes élastiques,  $\alpha_i$  est le coefficient de dilatation thermique,  $\Delta T$  est la variation thermique. Quand il s'agit d'un corps homogène isotrope soumis à un chargement thermique sans application de force, le calcul des contraintes devient très simple en éliminant la partie du chargement mécanique :

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_{\text{mécanique}} + \sigma_{\text{thermique}} & (I.31) \\ \sigma &= m\alpha\Delta T \end{aligned}$$

Avec :

$m=E \Rightarrow$  pour un corps à 1 dimension (E : module de Young)

$m=E/1-\nu \Rightarrow$  pour un corps à 2 dimensions ( $\nu$  : coefficient de Poisson)

$m =E/1-2\nu \Rightarrow$  pour un corps à 3 dimensions

### **I.5.2.2 Contrainte thermique due à un gradient de température (choc thermique)**

Les contraintes thermiques peuvent aussi apparaître dans un corps libre. Les gradients de température dans le corps sont en cause. C'est le cas du choc thermique proprement dit. L'origine de la contrainte due à un choc thermique est différente par rapport à la contrainte thermique en soi : la contrainte due à un choc thermique provient d'un gradient de température dans le matériau. Il est donc nécessaire de connaître la variation de la température en fonction du temps à l'endroit où on veut analyser cette contrainte.

Lorsqu'un solide est brutalement placé dans un milieu dont la température est inférieure à la température initiale du solide, le choc thermique est dit descendant:

La surface refroidie tend à se contracter mais le cœur est encore chaud, dilaté et s'oppose à cette contraction. Il en résulte des contraintes de traction en surface et de compression à cœur. Lorsque la température du milieu de la trempe est supérieure à la température initiale du solide le processus est inversé et la surface du solide est comprimée alors que le cœur est tendu. Le choc thermique est dit ascendant. [12]

## **Chapitre II**

# ***Analyse du comportement mécanique d'une plaque isotrope trouée en traction***

### **II.1 Introduction**

Dans les différents domaines de technologie de pointe, les matériaux composites ont de nombreuses applications en raison d'un rapport résistance/poids très élevé. Les plaques stratifiées à bases des fibres longues de verre et à matrice époxyde ont été largement utilisés au cours des 30 dernières années. Même s'ils présentent des propriétés mécaniques intéressantes, ils sont aussi caractérisés par des inconvénients indéniables tels que la forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) qui constituent des maillons faibles au sein de la structure.

Dans une plaque composite, et pour différentes raisons pratiques, la présence d'un trou conduit à un affaiblissement de la structure en raison de sur-contrainte locale appelée concentrations de contrainte. [13]

### **II. 2 Comportement d'une plaque isotrope trouée**

Dans cette première partie, nous allons conduire une analyse sur le phénomène de concentration des contraintes dans une plaque isotrope trouée en se basant sur la théorie d'Elasticité. Pour cela, nous allons utiliser, pour notre cas, une fonction de contrainte appelée « fonction d'Airy », qui nous permettra ensuite de calculer le facteur de concentration de contrainte pour une plaque isotrope trouée. Pour ce faire, on se propose d'étudier une plaque d'épaisseur  $h$ , tendue entre deux extrémités et possédant un trou médian de rayon  $a$ . Les forces de volume sont négligeables. On fait l'hypothèse d'un état plan de contrainte.

Les deux côtés de la plaque sont supposés suffisamment grands par rapport à  $a$  pour que l'état de contrainte loin du trou ne soit pas affecté par la présence du trou et puisse donc être assimilé à l'état homogène suivant :

$$\sigma^\infty = \sigma^\infty e_1 \cdot e_1 \quad (\text{II.1})$$

Où  $\sigma^\infty > 0$  est la contrainte imposée, donnée du problème. Dans tout le problème, le bord du trou ainsi que les surfaces  $z = \pm h/2$  sont libres d'effort.

Un système de coordonnées polaires  $(O, r, \alpha)$  est adopté,  $O$  étant le centre du trou, l'angle  $\alpha$  étant mesuré par rapport à  $e_1$ .

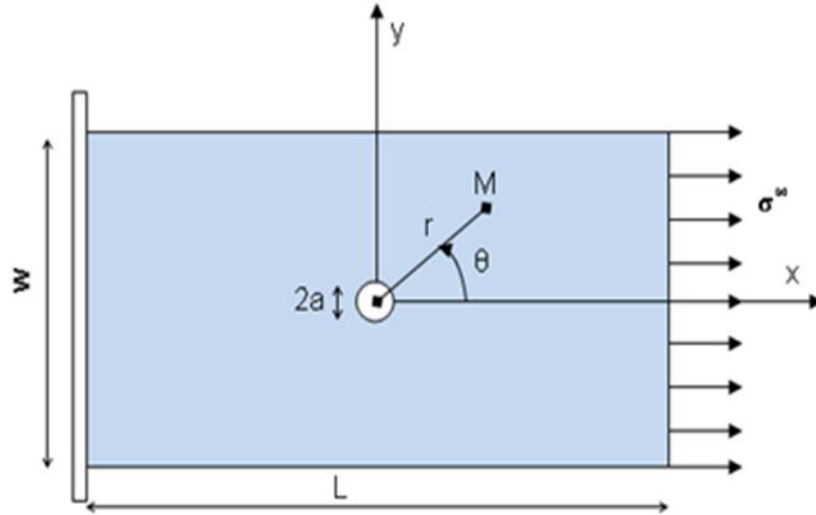


Figure II.1 Plaque percée d'un trou circulaire de rayon  $a$  et soumise, loin du trou, à une sollicitation de traction simple d'intensité  $\sigma^\infty$ .

### II.2.1 Champ de contraintes loin du trou

On substitue :

$$e_1 = \cos\theta e_r + \sin\theta e_\alpha$$

Dans l'état de contrainte pour trouver :

$$\sigma^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} ((1+\cos 2\theta) e_r \cdot e_r + (1-\cos 2\theta) e_\theta \cdot e_\theta - \sin 2\theta (e_r \cdot e_\theta + e_\theta \cdot e_r)) \quad (\text{II.2})$$

Autrement dit,

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^\infty = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta}^\infty = -\frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{II.3})$$

### II.2.2 Forme générale des contraintes

Lorsque les forces de volume sont nulles, la détermination des fonctions  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\theta\theta}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  se ramène à la recherche d'une fonction unique  $\varphi(r, \theta)$  appelée fonction d'Airy. Où :

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (\text{II.4})$$

La solution générale :

$$\varphi(r, \theta) = A \log r + B r^2 \log r + C r^2 + (A_2 r^2 + B_2 r^4 + \frac{C_2}{r^2} + D_2) \cos(2\theta) \quad (\text{II.5})$$

Où  $A, B, C, A_2, B_2, C_2, D_2$  sont des constantes à déterminer. D'après les relations :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \\ \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

On trouve l'expression générale du champ de contraintes :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + 2B \log r + B + 2C - \left( 2A_2 + \frac{6C_2}{r^4} + \frac{4D_2}{r^4} \right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B \log r + 3B + 2C + \left( 2A_2 + 12B_2 r^2 + \frac{6C_2}{r^4} \right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{r\theta} = \left( A_2 + 3B_2 r^2 - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2} \right) 2\sin(2\theta) \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Loin du trou, lorsque  $r$  est suffisamment grand, le champ précédent prend la forme asymptotique :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}^{\infty} = 2B \log r + B + 2C - 2A_2 \cos(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}^{\infty} = 2B \log r + 3B + 2C + (2A_2 + 12B_2 r^2) \cos(2\theta) \\ \sigma_{r\theta}^{\infty} = (A_2 + 3B_2 r^2) 2\sin(2\theta) \end{cases} \quad (\text{II.8})$$

L'identification entre ce champ et celui de traction simple permet de déterminer les constantes :

$$B=0, B_2 = 0, C = \frac{\sigma}{4}, A_2 = -\frac{\sigma}{4} \quad (\text{II.9})$$

Donc :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = \frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^{\infty}}{2} + \left( \frac{\sigma^{\infty}}{2} - \frac{6C_2}{r^4} - \frac{4D_2}{r^2} \right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + \frac{\sigma^{\infty}}{2} + \left( -\frac{\sigma^{\infty}}{2} - \frac{6C_2}{r^4} \right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{r\theta} = \left( -\frac{\sigma^{\infty}}{4} - \frac{3C_2}{r^4} - \frac{D_2}{r^2} \right) 2\sin(2\theta) \end{cases} \quad (\text{II.10})$$

Après prise en compte des conditions à la frontière :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r=a) &= \frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^{\infty}}{2} + \left( \frac{\sigma^{\infty}}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} \right) \cos(2\theta) = 0 \\ \sigma_{r\theta}(r=a) &= \left( -\frac{\sigma^{\infty}}{4} - \frac{3C_2}{a^4} - \frac{D_2}{a^2} \right) 2\sin(2\theta) \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

On obtient :

$$\frac{A}{a^2} + \frac{\sigma^{\infty}}{2} = 0, \quad \frac{\sigma^{\infty}}{2} - \frac{6C_2}{a^4} - \frac{4D_2}{a^2} = 0, \quad \frac{\sigma^{\infty}}{4} + \frac{3C_2}{a^4} + \frac{D_2}{a^2} \quad (\text{II.12})$$

Dont la résolution fournit :

$$D_2 = \frac{\sigma^{\infty}}{2} a^2, \quad A = -a^2 \frac{\sigma^{\infty}}{2}, \quad C_2 = -a^4 \frac{\sigma^{\infty}}{4} \quad (\text{II.13})$$

Finalement, le champ de contraintes et la fonction de contraintes identifiés sont :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\sigma^{\infty}}{2} \left( 1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{\sigma^{\infty}}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^4}{r^2} \right) \cos(2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{\sigma^{\infty}}{2} \left( 1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{\sigma^{\infty}}{2} \left( 1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

$$\begin{aligned}\sigma_{r\theta} &= -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{2a^2}{r^2} - \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin(2\theta) \\ \varphi(r, \theta) &= -\frac{\sigma^\infty}{2} a^2 \log r + \frac{\sigma^\infty}{4} r^4 + \frac{\sigma^\infty}{4} \left(-r^2 + 2a^2 - \frac{a^4}{r^4}\right) \cos(2\theta)\end{aligned}\quad (\text{II.15})$$

### II.2.3 Concentration de contrainte au bord du trou

Le champ de contraintes trouvé précédemment indique que les contraintes ne sont pas Homogènes dans une plaque trouée sollicitée en traction à ses extrémités.

La décroissance rapide en  $1/r$  du champ de contraintes assure que ces hétérogénéités se développent seulement au voisinage du trou et que le champ suffisamment loin du trou peut être considéré comme homogène.

On remarque que, le champ de contraintes  $\sigma_{\alpha\alpha}$  est plus fort au bord du trou que partout Ailleurs dans la plaque. [14]

### II.2.4 Facteur de concentration de contrainte

Le facteur de concentration de contrainte est défini par :

$$K_t = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{max}}{\sigma^\infty} \quad (\text{II.16})$$

La contrainte ortho-radiale vaut :

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a) = \sigma^\infty (1 - 2\cos(2\theta)) \quad (\text{II.16})$$

### II.3 Problème de Kirsch: extension d'une plaque perforée

La figure 7.22 montre une plaque en expansion infinie plus faible par un trou circulaire de rayon A. Il est chargé avec une pression uniforme loin  $\sigma_{xx}^\infty = P$ . La surface de perforation est exempte de traction. Le champ de contraintes dans la plaque peut être déterminé par la superposition de deux problèmes: (a) Serrage d'une plaque sans perforation par contrainte uniaxiale P, et (b) infinie Une plaque avec un trou circulaire chargé au-dessus de ses limites avec des tracteurs  $\sigma(a, \theta) = - (1/2) p (1 + \cos 2\theta)$  et  $\tau(a, \theta) = (1/2) p \sin 2\theta$ , qui annulent les chemins produits par la télécommande Insistez sur p dans le problème de la partie (a). [15]



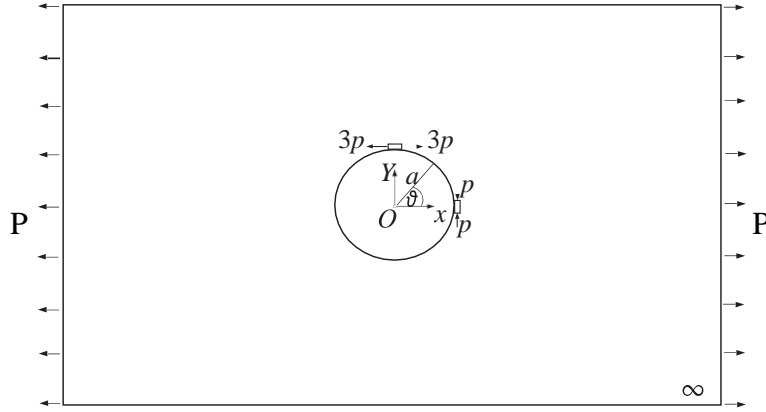


Figure II.2 Un trou circulaire de rayon  $a$  dans une plaque infinie sous tension éloignée  $r$ .  
Montré est Contraintes de traction ( $3p$ ) et pression ( $p$ ) maximales autour de la limite du trou.

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4}Pr^2(1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{rr} &= \frac{1}{2}P(1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}P(1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{1}{2}P \sin 2\theta\end{aligned}\quad (\text{II.17})$$

La fonction de contrainte et de contrainte correspondant au problème (b) est obtenue En superposant les résultats dérivés des processus de chargement  $\sigma_{rr}(a, \theta) = - (1/2) p \cos 2\theta$  et  $\sigma_{r\theta}(a, \theta) = (1/2) p \sin 2\theta$

$$\begin{aligned}\Phi &= \frac{1}{4}Pa^2 \left( 2 - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{rr} &= -\frac{1}{2}Pa^2 \left( 4 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta} &= -\frac{3}{2}P \frac{a^4}{r^4} \cos 2\theta \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{1}{2}P \left( 2 \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (\text{II.18})$$

et les résultats dérivés :

$$\begin{aligned}\Phi &= -\frac{1}{2}Pa^2 \text{Ln} \frac{r}{a} \\ \sigma_{rr} &= -\sigma_{\theta\theta} = -\frac{1}{2}p \frac{a^2}{r^2} \\ \sigma_{r\theta} &= 0\end{aligned}\quad (\text{II.19})$$

Et ainsi nous obtenons la fonction de pression d'air :

$$\Phi = \frac{1}{4}Pa^2 \left[ \frac{r^2}{a^2} - 2 \text{Ln} \frac{r}{a} + \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] \quad (\text{II.20})$$

Les pressions correspondantes sont :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \frac{1}{2}P \left[ 1 - \frac{a^2}{r^2} + \left( 1 - 4\frac{a^2}{r^2} + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{2}P \left[ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left( 1 + 3\frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right] \\ \sigma_{r\theta} &= -\frac{1}{2}P \left( 1 + 2\frac{a^2}{r^2} - 3\frac{a^4}{r^4} \right) \sin 2\theta\end{aligned}\quad (\text{II.21})$$

Remarque La somme des contraintes normales est :

$$\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} = P \left( 1 - 2\frac{a^2}{r^2} \cos 2\theta \right)$$

Puisque  $\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$  n'est pas constant, Les équations de Michel pour la compatibilité sont satisfaites en résolvant la contrainte plane dérivée Le problème de Kirsch. Une analyse 3D complète du problème le montrera Il existe également des composantes de contrainte non peintes  $\sigma_{zr}, \sigma_{z\theta}, \sigma_{zz}$  bien que leur maximum Les valeurs sont beaucoup plus petites que les valeurs maximales des composantes de contrainte,  $\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}$  Et  $\sigma_{r\theta}$ . Ainsi, malgré l'approximation, la solution dérivée du problème de Kirsch est sous L'hypothèse de la contrainte plane est suffisamment précise.

### II.3.1 La dérivation directe pour résoudre le problème de Kirsch

Une procédure alternative pour dériver une solution au problème de Kirsch est de commencer par en cours d'analyse

$$\Phi = f(r) + g(r) \cos 2\theta \quad (\text{II.22})$$

Cette représentation est motivée par la forme de termes frontières distants  $\sigma_{xx}^\infty = P$ ,  $\sigma_{yy}^\infty = \sigma_{xy}^\infty = 0$  qui, lorsqu'il est exprimé par rapport aux coordonnées polaires

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r \Rightarrow \infty, \theta) &= \frac{1}{2}P(1 + \cos 2\theta) \\ \sigma_{\theta\theta}(r \Rightarrow \infty, \theta) &= \frac{1}{2}P(1 - \cos 2\theta) \\ \sigma_{r\theta}(r \Rightarrow \infty, \theta) &= \frac{1}{2}P \sin 2\theta\end{aligned}\quad (\text{II.23})$$

Par conséquent, il contient le terme de  $\cos 2\theta$  et ses dérivés. Pour définir les fonctions  $f(r)$

Et  $g(r)$ ,

$$\nabla^2(\nabla^2\Phi) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\nabla^2\Phi) = 0 \quad (\text{II.24})$$

Il en résulte les équations différentielles pour f et g,

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr}\right) = 0 \quad (\text{II.25})$$

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2}\right) \left(\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{4g}{r^2}\right) = 0 \quad (\text{II.26})$$

Expérimenter la résolution d'équations différentielles ordinaires :

$$f(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \quad (\text{II.27})$$

$$g(r) = d_1 r^2 + d_2 r^4 + d_3 r^{-2} + d_4$$

La constante  $c_4$  peut être mise à zéro, car elle ne cause aucune contrainte. Où Les termes proportionnels à  $r^2 \ln r$  et  $r^4$  donneront des pressions infinies (plutôt que finies)

$r \rightarrow \infty$ , on prend  $C_1 = d_2 = 0$ .

$$\sigma_{rr} = 2C_2 + C_3 r^{-2} - (2d_1 + 6d_3 r^{-4} + 4d_4 r^{-2}) \cos 2\theta \quad (\text{II.28})$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 2C_2 - C_3 r^{-2} + (2d_1 + 6d_3 r^{-4}) \cos 2\theta$$

$$\sigma_{r\theta} = (2d_1 + 6d_3 r^{-4} + 4d_4 r^{-2}) \sin 2\theta$$

Pour identifier les constantes inconnues restantes, nous remplaçons dans la télécommande Conditions aux limites et conditions aux limites sans traction sur la surface Du trou,

$$\sigma_{rr}(a, \theta) = 0 \quad (\text{II.29})$$

$$\sigma_{r\theta}(a, \theta) = 0$$

Cela donne

$$C_2 = -d_1 = \frac{1}{4}P, \quad C_3 = -d_4 = \frac{1}{2}Pa^2, \quad d_3 = -\frac{1}{4}Pa^2 \quad (\text{II.30})$$

Ainsi la pression devient fonction pneumatique

$$\Phi = \frac{1}{4}Pa^2 \left[ \frac{r^2}{a^2} - 2 \ln \frac{r}{a} + \left( 2 - \frac{r^2}{a^2} - \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] \quad (\text{II.31})$$

### II.3.2 Analyse de l'état de contrainte et concentration sur la contrainte

Variation de la contrainte du collier le long du périmètre du trou ( $r = a$ ) est :

$$\sigma_{\theta\theta}(a, \theta) = P(1 - 2 \cos 2\theta) \quad (\text{II.32})$$

Pour  $P > 0$ , la contrainte de traction maximale est  $\sigma_{\theta\theta}^{max} = \sigma_{\theta\theta}(a, \pm \pi / 2) = 3P$ , puis pression

Le facteur de mise au point est :

$$K = \frac{\sigma_{\theta\theta}^{max}}{P} = 3 \quad (\text{II.33})$$

La pression de compression maximale se produit pour  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ , où  $(a, 0 \text{ ou } \pi) = -P$ .  
 Notez que si le téléchargement à distance est compressé ( $P < 0$ ), il y aura tension. L'importance de la mécanique de la rupture pour expliquer l'apparition de la fissuration et de la fracture des matériaux fragiles sous charges de pression externes.

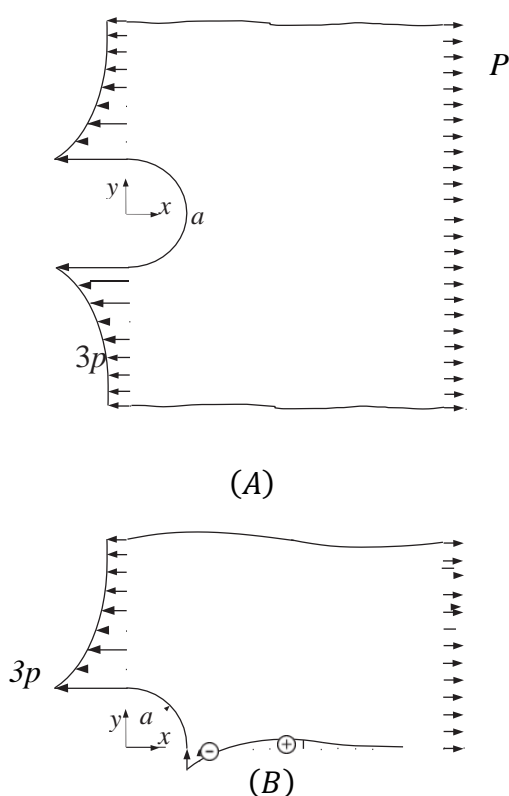


Figure II.3 Schéma du corps libre de la moitié d'une plaque perforée

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta = 0) = \frac{P}{2} \left( \frac{a^2}{r^2} - 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \quad (\text{II.34})$$

$$\sigma_{\theta\theta} \left( r, \theta = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{P}{2} \left( 2 + \frac{a^2}{r^2} + 3 \frac{a^4}{r^4} \right)$$

#### II.4 La concentration de contrainte

La pression circulaire le long de l'interface sur le côté de la matrice est

$$\sigma_{\theta\theta} (a, \theta) = \frac{p}{2} [2 - \alpha - (4 - 3\beta) \cos 2\theta] \quad (\text{II. 35})$$

Le facteur de concentration des contraintes à  $\theta = \pi / 2$  est

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(a, \pi / 2)}{p} = 3 - \frac{1}{2}(\alpha + 3\beta) \quad (\text{II. 36})$$

Il est toujours inférieur au facteur de concentration de contrainte de 3 correspondant à un Trou circulaire. Cependant, le ratio

$$\frac{\sigma_{\theta\theta}(a, 0)}{p} = -1 - \frac{1}{2}(\alpha - 3\beta) \quad (\text{II. 37})$$

Elle peut être supérieure ou inférieure à la valeur de - 1 correspondant à un trou circulaire.

La butée de pression circulaire à travers l'interface varie avec  $\theta$

$$(\sigma_{\theta\theta}^1 - \sigma_{\theta\theta}^2)_{r=a} p [1 - \alpha - 2(1 - \beta) \cos 2\theta] \quad (\text{II. 38})$$

La pression radiale de l'interface opposée est

$$\sigma_{rr}(a, \theta) = \frac{p}{2}(\alpha + \beta \cos 2\theta) \quad (\text{II. 39})$$

Que nous obtenons

$$\sigma_{rr}(a, 0) = \frac{p}{2}(\alpha + \beta) \quad \sigma_{rr}(a, \pi / 2) = \frac{p}{2}(\alpha - \beta) \quad (\text{II. 40})$$

## ***Chapitre III***

# ***Analyse du comportement thermomécanique d'une plaque isotrope trouée en traction***

### **III.1 Introduction**

Dans les différents domaines de technologie de pointe, les matériaux composites ont de nombreuses applications en raison d'un rapport résistance/poids très élevé. Les plaques stratifiées à bases des fibres longues de verre et à matrice époxyde ont été largement utilisés au cours des 30 dernières années. Même s'ils présentent des propriétés mécaniques intéressantes, ils sont aussi caractérisés par des inconvénients indéniables tels que la forte sensibilité aux singularités géométriques (de type trou, entaille...) qui constituent des maillons faibles au sein de la structure.

Dans une plaque composite, et pour différentes raisons pratiques, la présence d'un trou conduit à un affaiblissement de la structure en raison de sur-contrainte locale appelée concentrations de contrainte.

Jain (1998) a défini ce phénomène comme une augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce. Il apparaît dans une discontinuité de la pièce ou d'une structure avec la présence d'une entaille après l'usinage par exemple. La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage des fissures de fatigue mais peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile.

Pour cela, Il est bon d'éviter, autant que possible, le perçage ou l'usinage de défauts ou de parties fonctionnelles de ce type. Lorsque la présence de concentrateurs de contraintes est inévitable, il est nécessaire de connaître le facteur de concentration de contrainte associé à chaque géométrie afin de bien dimensionner les structures.

Donc, à travers ce chapitre, nous allons tout d'abord décrire le comportement d'une plaque isotrope contenant un trou circulaire soumise à un effort de traction. Nous profiterons de cette description pour établir les hypothèses prises par Airy pour analyser le phénomène de concentration des contraintes.

Suite à cette discussion, Une seconde revue est ensuite proposée sur les différentes théories approchées utilisées pour représenter le phénomène de concentration de contraintes

dans les plaques stratifiées trouées. Après avoir rappelé brièvement leurs formulations, nous discuterons de l'applicabilité de ces méthodes pour notre problématique.

### III.2 Etude du comportement des plaques munies d'un trou circulaire

Le but de cette partie est de présenter l'effet de la présence du trou circulaire sur le comportement mécanique des plaques trouées en matériaux isotropes avec la sollicitation de traction et de compression pure. Afin d'analyser le phénomène de concentration des contraintes par la détermination de la distribution du facteur de concentration des contraintes autour et loin du trou circulaire on applique la théorie d'élasticité plane et on utilise les contraintes d'Airy. Soit une plaque munie d'un trou circulaire centrée de rayon  $R$  et soumise à ces deux extrémités à un état de traction simple (figure 3.1). L'axe du trou est  $e_3$  et la direction de la traction est  $e_1$ . Les dimensions de la plaque sont supposées suffisamment grandes par rapport au rayon du trou et les forces volumiques sont négligeables. On considère l'hypothèse de l'état de contraintes planes. [16]

### III.3 Position du problème

Dans cette étude, nous allons conduire une analyse analytique et numérique du comportement thermique et mécanique (thermomécanique) d'une plaque isotrope carrée, mince et de dimensions (200x100) mm<sup>2</sup> encastrée d'un côté et libre de l'autre (figure II.1) et soumise à un champ de traction uniforme. Les caractéristiques géométriques, thermiques et mécaniques de cette plaque sont présentées dans le tableau III.1.

Tableau III.1 caractéristiques géométriques, thermiques et mécaniques de la plaque

| $E(Mpa)$ | $\nu$ | $\sigma(Mpas)$ | $L(mm)$ | $e(mm)$ | $\delta T(^{\circ}C)$ |
|----------|-------|----------------|---------|---------|-----------------------|
| 210000   | 0.3   | 100            | 200     | 1       | 100                   |

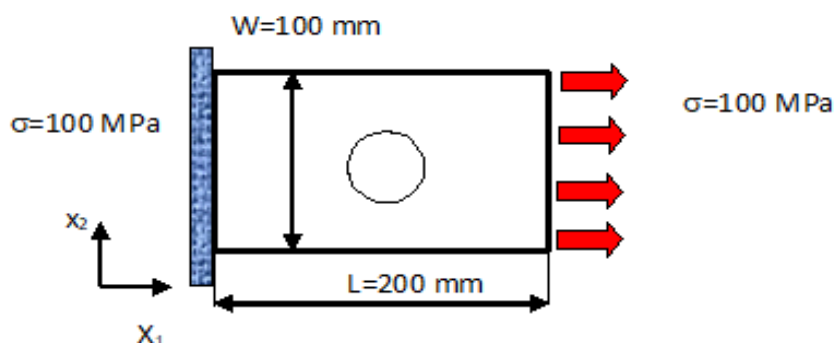


Figure. III.1 : Plaque minces avec un trou circulaire

### **III.4 Hypothèses**

- 1: Plaque infinie
- 2 : Plaque mince (Kirchhoff) Contraintes planes
- 3 : Plaque perforée au centre
- 4 : Comportement élastique
- 5 : Hypothèse des petites déformations

#### **III.4.1 Problèmes : trois problèmes**

- 1-Problème mécanique : plaque soumise à une traction uni axiale par l'une par l'une de ses extrémités et libre l'autre
- 2-Problème thermique : plaque soumise à un champ de température qui provoque une dilatation  $\Delta T$
- 3-Problème de couplage (thermomécanique): effet du couplage mécanique et thermique

#### **III.4.2 But de l'analyse**

- 1-Evaluer les champs de contraintes et de déformation et de déplacement sur le périmètre du trou.
- 2-Analyse de la concentration de contrainte dans le trou due aux chargements mécanique et thermique.

### **III.5 comportement mécanique**

Dans cette première partie de l'étude, nous nous intéressons en particulier au comportement mécanique de cette plaque soumise à un champ de contrainte uniaxial, encadrée d'un côté et libre de l'autre. Pour assurer l'uniformité du champ de contraintes nous imposons à la plaque uniquement un déplacement par rapport à la direction de l'application du chargement ( $U_2=U_3= 0$ ). L'épaisseur de la plaque nous permet d'utiliser l'hypothèse des contraintes planes (dans ce cas par rapport au plan  $(0, X_1, X_2)$ , nous aurons ainsi  $(\epsilon_{33}, \epsilon_{13}, \epsilon_{23})$ ).

#### **III.5.1 résultat de calcul analytique de contraintes mécanique**

L'élasticité ou mécanique des solides déformables est l'une des sciences de la mécanique des milieux continus, qui étudie le comportement des matériaux sous l'action des forces et des moments, en d'autre terme on détermine la relation qui existe entre les contraintes et les déformations, les principes fondamentaux de cette théorie sont la réversibilité des déformations lors de déchargement, et la linéarité de comportement L'élasticité représente un langage commun entre les ingénieurs , même s'ils prétendent ne pas la comprendre parfaitement, la majorité d'entre eux s'énervent. Après a voire expédié les



principes de l'élasticité dans le cas tridimensionnelle, on appliquera ces principes dans le cas bidimensionnel dans le cadre de la théorie des plaques. [17]

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.1)}$$

$$[\sigma] = C. [\varepsilon] \quad \text{(III.2)}$$

*Tableau III.2 Résultat de calcul analytique de contrainte: comportement mécanique*

| $\theta$ | $\sigma(xx)$ | $\sigma(yy)$ | $\sigma(xy)$ |
|----------|--------------|--------------|--------------|
| 0        | 0            | -100         | 0            |
| 5        | -0.7365      | -96.2250     | -8.4186      |
| 10       | -2.6517      | -85.2869     | -15.0384     |
| 15       | -4.9038      | -68.3013     | -18.3013     |
| 20       | -6.2243      | -46.9846     | -17.1010     |
| 25       | -5.1006      | -23.4570     | -10.9382     |
| 30       | 0.0000       | 0.0000       | 0.0000       |
| 35       | 10.3948      | 21.2012      | 14.8453      |
| 40       | 26.9681      | 38.3022      | 32.1394      |
| 45       | 50.0000      | 50.0000      | 50.0000      |
| 50       | 79.0626      | 55.6670      | 66.3414      |
| 55       | 113.0008     | 55.4032      | 79.1240      |
| 60       | 150.0000     | 50.0000      | 86.6025      |
| 65       | 187.7357     | 40.8218      | 87.5426      |
| 70       | 223.5891     | 29.6198      | 81.3798      |
| 75       | 254.9038     | 18.3013      | 68.3013      |
| 80       | 279.2561     | 8.6824       | 49.2404      |
| 85       | 294.7058     | 2.2558       | 25.7834      |
| 90       | 300.0000     | 0.0000       | 0.0000       |

### III.5.2 résultat de calcul analytique de déformation mécanique

$$[\varepsilon] = S. [\sigma] \quad \text{(III.3)}$$

$$[\varepsilon_{xx}] = \frac{1}{E} (\sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy}) \quad \text{(III.4)}$$

$$[\varepsilon_{yy}] = \frac{1}{E} (\sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx})$$

$$[\varepsilon_{xy}] = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{xy}$$

Tableau III.3 Résultat de calcul analytique de déformation: comportement mécanique

| $\theta$ | $\varepsilon(xx)$ | $\varepsilon(yy)$ | $\varepsilon(xy)$ |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0        | 0.1429            | -0.4762           | 0.0000            |
| 5        | 0.0001            | -0.0005           | -0.0001           |
| 10       | 0.0001            | -0.0004           | -0.0001           |
| 15       | 0.0001            | -0.0003           | -0.0001           |
| 20       | 0.0000            | -0.0002           | -0.0001           |
| 25       | 0.0000            | -0.0001           | -0.0000           |
| 30       | -0.0000           | 0.0000            | 0.0000            |
| 35       | 0.0000            | 0.0001            | 0.0001            |
| 40       | 0.0001            | 0.0001            | 0.0002            |
| 45       | 0.0002            | 0.0002            | 0.0003            |
| 50       | 0.0003            | 0.0002            | 0.0004            |
| 55       | 0.0005            | 0.0001            | 0.0005            |
| 60       | 0.0006            | 0.0000            | 0.0005            |
| 65       | 0.0008            | -0.0001           | 0.0005            |
| 70       | 0.0010            | -0.0002           | 0.0005            |
| 75       | 0.0012            | -0.0003           | 0.0004            |
| 80       | 0.0013            | -0.0004           | 0.0003            |
| 85       | 0.0014            | -0.0004           | 0.0002            |
| 90       | 0.0014            | -0.0004           | 0.0000            |

### III.6 comportement thermique

#### III.6.1 résultat de calcul analytique de Contraintes thermique (Plaque non bridée)

La loi d'élasticité dans un état de référence où les contraintes dues aux phénomènes de dilatation écrite sous la forme :

$$\sigma_{ij}^{th} = E\alpha\Delta T\delta_{ij} = 0 \quad \text{(III.5)}$$

$$\sigma_{ij}^{th} = E \cdot \alpha \cdot \Delta T \cdot \begin{bmatrix} 12 \cdot 10^{-6} \\ 12 \cdot 10^{-6} \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad \text{(III.6)}$$

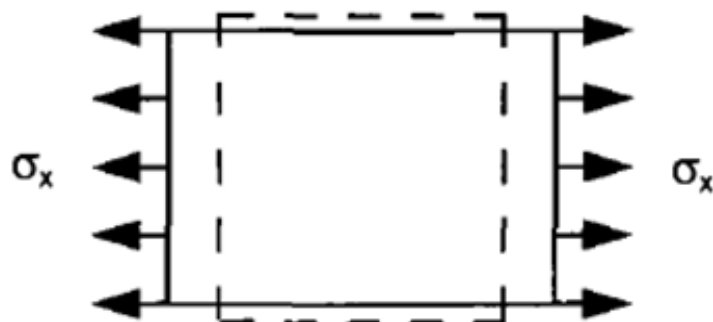


Figure. III.2 état de contraintes planes et matériau isotrope

### III.6.2 résultat de calcul analytique de Déformations thermique

Les phénomènes de dilatation thermique peuvent être décrits en écrivant les déformations en un point (x, y) et à l'instant t sous la forme :

$$\varepsilon_{ij}^{th} = \alpha \Delta T \delta_{ij} \quad (III.7)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^{th} \\ \varepsilon_{yy}^{th} \\ \gamma_{xy}^{th} \end{bmatrix} = \alpha \Delta T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 12 \cdot 10^{-6} \cdot 100 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,2 \cdot 10^{-3} \\ 1,2 \cdot 10^{-3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (III.8)$$

### III.7 comportement thermomécanique

Cette partie de l'étude est réservée à la modélisation du comportement thermomécanique de la plaque trouée soumise à la fois à une sollicitation mécanique ( $\sigma = 100$  MPA) et à une autre thermique (variation de température  $\Delta T = 100^\circ\text{C}$ ). Ce couplage thermomécanique, dit de faible est un couplage dans lequel on ne tiens compte que des effets de dilatation c'est-à-dire les effets de la thermique sur la mécanique. Les effets inverses, mécanique sur thermique, que sont les élévations de température dues aux déformations ne sont pas prise en compte La déformation totale est due à la fois aux contraintes mécaniques et thermiques.

$$\{\sigma\} = \{\sigma^{méc}\} + \{\sigma^{ther}\} \quad (III.9)$$

Et :

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{méc}\} + \{\varepsilon^{ther}\} \quad (III.10)$$

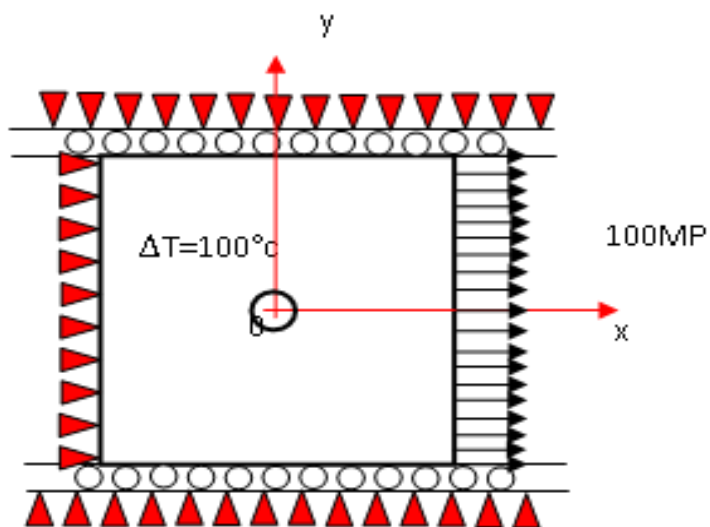


Figure III.3 : état de contraintes thermomécanique d'une plaque isotrope

### III.7.1 Contraintes thermomécanique

$$\sigma_{ij} = C_{ij}(\varepsilon_{ij}^{\text{méc}} - \varepsilon_{ij}^{\text{ther}}) \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha\Delta T}{1-\nu} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.12})$$

Tableau III.4 Résultat de calcul analytique de contrainte: comportement thermomécanique

| $\theta$ | $\sigma(xx)$ | $\sigma(yy)$ | $\sigma(xy)$ |
|----------|--------------|--------------|--------------|
| 0        | -0.6923      | -2.3077      | 0.0000       |
| 5        | -0.6830      | -2.2256      | -0.0680      |
| 10       | -0.6516      | -1.9865      | -0.1215      |
| 15       | -0.5860      | -1.6101      | -0.1478      |
| 20       | -0.4689      | -1.1273      | -0.1381      |
| 25       | -2.8006      | -5.7659      | -0.8835      |
| 30       | 360.0000     | 360.0000     | -0.0000      |
| 35       | 3.8669       | 5.6126       | 1.1990       |
| 40       | 0.8875       | 1.0706       | 0.2596       |
| 45       | 1.5000       | 1.5000       | 0.4038       |
| 50       | 2.2099       | 1.8320       | 0.5358       |
| 55       | 2.9913       | 2.0609       | 0.6391       |
| 60       | 3.8077       | 2.1923       | 0.6995       |
| 65       | 4.6150       | 2.2418       | 0.7071       |
| 70       | 5.3648       | 2.2315       | 0.6573       |
| 75       | 6.0091       | 2.1871       | 0.5517       |
| 80       | 6.5045       | 2.1337       | 0.3977       |
| 85       | 6.8166       | 2.0924       | 0.2083       |
| 90       | 6.9231       | 2.0770       | 0.0000       |

### III.7.2 Déformation thermomécanique

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{méc} + \varepsilon_{ij}^{ther} \quad \text{(III.13)}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 + \nu) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + \alpha \Delta T \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(III.14)}$$

Tableau III.5 Résultat de calcul analytique de déformation: comportement thermomécanique

| $\theta$ | $\varepsilon(xx)$ | $\varepsilon(yy)$ | $\varepsilon(xy)$ |
|----------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 0        | 0.0013            | 0.0007            | 0.0000            |
| 5        | 0.0013            | 0.0007            | -0.0001           |
| 10       | 0.0013            | 0.0008            | -0.0002           |
| 15       | 0.0013            | 0.0009            | -0.0002           |
| 20       | 0.0012            | 0.0010            | -0.0002           |
| 25       | 0.0012            | 0.0011            | -0.0001           |
| 30       | 0.0012            | 0.0012            | -0.0000           |
| 35       | 0.0012            | 0.0013            | 0.0002            |
| 40       | 0.0013            | 0.0013            | 0.0004            |
| 45       | 0.0014            | 0.0014            | 0.0006            |
| 50       | 0.0015            | 0.0014            | 0.0008            |
| 55       | 0.0017            | 0.0013            | 0.0010            |
| 60       | 0.0018            | 0.0012            | 0.0011            |
| 65       | 0.0020            | 0.0011            | 0.0011            |
| 70       | 0.0022            | 0.0010            | 0.0010            |
| 75       | 0.0024            | 0.0009            | 0.0008            |
| 80       | 0.0025            | 0.0008            | 0.0006            |
| 85       | 0.0026            | 0.0008            | 0.0003            |
| 90       | 0.0026            | 0.0008            | 0.0000            |

### III.7.3 déplacement thermomécanique

-Les déplacements en coordonnées polaires est donnée par :

$$2\mu u_r = \frac{\sigma^\infty r \cos 2\theta}{2} \left(1 + (k+1) \frac{a^2}{r^2} - \frac{a^4}{r^4}\right) + \frac{\sigma^\infty r}{4} \left((k-1) + 2 \frac{a^2}{r^2}\right) \quad \text{(III.15)}$$

$$2\mu u_\theta = -\frac{\sigma^\infty r \sin 2\theta}{2} \left(1 + (k-1) \frac{a^2}{r^2}\right) + \frac{a^4}{r^4} \quad \text{(III.16)}$$

-Les déplacements en coordonnées cartésiennes est donnée par :

$$(r, \theta) = \frac{\sigma^\infty a}{8\mu} \left(\frac{r}{a} (k+1) \cos \theta + \frac{2a}{r} ((1+k) \cos \theta + \cos 3\theta) - \frac{2r}{r^3} \cos 3\theta\right) \quad \text{(III.17)}$$

$$u_y(r, \theta) = \frac{\sigma^\infty a}{8\mu} \left( \frac{r}{a} (k - 3) \sin \theta + \frac{2a}{r} ((1 - k) \sin \theta + \sin 3\theta) - \frac{2r}{r^3} \sin 3\theta \right) \quad \text{(III.18)}$$

Contrainte plane k donnée par :

$$k = \frac{3-\nu}{1+\nu} \quad \text{(III.19)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{(III.20)}$$

*Tableau III.6 Résultat de calcul analytique de déplacement: comportement thermomécanique*

| $\theta$ | $u_x(r, \theta)$ | $u_y(r, \theta)$ |
|----------|------------------|------------------|
| 0        | 9.5130           | 0.0000           |
| 5        | 9.4272           | 0.1952           |
| 10       | 9.1739           | 0.3632           |
| 15       | 8.7649           | 0.4788           |
| 20       | 8.2191           | 0.5207           |
| 25       | 7.5611           | 0.4728           |
| 30       | 6.8200           | 0.3255           |
| 35       | 6.0269           | 0.0765           |
| 40       | 5.2136           | -0.2688          |
| 45       | 4.4102           | -0.6979          |
| 50       | 3.6434           | -1.1919          |
| 55       | 2.9347           | -1.7263          |
| 60       | 2.2995           | -2.2733          |
| 65       | 1.7459           | -2.8030          |
| 70       | 1.2749           | -3.2857          |
| 75       | 0.8800           | -3.6938          |
| 80       | 0.5485           | -4.0037          |
| 85       | 0.2624           | -4.1972          |
| 90       | 0.0000           | -4.2630          |

### **III.8 : Conclusion**

Ce chapitre a été dédié à l'analyse analytique et numérique du comportement mécanique, thermique et thermomécanique d'une plaque isotrope. Nous nous sommes parvenus aux résultats suivants :

#### **Comportement mécanique**

1. L'étude du comportement mécanique a conduit aux résultats analytiques obtenus en Lois de la flexibilité et des nombres.
2. La fixation de la plaque par ses côtés latéraux génère une pression par rapport à La direction opposée de la charge à laquelle il est soumis.
3. Des déformations apparaissent en fonction du sens d'application de la charge uniquement.
4. Le bridage de la plaque par ses cotés latéraux et la présence du trou central influencent considérablement le comportement mécanique de celle-ci.
5. Les déformations apparaissent au plan de la plaque à cause du trou central.

#### **Comportement thermique**

1. l'application d'un chargement thermique engendre des dilations par rapport aux deux directions de son plan.
2. Aucune contrainte n'a été enregistrée pour ce cas ( $\sigma_{ij} = 0$ ).
3. Malgré la présence du trou les facteurs de concentration des contraintes sont tous nuls.

#### **Comportement thermomécanique**

1. Les composantes des tenseurs de déformation et de contrainte sont égales aux sommes respectives de ces composantes mécaniques et thermiques



# ***Chapitre IV***

## ***Simulation numérique du comportement thermomécanique d'une plaque isotrope trouée en traction***

### **IV.1 Introduction**

La résolution analytique des problèmes mécaniques ne peut se faire que dans un nombre de cas limité, cependant les méthodes numériques basées sur la discrétisation de ses problèmes, présentent une alternative très efficace, souvent utilisées dans le domaine de la mécanique pour résoudre de problèmes complexe.

Les méthodes des éléments finis est de toutes ses méthodes de discrétisation la plus utilisée car elle peut traiter des problèmes de géométrie complexe, elle couvre de nombreux domaines de la physique. Les moyens informatiques actuels (puissance des calculateurs, outils de visualisation et de simulation) la rende facile à la mise en œuv . La méthode des éléments finis est la méthode la plus utilisée actuellement, son champ d'application ne casse de s'élargir, Le succès de la méthode est que sa formulation utilise des procédés standards qui se répètent au cours de la résolution de problèmes de natures différentes. De nombreux logiciels basés sur cette méthode, généraux ou dédiés sont disponibles sur le marché. Nous consacrons le présent chapitre a des simulation numériques à l'aide du logiciel de calcul (ABAQUS) pour étudier et déterminer les contraintes dans une plaque composite stratifiée soumise à un champ de traction uniforme. [18]

### **IV.2 Simulation numérique**

La simulation numérique par éléments finis des procédés de mise en forme est aujourd'hui une réalité industrielle. Elle permet de mettre au point, des études en réduisant recours à la méthodologie expérimentale et empirique d'erreur-correction qui est beaucoup plus couteuse. Ainsi des logiciels de mise en forme (Forge2, Forge3, développés dans le but de simuler des phénomènes physiques intervenant en mise en forme des pièces. La modélisation de ces phénomènes permet de simuler correctement la mise en forme d'un Matériau et de jouer sur certaine paramètres (géométriques, rhéologiques...) afin d'en optimiser le procédé.

La simulation de l'endommagement dans les procédés de mise en forme a pour but de prédire où et quand un endommagement significatif apparaît. Pour ce faire, les principaux phénomènes et leurs interactions doivent être correctement pris en compte.[19]

### **IV.3 Code de calcul ABAQUS**

ABAQUS compose de trois produits : ABAQUS/Standard, ABAQUS/Explicit et ABAQUS/CAE, (figure IV.1)

#### **IV.3.1 ABAQUS/Standard**

ABAQUS Est un solveur généraliste qui recourt à un schéma traditionnel d'intégration implicite.[20]

- Résolution basée sur l'algorithme de Newton-Raphson et la méthode de Riks
- Problèmes linéaires et non linéaires Géométrie 1D, 2D, 3D et Axisymétrique
- Nombreuses procédures d'analyse dans le domaine temporel et fréquentiel.

#### **IV.3.2 ABAQUS/Explicit**

ABAQUS/ Explicit Un schéma d'intégration explicite pour résoudre des problèmes dynamique ou quasi-statiques non-linéaires.

- Analyse non linéaire (discrétisation spatiale et temporelle)
- Problème transitoire et dynamique des structures
- Résolution basée sur la méthode explicite d'intégration en temps

#### **IV.3.3 ABAQUS/CAE**

ABAQUS /CAE Constitue une interface intégrée de visualisation et de modélisation pour lesdits solveurs. Chacun de ces produits est complété par des modules additionnels et optionnels, spécifiques à certaines applications. ABAQUS fut d'abord conçu pour analyser les comportements non-linéaires. Il possède en conséquence une vaste gamme de modèles de matériau. Ses modélisations d'élastomères, en particulier, méritent d'être reconnues.

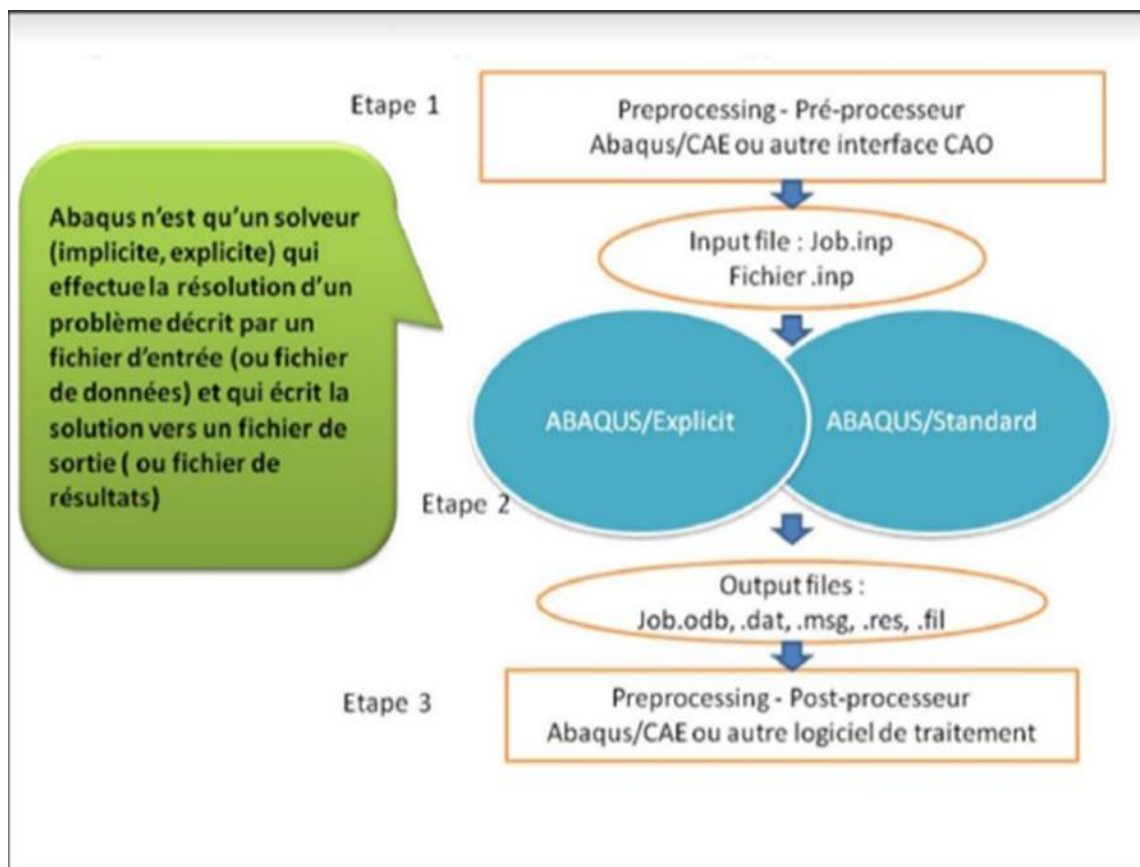


Figure IV.1 : Structure d'une analyse sous (ABAQUS)

#### IV.4 Description du problème

Nous proposons d'étudier le phénomène de concentration des contraintes dans une plaque isotrope, soumise à un champ de traction uniforme, à la présence d'un trou circulaire central (Fig. 6.1). C'est censé être une peinture rectangulaire (Largeur  $L = 100$  mm, longueur  $L = 200$  mm) et épaisseur = 1 millimètre. Le diamètre du trou est de 10 mm, les facteurs de concentration de pression généraux sont sélectionnés (KTG) et (KTN). Les résultats obtenus seront comparés aux résultats analytiques.

La plaque est fixée par l'une de ses extrémités, sur l'autre extrémité on applique une contrainte de traction uniforme de 100 MPa.

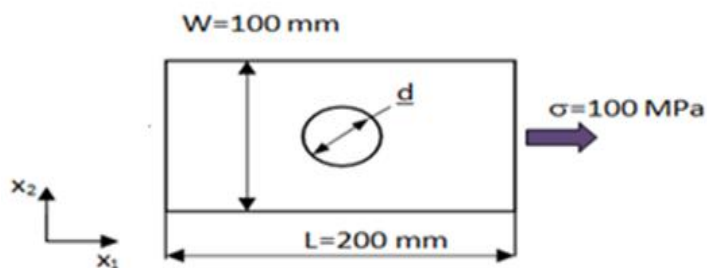


Figure. IV.2 Géométrie et dimensions de la plaque isotrope

#### IV.5 Problème mécanique

Dans cette partie du travail, nous examinerons le comportement mécanique de Plaque à trou central. Cette plaque est soumise à un champ de pression Uniaxial dans la direction 1 ( $\sigma=100\text{MPa}$ ), encastré d'un côté et libre de l'autre (Fig. IV). Pour assurer l'uniformité du champ de pression, on impose sur la plaque A Décalage uniquement par rapport au sens d'application de la charge ( $U_2 = U_3 = 0$ ). Les dimensions de cette carte sont indiquées dans le tableau III.1.

##### ➤ Chargement

La contrainte appliquée sur l'extrémité libre de la plaque est due à une charge de traction supposée uniformément répartie avec une valeur de 100 MPA (figure III.3).

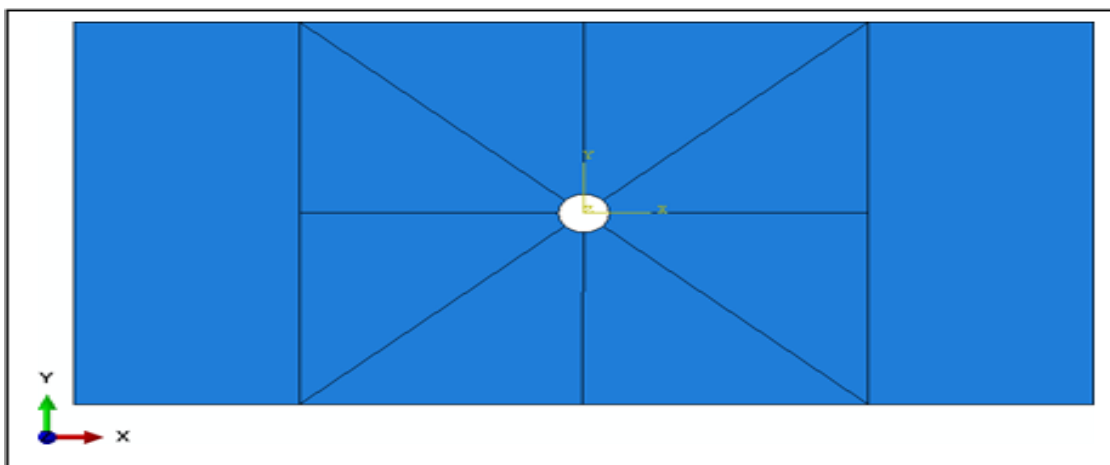


Figure. IV.3 plaque avec trou central

### ➤ Conditions aux limites

Tous les nœuds se trouvant sur l'extrémité fixe de la plaque sont contraints de translater et de tourner (tous les degrés de liberté sont nuls). Les deux cotés latéraux sont bridés ( $U_2=U_3=0$ ), le déplacement n'est permis que dans la direction de l'application du chargement (figure IV.4)

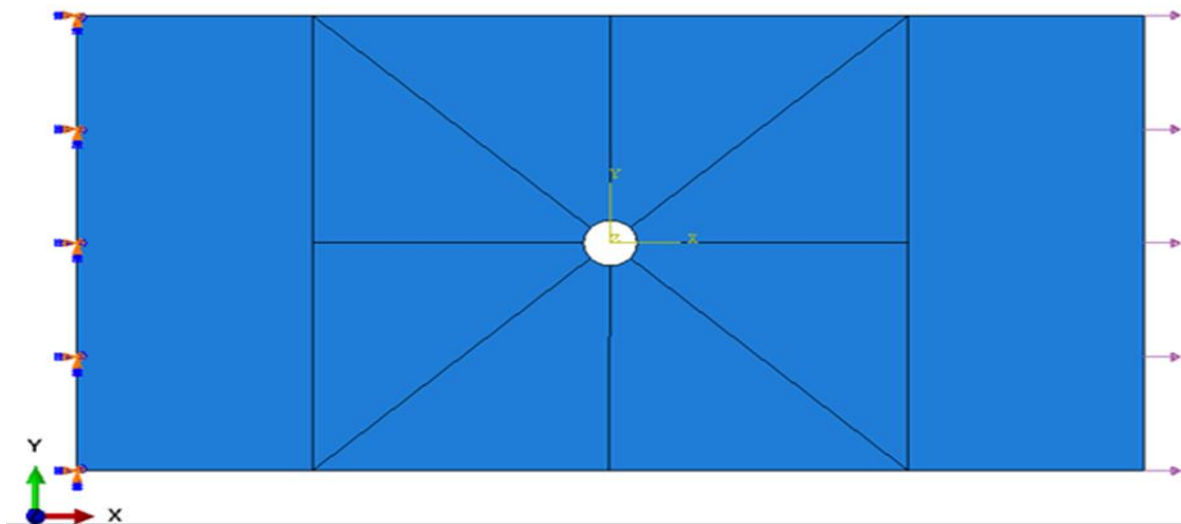


Figure. IV.4 Conditions aux limites imposées à la plaque

### ➤ Maillage

La plaque a été modélisée en des éléments Shell quadratique S8R car ces éléments sont très efficaces pour la capture des concentrations de contraintes, conformément aux recommandations du manuel d'utilisation d'ABAQUS [21]. Le maillage a été raffiné autour du trou (figure IV.5).

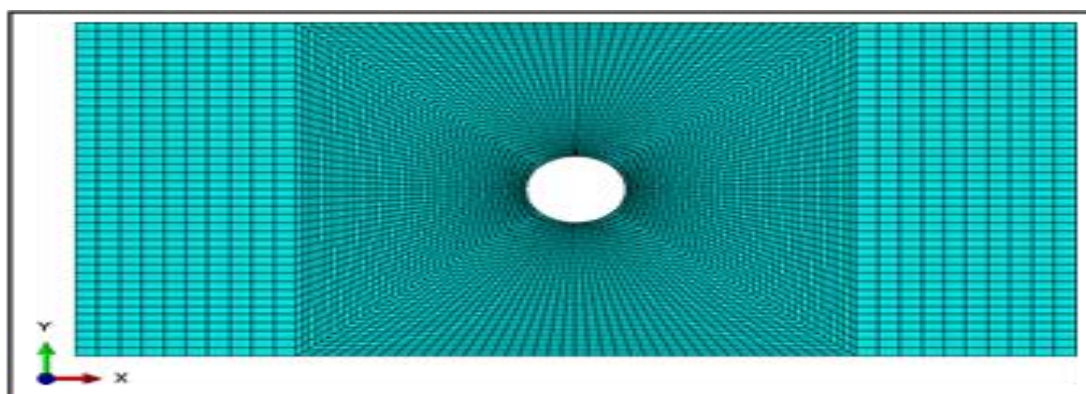
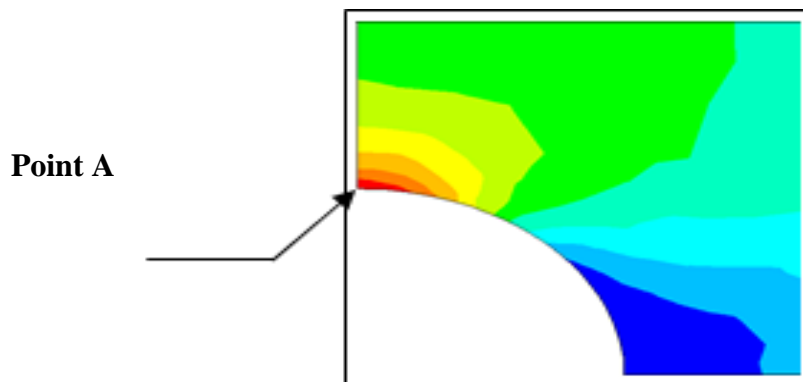


Figure. IV.5 Maillage de la plaque

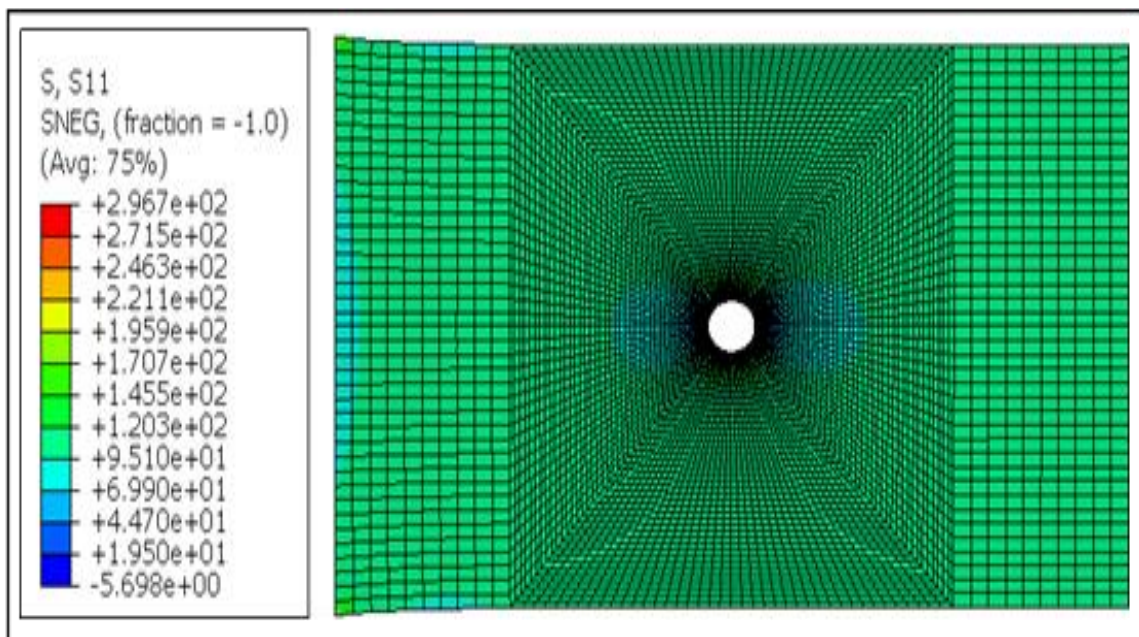
Pour différentes valeurs du rapport ( $d/W$ ) (diamètre du trou sur la largeur de la plaque), nous avons déterminé la valeur de la contrainte maximale au point de calcul (A) conformément à la

théorie dans ce domaine (Fig. IV.5)[22]. Ensuite les valeurs des facteurs de concentration de contraintes général et net sont déterminées puis présentés dans le Tableau IV.1.



*Figure. IV.6 Contrainte maximale au point de calcul*

Diamètre du trou 10 mm



*Figure. IV.7 Simulation et Résultats numérique du comportement mécanique*

*Tableau. IV.1 résultat de calcul numérique des facteurs de concentration de contraintes général et net*

| d/w | $\sigma_{max}$ | $K_{TG}$ | $K_{TN}$ |
|-----|----------------|----------|----------|
| 0.1 | 296.7          | 2.967    | 2.6703   |

#### **IV.6 Problème thermique**

Dans ce cas, la plaque est supposée subir un changement de température  $\Delta T = 100$  °C. La plaque est conçue en utilisant les éléments (Température appariée - Déplacement) Composants Tenseurs de contraintes et déformations obtenus après simulations numériques par code Le compte ABAQUS.

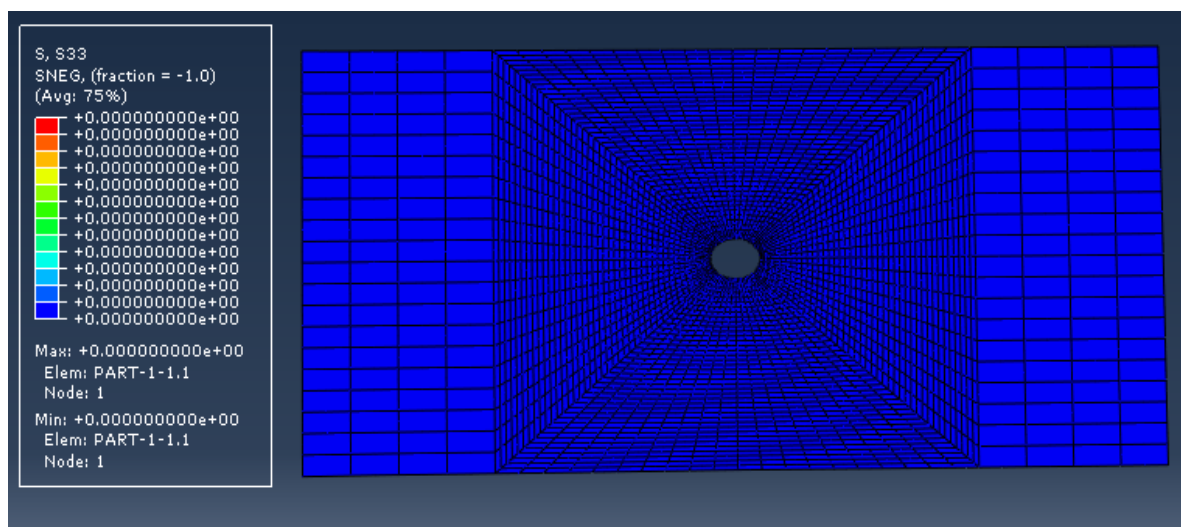
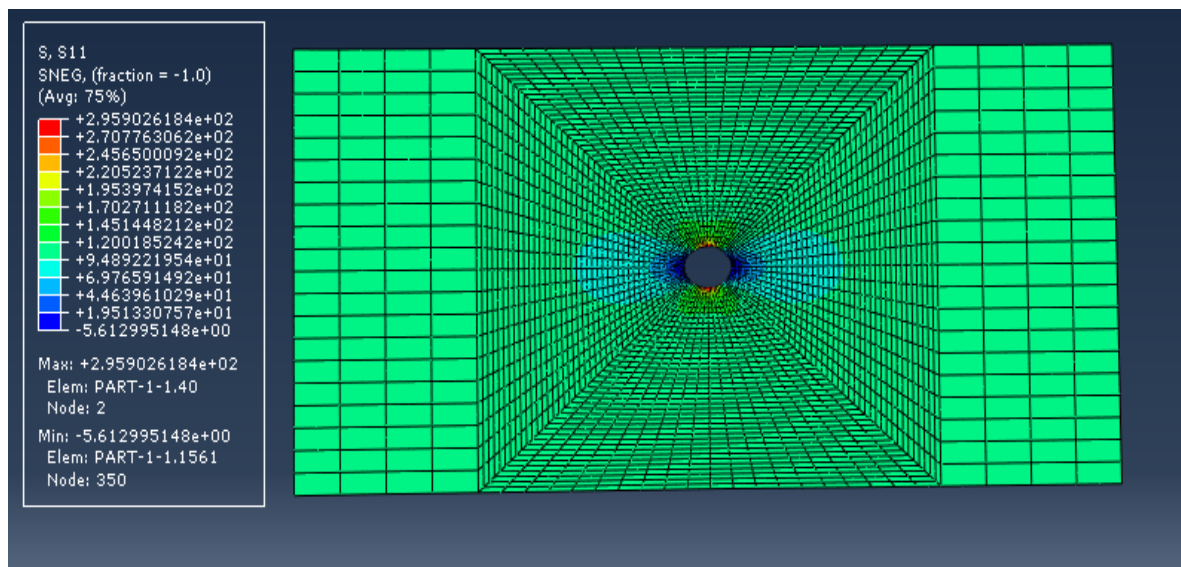
#### **IV.7 Problème thermomécanique**

Cette partie de l'étude est consacrée à la modélisation du comportement thermomécanique La plaque avec un trou central d'un diamètre de 10 mm présente une contrainte mécanique = 100 MPA et Changement de température thermique  $\Delta t = 100$ °C. Ce couplage thermique C'est un couplage dans lequel seuls les effets de dilatation sont pris en compte, c'est-à-dire Effets thermiques sur la mécanique. Effets néfastes mécaniques sur la chaleur, c'est-à-dire La surchauffe due aux déformations n'est pas prise en compte. La déformation globale est due à la fois aux contraintes mécaniques et thermique. Les résultats numériques obtenus après simulation par le code de calcul ABAQUS (composants tenseurs de contrainte et de tension) sont regroupés en Tableau IV -2.

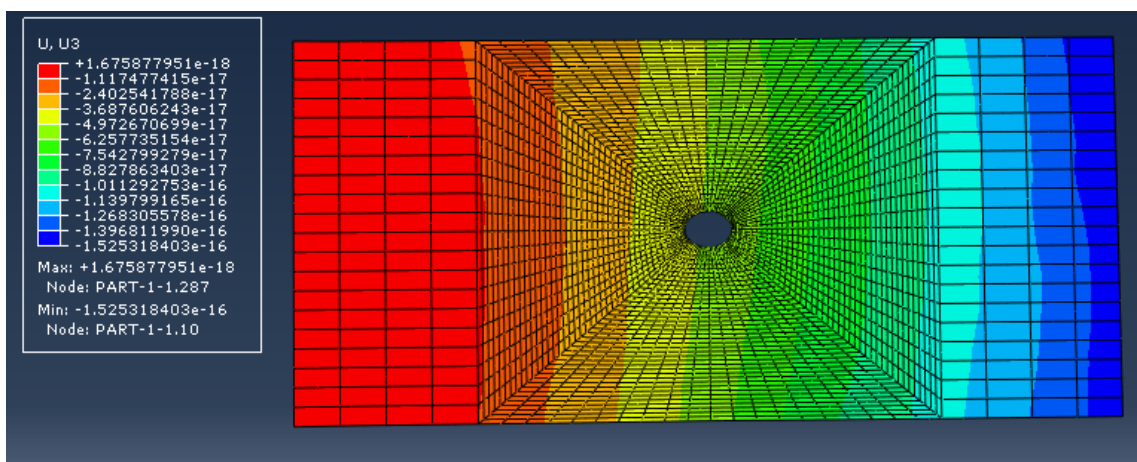
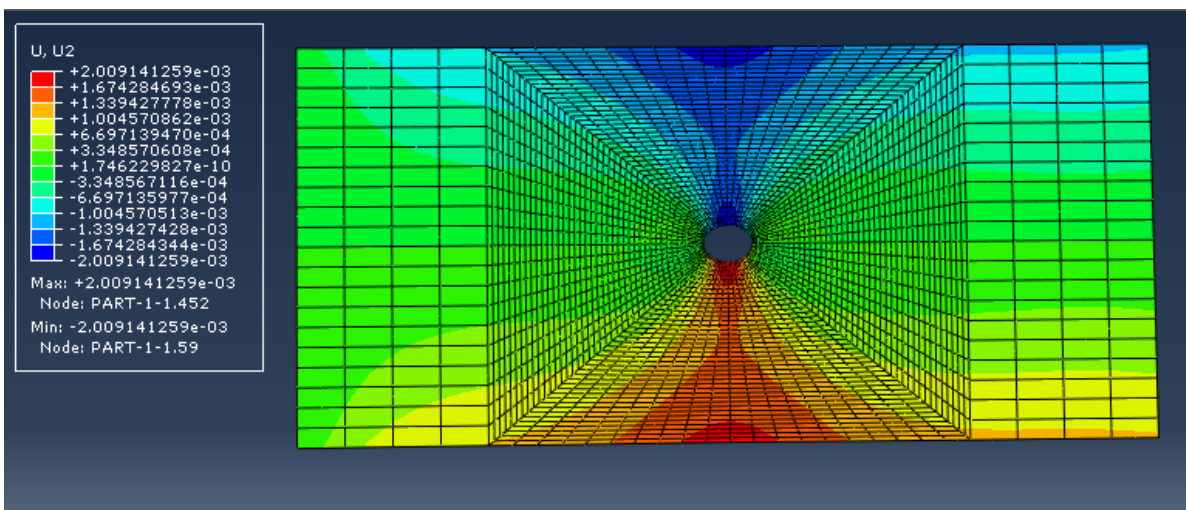
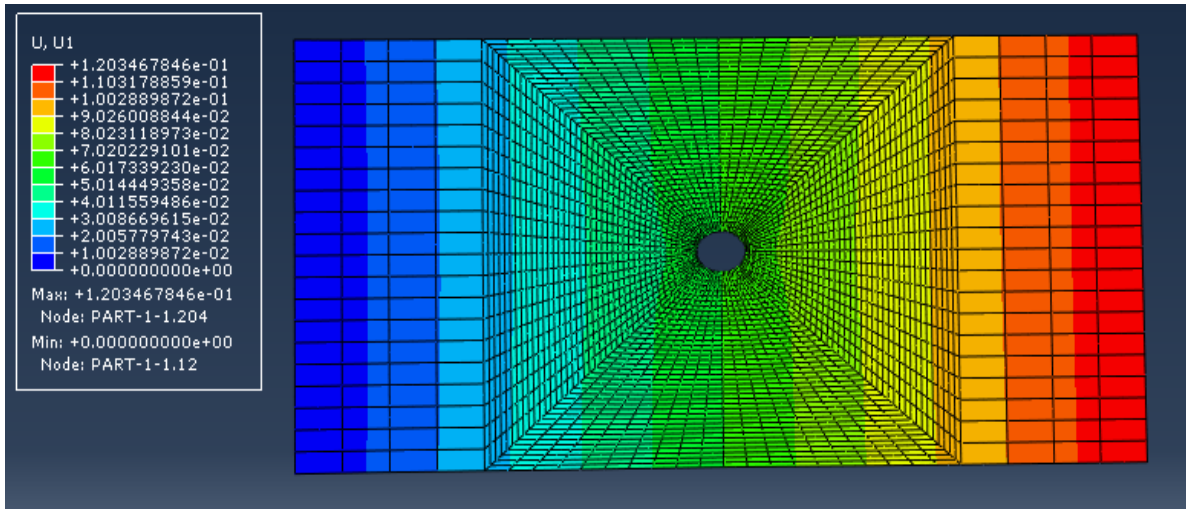
*Tableau IV.2 Résultats numérique de la contrainte et déformation et déplacement comportement thermomécanique*

| $\sigma_1$ | $\sigma_2$ | $\sigma_3$ | $\varepsilon_1$ | $\varepsilon_2$ | $\varepsilon_3$ | $u_1$  | $u_2$   |
|------------|------------|------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------|---------|
| 295.9026   | 48.4323    | 0.0000     | 0.1203          | 0.0020          | 0.0000          | 0.0015 | 0.0002  |
| 270.7763   | 36.4317    | 0.0000     | 0.1103          | 0.0016          | 0.0000          | 0.0014 | 0.0001  |
| 245.6500   | 24.4311    | 0.0000     | 0.1002          | 0.0013          | 0.0000          | 0.0012 | 0.0001  |
| 220.5237   | 12.4305    | 0.0000     | 0.0902          | 0.0010          | 0.0000          | 0.0011 | 0.0000  |
| 195.3947   | 0.4299     | 0.0000     | 0.0802          | 0.0006          | 0.0000          | 0.0010 | 0.0000  |
| 170.2711   | -11.5706   | 0.0000     | 0.0702          | 0.0003          | 0.0000          | 0.0009 | 0.0000  |
| 145.1448   | -23.5712   | 0.0000     | 0.0601          | 0.0000          | 0.0000          | 0.0008 | 0.0000  |
| 120.0185   | -35.5718   | 0.0000     | 0.0501          | -0.0003         | 0.0000          | 0.0007 | 0.0000  |
| 94.8922    | -47.5724   | 0.0000     | 0.0401          | -0.0006         | 0.0000          | 0.0006 | -0.0001 |
| 69.7659    | -59.5730   | 0.0000     | 0.0300          | -0.0010         | 0.0000          | 0.0004 | -0.0001 |
| 44.6396    | -71.5736   | 0.0000     | 0.0200          | -0.0013         | 0.0000          | 0.0003 | -0.0002 |
| 19.5133    | -83.5742   | 0.0000     | 0.0100          | -0.0016         | 0.0000          | 0.0002 | -0.0002 |
| -5.6129    | -95.5748   | 0.0000     | 0.0000          | -0.0020         | 0.0000          | 0.0001 | -0.0003 |

Les résultats sont illustrés dans les images suivantes qui montrent le processus de simulation et les résultats numériques (Fig. IV.7).







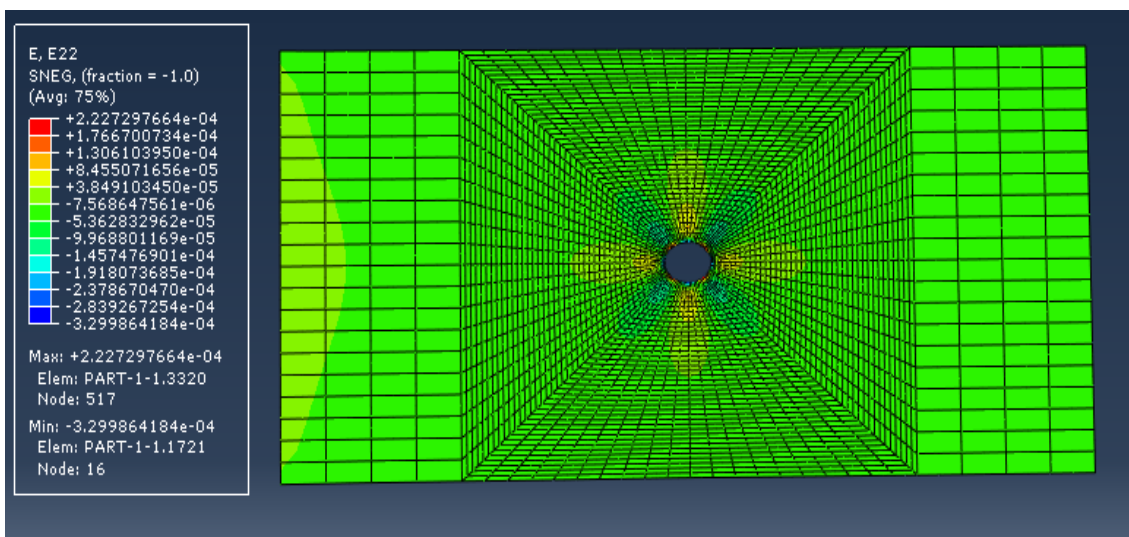
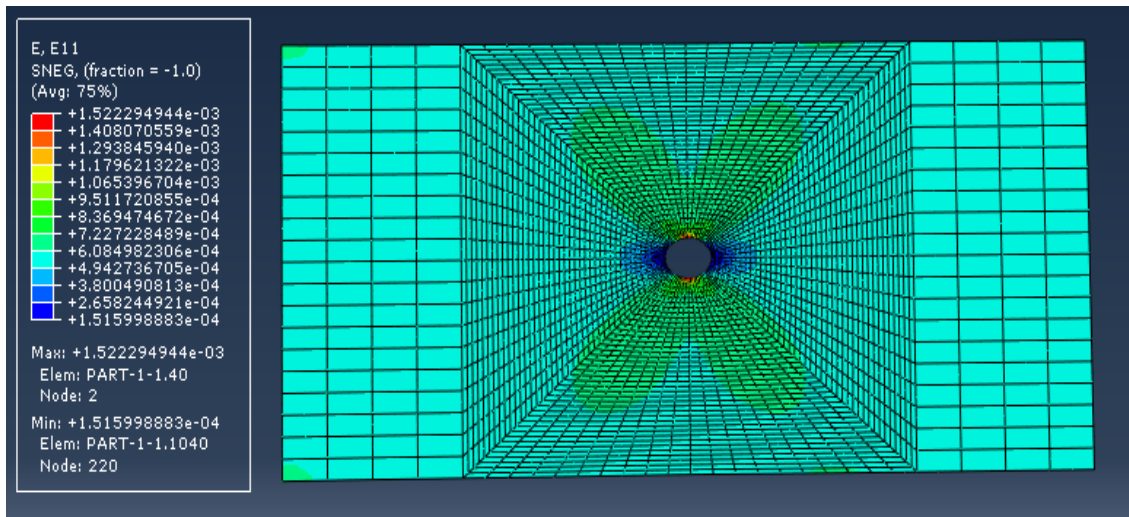


Figure. IV.8 Simulation et résultats numériques de comportement: thermomécanique d'une plaque isotrope troue

#### IV.8 conclusion

Dans ce chapitre, nous avons une analyse numérique du comportement mécanique, thermique et thermomécanique d'une plaque avec un trou central en utilisant le programme de simulation, où les résultats obtenus numériquement sont égaux aux résultats obtenus analytiquement dans le chapitre précédent.

## Conclusion générale

L'objectif spécifique de ce travail est d'étudier le comportement mécanique et thermomécanique d'une plaque avec un trou central et L'effet de la taille du trou. Pour atteindre cet objectif, nous avons commencé par Etude bibliographique détaillée des tôles minces L'étude a été réalisée analytiquement sur la base de Lois de flexibilité et utilisation de logiciels (MATLAB) et numériquement avec le code de compte (ABAQUS), Les résultats obtenus par simulation numérique sont cohérents avec ceux obtenus analytiquement Les résultats obtenus par simulation numérique sont en accord avec ceux obtenus analytiquement En plus de l'étude complète, nous concluons à l'importance du comportement mécanique, thermique et thermomécanique de la plaque à trou central. Nous nous sommes parvenu aux résultats suivants :

- Le bridage de la plaque et la présence du trou central influencent considérablement le Comportement thermique de celle-ci.
- Les déformations apparaissent par rapport aux deux directions principales dans le plan de la plaque à cause du trou central.
- dans le cas du comportement thermomécanique, le bridage de la plaque et la présence du trou central influencent le comportement thermomécanique de celle-ci.
- Les facteurs de concentration de contraintes général (KTG) et net (KTN) varient diminue de manière exponentielle en fonction de l'augmentation du diamètre du trou.

## Références bibliographiques

- [1] Merizig amhammed et oumaya hamza, détermination expérimentale et par simulation numérique des paramètres modaux pour les plaques minces, mémoire master professionnel, université kasdi merbah ouargla, 2014.
- [2] Chaouche abdellah, analyse vibratoire des plaques minces sous différentes conditions aux limites, mémoire de master, université kasdi merbah ouargla, 2013.
- [3] Y sayad, chapitre 1 théorie des plaques, recherche bibliographie des plaques, université biskra, 2012.
- [4] Derbane said, modélisation des plaques par la méthode des éléments finis, mémoire de magister, université mohamed khider biskra, 2012.
- [5] Fettane mimoun et messaoudi youssouf ; étude dynamique des plaques composites moyennement épaisse par la méthode de éléments finis mémoire de projet de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme master en aéronautique, université saad dahleb de Blida, 2014.
- [6] Dalila BELAÏD, transplation de domaine en élasticité, diplôme de magister en génie mécanique, université de constantine, 2010.
- [7] Mellab younes, investigation numérique du comportement thermomécanique d'une Plaque carrée isotrope, mémoire de master construction mécanique, université de tébessa, 2019.
- [8] Lasaad ninouh, caractérisation d'un bio-composite polypropylène/fibres de palmier dattier en flexion trois points, mémoire de master université de biskra, 2019.
- [9] Chouirfat Med Salah, étude et simulation de la dynamique d'un disque mince, diplôme de master, université Larbi ben m'hidi de oum el bouaghi, 2018.
- [10] Itim youcef, modélisation du comportement thermomécanique d'une pipeline : influence des jonctions, mémoire présenté en vue d'obtenir le diplôme de magister en génie mécanique, université mentouri constantine, 2010.
- [11] Moammed bougataya, étude de la dynamique thermique dans un processeur massif À haut niveau de débit, comme exigence partielle de la maîtrise en génie électrique, université du Québec, 2002.
- [12] Jena jeong, Estimation de la fiabilité de la résistance mécanique du cristal soumis à un choc thermique, thèse Présentée à université de metzufr mathématiques in informatique mécanique.
- [13] Khechai abdelhak, etude numérique de l'effet des singularités géométriques sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées, mémoire de master conception et calcul des structures, Université mohamed khider – Biskra, 2013.

- [14] Khechai abdelhak, Etude numérique de l'effet des singularités géométriques sur la distribution des contraintes dans les plaques stratifiées, mémoire de master conception et calcul des structures, Université mohamed khider – Biskra, 2013.
- [15] Marko v. lubarda et Valdo a. lubarda intermediate solid mechanics
- [16] Rabia boubeker, Etude expérimentale et numérique du comportement des plaques trouées en matériaux composites thèse présentée en vue de l'obtention, diplôme de doctorat LMD, en Génie Mécanique Université Mohamed Khider – Biskra, 2016.
- [17] Maizi salah eddin, nouvel élément fini de plaque mince base sur l'approche en déformation les solutions bi-harmoniques de la fonction d'Airy, université 08 mai 1945 de guelma, 2018.
- [18] Menas bilel, étude numérique de la concentration de contraintes dans une plaque composite stratifiée trouée soumise à un champ de traction, mémoire de master, université de tebessa, 2015.
- [19] Samia bessalah et mahdjouba baik, Simulation numérique par la méthode MEF de L'évolution austénite -martensite lors de l'emboutissage de l'acier trip 304l, mémoire de fin des études Du diplôme de master académique en génie mécanique, université mouloud mammeri, de tizi –ouzou, 2018.
- [20] Mr. bouleftour abderrahmane, evaluation d'éléments finis volumiques dans abaqus sur des cas tests non linéaires géométriques, mémoire de fin d'étude en vue de l'obtention du diplôme de master, université de biskra, 2014.
- [21] Abaqus user, manual documentation V.6.14.
- [22] Peterson, R.E. stress concentration factors, john wiley & sons (1997).