الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

UNIVERSITE CHIKH LARBI TBESSI
-TEBESSA-

جامعة الشيخ العربي التبسي
- تبسة -

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

MEMOIRE

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de
MAGISTER EN MATHEMATIQUES

SOLUTION POSITIVE D'UN SYSTEME COOPERATIF ELLIPTIQUE

Option : Systèmes Dynamiques et Analyse fonctionnelle.

Par
ZEDIRI SOUNIA

Sous la direction de
Professeur : ALI DJELLIT

.

Devant le jury

PRESIDENT	S. MECHERI	Prof.	Université de Tebessa
RAPPORTEUR	A. DJELLIT	Prof.	Université d'Annaba
EXAMINATEUR	I. DJELLIT	Prof.	Université d'Annaba
EXAMINATEUR	H. ZERAOULIA	Prof.	Université de Tebessa

Année : 2009

Table des matières

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer ma profonde gratitude envers Monsieur S. Mecheri Professeur à l'université de Tebessa *pour l'honneur qu'il me fait en acceptant de présider ce jury.*

Je remercie vivement Monsieur Ali Djellit Professeur à l'université de Annaba pour le sujet qu'il m'a proposé. Il n'a pas cessé de m'orienter, de me conseiller tout le long de ce travail, je tiens à lui exprimer ici toute ma reconnaissance et tous mes respects.

Je remercie Madame I. Djellit Professeur à l'université de Annaba d'avoir bien voulu faire partie du jury. Je remercie également Monsieur H. Zeraoulia Professeur à l'université de Tebessa pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Enfin, je remercie tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de cet ouvrage.

Résumé

Nous étudions des systèmes elliptiques linéaires ou non linéaires, coopératifs définis sur $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u = m_{11}u + m_{12}v + f,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta v = m_{21}u + m_{22}v + g,\ x \in \mathbb{R}^n, \\ u,\ v \longrightarrow 0 \text{ quand } |x| \longrightarrow +\infty. \end{cases}$$

Concernant les systèmes linéaires coopératifs, l'établissement du principe du maximum et l'application du théorème du *Lax-Milgram* garantissent l'existence de solution positive.

Pour les systèmes non linéaires coopératifs on applique un théorème du point fixe de type *Krasnosel'skii*.

Introduction

Ce travail consiste à étudier quelques systèmes elliptiques de deux équations à deux fonctions inconnues, définis sur $\mathbb{R}^n$ de la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} -\Delta u = m_{11}(x)\, u + m_{12}(x)\, v + f,\ \ x \in \mathbb{R}^n. \\ -\Delta v = m_{21}(x)\, u + m_{22}(x)\, v + g,\ \ x \in \mathbb{R}^n, \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0,\ \ v \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0\ . \end{array} \right.$$

Ici Δ désigne le Laplacien.

Les fonctions $m_{ij}(x), i, j = 1, 2$, dites fonctions poids tendent vers zéro assez vite à l'infini. De plus f, g sont des fonctions mesurables et peuvent dépendre de u et v.

Dans le cas où $m_{ij}(x), i \neq j$ sont positifs le système est dit coopératif.

Lorsque f et g dépendent de u et v il est dit non linéaire (semi-linéaire.).

Ce type de problèmes caractérise plusieurs phénomènes, par exemple : fluides neutonian, l'étude de la théorie du Transport, en biologies et dans l'hydrodynamique, espèces en compétition,...

L'étude des systèmes elliptiques est liée à l'étude des valeurs propres de ces problèmes qui figure dans les travaux de *A. Djellit, A. Djellit-A. Yechoui* et *A. Djellit-J. Fleckinger,...*

Cette étude est une extension des travaux déjà effectue par *A. Djellit* et *A. Yechoui* sur les systèmes coopératifs de la forme

$$\left\{ \begin{array}{c} -\Delta u + qu = a\rho u + b\rho v + f(x), x \in \Omega \\ -\Delta v + qv = c\rho u + d\rho v + g(x), x \in \Omega \\ u = v = 0,\ \text{sur } \partial\Omega, \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, v \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array} \right.$$

Ici Ω un ouvert non borné de $\mathbb{R}^n$, q et ρ sont des fonctions positives tendant vers zéro à l'infini, a, b, c, d sont des constantes avec $b > 0$ et $c > 0$.

Dans ce travail les auteurs établissent une condition nécessaire et suffisante pour l'obtention du principe de Maximum.

L'existence et l'unicité de la solution ont été prouvées par une approche variationnelle. Le principe de Maximum garantit la positivité de la solution.

Ensuite *S. Tas* a étudié des systèmes elliptiques coopératifs avec des poids différents, et des systèmes elliptiques non coopératifs.

Les systèmes elliptiques coopératifs sont de la forme

$$\begin{cases} -\Delta u + q_1 u = \rho_1 u + \rho_2 v + f, \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ -\Delta v + q_2 v = \rho_3 u + \rho_4 v + g, \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u = v = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, v \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

Où $q_i, i = 1, 2,\ \rho_j, j = 1, 2, 3, 4$ sont des fonctions positives qui s'annulent à l'infini, et telles que

$$\begin{array}{c} \rho_2(x) \leq \sqrt{\rho_1(x)\rho_4(x)}, x \in \Omega \\ \rho_3(x) \leq \sqrt{\rho_1(x)\rho_4(x)}, x \in \Omega \end{array},$$

et f, g sont des fonctions mesurables.

Encore une fois l'approche variationnelle est concluante pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du système linéaire.

Cependant l'auteur applique la méthode de sur et sous-solution et le théorème du point fixe de *Schauder* pour prouver l'existence d'une solution du système elliptique coopératif semi-linéaire.

Concernant le système elliptique non coopératif linéaire

$$\begin{cases} -\Delta u + q_1 u = a\rho_1 u + b\rho_2 v + f, x \in \Omega \\ -\Delta v + q_2 v = c\rho_3 u + d\rho_4 v + g, x \in \Omega \\ u = v = 0, \text{ sur } \partial\Omega \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0, v \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

L'auteur approche le système par une suite de système non linéaire admettant des solutions. La suite des solutions construites converge vers la solution du système linéaire,et par la méthode de sur et sous-solution et le théorème du point fixe de *Schauder* l'auteur a prouvé l'existence d'une solution du système semi-linéaire.

D'autres auteurs ont établi en même temps le principe de Maximum et l'existence de la solution de systèmes semi-linéaire nous citons les travaux de

Boccardo- Fleckinger, Fleckinger- Harnendez- deThélin, et *Fleckinger- Pellé-Serag,...*

Le choix des méthodes de résolutions de ces systèmes est étroitement lié aux contraintes imposées, par exemple dans le cas linéaire coopératif l'approche variationnelle est efficace, mais elle n'est plus valable dans les systèmes non coopératifs. D'autres techniques sont engagées, comme les méthodes d'approximations, la méthode des itérations monotones, les théorèmes du point fixe.

En ce qui nous concerne nous étudions précisément des systèmes elliptiques coopératifs, linéaires et non linéaires avec des poids non constants.

Plan

Dans le chapitre I nous énonçons quelques définitions et certains rappels d'analyse fonctionnelle.

Le chapitre II est consacré à l'étude d'un système elliptique linéaire coopératif.

Dans un premier pas nous établissons un principe du Maximum. En suite nous prouvons l'existence et l'unicité de la solution à l'aide de lemme de *Lax-Milgam.* La positivité de la solution est assurée par l'application du principe de Maximum.

Le troisième chapitre, traite l'existence d'un solution non triviale d'un système coopératif semi- linéaire.

Nous supposons que les non linéarités sont des fonctions de *Cratheódory* et vérifient des conditions de croissances. Nous appliquons le théorème du point fixe de type *Krasnosel'skii.*

Il s'agit de construire une application compacte qui laisse invariant le cône positif d'un espace de Banach réflexif. La solution du système n'est autre que le point fixe de cette application.

MOTS CLES

Systèmes elliptiques linéaires, non linéaires, coopératifs- Espace *Sobolev* avec poids- Principe de Maximum- Premières valeurs propres- Conditions de croissance sous critiques- Point fixe de *Krasnosel'skii.*

Chapitre 1

Notations et définitions

Nous commençons par définir une fonction réelle d'expression

$$p\left(x\right)=\left(1+\left|x\right|^{2}\right). \tag{1.1}$$

Pour $\alpha>0$, nous notons

$$p_{\alpha}\left(x\right)=\left(1+\left|x\right|^{2}\right)^{-\alpha}. \tag{1.2}$$

L'espace à poids $\mathbb{L}^{2}_{p_{\alpha}^{-1}}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ désigne l'espace $\mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right)$ muni du poids p_{α}, ie

$$\mathbb{L}^{2}_{p_{\alpha}^{-1}}\left(\mathbb{R}^{n}\right)=\left\{f\in\mathbb{D}'\left(\mathbb{R}^{n}\right),p_{\alpha}^{-\frac{1}{2}}f\in\mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right\}, \tag{1.3}$$

muni de la norme

$$\|f\|_{\mathbb{L}^{2}_{p_{\alpha}^{-1}}}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\left(1+\left|x\right|^{2}\right)^{\alpha}f^{2}dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Nous définissons l'espace de *Sobolev* à poids suivant

$$\mathbb{V}=\left\{u\in\mathbb{D}'\left(\mathbb{R}^{n}\right),p_{1}^{\frac{1}{2}}u\in\mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right),\left|\operatorname{grad}u\right|=\left|\nabla u\right|\in\mathbb{L}^{2}\left(\mathbb{R}^{n}\right)\right\}, \tag{1.4}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{\mathbb{V}}=\left(\int\limits_{\mathbb{R}^{n}}\left(\left|\nabla u\right|^{2}+p_{1}\left|u\right|^{2}\right)dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.5}$$

Nous munissons l'espace produit $\mathbb{V}^2$=$\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ de la norme

$$\|U\|_{\mathbb{V}^2} = \left(\|u\|_{\mathbb{V}}^2 + \|v\|_{\mathbb{V}}^2\right)^{\frac{1}{2}}, U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^2. \tag{1.6}$$

Bien évidemment cette norme est équivalente à la norme suivante

$$\|U\|_{\mathbb{V}^2} = \|u\|_{\mathbb{V}} + \|v\|_{\mathbb{V}}, U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{V}^2. \tag{1.7}$$

Pour $n \geq 2$, $\mathbb{V}$ (resp $\mathbb{V}^2$) est un espace de *Hilbert* séparable (voir [8]).

Pour $n \geq 3$, $\mathbb{V}$ (resp $\mathbb{V}^2$) s'injecte de façon continue dans $\mathbb{L}^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ (resp$\left(\mathbb{L}^{2^*}(\mathbb{R}^n)\right)^2$), où 2^*désigne l'exposons de *Sobolev* de 2, ie

$$2^* = \frac{2n}{n-2}.$$

Toute fonction mesurable h peut être décomposée en deux fonctions mesurables

$$h = h^+ - h^-, \text{ avec } h^{\pm} = \max(0, \pm h). \tag{1.8}$$

Pour $R > 0$ donné, nous désignons par B_R (respB'_R) la boule de $\mathbb{R}^n$, centrée à l'origine et de rayon R.(resp le complémentaire de B_R dans $\mathbb{R}^n$).

Nous introduisons les définitions suivantes :

Définition 1 : soient A, B deux opérateurs linéaires définis sur $\mathbb{V}$, tels que

$$Au = \lambda Bu. \tag{1.9}$$

Nous appelons valeur propre principale de (1.9), toute valeur propre réelle λ associée à une fonction propre qui ne change pas de signe dans $\mathbb{V}$.

Exemple 1.1

$A = -\Delta$.

$Bu = m(x)u$, (B l'opérateur de multiplication).

Caractérisation de λ_1

Soit $\mathbb{V}$ l'espace définie par (1.4), et le problème aux valeurs propres elliptiques

$$\begin{aligned}(P\ ) - \Delta u &= \lambda m(x) u, x \in \mathbb{R}^n. \\ & u \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

qui consiste a trouver le couple $(u,\lambda)\in\mathbb{V}\times\mathbb{R}$, tel que (P) soit vérifié.

Si m décroît assez vite à l'infini par exemple $|m(x)|\leq k\left(1+|x|^2\right)^{-\alpha}$, $\alpha>1$, alors (P) admet une valeur propre $\lambda_1>0$, associée à la fonction propre $\varphi_1\geq 0$.

On caractérise λ_1 à l'aide du principe de *Courant-Hilbert* (principe du Min-Max)

$$\lambda_1=\inf_u\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^2\,dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^n}mu^2dx}=\frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi_1|^2\,dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^n}m\varphi_1^2dx}.$$

On a

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla u\nabla\varphi_1dx=\lambda_1\int\limits_{\mathbb{R}^n}mu\varphi_1dx;\forall u\in\mathbb{V}.$$

Pour plus de détail voir [7].

Définition 2 : (Principe de Maximum) Un opérateur A défini de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}$ satisfait le principe du Maximum si pour Au positif ou nul on a nécessairement u positive ou nul.

Définition 3 : Soit $M=(m_{ij}(x))\,;i,j=1,2$ une matrice ; M est dite positive si pour tout $U=\binom{s}{t}\in\mathbb{R}^2$ on a

$$(MU,U)\geq 0,$$

autrement dit

$$m_{11}s^2+(m_{12}+m_{21})st+m_{22}t^2\geq 0. \tag{1.10}$$

Définition 4 : Une fonction $f:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est dite de *Carathéodory ssi* $f(.,s)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^n$ pour tout $s\in\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}^n$.

Remarque 1 :

Si f est une fonction de *Carathéodory et* $u\in\mathbb{V}$ alors la composition $f(x,u(x))$ est une fonction mesurable.

Définition 5 : Nous définissons l'opérateur de *Nemytskii* F associe à une fonction de *Carathéodory* $f\;(x,u)$ de $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par

$$F(u)(x)=f\;(x,u(x))\,. \tag{1.11}$$

Un résultat remarquable concerne les opérateurs de *Nemytskii.* On peut affirmer que ces opérateurs sont continus si la fonction de *Carathéodory* associée vérifie certaines conditions de croissances en particulier si

$$|f(x,u)| \leq c\left(1+|u|^s\right) \text{ pour } s \geq 1,$$

alors $F : \mathbb{L}^{SP} \longrightarrow \mathbb{L}^{P}$ est continue pour $1 \leq p < +\infty$.

Définition 6 : Soit H un espace de Hilbert muni de la norme usuelle

$$\|u\| = (u,u)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit b une forme linéaire définie sur H à valeurs réelles. Dire que $b(.)$ est continue signifie qu'il $\exists\ M > 0$ tel que

$$M = \sup\{|b(u)|, u \in H, \|u\| = 1\} < +\infty.$$

En particulier pour tout $u \in H$ on a

$$|b(u)| \leq M\|u\|.$$

De même nous disons que la forme bilinéaire $a\ (.,.)$ définie sur $\mathbb{V} \times \mathbb{V}$ est continue s'il existe une constante M' tel que pour tous $u, v \in \mathbb{V}$, on a

$$|a\ (u,v)| \leq M'\|u\|\|v\|.$$

La forme a est dite coercive ou uniformément elliptique sur $\mathbb{V}$ s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in H,\ a(u,u) \geq \alpha\|u\|^2.$$

Lemme 1.1 (*Lax-Milgram*).

Soit $a\ (u,v)$ une forme bilinéaire continue et coercive sur H. Alors pour toute $b \in H\ '$ (le dual de H) il existe $u \in H$ unique tel que

$$a\ (u,v) = b(v),\ \forall v \in H.$$

Nous utilisons les inégalités suivantes à chaque fois que c'est nécessaire tout au long de ce développement.

L'inégalité de *Young :*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.12}$$

L'inégalité de *Cauchy :*

$$|(u,v)| \leq (u,u)^{\frac{1}{2}}\,(v;v)^{\frac{1}{2}}\ ,\ u,\ v \in \mathbb{V}. \tag{1.13}$$

L'inégalité de *Hardy*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\, dx,\ u \in \mathbb{V}, x \in \mathbb{R}^n, n \geq 3. \qquad (1.14)\\ \textit{tel que } C &= \left(\frac{2}{n-2}\right)^2, \text{ (voir [24]).} \end{aligned}$$

1.1 L'ordre et cône

1.1.1 Ordre

Soit X un ensemble non vide et A un sous ensemble de X non vide. Nous disons que la relation $\geq$ définit un ordre sur A, si elle est réflexive, transitive et antisymétrique.

1-Un ensemble muni d'un ordre c'est un ensemble ordonné.

2-Tout sous ensemble d'un ensemble ordonné est aussi un ensemble ordonné.

3-Nous écrivons $x \geq y$ ($x \leq y$) pour dire que $x > y$, ($x < y$) ou $x = y$;

4-Nous écrivons $A \geq x$ ($A \leq x$) si $a \geq x$ ($a \leq x$) pour tout $a \in A \subset X$.

5-Pour tous pair x, y, l'ensemble $[x,y] = \{z \in X, x \leq z \leq y\}$ s'appelle l'intervalle ordonné entre x et y, il est claire que $[x,y]$ est non vide ssi $x \leq y$.

6-Un sous ensemble A de X est dit (borné) ordonné si A est contenu dans un intervalle ordonné.

7-Le sous ensemble A est dit ensemble convexe ordonné si $\forall x, y \in A$: $[x,y] \subset A$.

8-Pour tout sous ensemble non vide A de X nous définissons l'enveloppe convexe de A par

$$[A] = \cup \{[x,y]\,, x, y \in A\}\,;$$

L'ensemble $[A]$ c'est le plus petit sous ensemble convexe qui contient A.

9-Soient X et Y deux ensembles ordonnés (l'ordre dans chaque ensemble est noté par $\geq$).

Une fonction $f : X \rightarrow Y$ est dite croissante (strictement croissante) si $x \leq y$ implique $f(x) \leq f(y)$, $(x < y \Rightarrow f(x) < f(y))$, est dite décroissante (strictement décroissante) si $x \leq y$ implique : $f(x) \geq f(y)$, $(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$.

1.1.2 L'ordre dans un espace vectoriel

Soit V un espace vectoriel réel. L'ordre dans V est dit linéaire si
1-$x \geq y \Rightarrow x + z \geq y + z$ pour tout $z \in V$, $x, y \in V$,
2-$x \geq y \Rightarrow \alpha x \geq \alpha y$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$.

Un espace vectoriel réel muni d'un ordre linéaire est dit espace vectoriel ordonné.

Soit V un espace vectoriel réel ordonné (E.V.O).

Soit $P = \{x \in \mathbb{V}, x \geq 0\}$ Alors P vérifie les propriétés suivantes
1-$P + P \subset P$,
2-$\mathbb{R}_+ P \subset P$,
3-$P \cap \{-P\} = \{0\}$.

Le sous ensemble non vide P qui vérifie les propriétés (1,2,3) s'appelle un cône ; tout cône est convexe.

Un cône P est générateur si $V = P - P$. $(P - P = \{x - y, x \in P, y \in P\})$.

Tout cône P dans un espace vectoriel réel défini un ordre linéaire sur V pour $x \leq y \iff x - y \in P$. (L'ordre induit par le cône P)

Le cône $P = \{x \in V, x > 0\}$ est dit le cône positif.. Par conséquent pour tout espace vectoriel V il existe une correspondance (un par un) entre les familles linéaires ordonnées et les familles des cônes dans V.

Exemple 1.2 (L'espace des fonctions)

Soit $\mathbb{R}^X$ l'espace vectoriel des fonctions $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, le cône positif dans $\mathbb{R}^X$ c'est

$$P = \mathbb{R}_+^X = \{f : X \longrightarrow \mathbb{R} / f(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \in X\}.$$

1.1.3 L'ordre dans un Banach

Soit $X = (X, \|.\|)$ un espace de Banach ordonné par un cône C (E.B.O). Alors nous disons que l'espace X est ordonné, si le cône positif est fermé.

Dans un Banach X on dit que la norme $\|.\|$ est une norme monotone ssi

$$0 \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq \|y\|, \forall x, y \in X.$$

Et elle dite semi monotone ssi

$$\exists \delta < 0, 0 \leq x \leq y \Longrightarrow \|x\| \leq \delta \|y\|, \forall x, y \in X.$$

Si la norme est semi monotone, alors le cône C est dit normal.

Soit (X, C) un espace de Banach ordonné par le cône C (E.B.O).

Théorème 1.1

Dans l'espace (X, C) les résultats suivants sont équivalents

1-C est normal.

2-tout intervalle ordonné est borné.

3-il existe une norme semi monotone équivalente à la norme de X.

4-l'enveloppe convexe d'un ensemble ordonné est ordonnée.

5-il existe une constante positive α telle que :

$$\|x + y\| \geq \alpha \text{ pour tous vecteurs unitaires } x,\ y \in C.$$

Théorème 1.2

Le cône C donne une décomposition ouverte de X ssi C est générateur.

Proposition 1.1

Si le cône positif dans (X, C) n'admet pas un intérieur vide. Alors il est générateur.

Exemple 1.3 (Sous espaces et injections continues)

Soit E et F deux espaces de Banach, tel que F est un sous espace vectoriel de E.

L'injection naturelle $i : F \longrightarrow E$ définie par $i(x) = x$ est continue, on dit que F s'injecte continûment dans E on écrit $F \hookrightarrow E$.

Soit (E, P) un (E.B.O) et F un espace tel que $F \hookrightarrow E$.

Alors F est un (E.V.O), par respect de l'ordre d'inclusion, le cône positif dans F c'est $i^{-1}(P)$, puisque I est continue et $i^{-1}(P)$ est fermé dans F, alors $(F, i^{-1}(P))$ c'est un (E.B.O). En plus si F est un sous espace fermé de E et P normale alors $i^{-1}(P)$ est aussi normale, (voir [15]).

1.2 Le degré topologique de Leray-Schauder

Soit X un espace de Banach

Lemme 1.2 Soit Ω un ouvert borné de X, $T : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$. Alors si $\varepsilon > 0$ est tel que $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$

pour tout $u \in \partial\Omega$ il existe un sous-espace vectoriel de dimension finie E_ε de X et un opérateur $T_\varepsilon : \bar{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ tel que

$$\begin{aligned} \forall u &\in \overline{\Omega}, \|T_\varepsilon u - Tu\| \leq \varepsilon, \\ \forall u &\in \partial\Omega, \|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Lemme 1.3 Soit Ω un ouvert borné de X, et $T : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$, et $\varepsilon > 0$, tel que $\|u - Tu\| \geq 4\varepsilon$ sur $\partial\Omega$. On suppose que $T_{1\varepsilon}$ et $T_{2\varepsilon}$ sont deux approximations de T telle que pour i=1,2 on ait $T_{i\varepsilon}(\Omega) \subset E_\varepsilon$, où E_ε est défini par le lemme 1.2, et de plus
$\|T_{i\varepsilon}u - Tu\| \leq \varepsilon$ pour $u \in \Omega$, et $\|u - T_\varepsilon u\| \geq 3\varepsilon$ pour $u \in \partial\Omega$. Alors, si F est un s.e.v de dimension finie de X contenant E_ε tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \Phi$, on a

$$\deg(I - T_{1\varepsilon}, \Omega_F, 0) = \deg_F(I_F - T_{2\varepsilon}, \Omega_F, 0).$$

Théorème 1.3 Soit Ω un ouvert borné de X , et $T : \bar{\Omega} \longrightarrow X$ un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega$, alors $\varepsilon > 0$, $E_\varepsilon \subset X$ et $T_\varepsilon : \bar{\Omega} \longrightarrow E_\varepsilon$ étant donnés par le lemme 1.2, on considère F un s.e.v de dimension finie de X contenant E_ε tel que $\Omega_F = \Omega \cap F \neq \Phi$.

On définit le degré topologique de *Leray-Schauder* par

$$\deg(I - T, \Omega, 0) = \deg_F(I_F - T_\varepsilon, \Omega_F, 0_F). \text{ (voir[23]).} \tag{1.15}$$

1.2.1 Propriétés du degré de Leray-Schauder

1-(Additivité). Si Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts bornés disjoints et
$T : \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \to X$ est un opérateur compact sans point fixe sur $\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$. Alors

$$\deg(I - T, \Omega_1 \cup \Omega_2, 0) = \deg(I - T, \Omega_1, 0) + \deg(I - T, \Omega_2, 0). \tag{1.16}$$

2-Si $b \in X$ et $b \notin (I - T)(\partial\Omega)$, alors le degré de $I - T$ par rapport à la cible b est défini comme étant

$$\deg(I - T, \Omega, b) = \deg(I - T - b, \Omega, 0). \tag{1.17}$$

3-Si $b \in X$ est pour tout $u \in \overline{\Omega}$ on a

$$u - Tu \neq b.$$

Alors

$$\deg (I - T, \Omega, b) = 0. \tag{1.18}$$

4-Si $b \in X$ tel que pour tout $u \in \partial\Omega$ on a $u - Tu \neq b$, et
$\deg (I - T, \Omega, b) \neq 0$.
Alors il existe $u \in \Omega$ tel que $u - Tu = b$.

5-Soient T_1, T_2 deux applications compactes de $\overline{\Omega}$ dans X et $b \in X$ tel que

$$0 < dist \; (b, T_1 (\partial\Omega) \cup T_2 (\partial\Omega)) = 4\varepsilon.$$

Alors si

$$\sup_{u \, \in\overline{\Omega}} \|T_1 u - T_2 u\| \leq \varepsilon, \text{ on a}$$

$$\deg (I - T_1, \Omega, b) = \deg(I - T_2, \Omega, b). \tag{1.19}$$

6-Soient $b \in X$ et $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow X$ une application compacte telle que pour tout $(u, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ on ait $u - H (u - t) \neq b$.

Alors le degré topologique $\deg (I - H (., 0) , \Omega, b)$ est constant pour
$t \in [0, 1]$,

$$\deg (I - H (., t) , \Omega, b) = \deg (I - H (., 0) , \Omega, b) .$$

7-Soient $b, b' \in X$ tels que $b, b' \notin (I - T) \partial\Omega$. Alors si b et b' appartiennent à la même composante connexe de $X \backslash \; (I - T) (\partial\Omega)$ on a

$$\deg (I - T, \Omega, b) = \deg(I - T, \Omega, b'). \tag{1.20}$$

Théorème1.4

Soit C un cône dans un Banach X, et $\Phi : C \longrightarrow C$ une application compacte. Supposons qu'il existe deux réels R, $r > 0$ tel que

(1) $x \neq t \; \Phi (x)$ pour $0 < t < 1$ et $\|x\| = r$, $x \in C$,

(2) Il existe une application compacte $F : \bar{B}_R \times [0, +\infty) \longrightarrow C$ tel que
$F (x, 0) = \Phi (x)$ pour $\|x\| = R$, $F (x, t) \neq x$ pour $\|x\| = R$, $t \geq 0$, et

$F(x,t) = x$ n'admet pas une solution $x \in \bar{B_R}$ pour $t \geq t_0$. Alors
1) (1) $\Longrightarrow i_C(\Phi, B_r) = 1$,
2) (2) $\Longrightarrow i_C(\Phi, B_R) = 0$.

1.3 Théorème du point fixe (de type *Krasnosel'skii*)

Théorème 1.5

Soit C un cône dans un espace de Banach X, et soit $\varphi : C \longrightarrow C$ un opérateur compact. Supposons qu'il existe deux constantes positives r; R et $t_0 > 0$ tels que

1/ $x \neq t\varphi(x)$, $|x| = r$, $x \in C$, $0 < t_0 \leq t$.
2/ Il existe une application $\psi : C \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow C$; telle que
(i) $\psi(x;0) = \varphi(x)$, $|x| \leq R$, $x \in C$,
(ii) $\psi(x;t) \neq x$, $|x| \leq R$, $x \in C$, $t \geq t_{0,}$
(iii) $\psi(x;t) \neq x$, $|x| = R$, $x \in C$, $t \geq 0$.
Alors φ admet un point fixe dans C, avec $r < |x| < R$.

Chapitre 2

Existence de solutions positives d'un système linéaire elliptique coopératif dans $\mathbb{R}^n$

Considérons le système elliptique linéaire coopératif suivant

$$(S_L)\left\{\begin{array}{c} -\Delta u = m_{11}(x)\,u + m_{12}(x)\,v + f(x)\,, x \in \mathbb{R}^n \\ -\Delta v = m_{21}(x)\,u + m_{22}(x) + g(x)\,, x \in \mathbb{R}^n \\ u \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0; v \underset{|x|\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{array}\right.$$

Réécrivons le système (S_L) sous la forme

$$-\Delta U = M(x)\,U + F(x)\,, x \in \mathbb{R}^n,$$

avec $U = \binom{u}{v}$, $M(x) = (m_{ij}(x))$, $F(x) = \binom{f(x)}{g(x)}$ et $\Delta U = \binom{\Delta u}{\Delta v}$.

HYPOTHESES

(2.1) $f,\, g \in \mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)$,

(2.2) $\forall i, j = 1, 2;\ \exists C_{ij} > 0, \alpha > 1,\ |m_{ij}(x)| < C_{ij} p_\alpha(x)\ .p.p$ dans $\mathbb{R}^n$.

(2.3) La matrice $(-M)$ est positive.

En outre pour prouver l'existence et l'unicité de la solution du système (S_L) le lemme de *Lax-Milgram* prend toute sa dimension.

La positivité de la solution est une conséquence du principe du maximum.

2.1 Le principe de Maximum

Lemme 2.1
Si la matrice $-M(x)$ est positive alors le système (S_L) satisfait le principe du maximum.

Preuve :

Réécrivons le système (S_L) sous la forme :

$$(S_L') \begin{cases} -\Delta u - \lambda_1 m u = (m_{11} - \lambda_1 m) u + m_{12} v + f, x \in \mathbb{R}^n \\ -\Delta v - \lambda_1 m v = m_{21} u + (m_{22} - \lambda_1 m) v + g, x \in \mathbb{R}^n \\ u \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0; v \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

Ici $m(x) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}^n} |m_{ij}(x)|$

Puisque $-M(x)$ est positive l'expression $(\lambda_1 m(x) I - M)$ est positive.

Soit maintenant $f \geq 0, g \geq 0$ et supposons que u et v change de signe. En multipliant la première équation de (S_L') par u^- et intégrant sur $\mathbb{R}^n$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla u^- dx - \int_{\mathbb{R}^n} \lambda_1 m \, \mathrm{u} u^- dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (m_{11} - \lambda_1 m) \, \mathrm{u} u^- dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} m_{12} u^- v dx + \int_{\mathbb{R}^n} f u^- dx. \end{aligned}$$

En vertu de la caractérisation variationnelle de λ_1

$$-\int_{\mathbb{R}^n} (m_{11} - \lambda_1 m) \left| u^- \right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{12} u^- v^- dx + \int_{\mathbb{R}^n} f u^- dx \leq 0.$$

Alors

$$-\int_{\mathbb{R}^n} (m_{11} - \lambda_1 m) \left| u^- \right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{12} u^- v^- dx \leq 0$$

Donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1 m - m_{11}) \left| u^- \right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{12} u^- v^- dx \leq 0,$$

En procédant de manière similaire sur la deuxième équation de $(S_L\acute{})$, nous trouvons

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1 m - m_{22}) \left|v^-\right|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{21} u^- v^- dx \leq 0.$$

Ce qui contredit le fait que la matrice $(\lambda_1 mI - M(x))$ est positive.

Par conséquence $u \geq 0$ et $v \geq 0$.

2.2 Résolution du système linéaire

Nous définissons la forme bilinéaire L sur $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})^2$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\begin{aligned} L\ [(u,v);(w,z)] &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \nabla w dx + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla z dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{11} uw dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^n} m_{22} vz dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{12} vw dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{21} uz dx \end{aligned}$$

et la forme linéaire F sur $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})$ dans $\mathbb{R}$ par

$$F(w,z) = \int_{\mathbb{R}^n} fw dx + \int_{\mathbb{R}^n} gz dx.$$

Nous écrivons en suite le système (S_L) sous sa forme variationnelle

$$L\ [(u,v);(w,z)] = F(w,z);(u,v),(w,z) \in (\mathbb{V}\times\mathbb{V}).$$

Nous allons montrer que la forme L est continue et coercive sur $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})^2$, et que la forme F est continue sur $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})$. Les propriétés de L et F garantissent l'existence d'une solution unique du système (S_L), en vertu du lemme de *Lax-Milgram.*

Théorème 2.1

On suppose que les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3) sont satisfaites. Alors le système (S_L) admet une unique solution positive.

Preuve :

La forme L est continue sur $(\mathbb{V}\times\mathbb{V})^2$.

En effet

$$\begin{aligned}\left|L\ \left[(u,v);(w,z)\right]\right| &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla u\nabla w\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla v\nabla z\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|m_{11}\right|\left|uw\right|dx\\ &\quad+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|m_{22}\right|\left|vz\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|m_{12}\right|\left|vw\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|m_{21}\right|\left|uz\right|dx.\end{aligned}$$

En tenant compte de (2.2) on trouve

$$\left|L\ \left[(u,v);(w,z)\right]\right|\leq\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla u\nabla w\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla v\nabla z\right|dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|p_1\right|\left(\left|uw\right|+\left|vz\right|+\left|vw\right|+\left|uz\right|\right)dx$$

Appliquons l'inégalité de Cauchy

$$\begin{aligned}\left|L\ \left[(u,v);(w,z)\right]\right| &\leq \left\|\nabla u\right\|_{\mathbb{L}^2}\left\|\nabla w\right\|_{\mathbb{L}^2}+\left\|\nabla v\right\|_{\mathbb{L}^2}\left\|\nabla z\right\|_{\mathbb{L}^2}+\left\|p_1u\right\|_{\mathbb{L}^2}\left\|p_1w\right\|_{\mathbb{L}^2}\\ &\quad+\left\|p_1v\right\|_{\mathbb{L}^2}\left\|p_1z\right\|_{\mathbb{L}^2}+\left\|p_1v\right\|_{\mathbb{L}^2}\left\|p_1w\right\|_{\mathbb{L}^2}+\left\|p_1u\right\|_{\mathbb{L}^2}\left\|p_1z\right\|_{\mathbb{L}^2},\\ &\leq \left\|\nabla u\right\|_{\mathbb{L}^2}\left\|\nabla w\right\|_{\mathbb{L}^2}+\left\|p_1w\right\|_{\mathbb{L}^2}\left(\left\|p_1u\right\|_{\mathbb{L}^2}+\left\|p_1v\right\|_{\mathbb{L}^2}\right)\\ &\quad+\left\|\nabla v\right\|_{\mathbb{L}^2}\left\|\nabla z\right\|_{\mathbb{L}^2}+\left\|p_1z\right\|_{\mathbb{L}^2}\left(\left\|p_1u\right\|_{\mathbb{L}^2}+\left\|p_1v\right\|_{\mathbb{L}^2}\right),\\ &\leq \left\|w\right\|_{\mathbb{V}}\left(\left\|u\right\|_{\mathbb{V}}+\left\|v\right\|_{\mathbb{V}}\right)+\left\|z\right\|_{\mathbb{V}}\left(\left\|u\right\|_{\mathbb{V}}+\left\|v\right\|_{\mathbb{V}}\right).\end{aligned}$$

La croecivité de L est une conséquence de l'hypothèse (2.3) et de l'inégalité de *Hardy*

$$\begin{aligned}L\left[(u,v);(u,v)\right] &= \int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla u\right|^2dx+\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\nabla v\right|^2dx-\int\limits_{\mathbb{R}^n}m_{11}\left|u\right|^2dx\\ &\quad-\int\limits_{\mathbb{R}^n}m_{22}\left|v\right|^2dx-\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(m_{12}+m_{21}\right)uvdx.\end{aligned}$$

Puisque $(-M)$ est positive on a :

$$L\left[(u,v)\,;(u,v)\right] \geq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2\,dx, .$$

Nous appliquons l'inégalité de *Hardy* pour obtenir que

$$L\left[(u,v)\,;(u,v)\right] \geq K\left(\|u\|_{\mathbb{V}}^2 + \|v\|_{\mathbb{V}}^2\right).$$

Remarque 2 :

Si $n \geq 5$, la condition (2.3) n'est pas nécessaire pour démontrer la coercivité de L.

En effet :

$$\begin{aligned} L\left[(u,v)\,;(u,v)\right] &\geq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2\,dx \\ &\quad -\int\limits_{\mathbb{R}^n} m_{11}\,|u|^2\,dx - \int\limits_{\mathbb{R}^n} m_{22}\,|v|^2\,dx - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} (m_{12}+m_{21})\left(|u|^2+|v|^2\right)dx, \\ &\geq \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2\,dx - 2\int\limits_{\mathbb{R}^n} m\left(|u|^2+|v|^2\right)dx. \end{aligned}$$

Et par la caractérisation variationelle de λ_1 on a

$$L\left[(u,v)\,;(u,v)\right] \geq \left(1-\frac{2}{\lambda_1}\right)\left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2\,dx\right).$$

Puisque nous avons

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^2}dx \leq \left(\frac{2}{n-2}\right)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx,\ u \in \mathbb{V},$$

donc

$$\left(\frac{2}{n-2}\right)^{-2} \leq \frac{\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,dx}{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^2}{|x|^2}dx},$$

alors

$$\left(\frac{n-2}{2}\right)^2 \leq \lambda_1,$$

et pour que la quantité $\left(\frac{n-2}{2}\right)^2$ soit supérieur strictement à 2 il suffit que $n \geq 5$. D'où la coercivité de L.

Continuité de la forme F

$$\begin{aligned}
|F(w,z)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |fw|\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |gz|\,dx, \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} p_1^{-1} f^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p_1 w^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} p_1^{-1} g^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} p_1 z^2 dx\right)^{\frac{1}{2}};
\end{aligned}$$

$$\leq \|f\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \|w\|_{\mathbb{V}} + \|g\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \|z\|_{\mathbb{V}}.$$

$$\leq \max\left(\|f\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}}, \|g\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}}\right)(\|w\|_{\mathbb{V}} + \|z\|_{\mathbb{V}})$$

D'où la continuité de la forme F.

Par conséquent le système (S_L) admet bien une solution unique qui est positive grâce au lemme (1.1).

Chapitre 3

Existence de solutions positives d'un système non linéaire elliptique coopératif dans IR^n

Maintenant nous allons établir l'existence des solutions positives pour le système non linéaire. Pour cela nous utilisons les résultats du lemme suivant

Lemme 3.1

Si la matrice $(-M)$ *est positive, et* $-\Delta U \leq M(x)U$, *dans* $\mathbb{R}^n$, $U = \binom{u}{v} \in \mathbb{V}^2$, *et* $U \geq 0$. *Alors* $U = 0$.

Preuve :

Soit $U \geq 0$, on a

$$-\Delta U \leq M(x)U \iff (-\Delta U, U) + (-M(x)U, U) \leq 0,$$

$$\iff \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{11} |u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{22} |v|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^n} (m_{12} + m_{21}) uvdx \leq 0.$$

Par conséquence $u = v = 0$.

Considérons le système elliptique non linéaire coopératif suivant :

$$(S_N) \quad \begin{cases} -\Delta u_1 = m_{11}(x) u_1 + m_{12}(x) u_2 + f_1(x, u_1, u_2) ; x \in \mathbb{R}^n. \\ -\Delta u_2 = m_{11}(x) u_1 + m_{12}(x) u_2 + f_2(x, u_1, u_2) ; x \in \mathbb{R}^n. \\ \qquad u_1 \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0; u_2 \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

où bien

$$-\Delta U = M(x)\,U + \mathbf{F}(x,U).$$

Ici $U = \binom{u_1}{u_2}$, $\Delta U = \binom{\Delta u_1}{\Delta u_2}$, $M(x) = (m_{ij}(x))$.

L'opérateur $\mathbf{F}$ est l'opérateur de *Nemytskii* associé au vecteur de fonctions de *Carathéodory* $\binom{f_1}{f_2}$ défini par l'expression

$$\mathbf{F}(x,U) = \begin{pmatrix} f_1(x,u_1,u_2) \\ f_2(x,u_1,u_2) \end{pmatrix}.$$

HYPOTHESES

On suppose que

(3.1) Les hypothèses (2.1), (2.2) et (2.3) sont vérifiées

(3.2) Les non linéarités f_k, $k=1,2$ vérifient des conditions de croissance

$$|f_k(x,u_1,u_2)| \le a_k(x)\left(\sum_{i=1}^{2}|u_i|\right)^{\beta_k} + b_k(x),$$

tels que

$$\begin{aligned} 0 &< \beta_k(x) < \frac{2^*}{2}, \\ 0 &\le p_1^{-1}a_k^2(x) \in \mathbb{L}^{\gamma_k}(\mathbb{R}^n)\,;\gamma_k = \frac{2^*}{2^*-2\beta_k}, \\ 0 &\le b_k(x) \in \mathbb{L}^2_{P_1^{-1}}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

(3.3)

$$f_k(x,u_1,u_2) \ge \mu_k p_1(x)\,u_k - c_k p_1(x)\,,\mu_k \ge \lambda_1 + 1, \text{ pour } u_k \ge 0, k=1,2.$$

(3.4) Soit $U=(u_1,u_2)$; $|U|$ est la norme euclidienne de U dans $\mathbb{R}^2$, et

$$\lim_{|U|\longrightarrow 0} \frac{f_k(x,U)}{p_1|U|} = 0.$$

Lemme 3.2

L'opérateur de Nemytskii $\mathbf{F}$ *est compact de* $\mathbb{V}^2$ *dans* $\left(\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)\right)^2$.

Preuve :

Soit $U_n = (u_1^n, u_2^n)$ une suite bornée dans $\mathbb{V}^2$. Pour $R > 0$, nous avons :

$$\begin{aligned}\left\|\mathbf{F}(x,U_p)-\mathbf{F}(x.,U_q)\right\|^2 &\leq \left(1+R^2\right)\sum_{k=1}^{2}\int_{B_R}\left|f_k(x,U_p)-f_k(x,U_q)\right|^2dx\\ &+\sum_{k=1}^{2}\int_{B_R'}p_1^{-1}\left|f_k(x,U_p)-f_k(x,U_q)\right|^2dx.\end{aligned}$$

La suite (U_n) est une suite bornée de $\left(H^1(B_R)\right)^2$ donc elle l'est dans $\left(\mathbb{L}^2(B_R)\right)^2$, alors on peut extraire une sous suite notée encore (U_n) qui converge fortement dans $\left(\mathbb{L}^2(B_R)\right)^2$.

D'autre part $\int_{B_R}\left|f_k(x,U_p)-f_k(x,U_q)\right|^2dx$ tend vers zéro quand p, q tendent vers l'infini, car l'opérateur de *Nemytskii* est continue de $\mathbb{L}^2(B_R)\longrightarrow\mathbb{L}^2(B_R)$.

D'autre part

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2}\int_{B_R'}p_1^{-1}\left|f_k(x,U_p)-f_k(x,U_q)\right|^2dx &\leq 2\sum_{k=1}^{2}\int_{B_R'}p_1^{-1}\left|f_k(x,U_p)\right|^2dx\\ &+2\sum_{k=1}^{2}\int_{B_R'}p_1^{-1}\left|f_k(x,U_q)\right|^2dx;\end{aligned}$$

tenant compte l'hypothèse (3.2), on a

$$\int_{B_R'}p_1^{-1}\left|f_k(x,U_m)\right|^2dx \leq \int_{B_R'}p_1^{-1}\left(a_k(x)\left(\sum_{i=1}^{2}\left|u_i^m\right|\right)^{\beta_k}+b_k(x)\right)^2dx,$$

$$\begin{aligned}&\leq 2\int_{B_R'}p_1^{-1}\left(a_k^2(x)\left(\sum_{i=1}^{2}\left|u_i^m\right|\right)^{2\beta_k}+b_k^2(x)\right)dx,\\ k &= 1,2, m=p,q.\end{aligned}$$

On a $b_k \in \mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)$ donc $\int\limits_{B'_R} p_1^{-1} b_k^2(x)\,dx$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini.

En outre le terme $\int\limits_{B'_R} p_1^{-1} a_k^2(x) \left(\sum\limits_{i=1}^{2} |u_i^m|\right)^{2\beta_k} dx$ est aussi petit que l'on veut pour R suffisamment grand.

En effet puisque $\mathbb{V}^2$ s'injecte continûment dans $\left(\mathbb{L}^{2^*}(\mathbb{R}^n)\right)^2$ nous avons, on applique l'inégalité de *Holder*

$$\begin{aligned}
\int\limits_{B'_R} p_1^{-1} a_k^2(x) \left(\sum_{i=1}^{2} |u_i^m|\right)^{2\beta_k} dx &\leq \left(\int\limits_{B'_R} \left(\sum_{i=1}^{2} |u_i^m|\right)^{2^*} dx\right)^{\frac{2\beta_k}{2^*}} \left(\int\limits_{B'_R} \left(p_1^{-1} a_k^2\right)^{\frac{2^*}{2^*-2\beta_k}} dx\right)^{\frac{2^*-2\beta_k}{2^*}}, \\
&\leq C \|U_m\|_{\mathbb{V}^2}^{2\beta_k} \left(\int\limits_{B'_R} \left(p_1^{-1} a_k^2\right)^{\gamma_k} dx\right)^{\frac{1}{\gamma_k}}, m = p, q.
\end{aligned}$$

Comme (U_n) est une suite bornée dans $\mathbb{V}^2$ et $p_1^{-1} a_k^2 \in \mathbb{L}^{\gamma}(\mathbb{R}^n)$ l'expression $\int\limits_{B'_R} p_1^{-1} a_k^2(x) \left(\sum\limits_{i=1}^{2} |u_i^m|\right)^{2\beta_k} dx$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini pour $m = p, q$. Alors $\sum\limits_{k=1}^{2} \int\limits_{B'_R} p_1^{-1} |f_k(x, u_m)|^2 dx$; $m = p, q$ tend vers zéro quand R tend vers l'infini. La suite $\mathbf{F}(x, U_n)$ est une suite de *Cauchy* dans $\left(\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)\right)^2$, donc elle est convergente.

Par conséquent l'opérateur F est compact.

3.1 Résolution du système non linéaire

Le système (S_N) étant non variatinnelle, nous ne pouvons utiliser le lemme de *Lax-Milgram.*

Nous allons nous servir d'une technique de point fixe type *Krasnosel'skii* pour montrer l'existence de solution. Précisément, il s'agit de application compacte qui laisse invariant un cône positif d'espace de *Banach.*

Théorème 3.1

Si les hypothèses (3.1) — (3.4) sont vérifiées alors le système (S_N) *admet une solution positive.*

Preuve :

Définissons l'application linéaire $S : \left(\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}(\mathbb{R}^n)\right)^2 \longrightarrow \mathbb{V}^2$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \longmapsto U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

tel que U soit solution du système (S_L), on écrit

$$U = S\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

L'application S est bien définie en vertu des résultats du chapitre 2.

De plus l'application S est une application bornée, en effet

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_1|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_2|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{11} |u_1|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} m_{22} |u_2|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} (m_{12} + m_{21}) \, u_1 u_2 dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} f_1 u_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_2 u_2 dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_1|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_2|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (-M(x) \, U, U) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_1 u_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_2 u_2 dx,$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_1|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_2|^2 \, dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} f_1 u_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_2 u_2 dx, \\
\|\nabla u_1\|_{\mathbb{L}^2}^2 + \|\nabla u_2\|_{\mathbb{L}^2}^2 &\leq \|f_1\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \|u_1\|_{\mathbb{V}} + \|f_2\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \|u_2\|_{\mathbb{V}}, \\
\|u_1\|_{\mathbb{V}}^2 + \|u_2\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \|f_1\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \|u_1\|_{\mathbb{V}} + \|f_2\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \|u_2\|_{\mathbb{V}}, \\
\|u_1\|_{\mathbb{V}}^2 + \|u_2\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq (\|u_1\|_{\mathbb{V}} + \|u_2\|_{\mathbb{V}}) \left(\|f_1\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} + \|f_2\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \right),
\end{aligned}$$

$$\|U\|_{\mathbb{V}^2}^2 \leq K \|U\|_{\mathbb{V}^2} \left(\|f_1\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} + \|f_2\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \right),$$

$$\|U\|_{\mathbb{V}^2} \leq K \left(\|f_1\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} + \|f_2\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \right)$$

Donc on a

$$\left\| S \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \right\|_{\mathbb{V}^2} \leq K \left(\|f_1\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} + \|f_2\|_{\mathbb{L}^2_{p_1^{-1}}} \right).$$

Soit C le cône défini par l'ensemble de toutes les fonctions positives de $\mathbb{V}^2$ c'est à dire $C = \{U = (u_1, u_2) \in \mathbb{V}^2; u_i \geq 0; i = 1, 2.\}$.

Soit φ l'application définie sur C par

$$\varphi : C \longrightarrow C$$

$$U \longrightarrow S \begin{pmatrix} f_1(., u_1, u_2) \\ f_2(., u_1, u_2) \end{pmatrix}.$$

Autrement dit

$$\varphi(U) = S \circ \mathbf{F}(U),$$

l'application φ est un opérateur compact puisque il est le produit de composition de l'opérateur linéaire borné S et de l'opérateur compact F.

De plus le cône C reste invariant par l'application φ

En effet

Soit (w, z) l'image de (u_1, u_2) par φ, dans ce cas (w, z) est une solution du système(S_L)

$$\begin{cases} -\Delta w = m_{11}(x)\, w + m_{12}(x) z + f_1(x, u_1, u_2), x \in \mathbb{R}^n, \\ -\Delta z = m_{11}(x)\, w + m_{12}(x)\, z + f_2(x, u_1, u_2), x \in \mathbb{R}^n, \\ w \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0;\ z \underset{|x| \to +\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$$

D'après le chapitre 2 système (S_L) admet une unique solution positive, ce ci entraîne l'invariance de C par l'application φ.

Nous vérifions maintenant que le φ satisfait les conditions du Théorème1.5

1) En vertu du l'hypothèse (3.4) pour toute ε il existe $r > 0$ tel que

$$|U| \leq r \Longrightarrow f_k(x, U) \leq \varepsilon (u_1 + u_2),\ \ k = 1, 2.$$

Supposons que $U = t\varphi(U)$, $U \in B_r, t \in [0, 1]$.

Il découle

$$-\Delta U \leq (M(x) + \varepsilon J)\, U,\ \ sur\ \mathbb{R}^n,$$

avec

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Choisissons ε suffisamment petit pour que U vérifie

$$-\Delta U \leq M(x) U;\ \ sur\ \mathbb{R}^n$$

En tenant compte du lemme 3.1 nous obtenons $U = 0$. Donc φ satisfait la condition (1) du Théorème 1.5

2) On définit l'application $\psi : \mathbb{V}^2 \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow C$ par

$$\psi(U, t) = S\begin{pmatrix} f_1(x, u_1 + t, u_2) \\ f_2(x, u_1, u_2 + t) \end{pmatrix}; U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in C.$$

Clairement $\psi(U, 0) = \varphi(U)$.

L'application ψ vérifie aussi les conditions (ii) et (iii) du Théorème 1.5

En effet :

Si $\psi(U, t) = U$ pour $U \in C$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} -\Delta(u_1 + t)\varphi_1 dx = \int_{\mathbb{R}^n} m_{11(}u_1 + t)\varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} m_{12} u_2 \varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_1(x, u_1 + t, u_2)\, \varphi_1 dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_1 \nabla \varphi_1 dx = \int_{\mathbb{R}^n} m_{11(} u_1 + t) \varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} m_{12} u_2 \varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} f_1 (x, u_1 + t, u_2) \varphi_1 dx,$$

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} m u_1 \varphi_1 dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} m_{11(} u_1 + t) \varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} (\mu_1 p_1 (u_1 + t) - c_1 p_1) \varphi_1 dx,$$

$$\geq \int_{\mathbb{R}^n} (m_{11} + \mu_1 p_1) u_1 \varphi_1 dx + \int_{\mathbb{R}^n} p_1 (\mu_1 t - c_1) \varphi_1 dx,$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda_1 m - m_{11} - \mu_1 p_1) u_1 \varphi_1 dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} p_1 (\mu_1 t - c_1) \varphi_1 dx,$$

Ce qui implique

$$\mu_1 t - c_1 \leq 0. \Longrightarrow t \leq \frac{c_1}{\mu_1}.$$

De même on trouve

$$t \leq \frac{c_2}{\mu_2}.$$

Pour avoir $U \neq \psi(U, t)$ pour tout $t \geq t_0$, il suffit de prendre
$t_0 = \max\left(\frac{c_k}{\mu_k}\right)$, $k = 1, 2$.

En outre la solution $U \in C$ de l'équation $U = \psi(U, t)$ est bornée c'est à dir $\|U\|_{\mathbb{V}^2} \leq K$ (voir [23]).

Pour monter que l'équation $\psi(U, t) = U$, $\|U\|_{\mathbb{V}^2} = R$ n'admet pas de solution dans C, il suffit de choisir $R > K$.

Ce qui achève la démonstration du Théorème 3.1.

Conclusion

Nous venons de voir que les techniques choisies pour résoudre les systèmes sont étroitement liées aux données f_i*.*

Si les f_i *dépendent simplement de la variable spatiale , le système est alors linéaire. Dans ce cas la formulation variationnelle garantie l'existence et l'unicité des solutions.*

Au contraire lorsque les f_i *sont dépendants de l'inconnue* U*, le système devient non variationnelle. On fait appel alors aux théorèmes de point fixe pour assurer l'existence de solution. Quant à l'unicité de la solution, le problème reste ouvert.*

Dans le futur, nous orienterons notre recherches sur les systèmes où les f_i *dérive d'un potentiel.*

Bibliographie

[1] Allan L. Edelson
Asymptotic properties of semilinear equations, Cnad. Math. Bultl. 32 (1). 1989.

[2] A. Djellit.and A. Yechoui
On maximum principle and existence of positive solutions for cooperative systems.
Maghreb Math. Rev. Vol 6, No 2. December 97, pp. 137-143.

[3] A. Djellit.and A. Yechoui
On existence and non existence of a principal eigenvalue for some boundary value problems.
Maghreb Math. Rev. Vol 6, No 1. June 97, pp. 29-37.

[4] A. Djellit, N. Benouhiba
Existence and uniqueness of positive solution of semilinear elliptic equation in $\mathbb{R}^N$. Demonstratio Math. XXXV(1) (2002) 61-73.

[5] A. Djellit. and S. Tas
Study of some noncooperative linear elliptic systems.
Applications of Mathematics. Vol. 49 (2004), N.3, 185-284.

[6] A. Djellit-J. Fleckinger. Pellé
Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques indéfinis, Bollettino U. M. I. (7) 7-B (1993), 857-874.

[7] A. Djellit, N. Benouhiba
Existence de Valeurs Propres Principales pour un Problème Elliptique en Dimension 2. Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste Vol. XXXI, 49-60 (1999).

[8] A. Djellit-S.Tas
Stady Of Some Noncooperative Liear Elliptic Systems. Applicatuin of Mathematics No. 3, 185-199.(2001).

[9] B. Harnouzet
Espace de sobolev avec poids. Application au problème de Dirichlet dans un demi espace Rend. Sem. mat. Univ. Padova 46 (1971), 227-272.

[10] Djairo Guedes de Figeiredo
Positive solutions of semilinear elliptic problems, Lecture Notes in Math., n 957, Springer-Verlag, p.p 34-97.

[11] D. G. de Figeiredo-E. Mitidieri
A maximum principle for an elliptic systems and application to semilinear problems, SIAM J. Math. Anal, Vol. 17, n .4, 1986.

[12] D. G. de Figeiredo-E. Mitidieri
A maximum principle for a cooperative elliptic system, Acad.Sci. Paris, t310, série1 p.p 49-52, 1990.

[13] J. Fleckinger, J. Hernandez, F. de Thélin
A maximum principal for linear cooperative elliptic systems. Sibmitted to the proc. of Conf. On differential Equations and Mathematical Physics. Georgiatech, Atlanta, 1992.

[14] J. Fleckinger, J. Hernandez, F. de Thélin
On maximum principles and existence of positive solutions for some cooperative elliptic systems Diff. and Int.Eq. V. 8, N.1, p. 69-85 ,1995.

[15] J. Fleckinger. Pellé-H. Serag
Semilinear cooperative elliptic systems on $\mathbb{R}^N$, Rendiconti di Matematica, Series VII Volume 15, Roma (1995), 89-108.

[16] Herbert Amann
Fixed point equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach space, SIAM Review, Vol.18, N 4, October 1976.

[17] H.Brézis
Analyse fonctionnelle- Théorie et applications. Masson, Paris, 1993.

[18] K. J. Brown, C. Cosner and J. Fleckinger
Principal eigenvalue for problems with indefinite weight functions on $\mathbb{R}^n$. Proceeding of Royal Society of Edinburgh,1990.

[19] L. Boccardo, J. Fleckinger, F. de Thélin
Existence of solutions for some nonlinear cooperative systems. Diff. and Int. Eq. V7, N.3, p689-698, 1994.

[20] M. A. Krasnosels'kii
Positive solutions of operator equations, P. Noordhoff, Groningen (1964).

[21] Man Kam Kwong
On Krasnoselskii's Cone fixed point theorem, Hindawi Publishing Corporation,vol. 2008, Article ID 164537, p.p 1-18.

[22] Martin Zerner
Quelques propriétés spectrales des opérateurs positifs, Journal of Functional Analysis 72, 381-417 (1987).

[23] N. Benouhiba
Properties of the positive solution of equation of semilinear elliptic partial differential equation in $\mathbb{R}^n$. ScienceDirect. Nonlinear Analysis 68 (2008) 577-581.

[24] Otared Kavian
Introduction à la théorie des points critiques et application aux problèmes elliptiques, Springer Verlag. 1993.

[25] Peter Hess
On some linear and nonlinear eigenvalue problems with an indefinite weight function, Comm. in partial differential equations, 5 (10), 999-1030 (1980).

[26] S. Tas
Etude de systèmes elliptiques coopératifs et non coopératifs dans des domaines non bornés, thèse de magister, Univ. Annaba, 1998.