



الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
Republique Algérienne Démocratique Et Populaire  
وزارة التعليم العالي



والبـحث العـلمي  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
جامعة العربي التبسي  
التبسة - تيسب - تيسب  
Université Larbi tébessi – Tébessa –  
Faculté des Sciences et de la Technologie  
Département de Génie Mécanique

## MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du **diplôme de Master Académique**

**En** : Génie Mécanique

**Spécialité** : Construction Mécanique

**Par** : Abderrahmane BOURAS

**Sujet**

### Etude de la propagation des fissures dans les plaques trouées

Présenté et soutenu publiquement, le 22 / 06 / 2021 , devant le jury composé de :

Ms. BELGAHALEM Elhadj	MCA	Président
Ms. HADJAB Abdelhakim	MAA	Rapporteur
Ms. DEGHBODJ Samir	MCA	Examineur 1

Promotion : 2021/2022

## ملخص

تتعلق هذه الدراسة بشكل أساسي بظاهرة تكثيف الضغط في صفيحة مثقبة تخضع لضغوط الشد. في هذه الدراسة أخذنا في الاعتبار طريقة تحليلية لتقييم حالة الإجهاد في المنطقة المجاورة وبعيداً عن الحفرة. الطريقة الثانية هي الطريقة العددية على أساس المحاكاة. تم إعداد نموذج رقمي يجعل من الممكن تحديد عامل كثافة الإجهاد. باستخدام برنامج ANSYS Workbench. كما درسنا في هذه الدراسة تأثير تغير قطر الدائرة في منتصف اللوحة المستطيلة على قيمة هذه المعلمة .

## Résumé

Cette étude concerne principalement le phénomène d'intensification des contraintes dans une plaque perforée soumise à des contraintes de traction. Dans cette étude nous avons pris en compte une méthode analytique pour évaluer l'état de contraintes au voisinage et au loin du trou. La seconde méthode est numérique basée sur des simulations. Un modèle numérique a été mis en place qui permet de déterminer le facteur de densité de contraintes. à l'aide du logiciel ANSYS Workbench.

Nous avons également examiné dans cette étude l'effet de la variation du diamètre du cercle au milieu de la plaque rectangulaire sur la valeur de ce paramètre.

## Summary

This study mainly concerns the phenomenon of stress intensification in a perforated plate subjected to tensile stresses. In this study we took into account an analytical method to evaluate the stress state in the vicinity and far from the hole. The second method is numerical based on simulations. A numerical model was set up which makes it possible to determine the stress density factor. using ANSYS Workbench software. We also examined in this study the effect of the variation of the diameter of the circle in the middle of the rectangular plate on the value of this parameter.

# **Remerciement**

*Tout d'abord je tiens à remercier le bon Dieu tout puissant de m'avoir donné assez de courage, de patience et de persévérance pour accomplir ce modeste travail.*

*Il m'est très difficile d'exprimer en ces quelques lignes toute ma gratitude et reconnaissance à Mr docteur Hadjab Abdelhakim, Maitre des conférences "A" à l'université Larbi Tébessi de Tébessa, pour ses conseils, sa disponibilité et son soutien qui furent précieux et son encouragement m'a permis de réaliser ce travail dans les meilleures conditions.*

*J'aimerais remercier Dr. Deghboudj Samir Maitre des conférences "A" à l'université de Tébessa, qui a accepté de faire partie de ce comité et d'examiner notre travail.*

*Il nous est aussi très agréable de remercier Dr. Belgahalem Elhadj Maitre des conférences "A" à l'université de Tébessa, qui nous a fait l'honneur de présider le jury de notre mémoire.*

*Le fait que ces lignes et ces mots ne suffiront pas à mentionner toutes les personnes que nous ont soutenues tout au long de notre formation et notre recherche et ont mentionné leur préférence pour nous.*

*Nous offrons nos remerciements à tous ceux qui ont été privilégiés dans notre éducation et notre soutien formation Les enseignant de Physique de Tébessa.*

*Bouras Abderrahmane*

## Sommaire

Introduction générale .....	1
I. Généralités sur l'élasticité plane .....	3
I.1. Introduction.....	3
I.3.Elasticité plane.....	4
I.4. Les deux états plans d'élasticité plane.....	4
I.4.1. Contrainte plane .....	4
I.4.2. Déformation Plane .....	6
I.5. Fonction d'AIRY.....	8
I.5.1 La fonction d'AIRY en coordonnées cartésiennes .....	8
I.5.2 Transformation de l'équation $\nabla^4 = 0$ en coordonnées polaires .....	10
I.5.3 Les conditions aux limites .....	11
I.5.4 La fonction d'Airy associée à ce 2° chargement est .....	12
I.6. Détail Expérimentale .....	13
I.6.1. Problème spécification .....	13
I.7. Etude analytique .....	14
I.7.1. Déplacement .....	14
I.7.2. La contrainte radiale $\sigma_r$ .....	14
I.7.3. La contrainte $\sigma_\theta$ .....	15
I.7.4. La contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}$ .....	16
I.7.5. La contrainte moyenne : $\sigma_x$ .....	16
I.7.5.1. La contrainte nominale : $\sigma_{nom}$ .....	16
I.7.5.2. La contrait maximal : $\sigma_{max}$ .....	16
II. Mécanique de la rupture élastique linéaire .....	18

II.1 Concentration de contrainte.....	18
II.1.1 Historique.....	18
II.1.2 Introduction.....	18
II.1.3. Définition de $k_t$ .....	20
II.2. Les modes de propagation des fissures .....	20
II.3. Concept d'intensité des contraintes .....	22
II.4. Calculs analytiques sur les concentrations de contraintes.....	22
II.5. Facteur de concentration de contrainte dans un trou elliptique .....	23
II.6 Facteur d'intensité de contrainte du 1er mode dans une fissure au bord du trou .....	26
II.6.1 Cas de deux fissures.....	26
II.6.2 Cas d'une seule fissure.....	26
Simulation de la traction d'une plaque à trou centrale avec ANSYS Workbench.....	28
Simulation de la fracture dans une plaque trouée.....	38
Conclusion générale.....	58

### Introduction générale

De nombreux composants en acier avec des trous de différentes formes sont généralement utilisés dans diverses structures d'ingénierie.

En particulier, la plaque rectangulaire à trou trouve son application dans l'automobile, l'aérospatiale mécanique. En développant de telles pièces, il est impossible d'éviter la présence de trou qui réduit la résistance mécanique des composants conduisant à la rupture de la structure sous la charge de service.

Par conséquent, il est essentiel d'étudier l'état de contrainte autour des trous pour la sécurité et d'analyser la capacité de charge de ces structures.

De nombreuses études [1 – 2] sont présentées sur la concentration de contraintes des plaques composites orthotropes et stratifiées avec des trous de différents types de géométries.

La concentration de contrainte autour d'un trou circulaire pour une plaque composite stratifiée a été considérée par KO.W.[3]

La concentration de contraintes est un problème souvent rencontré dans la conception mécanique d'un composant ou d'un organe mécanique. C'est un phénomène d'augmentation locale des contraintes dans une zone comportant une modification géométrique de la pièce [4]. Il apparaît dans une discontinuité de la pièce ou d'une structure avec la présence d'une entaille, après l'usinage par exemple. La zone de concentration de contraintes est souvent le site d'amorçage des fissures de fatigue mais peut être aussi l'origine d'une rupture brutale dans le cas d'un matériau fragile [4]. En 1898, G. Kirsh a été le premier à mettre en évidence le phénomène de concentration de contraintes, cela été pour un problème de détermination des contraintes autour d'un trou [5-6]. Par la suite des solutions analytiques ont été progressivement trouvées et proposés par différents auteurs pour des structures qui présentent des géométries de plus en plus complexes [7]. De nos jours des méthodes de calcul et principalement la méthode des éléments finis continuent à être utilisés pour calculer les coefficients de concentration des contraintes dans des cas pratiques pour différentes configurations de structures présentant des singularités (variation brusques de forme). L'emploi de logiciel spécifique basé sur la méthode des éléments finis, utilisant des techniques modernes telles que la génération de maillage automatique et son raffinement ont permis des améliorations considérables dans les précisions de ses calculs [5]. De ce fait notre étude a pour objectif de montrer que la présence de trous, conduit à un affaiblissement

## **Introduction générale**

---

de la structure en raison de sur contrainte locale, appelée concentrations de contrainte. Le cas de la traction d'une plaque 2D percée d'un trou circulaire est traité et analysé analytiquement et numériquement par des simulations numériques utilisant les codes de calcul ANSYS et SOLIDWORKS

Notre travail est répartie sur quatre chapitres, le premier chapitre est une généralité sur l'élasticité plane. Le deuxième chapitre fait l'objet d'une recherche bibliographique sur la mécanique de la rupture. Le troisième est consacré au calcul des contraintes au voisinage du trou et le facteur d'intensité de contrainte dans la zone de concentration de contraintes et dans la fissure. En dernier et 4ème chapitre une simulation numérique sous ANSYS Workbench nous a permis d'évaluer les contraintes, le facteur de concentration de contraintes en fonction du rayon R et la profondeur de la fissure.

**I. Généralités sur l'élasticité plane*****I.1. Introduction***

Lorsque des charges externes sont appliquées aux composants structurels, des forces internes et des déformations sont induites. L'objectif de ce chapitre est de déterminer les contraintes et déformations induites. En effet, l'effet mesuré d'une charge sur un échantillon du matériau dépend de la section transversale. De plus, les changements de longueurs et d'angles sont mesurés par rapport à leurs valeurs initiales ou instantanées. Le but de ce chapitre est de déterminer la réponse des composants structurels aux charges externes, telle qu'elle se manifeste par les contraintes et déformations induites. Les comportements élastiques sont considérés à l'aide des théories de la mécanique des milieux continus. Lorsque les charges sont supprimées, le comportement est élastique si le composant reprend sa forme d'origine.

***I.2. Théorie de l'élasticité***

La théorie de l'élasticité n'est pas des mathématiques appliquées. La résolution et intégration d'équations différentielles n'est pas l'objectif de la théorie de l'élasticité. Etudiants et jeunes chercheurs, qui peuvent utiliser de logiciels modernes de la méthode des éléments finis (FEM), ils sautent directement de la théorie élémentaire de la résistance des matériaux à FEM sans comprendre les principes de base de la théorie de l'élasticité [1].

Comme il est compréhensible d'après le nom de la science, cela fonctionne avec le domaine élastique des métaux. L'élasticité concerne les contraintes et les déformations dans un corps dues à la charge appliquée, qui peut être mécanique ou thermique, dans ces cas, lorsque le corps reprend sa forme et sa taille d'origine après avoir relâché le chargement [8].

Comparaison avec la mécanique ou la résistance des matériaux, il y a quelques avantages :

- 1- La théorie de l'élasticité ne fait aucune hypothèse physique
- 2- La théorie d'élasticité développe une solution à partir de :
  - Les lois du mouvement de Newton ;
  - Géométrie euclidienne ;
  - Loi constitutive matérielle (par exemple, loi de Hook);
- 3- Le principe superposition est également autorisée

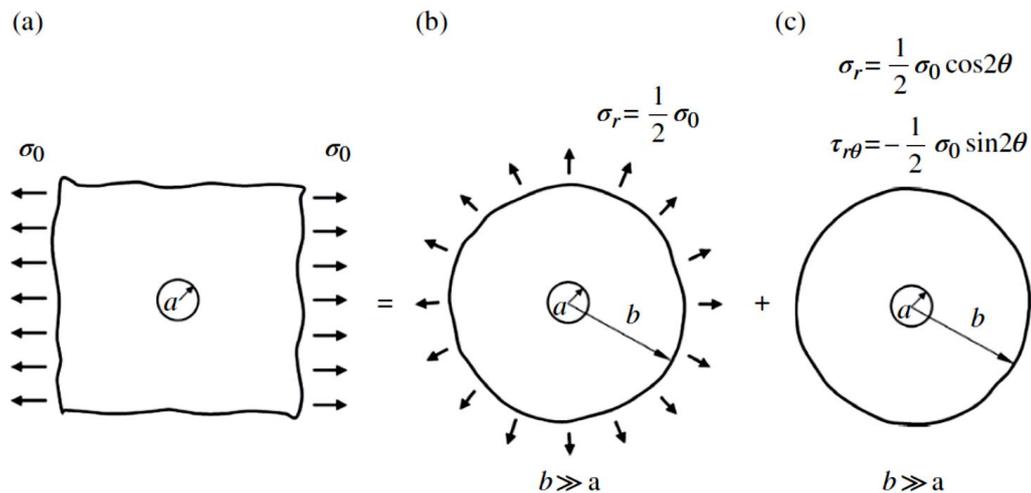


Figure I.1. Superposition de deux états de contraintes

### 1.3. Elasticité plane

La recherche de solutions analytiques sur des corps de formes quelconques tridimensionnels soumis à des chargements quelconques est quasiment impossible. Pour des problèmes de dimensionnement, on peut fréquemment faire des études bidimensionnelles. Ces géométries sont plus faciles à traiter mathématiquement. En pratique il existe deux cas d'élasticité plane, l'état plan de contraintes planes et l'état de déformations planes. Ce chapitre sera consacré à définir les différents concepts de l'élasticité linéaire, on va ainsi présenter les différents cas 2D : déformations planes, contraintes planes, en coordonnées cartésiennes et polaires. Les résultats développés concerneront principalement le problème étudié de concentration de contraintes dans une plaque trouée soumise à un champ de traction.

### 1.4. Les deux états plans d'élasticité plane

Les équations de la théorie de l'élasticité se simplifient considérablement dans le cas particulier fréquent où tous les vecteurs contraintes sont parallèles à un même plan. Ce cas se rencontre dans deux types de problèmes nettement distincts, que nous allons étudier. La notation indicielle ne présentant aucun avantage dans les problèmes particuliers, nous emploierons la notation des ingénieurs.

#### 1.4.1. Contrainte plane

Le cas le plus connu est celui d'une plaque mince soumise à des forces dans le plan uniformément distribuées sur toute l'épaisseur si une structure est :

- Mince (épaisseur très petite devant les 02 autres).
- Les 02 autres dimensions sont de même grandeur

- Soumise à une charge dans le plan uniformément répartie sur l'épaisseur.
- Le matériau est le même dans toute la structure.

Toute section à l'intérieur de l'épaisseur subit une contrainte plane et les déplacements de tous les points de la structure déformée se trouvent dans des plans appartenant à l'épaisseur de la structure.

Par habitude, on prendra l'axe « z » l'axe de l'épaisseur et les axes « x et y » les axes dans le plan.

Dans ce cas la contrainte est la même dans toutes les sections de l'épaisseur de la structure

Les composantes « u » et « v » des déplacements élastiques sont fonctions uniquement de « x » et « y » et ne dépendent pas de « z ».

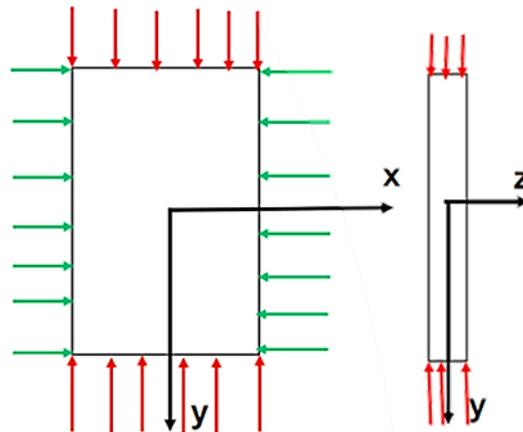


Figure I.2. plaque mince soumise à des forces dans le plan uniformément distribuées.

Exemple (état de contrainte plane) :

Considérons (figure I.3) un disque mince d'épaisseur constante, sollicité par des forces appliquées sur son contour. Les contraintes  $\sigma_{zz}$ ,  $\sigma_{zx}$  et  $\sigma_{zy}$  sont nulles sur les deux faces du disque. Par raison de continuité, elles ne peuvent prendre à l'intérieur du disque que des valeurs très faibles par rapport à  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$ .

L'on ne commet pas une erreur sensible en affirmant qu'elles sont nulles sur tout plan intérieur parallèle aux faces [9].

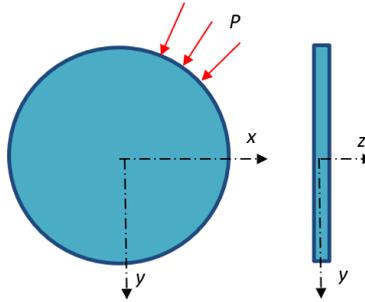


Figure I.3. Disque en état plan de contraintes

Pour la même raison, il est certain que les trois composantes non nulles  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  et  $\sigma_{xy}$  ne dépendent pratiquement pas de  $z$ , c'est-à-dire qu'elles restent constantes sur toute l'épaisseur du disque. Le tenseur des contraintes n'a que 3 composantes non nulles. La loi de HOOK d'un matériau élastique isotrope montre que la déformation  $\varepsilon_{zz}$  n'est pas nulle :

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx} - \nu\sigma_{yy}}{E} & \frac{\sigma_{xy}}{2G} & 0 \\ \frac{\sigma_{xy}}{2G} & \frac{\sigma_{yy} - \nu\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{E} \end{bmatrix} \quad (\text{I.1})$$

En inversant les expressions de  $\varepsilon_{xx}$  et  $\varepsilon_{yy}$  dans l'équation (2), on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{xx} + \nu\varepsilon_{yy}) \\ \sigma_{yy} = \frac{E}{(1-\nu^2)} (\varepsilon_{yy} + \nu\varepsilon_{xx}) \\ \sigma_{zz} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

#### 1.4.2. Déformation Plane

Valable généralement pour des structures très étendues suivant une direction (par exemple la direction «  $z$  »). Si une structure est :

- De longueur très importante par rapport aux 02 autres dimensions.
- Sollicitée par des forces perpendiculaires aux éléments longitudinaux et ne changent pas le long de la longueur.
- De sections transversales constantes le long de la longueur.
- Le matériau est le même dans toute la structure.

Un solide se trouve en état de déformation plane, s'il existe un repère orthonormé lié au solide par rapport auquel le vecteur déplacement a des composantes de la forme [10] :

$$\overrightarrow{P_0P} \begin{cases} u = u(x, y, t) \\ v = v(x, y, t) \\ w = C(t) \cdot z \end{cases} \quad (I.3)$$

Où  $C(t)$  désigne une fonction de  $t$  donnée

Les composantes du tenseur de déformation sont indépendantes de  $z$  :

$$[\varepsilon] \begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = C \end{cases} \quad \begin{cases} \gamma_{yz} = 0 \\ \gamma_{zx} = 0 \\ \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{cases} \quad (I.4)$$

Une seule équation de comptabilité s'écrit :

$$2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} \quad (I.5)$$

Le tenseur des déformations, purement thermique, est isotrope et s'écrit  $[\varepsilon_{th}] = \alpha(T - T_0)[I]$

La loi de Hooke-Duhamel est donnée par les relations :

$$\sigma_z = E C + \nu(\sigma_x + \sigma_y) - E \alpha(T - T_0) \quad (I.6)$$

Puis :

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_x - \nu\sigma_y] - \nu C + (1+\nu)\alpha(T - T_0) \\ \varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_y - \nu\sigma_x] - \nu C + (1+\nu)\alpha(T - T_0) \\ \gamma_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \end{cases} \quad (I.7)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + c)] - E \alpha(T - T_0) \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + c)] - E \alpha(T - T_0) \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [\nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + (1-\nu)C] - \frac{E \alpha}{1-2\nu} (T - T_0) \\ \tau_{xy} = \frac{E}{1+\nu} \gamma_{xy} \end{cases} \quad (I.8)$$

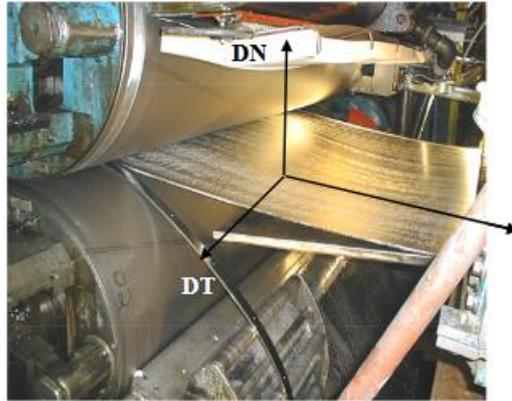


Figure I.4.Exemples de structures en déformation plane : tôle en laminage

### I.5. Fonction d'AIRY

La satisfaction simultanée des conditions d'équilibres et des équations de compatibilités peuvent être simplifiées par l'introduction d'une fonction définie de manière à satisfaire automatiquement ces équations. Bien sûr, il convient de vérifier ensuite les conditions aux limites.

Cela est possible grâce à des fonctions  $\Phi(x, y)$  pour un cas à deux dimensions. Ce sont généralement des polynômes en fonction de  $x$  et  $y$  qui satisfont l'équation  $\nabla^4 \Phi = 0$ . Ces fonctions sont appelées fonction de la contrainte d'AIRY. En l'honneur au mathématicien britannique G. B. AIRY qui l'a introduite en 1862 [10].

#### I.5.1 La fonction d'AIRY en coordonnées cartésiennes :

En élasticité tridimensionnelle les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\text{Div } \sigma + f_i = 0 \quad (\text{I.9})$$

$$\sigma_{ij} : j + f_i = 0 \quad (\text{I.10})$$

Dans le cas de la déformation plane, et si on néglige les forces de volume nous aurons

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.11})$$

On introduit alors une fonction  $\varphi(x, y)$  telle que :

$$\begin{cases} \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \\ \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} \\ \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \end{cases} \quad (\text{I.12})$$

En vérifiant les équations d'équilibre dans le cas particulier des contraintes planes.

Le champ des contraintes est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \omega_x \\ \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \omega_y \\ \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \end{cases} \quad (\text{I.13})$$

Elles sont vérifiées quand les forces  $\omega_x$  et  $\omega_y$  dérivent d'un potentiel  $w$  et s'écrivent selon les équations :

$$\begin{cases} \omega_x = -\frac{\partial w}{\partial x} \\ \omega_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{I.14})$$

Les équations d'équilibre étant vérifiées, nous établissons la relation d'AIRY en vérifiant la première équation de compatibilité

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (\text{I.15})$$

Pour cela nous déterminons les valeurs de  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  et  $\gamma_{xy}$  en utilisant les relations entre les contraintes et les déformations

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \omega (1 + \nu) \right) \quad (\text{I.16})$$

D'après la première équation de compatibilité, il résulte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \nu \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} (1 - \nu) \right] \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} \left[ \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} - \nu \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} (1 - \nu) \right] \\ \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} &= -\frac{1}{G} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{2}{E} (1 - \nu) \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \end{aligned} \quad (\text{I.17})$$

Après addition :

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = -(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (I.18)$$

- La quantité  $\nabla^4$  est appelé opérateur harmonique.

- La quantité  $\nabla^2$  est appelé opérateur Laplace.

$$\nabla^4 \Phi = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} \quad (I.19)$$

$$\nabla^2 \omega = \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) \quad (I.20)$$

$$\nabla^4 \Phi = -(1 - \nu) \nabla^2 \omega \quad (I.21)$$

La contrainte fournie par l'équation bi harmonique précédente représente une bonne approximation du champ de contrainte, à condition que le corps soit très mince.

Dans le cas, où les forces de volumes sont nulles, l'équation bi harmonique se réduit à  $\nabla^4 \Phi = 0$ . Elle s'écrit aussi sous cette forme

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \quad (I.22)$$

### ***I.5.2 Transformation de l'équation $\nabla^4 = 0$ en coordonnées polaires***

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{x}{y} \end{cases} \quad (I.23)$$

$$D'où : \begin{cases} \frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta, & \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r}, & \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r} \end{cases} \quad (I.24)$$

Cherchons  $\Phi = \Phi(r, \theta)$ , il faut d'abord calculer

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left( \frac{x}{r} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left( -\frac{y}{r} \right) = \frac{\partial \Phi}{\partial r} (\cos \theta) - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \quad (I.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \left[ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} (\cos \theta) - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left( -\frac{\sin \theta}{r^2} \right) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{r} \right) \right] \cos \theta + \\ &\left[ \frac{\partial \Phi}{\partial r} \left( (-\sin \theta) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} (\cos \theta) - \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \left( \frac{\cos \theta}{r} \right) \right) - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \left( -\frac{\sin \theta}{r} \right) \right] \left( -\frac{\sin \theta}{r} \right) \quad (I.26) \\ &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \cos^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\sin^2 \theta}{r} + \frac{\theta^2}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \end{aligned}$$

De même on obtient :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r} - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{r^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\cos^2 \theta}{r} + \frac{\theta^2}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \quad (I.27)$$

En additionnant les équations

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \quad (I.28)$$

L'équation bi-harmonique est maintenant en coordonnées polaires.

$$\nabla^4 \Phi = \nabla^2 (\nabla^2 \Phi) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right] \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} \right) \quad (I.29)$$

### I.5.3 Les conditions aux limites :

Selon le principe de Saint Venant,  $\bar{\sigma}$  loin de petit trou de rayon a est le même si la plaque est non trouée. Sur le contour de rayon b  $\gg$  a, on a donc :

$$\text{En coordonnées cartésiennes } \bar{\sigma}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^\infty & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (I.30)$$

En coordonnée polaire  $\bar{\sigma}(r, \theta) = P \cdot \bar{\sigma}(x, y)$ . Pt

$$\text{Avec } P = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (I.31)$$

$$\sigma_{rr} = \sigma^\infty \sin^2 \theta = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 - \cos 2\theta) = \frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{\sigma^\infty}{2} \cos 2\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma^\infty \cos^2 \theta = \frac{\sigma^\infty}{2} (1 + \cos 2\theta) = \frac{\sigma^\infty}{2} + \frac{\sigma^\infty}{2} \cos 2\theta \quad (I.32)$$

$$\tau_{r\theta} = \sigma^\infty \sin \theta \cos \theta = \frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta$$

$$\bar{\sigma}(r, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma^\infty}{2} - \frac{\sigma^\infty}{2} \cos 2\theta & \frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta \\ \frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta & \frac{\sigma^\infty}{2} + \frac{\sigma^\infty}{2} \cos 2\theta \end{pmatrix} \quad (\text{I.33})$$

Le premier terme des expressions de  $\sigma_{rr}$  et de  $\sigma_{\theta\theta}$  correspond bien en remplaçant  $\sigma^\infty$  par  $\frac{\sigma^\infty}{2}$ , le second terme à l'association de contrainte normales -  $\frac{\sigma^\infty}{2} \cos 2\theta$  et de cisaillement  $\frac{\sigma^\infty}{2} \sin 2\theta$

**I.5.4 La fonction d'Airy associée à ce 2<sup>e</sup> chargement est :**

$$\phi(r, \theta) = (Ar^2 + B/r^2 + C) \cos 2\theta \quad (\text{I.34})$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} = -\frac{4C}{r^2} \cos 2\theta \quad (\text{I.35})$$

$$\Delta(\Delta\phi) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(-\frac{4C}{r^2} \cos 2\theta\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{4C}{r^2} \cos 2\theta\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(-\frac{4C}{r^2} \cos 2\theta\right) \quad (\text{I.36})$$

$$\Delta(\Delta\phi) = \left(-\frac{24C}{r^4} + \frac{8C}{r^4} + \frac{16C}{r^4}\right) \cos 2\theta \quad (\text{I.37})$$

$$(\text{I.38})$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \right) = -\left(2A + \frac{4C}{r^2} + \frac{6B}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \left(2A + \frac{6B}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \tau_{r\theta}(r, \theta) = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = \left(2A - \frac{2C}{r^2} - \frac{6B}{r^4}\right) \sin 2\theta \end{cases} \quad (\text{I.39})$$

$$\sigma_{rr}(b \gg a) = -\frac{\sigma^\infty}{2} \cos 2\theta \Rightarrow A = \frac{\sigma^\infty}{4}$$

$$\sigma_{rr}(a, \theta) = \tau(a, \theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2A + \frac{4C}{a^2} + \frac{6B}{a^4} = 0 \\ 2A - \frac{2C}{a^2} - \frac{6B}{a^4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = -a^2 \frac{\sigma^\infty}{2} \\ B = a^4 \frac{\sigma^\infty}{4} \end{cases} \quad (\text{I.40})$$

Les contraintes pour le chargement sont la somme des contraintes des deux chargements précédents :

Chargement 1 :

$$\sigma_{rr}(r) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) \text{ et } \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) \quad (\text{I.41})$$

Chargement 2 :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r, \theta) = -\frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

Finalement la somme des contraintes des deux chargements donne :

$$\begin{cases} \sigma_{rr}(r, \theta) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left\{ \left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right) - \left(1 - \frac{4a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left(1 - \frac{2a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4}\right) \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}(r) = \frac{\sigma^\infty}{2} \left\{ \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right) + \left(1 + \frac{3a^2}{r^2}\right) \cos 2\theta \right\} \end{cases} \quad (\text{I.42})$$

## I.6. Détail Expérimentale :

### I.6.1. Problème spécification :

Prenons l'exemple classique d'un trou circulaire dans une plaque rectangulaire d'épaisseur constante.

La plaque est en acier avec un module d'élasticité de  $E$  et un coefficient de poisson  $\nu$

L'épaisseur de la plaque est  $[e]$ , le rayon de trou est  $[R]$ , la longueur de la plaque est  $[L]$  et la largeur de la plaque est  $[2b]$ , comme l'indique la figure ci-dessous

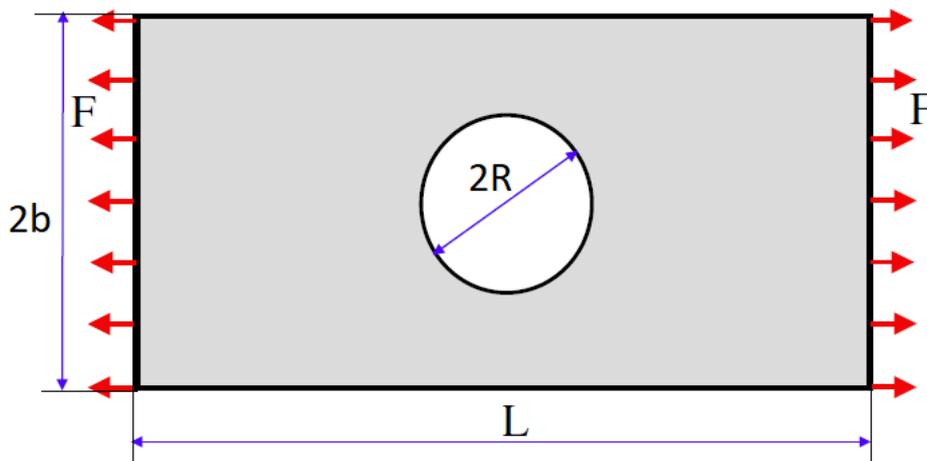


Fig I.5. Géométrie et chargement d'une plaque trouée

## I.7. Etude analytique

### I.7.1. Déplacement :

Estimons le déplacement attendu du bord droit par rapport au centre du trou. Nous pouvons obtenir une estimation raisonnable en négligeant le trou et en approximant la tonalité plaque comme étant en tension uni axiale. Division de la contrainte de la traction appliquée par le module d'Young donne la déformation uniforme dans la direction x

Donc :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} \\ Avec : \\ \varepsilon_{xx} = \frac{\Delta L}{L} \end{cases} \Rightarrow \Delta L = \frac{\sigma_{xx} L}{E} \quad (I.43)$$

### I.7.2. La contrainte radiale $\sigma_r$

Considérons les tendances attendues pour  $\sigma_r$ , la contrainte radiale au voisinage du trou et loin du trou.

La solution analytique pour  $\sigma_r$  dans une plaque trouée est :

$$\sigma_r(r, \theta) = \frac{1}{2} \sigma_0 \left[ \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right) + \left(1 + 3 \frac{R^4}{r^4}\right) \cos(2\theta) \right] \quad (I.44)$$

p (la force appliquée)

Où R est rayon du trou est  $\sigma_0$  est la contrainte uniforme appliquée (notée p dans la spécification du problème).

Au niveau du trou ( $r = R$ ), cela se réduit à :  $\sigma_r = 0$

Ce résultat peut être compris en regardant un élément extrêmement petit au niveau du trou comme montré schématiquement ci- dessous :

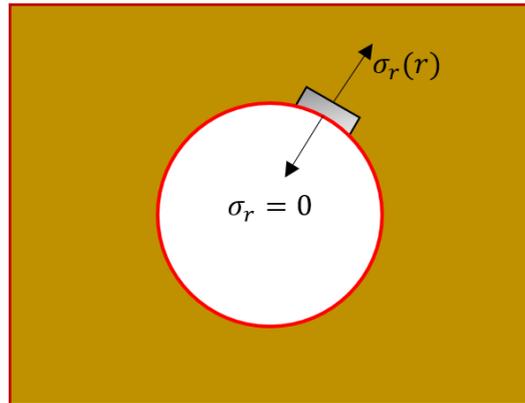


Fig I.6. Contrainte radiale au voisinage du trou et loin du trou

Nous voyons que  $\sigma_r$  à l'intérieur du trou est la contrainte normale à un élément de surface du trou, puisque le trou est une surface libre. Cela doit être nulle.

Avec :  $r \gg R$

$$\sigma_r(r, \theta) = \sigma_r(\theta) = \frac{1}{2} \sigma_0 [1 + \cos(2\theta)] \quad (I.45)$$

Au loin du trou,  $\sigma_r$  est une fonction de  $\theta$  uniquement à  $\theta = 0 \rightarrow \sigma_r \approx \sigma_0(P)$

Cet est logique puisque  $r$  est aligné avec  $x$  lorsque  $\theta = 0$

A  $\theta = 90^\circ \rightarrow \sigma_r = 0$  qui a également un sens puisque  $r$  est maintenant aligné sur  $Y$ .

### I.7.3. La contrainte $\sigma_0$

Considérons ensuite les tendances attendues pour  $\sigma_0$ . La contrainte circonférentielle dans le voisinage du trou et loin du trou.

La solution pour  $\sigma_0$  dans la plaque est :

$$\sigma_0(r, \theta) = \frac{1}{2} \sigma_0 \left[ \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) - \left( 1 + 3 \frac{R^4}{r^4} \right) \cos(2\theta) \right] \quad (I.46)$$

$$\sigma_0(r, \theta) = \frac{1}{2} \sigma_0 (2 - 4 \cos(2\theta)) \quad (I.47)$$

à  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\sigma_0 = 3\sigma_0 = 3P$  pour une plaque infinie.

$$\text{à } r \gg R \quad \sigma_0(r, \theta) \cong \sigma_0(\theta) = \frac{1}{2} \sigma_0 [1 - \cos(2\theta)] \quad (I.48)$$

$$\text{à } \theta = 0 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_o (0) = \frac{1}{2} \sigma_o [1 - \cos(2 \cdot 0)] = 0 \\ \sigma_o \left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} \sigma_o \left[1 - \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sigma_o = P \end{array} \right. \quad (\text{I.49})$$

#### 1.7.4. La contrainte de cisaillement $\tau_{r\theta}$

La solution de la contrainte de cisaillement  $\tau_{r\theta}$  dans une plaque trouée est :

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{2} \sigma_o \left(1 - 3 \frac{R^4}{r^4} + 2 \frac{R^2}{r^2}\right) \sin(2\theta) \quad (\text{I.50})$$

$$\text{à } r = R \rightarrow \tau_{r\theta} = 0$$

En regardant un élément extrêmement petit au niveau du trou, nous voyons que  $\tau_{r\theta}$  est le cisaillement contraint sur une surface de contrainte, elle doit donc être nulle.

$$\text{à } r \gg R \quad \tau_{r\theta}(r, \theta) = \tau_{r\theta}(\theta) = \frac{1}{2} \sigma_o \sin(2\theta) \quad (\text{I.51})$$

#### 1.7.5. La contrainte moyenne : $\sigma_x$

Tous d'abord, commençons par trouver la contrainte moyenne. La contrainte de surface nominal  $\sigma_{nom}$  et maximal  $\sigma_{max}$  avec un facteur de concentration.

##### 1.7.5.1. La contrainte nominale : $\sigma_{nom}$

La contrainte nominale est déterminée par l'équation de base et définie en fonction du type de charge qui agit sur l'élément, dans le cas d'une charge axiale qui provoque une traction, cette valeur est calculée par l'équation suivante :

$$\sigma_{nom} = \frac{P}{A} = \frac{\text{Force axiale}}{\text{La section}} \quad (\text{I.52})$$

$$\text{Avec} \quad A = \begin{cases} L - R & \text{d'une plaque mince} \\ e(L - R) & \text{d'une plaque épaisse} \end{cases} \quad (\text{I.53})$$

##### 1.7.5.2. La contrainte maximale : $\sigma_{max}$

La contrainte maximale est déterminée par l'équation de  $K_t$  (facteur de concentration de contrainte) et est définie en fonction de  $\sigma_{nom}$  la contrainte nominale.

$$\sigma_{max} = K_t \cdot \sigma_{nom} \quad (\text{I.54})$$

On a deux cas :

$$\sigma_{\max} = \begin{cases} \frac{K_t P}{L-R} & e = 0 \text{ (plaque mince)} \\ \frac{K_t P}{e(L-R)} & e \neq 0 \text{ (plaque épaisse)} \end{cases} \quad (\text{I.55})$$

## II. Mécanique de la rupture élastique linéaire

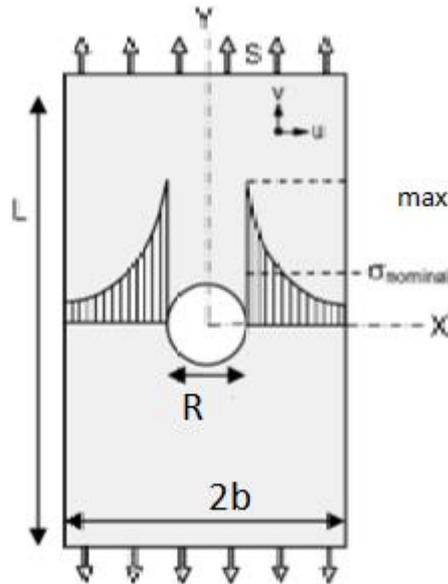
### II.1 Concentration de contrainte

#### II.1.1 Historique

En 1898, G. Kirsh a été le premier à mettre en évidence le phénomène de concentration de Contraintes, cela été pour un problème de détermination des autours d'un trou. Par la suite des solutions analytiques ont été progressivement trouvées et proposés par différents auteurs pour des structures qui présentent des géométries est de plus en plus complexe [2].

#### II.1.2 Introduction

Les calculs sur la résistance des structures sont principalement basés sur la théorie de l'élasticité. Si la limite d'élasticité est dépassée, une déformation plastique se produit et la théorie plus complexe de la plasticité doit être utilisée. Cependant, la fatigue, ainsi que la corrosion sous contrainte, sont des phénomènes qui se produisent généralement à des niveaux de contrainte relativement faibles, et on peut supposer que le comportement élastique est applicable. Le comportement élastique macroscopique d'un matériau isotrope est caractérisé par trois constantes élastiques, le module d'élasticité ou module de Young (E), le module de cisaillement (G) et le coefficient de Poisson ( $\nu$ ). La relation bien connue entre les constantes est  $E = 2G(1 + \nu)$ . Dans une structure, les encoches géométriques telles que les trous ne peuvent pas être évitées. Les entailles provoquent une répartition des contraintes inhomogène, voir figure II.1, avec une concentration de contraintes à la « racine de l'entaille ». Le facteur de concentration de contrainte (théorique),  $K_t$ , est défini comme le rapport entre la contrainte maximale à la base de l'encoche et la contrainte nominale qui serait présente si la concentration de contrainte ne se produisait pas.



**Figure. II.1.** Plaque avec trou central comme prototype d'une pièce crantée.

$$k_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \quad (\text{II.1})$$

La sévérité de la concentration de contrainte dépend de la géométrie de la configuration de l'encoche, généralement appelée forme de l'encoche. Les concepteurs doivent toujours essayer de réduire autant que possible les concentrations de contraintes afin d'éviter les problèmes de fatigue. Le présent chapitre traite de divers aspects des concentrations de contraintes et de l'effet de la géométrie (la forme) sur  $k_t$ . C'est l'un des enjeux fondamentaux de la conception d'une structure résistante à la fatigue, c'est-à-dire la conception contre la fatigue. Les problèmes discutés dans le présent chapitre couvrent les définitions des facteurs de concentration de contraintes, les calculs et les estimations des valeurs  $k_t$ , les gradients de contraintes, les aspects liés aux effets de taille et de forme, la superposition des encoches et les méthodes pour déterminer les valeurs  $k_t$  [5]

### II.1.3. Définition de $k_t$

La plaque avec un trou central représenté sur la figure II.1 est un prototype d'élément cranté. Il est souvent utilisé des expériences de fatigue pour étudier les effets d'entaille sur la fatigue. Si la bande est chargée par une répartition homogène des contraintes, le trou provoquera une répartition des contraintes inhomogène dans la section critique, qui est la section minimale au niveau du trou. Cette distribution des contraintes est caractérisée par une contrainte de pointe  $\sigma_{max}$  à la racine de l'entaille et une contrainte de section nette anormale  $\sigma_{nominal}$ . Le rapport de la contrainte maximale et de la contrainte nominale dans la section nette conduit à la

définition couramment utilisée du facteur de concentration de contrainte  $k_t$  donné dans l'équation (II.1). Il faut souligner que toutes les déformations sont supposées être élastiques.  $k_t$  est essentiellement un concept élastique. Il donne une indication directe de la sévérité de la concentration de contrainte, car c'est un facteur d'amplification sur le niveau de contrainte qui est nominalement présent dans la section nette de l'entaille.

$$\sigma_{max} = k_t \sigma_{min} \quad (II.2)$$

## II.2. Les modes de propagation des fissures :

Le bilan des contraintes qui s'exercent au voisinage de l'extrémité d'une fissure va jouer un rôle de premier plan quant à la propagation de cette dernière.

En théorie, les fissures sont planes et se propagent dans leur plan, il est ainsi possible de montrer que l'état général de propagation se limite à la superposition de trois modes (figure II.2):

- **Mode I** (mode par ouverture) : les surfaces de la fissure se déplacent dans des directions opposées et perpendiculairement au plan de fissure
- **Mode II** (glissement de translation) : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction perpendiculaire au front de fissure
- **Mode III** (glissement de rotation) : les surfaces de la fissure se déplacent dans le même plan et dans une direction parallèle au front de fissure

Le mode I est souvent le plus critique

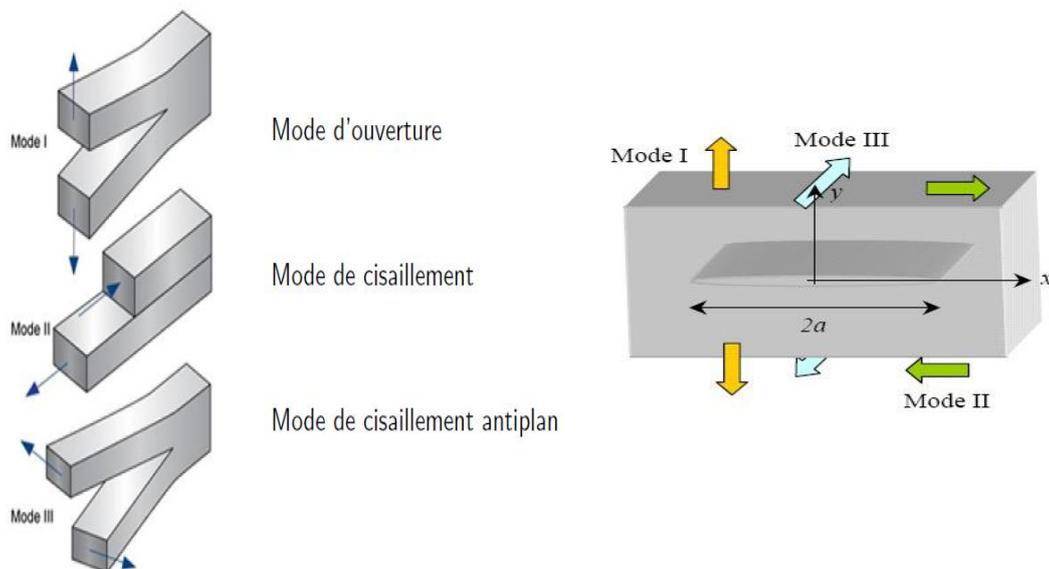


Figure II.2 : les trois modes de rupture

$$\text{Mode I} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{array} \right. \quad (\text{II.3})$$

$$\text{Mode II} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.4})$$

$$\text{Mode II} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = -\frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{II.5})$$

### II.3. Concept d'intensité des contraintes

La figure II.3 schématise l'ensemble des contraintes appliquées sur un élément centré en un point M de coordonnées polaires  $(r, \theta)$  par rapport à l'extrémité d'une fissure sollicitée en mode d'ouverture ou mode I. Ces contraintes sont décrites par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Ces relations peuvent s'écrire sous la forme condensée suivante :

$$\sigma_{ij} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) \quad (\text{II.7})$$

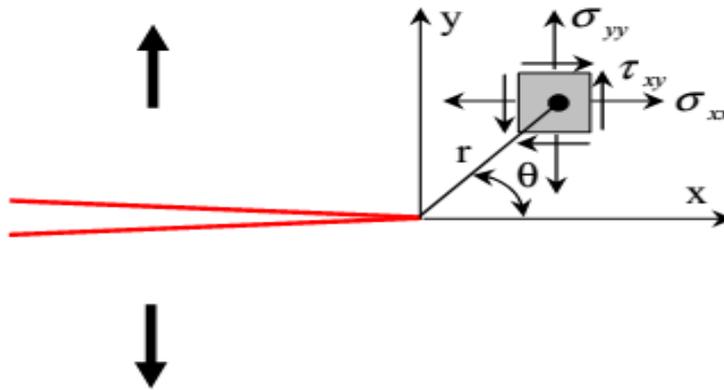


Figure II.3 : Contraintes près de l'extrémité d'une fissure

#### II.4. Calculs analytiques sur les concentrations de contraintes :

Les solutions analytiques basées sur la théorie de l'élasticité ne sont pas traitées en détail ici. L'analyse peut être trouvée dans divers manuels. Fondamentalement, la procédure suivante est utilisée : pour un problème à deux dimensions, comme le montre la figure II.1, les fonctions de déplacement  $u(x, y)$  et  $v(x, y)$  doivent être trouvées. Si ces fonctions sont obtenues, les déformations découlent de ces fonctions, et les contraintes sont liées aux déformations par la loi de Hooke. Le problème est alors apparemment résolu. Pour trouver la solution, les déformations de traction,  $\varepsilon_X(x, y)$  et  $\varepsilon_Y(x, y)$ , et la déformation de cisaillement  $\gamma_{XY}(x, y)$  doivent satisfaire l'équation de compatibilité. De plus, il existe des équations d'équilibre pour  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  et  $\tau_{XY}$ . Ces contraintes sont liées aux déformations par trois équations représentant

### II.5. Facteur de concentration de contrainte dans un trou elliptique :

Considérons le facteur de concentration de contrainte pour un trou elliptique dans une grande plaque linéaire-élastique soumise à une contrainte uni axiale distante [11]. On peut montrer que le facteur de concentration de contrainte est le suivant :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = 1 + \frac{2a}{b} \quad (\text{II.8})$$

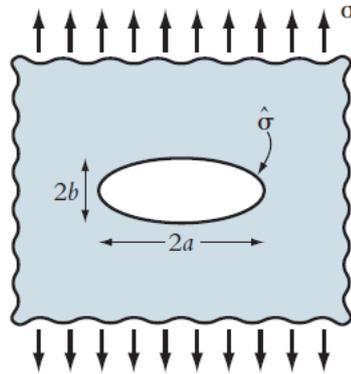


Figure II.4 Trou elliptique dans une plaque infinie

Ainsi, comme  $b \rightarrow 0$  le trou elliptique dégénère à une fissure, et  $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$  de sorte que la contrainte d'entaille va aussi à l'infini (c'est-à-dire devient singulière),  $\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = \infty$ , à condition que le comportement du matériau reste linéaire élastique. Le rayon de la racine d'une ellipse est donné par

$$\rho = \frac{b^2}{a} \Rightarrow b = \sqrt{a\rho} \quad (\text{II.9})$$

$$\text{de sorte que } \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (\text{II.10})$$

et encore, lorsque le rayon de la pointe de l'entaille tend vers zéro, c'est-à-dire  $r \rightarrow 0$ , la contrainte de la pointe de l'entaille passe à nouveau à l'infini :

$$\frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}} \rightarrow 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \rightarrow \infty \quad (\text{II.11})$$

L'état de contrainte singulier (infini) au fond d'une fissure est l'un des aspects fondamentaux et les plus importants de la mécanique de la rupture. Base de l'approche énergétique de la mécanique de la rupture Griffith (1921) a étudié la rupture fragile du verre et a adopté une approche énergétique pour résoudre le problème. Il a estimé qu'une propagation instable des fissures ne se produit que si une augmentation de la croissance des fissures,  $da$ , entraîne la libération d'une énergie de déformation supérieure à celle absorbée par la création de

nouvelles surfaces de fissures. Ceci peut être réexprimé comme la variation de l'énergie de déformation  $dU$ , due à l'extension de la fissure, étant supérieure à l'énergie absorbée par la création des nouvelles surfaces de fissure. Ainsi, si l'on désigne l'énergie surfacique par unité de surface de la fissure  $\gamma_s$ , alors l'énergie surfacique associée à une fissure de longueur  $2a$  dans un corps d'épaisseur  $B$  (comme le montre la figure II.4) est donnée par [11]:

$$W_s = 4aB\gamma_s \quad (\text{II.12})$$

Une analyse détaillée des contraintes d'un trou elliptique dans une plaque élastique infinie a établi que l'énergie de déformation dans un tel corps est

$$W_p = -\frac{\pi a^2 \sigma^2 B}{E'} \quad (\text{II.13})$$

Où  $\sigma$  est la contrainte à distance (loin du trou) et où, pour la déformation plane et la contrainte plane, respectivement,

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (\text{II.14})$$

$$\text{Et } E' = E$$

L'énergie totale du système est donc

$$W = -\frac{\pi a^2 \sigma^2 B}{E'} + 4aB\gamma_s \quad (\text{II.15})$$

Selon Griffith, la condition critique pour le début de la croissance des fissures est

$$\frac{dU}{dA} = -\frac{\pi a \sigma^2}{E'} + 2\gamma_s = 0 \quad (\text{II.16})$$

Par conséquent :

$$\frac{\pi a \sigma^2}{E'} = 2\gamma_s \quad (\text{II.17})$$

Où  $A = 2aB$  est la surface de la fissure et  $dA$  désigne une augmentation incrémentielle de la surface de la fissure. La surface totale des deux surfaces de fissure est de  $2A$ . Cette relation est classiquement réexprimée sous la forme

$$G = G_c \quad (\text{II.18})$$

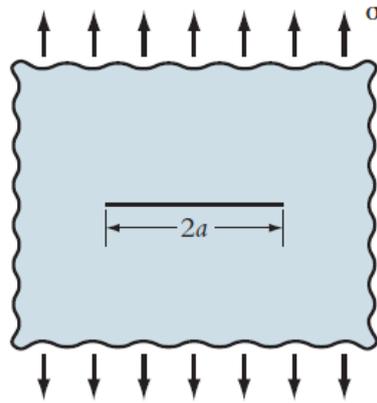


Figure II.5 Fissure dans une plaque infinie

où  $G$  est appelé le taux de libération d'énergie de déformation, la force motrice de fond de fissure ou la force d'extension de fissure.  $G_c$  est une propriété matérielle, connue sous le nom de taux de libération d'énergie de déformation critique, de ténacité ou de force critique d'extension de fissure. Une valeur élevée de  $G_c$  signifie qu'il est difficile de provoquer une croissance instable de fissure dans le matériau alors qu'une valeur faible signifie qu'il est facile de faire croître une fissure de manière instable. Ainsi, le cuivre, par exemple, a une valeur de  $G_c \approx 10^6 \text{ J/m}^2$ , alors que le verre a une valeur de  $G_c \approx 10 \text{ J/m}^2$ . Les relations suivantes pour la contrainte plane et la déformation plane, respectivement, découlent de ce qui précède [11] :

$$\begin{aligned}
 G &= \frac{\pi a \sigma^2}{E} && (\text{contrainte plane}) \\
 G &= \frac{(1-\nu^2)}{E} \pi a \sigma^2 && (\text{déformation plane})
 \end{aligned}
 \tag{II.19}$$

## II.6 Facteur d'intensité de contrainte du 1er mode dans une fissure au bord du trou circulaire :

$$\begin{aligned}
 K_I &= \sigma \sqrt{\pi a} f(s), \\
 f(s) &= (1 - \lambda) f_{1(s)} + \lambda f_{2(s)} \\
 s &= \frac{a}{a + R}, \text{ pour les deux (a) et b}
 \end{aligned}
 \tag{II.20}$$

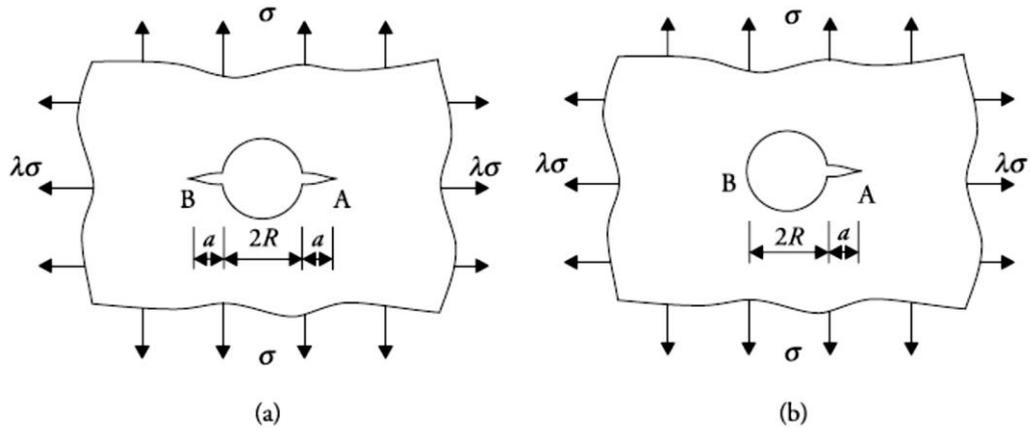


Figure II.6 Fissure au bord du trou dans la plaque infinie. (a) deux fissures et (b) une seule fissure [12].

### II.6.1 Cas de deux fissures

$$f_1(s) = 0.5(3 - s)[1 + 1.243(1 - s)^2] \quad (\text{II.21})$$

$$f_2(s) = 1 + [0.5 + 0.743(1 - s)^3].$$

### II.6.2 Cas d'une seule fissure

$$f_1(s) = [1 + 0.2(1 - s) + 0.3(1 - s)^6]f_2(s) \quad (\text{II.22})$$

$$f_2(s) = 2.243 - 2.64s + 1.352s^2 - 0.248s^3$$

**Etude statique d'une plaque trouée**

Considérons une plaque avec un trou circulaire en traction.

**Etude analytique****Caractéristiques de la plaque trouée****Géométrie de la plaque**

- Longueur :  $L=400$  mm
- Largeur :  $2.b= 200$  mm
- Diamètre du trou :  $2.R = 100$  mm
- Epaisseur :  $e =5$  mm

**Matériaux**

La plaque est en acier avec un module d'Young  $E = 200$  GPa et un coefficient de Poisson  $= 0,3$ .

**Chargement**

$F= 200$  kN

Etat de contraintes

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}(r, \theta) &= \frac{\sigma^\infty}{2} \left\{ \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) - \left( 1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \\ \sigma_{r\theta}(r, \theta) &= \frac{\sigma^\infty}{2} \left( 1 - \frac{4R^2}{r^2} + \frac{3R^4}{r^4} \right) \sin 2\theta \\ \sigma_{\theta\theta}(r, \theta) &= \frac{\sigma^\infty}{2} \left\{ \left( 1 + \frac{R^2}{r^2} \right) + \left( 1 + \frac{3R^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\}\end{aligned}\tag{III.1}$$

Le facteur de concentration de contrainte pour une plaque rectangulaire avec un trou central circulaire est donné par l'équation :

$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}\tag{III.2}$$

$$\sigma_{nom} = \frac{\text{Force appliquée}}{\text{Aire}} = \frac{F}{A} = \frac{F}{2.b.e} = \frac{200000}{1000} = 200 \text{ MPa}$$

Alors que  $\sigma_{max}$  est la contrainte maximale, qui est susceptible de se produire au voisinage du trou, tandis que  $\sigma_{nom}$  est la contrainte nominale dans la plaque.

La contrainte normale maximale est obtenue pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$

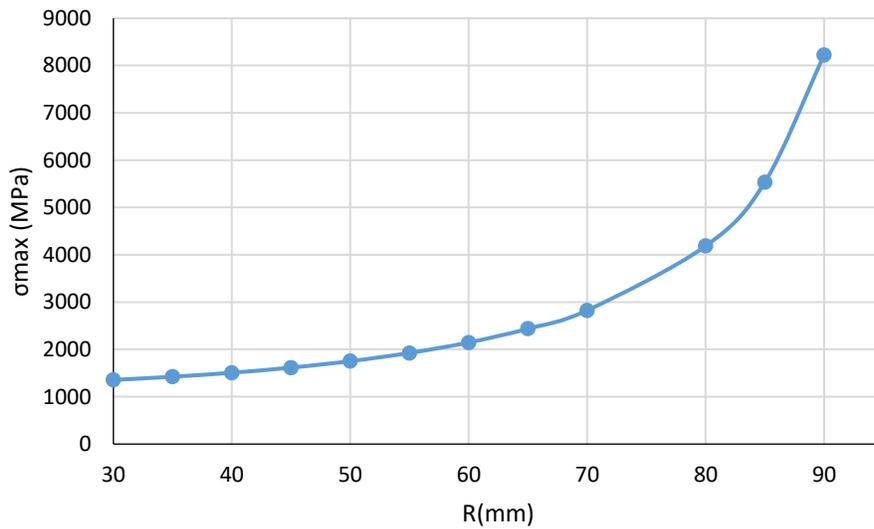


Figure III.1 Variation de la contrainte normale maximale en fonction du rayon R du trous

pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$

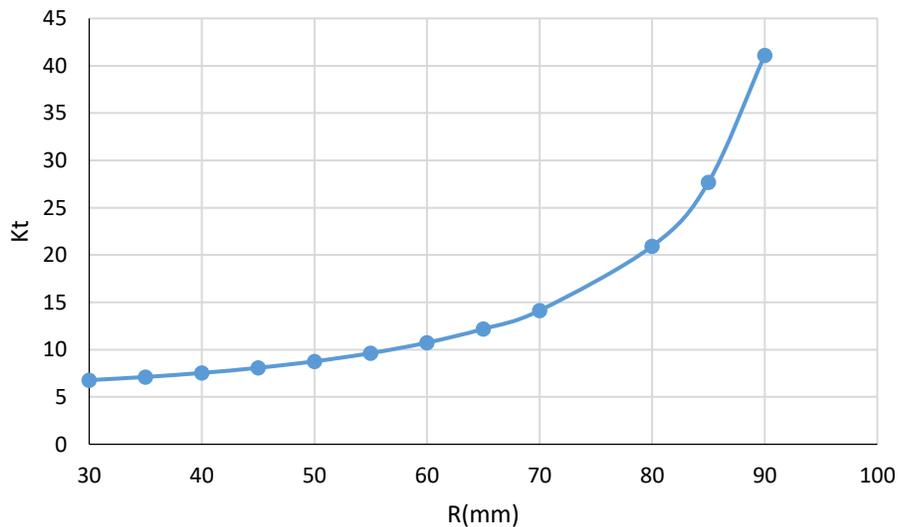
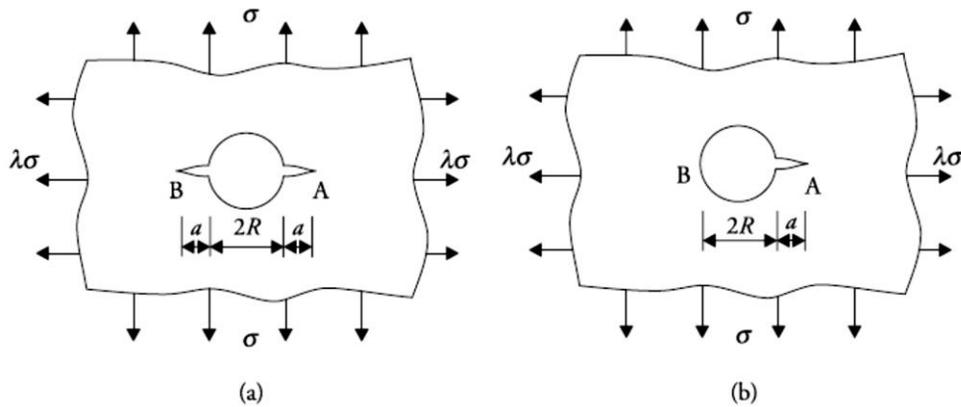


Figure III.2 Variation du coefficient de concentration de contrainte  $K_t$  en fonction du rayon

$$R \text{ du trou pour } \theta = \frac{\pi}{2}$$

On remarque sur les deux courbes que la contrainte normale maximale et le coefficient de concentration de contrainte augmentent avec l'augmentation du diamètre du trou.

**Facteur d'intensité de contrainte du 1<sup>er</sup> mode dans une Fissure au bord du trou circulaire :**



$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}f(s),$$

$$f(s) = (1 - \lambda)f_{1(s)} + \lambda f_{2(s)} \tag{III.3}$$

$$s = \frac{a}{a + R}, \text{ pour les deux cas (a) et b}$$

Dans notre cas traction uni axiale  $\lambda = 0$ , plaque avec deux fissures symétriques.

La fonction  $f(s) = f_1(s)$

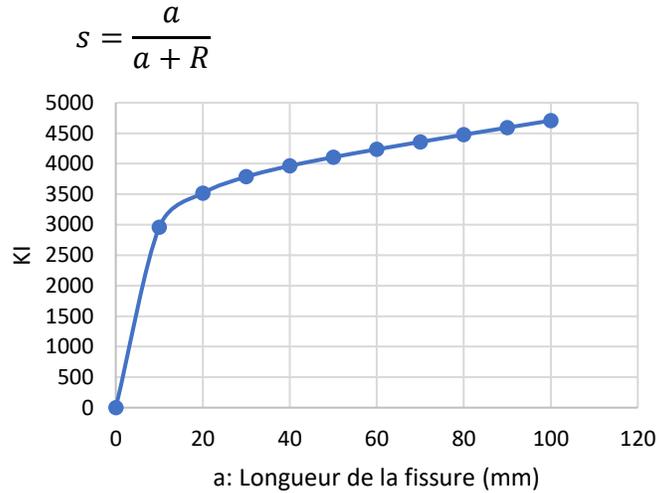
Cas de deux fissures et

$$f_1(s) = 0.5(3 - s)[1 + 1.243(1 - s)^2] \tag{II.21}$$

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}f(s) = \sigma\sqrt{\pi a}f_1(s)$$

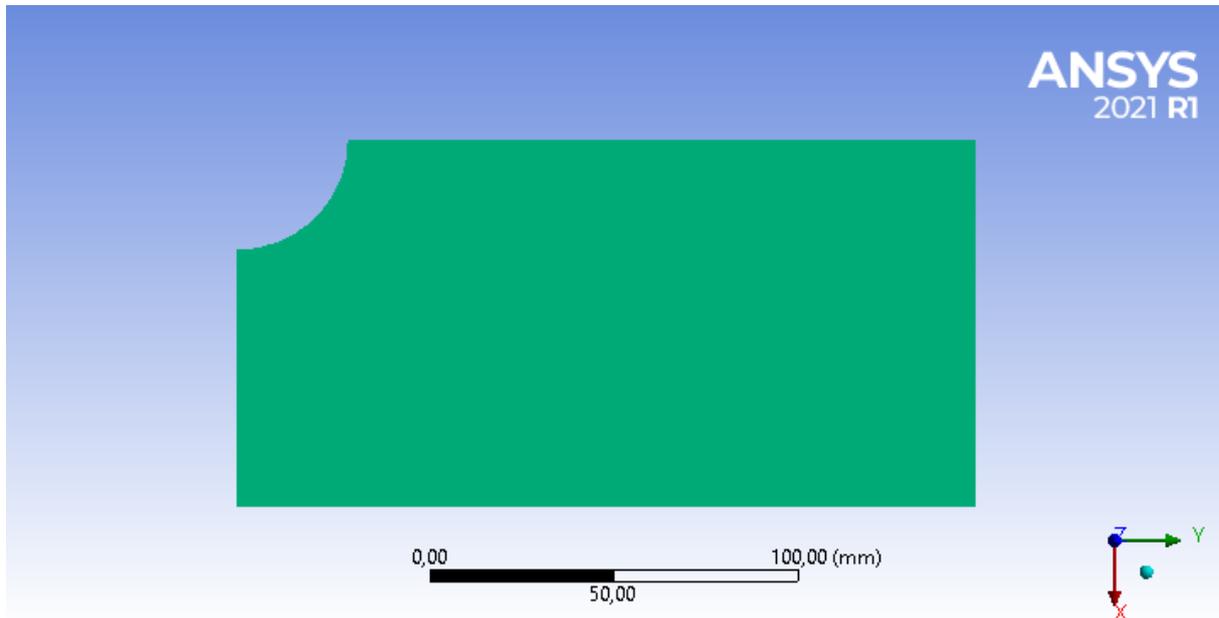
$$K_I = 0.5\sigma\sqrt{\pi a} \cdot (3 - s)[1 + 1.243(1 - s)^2]$$

a	s	K <sub>I</sub>
0	0	0
10	0,166667	2958,903
20	0,285714	3515,98
30	0,375	3785,744
40	0,444444	3963,821
50	0,5	4106,954
60	0,545455	4235,397
70	0,583333	4357,148
80	0,615385	4475,529
90	0,642857	4591,931
100	0,666667	4706,915



Le facteur d'intensité de contrainte augmente avec l'augmentation de la longueur de la fissure.

## Simulation de la traction d'une plaque à trou centrale avec ANSYS Workbench



### Units

**TABLE 1**

Unit System	Metric (mm, kg, N, s, mV, mA) Degrees rad/s Celsius
Angle	Degrees
Rotational Velocity	rad/s
Temperature	Celsius

### Materials

**TABLE 2 Acier standard Elasticité isotrope**

Young's Modulus MPa	Poisson's Ratio	Bulk Modulus MPa	Shear Modulus MPa	Temperature C
2,e+005	0,3	1,6667e+005	76923	

**Symétrie**

**TABLE 3 Zone de symétrie**

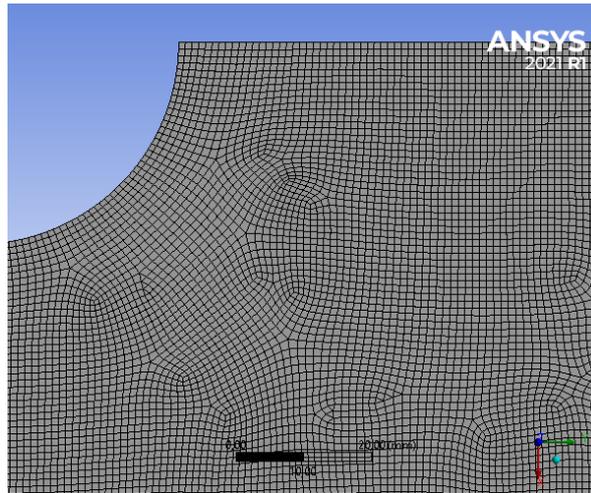
Object Name	<i>Zone de symétrie</i>	<i>Zone de symétrie 2</i>
State	Fully Defined	
<b>Scope</b>		
Scoping Method	Geometry Selection	
Geometry	1 Edge	
<b>Definition</b>		
Scope Mode	Manual	
Type	Symmetric	
Coordinate System	Système de coordonnées global	
Symmetry Normal	X Axis	Y Axis
Suppressed	No	

**Maillage**

**TABLE 4 Mesh**

Object Name	<i>Maillage</i>
<b>Defaults</b>	
Physics Preference	Mechanical
Element Order	Quadratic
Element Size	3, mm
<b>Sizing</b>	
Use Adaptive Sizing	Yes
Resolution	5
Span Angle Center	Fine
<b>Quality</b>	
Error Limits	Standard Mechanical
Smoothing	Medium
<b>Statistics</b>	
Nodes	19234
Elements	18942

**FIGURE 2 Maillage**



Structure statique

TABLE 5 Analysis

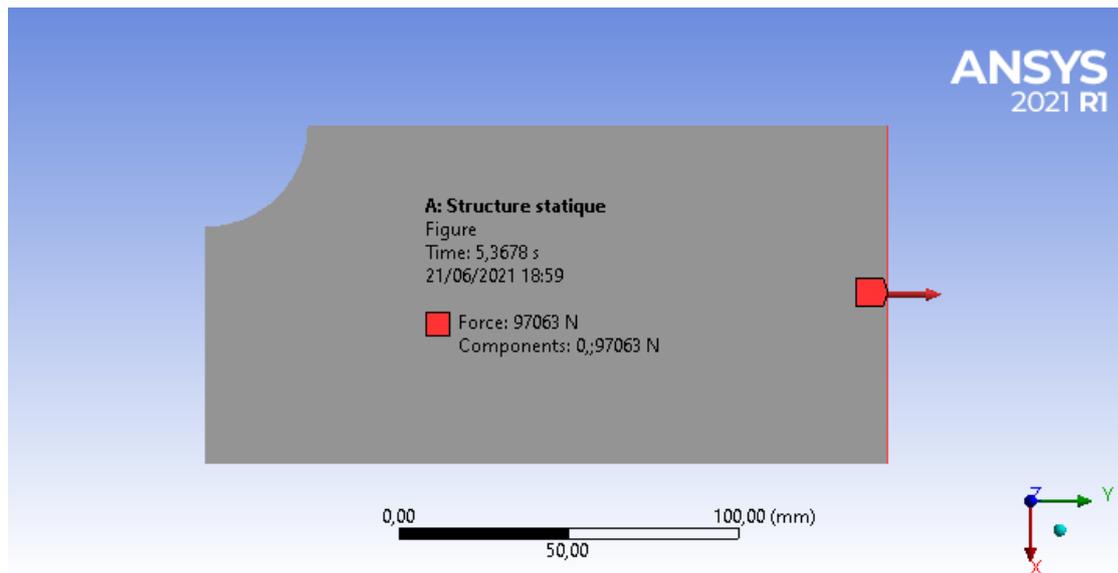
Object Name	Structure statique (A5)
State	Solved
<b>Definition</b>	
Physics Type	Structural
Analysis Type	Static Structural
Solver Target	Mechanical APDL
<b>Options</b>	
Environment Temperature	22, °C
Generate Input Only	No

TABLE 6 Force

Steps	Time [s]	X [N]	Y [N]
1	0,	= 0,	0,
	1,	0,	
2	2,	= 0,	= 22222
3	3,		= 44444
4	4,		= 66667
5	5,		= 88889
6	6,		= 1,1111e+005
7	7,		= 1,3333e+005
8	8,		= 1,5556e+005
9	9,		= 1,7778e+005
10	10,		2,e+005

FIGURE 3 Force appliquée

## Simulation de la traction d'une plaque à trou centrale



### Solution

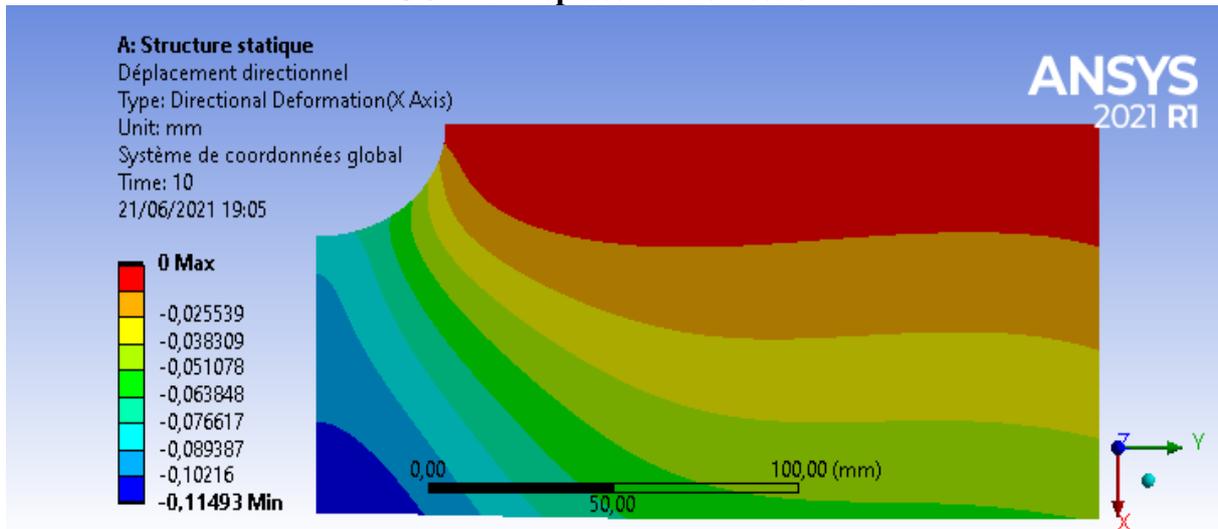
**TABLE 7 Résultats**

Object Name	Déplacement directionnel	Contrainte normale	Déformation élastique de cisaillement	Contrainte principale maximale
State	Solved			
<b>Definition</b>				
Type	Directional Deformation	Normal Stress	Shear Elastic Strain	Maximum Principal Stress
Orientation	X Axis	Y Axis	XY Component	
<b>Results</b>				
Minimum	-0,11493 mm	-28,436 MPa	-4,777e-003 mm/mm	0, MPa
Maximum	0, mm	1355, MPa	1,1421e-003 mm/mm	1355,4 MPa
Average	-3,5957e-002 mm	414,29 MPa	-2,2565e-004 mm/mm	417,85 MPa

**TABLE 8**  
**Déplacement directionnel**

Time [s]	Minimum [mm]	Maximum [mm]	Average [mm]
1,	0,	0,	0,
2,	-1,277e-002		-3,9953e-003
3,	-2,5539e-002		-7,9905e-003
4,	-3,8309e-002		-1,1986e-002
5,	-5,1078e-002		-1,5981e-002
6,	-6,3848e-002		-1,9976e-002
7,	-7,6617e-002		-2,3972e-002
8,	-8,9387e-002		-2,7967e-002
9,	-0,10216		-3,1962e-002
10,	-0,11493		-3,5957e-002

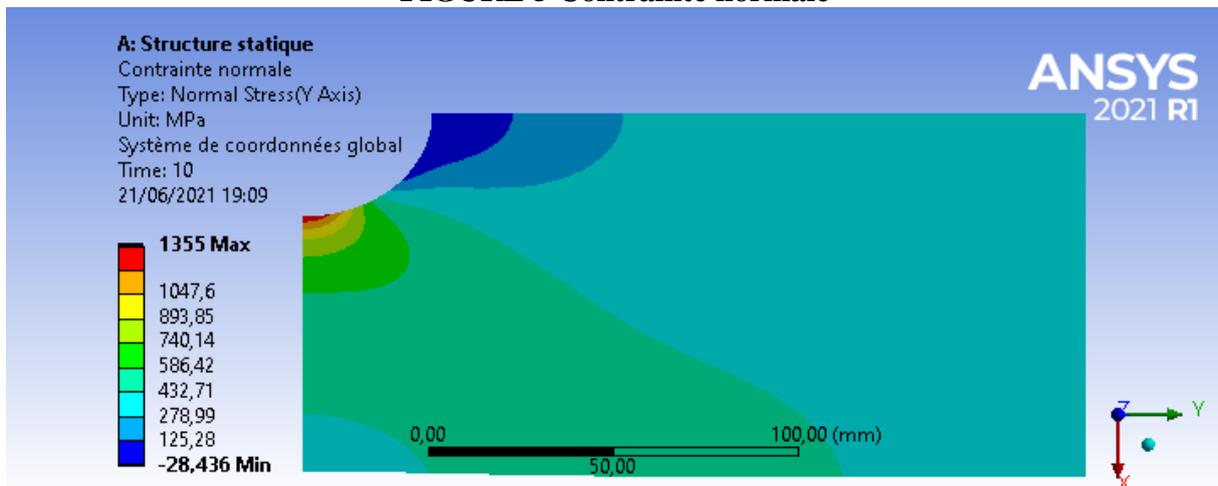
**FIGURE 4 Déplacement directionnel**



**TABLE 9 Contrainte normale**

Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average [MPa]
1,	0,	0,	0,
2,	-3,1595	150,56	46,032
3,	-6,3191	301,11	92,064
4,	-9,4786	451,67	138,1
5,	-12,638	602,22	184,13
6,	-15,798	752,78	230,16
7,	-18,957	903,33	276,19
8,	-22,117	1053,9	322,22
9,	-25,276	1204,4	368,26
10,	-28,436	1355,	414,29

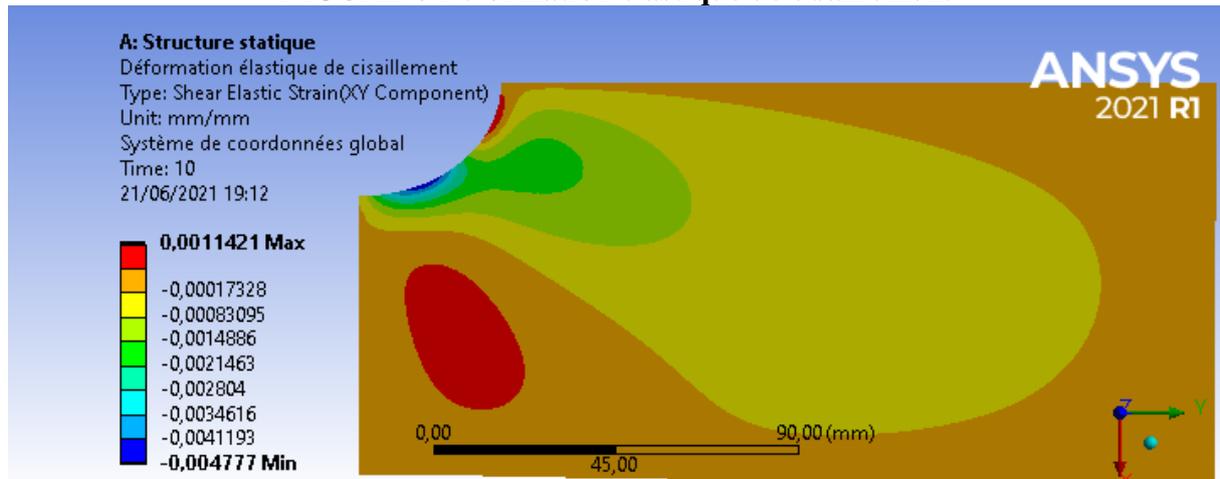
**FIGURE 5 Contrainte normale**



**TABLE 10 Déformation élastique de cisaillement**

Time [s]	Minimum [mm/mm]	Maximum [mm/mm]	Average [mm/mm]
1,	0,	0,	0,
2,	-5,3078e-004	1,269e-004	-2,5073e-005
3,	-1,0616e-003	2,5379e-004	-5,0145e-005
4,	-1,5923e-003	3,8069e-004	-7,5218e-005
5,	-2,1231e-003	5,0759e-004	-1,0029e-004
6,	-2,6539e-003	6,3448e-004	-1,2536e-004
7,	-3,1847e-003	7,6138e-004	-1,5044e-004
8,	-3,7154e-003	8,8827e-004	-1,7551e-004
9,	-4,2462e-003	1,0152e-003	-2,0058e-004
10,	-4,777e-003	1,1421e-003	-2,2565e-004

**FIGURE 6 Déformation élastique de cisaillement**



**TABLE 11 Contrainte principale maximale**

Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average [MPa]
1,	0,	0,	0,
2,		150,59	46,427
3,		301,19	92,855
4,		451,78	139,28
5,		602,38	185,71
6,		752,97	232,14
7,		903,57	278,56
8,		1054,2	324,99
9,		1204,8	371,42
10,		1355,4	417,85

FIGURE 7 Contrainte principale maximale

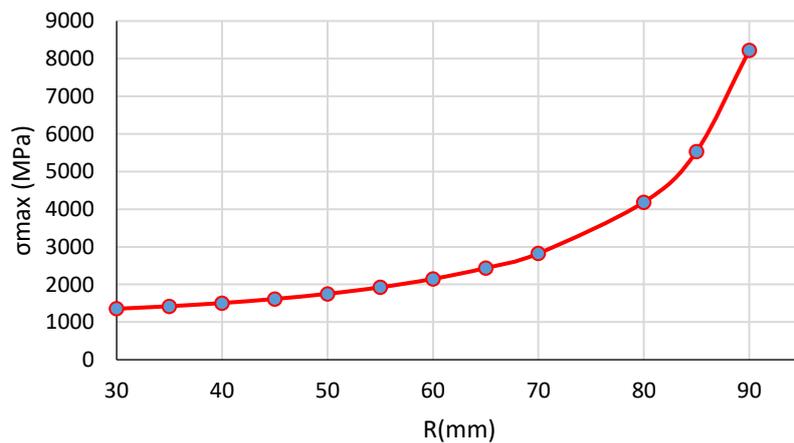
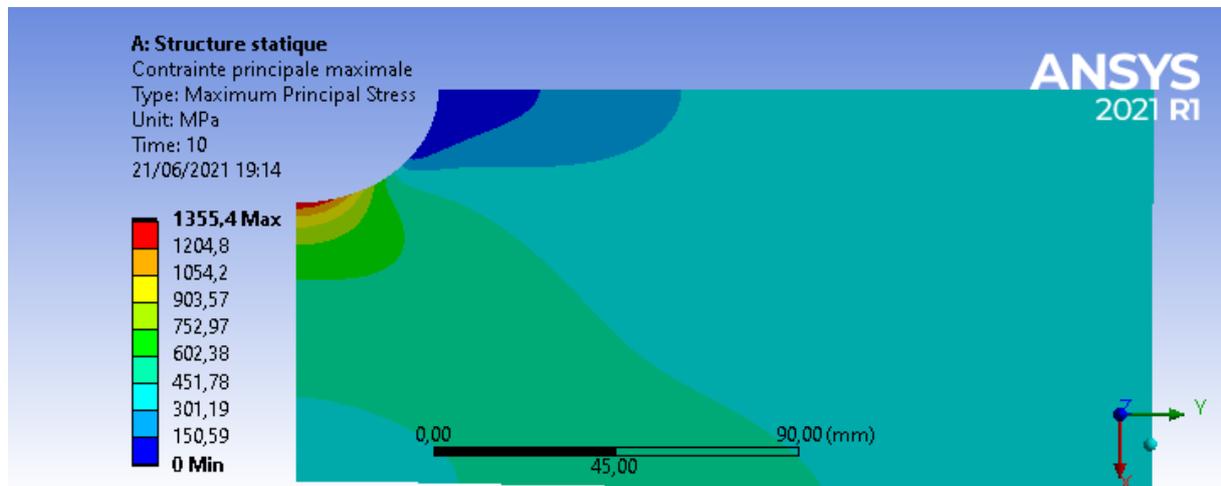


Figure 8 Contrainte principale maximale en fonction de R

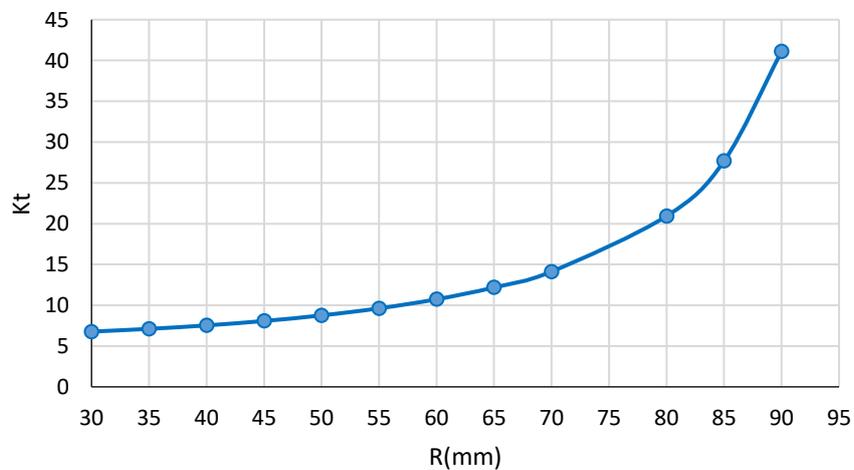
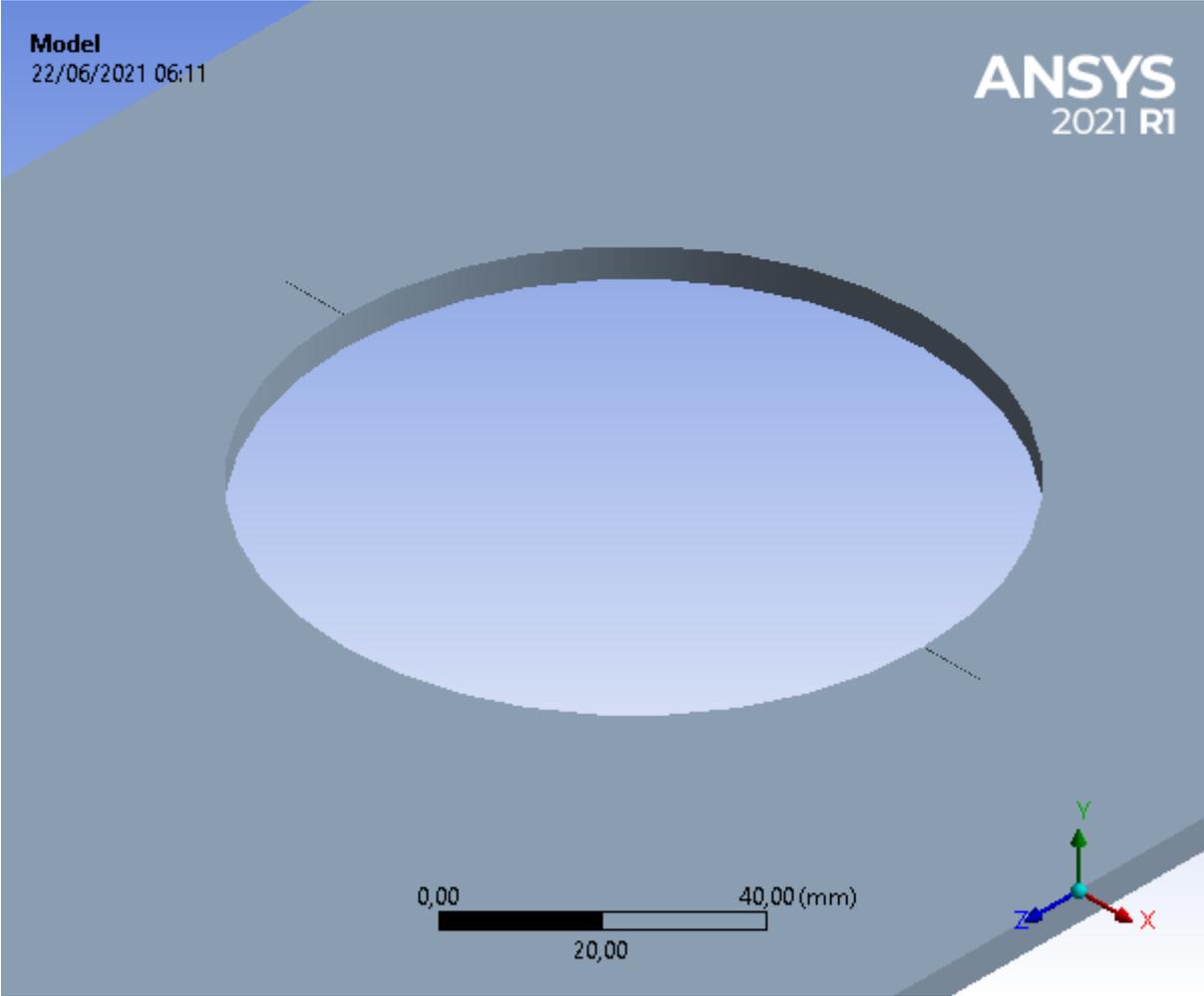


Fig 9 Facteur de concentration de contrainte en fonction de R

Simulation de la fracture dans une plaque trouée



## Contents

- Units
- Model (A4)
  - Geometry
    - Solid
  - Materials
  - Coordinate Systems
  - Mesh
    - Mesh Controls
  - Static Structural (A5)
    - Analysis Settings
    - Loads
    - Solution (A6)
      - Solution Information
      - Results
- Material Data
  - Structural Steel

## Units

**TABLE 1**

Unit System	Metric (mm, kg, N, s, mV, mA) Degrees rad/s Celsius
Angle	Degrees
Rotational Velocity	rad/s
Temperature	Celsius

## Model (A4)

### Geometry

**TABLE 2**  
**Model (A4) > Geometry**

Object Name	<i>Geometry</i>
State	Fully Defined
<b>Definition</b>	
Source	G:\plate tuto2\plate with hole 2_files\dp0\SYS\DM\SYS.agdb
Type	DesignModeler
Length Unit	Meters
Element Control	Program Controlled
Display Style	Body Color
<b>Bounding Box</b>	
Length X	200, mm
Length Y	5, mm

## Simulation de la fracture dans une plaque trouée

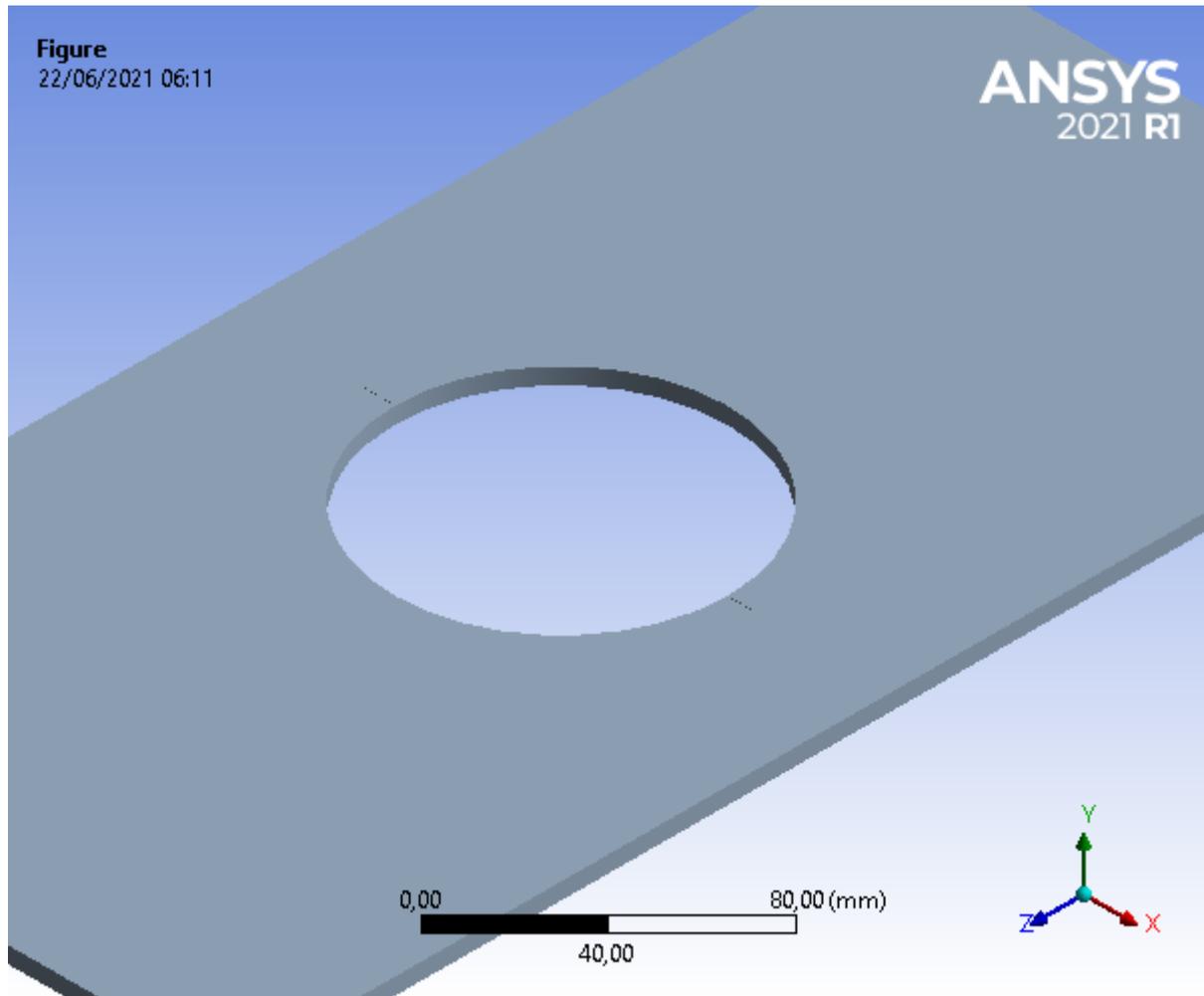
Length Z	400, mm
<b>Properties</b>	
Volume	3,6071e+005 mm <sup>3</sup>
Mass	2,8316 kg
Scale Factor Value	1,
<b>Statistics</b>	
Bodies	1
Active Bodies	1
Nodes	57617
Elements	32664
Mesh Metric	None
<b>Update Options</b>	
Assign Default Material	No
<b>Basic Geometry Options</b>	
Parameters	Independent
Parameter Key	
Attributes	Yes
Attribute Key	
Named Selections	Yes
Named Selection Key	
Material Properties	Yes
<b>Advanced Geometry Options</b>	
Use Associativity	Yes
Coordinate Systems	Yes
Coordinate System Key	
Reader Mode Saves Updated File	No
Use Instances	Yes
Smart CAD Update	Yes
Compare Parts On Update	No
Analysis Type	3-D
Import Facet Quality	Source
Clean Bodies On Import	No
Stitch Surfaces On Import	None
Decompose Disjoint Geometry	Yes
Enclosure and Symmetry Processing	Yes

**TABLE 3**  
**Model (A4) > Geometry > Parts**

Object Name	<i>Solid</i>
State	Meshed
<b>Graphics Properties</b>	
Visible	Yes
Transparency	1
<b>Definition</b>	

Suppressed	No
Stiffness Behavior	Flexible
Coordinate System	Default Coordinate System
Reference Temperature	By Environment
Treatment	None
<b>Material</b>	
Assignment	Structural Steel
Nonlinear Effects	Yes
Thermal Strain Effects	Yes
<b>Bounding Box</b>	
Length X	200, mm
Length Y	5, mm
Length Z	400, mm
<b>Properties</b>	
Volume	3,6071e+005 mm <sup>3</sup>
Mass	2,8316 kg
Centroid X	-3,1293e-015 mm
Centroid Y	-6,1115e-017 mm
Centroid Z	3,0893e-015 mm
Moment of Inertia Ip1	41682 kg·mm <sup>2</sup>
Moment of Inertia Ip2	51951 kg·mm <sup>2</sup>
Moment of Inertia Ip3	10281 kg·mm <sup>2</sup>
<b>Statistics</b>	
Nodes	57617
Elements	32664
Mesh Metric	None

**FIGURE 1**  
**Model (A4) > Geometry > Figure**



**TABLE 4**  
**Model (A4) > Materials**

Object Name	<i>Materials</i>
State	Fully Defined
<b>Statistics</b>	
Materials	1
Material Assignments	0

*Coordinate Systems*

**TABLE 5**  
**Model (A4) > Coordinate Systems > Coordinate System**

Object Name	<i>Global Coordinate System</i>
State	Fully Defined
<b>Definition</b>	
Type	Cartesian
Coordinate System ID	0,
<b>Origin</b>	
Origin X	0, mm
Origin Y	0, mm

Origin Z	0, mm
<b>Directional Vectors</b>	
X Axis Data	[ 1, 0, 0, ]
Y Axis Data	[ 0, 1, 0, ]
Z Axis Data	[ 0, 0, 1, ]

*Mesh*

**TABLE 6**  
**Model (A4) > Mesh**

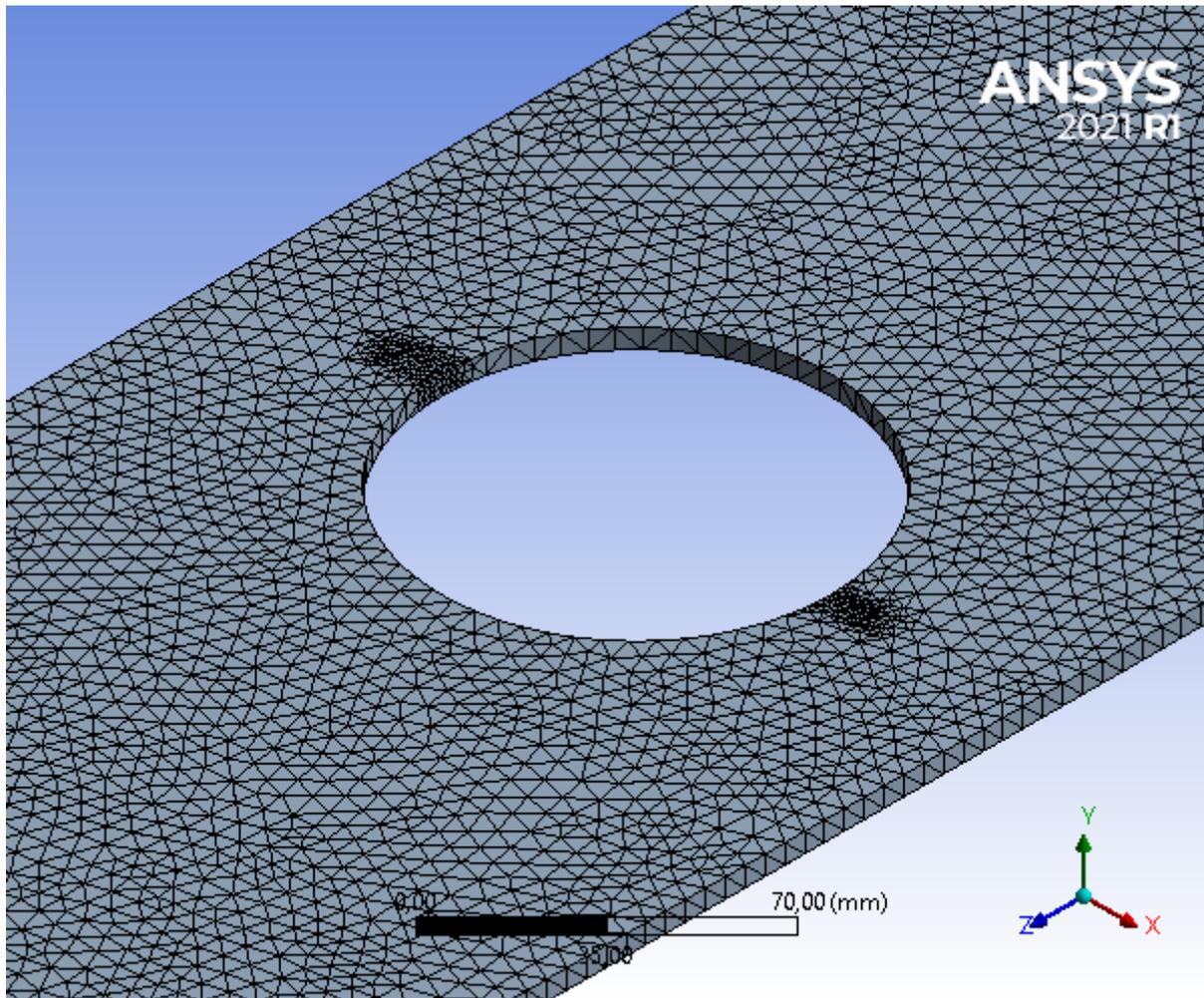
Object Name	<i>Mesh</i>
State	Solved
<b>Display</b>	
Display Style	Use Geometry Setting
<b>Defaults</b>	
Physics Preference	Mechanical
Element Order	Program Controlled
Element Size	Default (22,362 mm)
<b>Sizing</b>	
Use Adaptive Sizing	No
Growth Rate	Default (1,85)
Max Size	Default (44,724 mm)
Mesh Defeaturing	Yes
Defeature Size	Default (0,11181 mm)
Capture Curvature	Yes
Curvature Min Size	Default (0,22362 mm)
Curvature Normal Angle	Default (70,395°)
Capture Proximity	No
Bounding Box Diagonal	447,24 mm
Average Surface Area	9508,2 mm <sup>2</sup>
Minimum Edge Length	0,38637 mm
<b>Quality</b>	
Check Mesh Quality	Yes, Errors
Error Limits	Aggressive Mechanical
Target Quality	Default (0.050000)
Smoothing	Medium
Mesh Metric	None
<b>Inflation</b>	
Use Automatic Inflation	None
Inflation Option	Smooth Transition
Transition Ratio	0,272
Maximum Layers	2
Growth Rate	1,2
Inflation Algorithm	Pre
View Advanced Options	No

<b>Advanced</b>	
Number of CPUs for Parallel Part Meshing	Program Controlled
Straight Sided Elements	No
Rigid Body Behavior	Dimensionally Reduced
Triangle Surface Mesher	Program Controlled
Topology Checking	Yes
Pinch Tolerance	Default (0,20126 mm)
Generate Pinch on Refresh	No
<b>Statistics</b>	
Nodes	57617
Elements	32664

**TABLE 7**  
**Model (A4) > Mesh > Mesh Controls**

Object Name	<i>Body Sizing</i>	<i>Refinement</i>
State	Fully Defined	
<b>Scope</b>		
Scoping Method	Geometry Selection	
Geometry	1 Body	8 Faces
<b>Definition</b>		
Suppressed	No	
Type	Element Size	
Element Size	5, mm	
Refinement		2
<b>Advanced</b>		
Defeature Size	Default (0,11181 mm)	
Behavior	Soft	
Growth Rate	Default (1,85)	
Capture Curvature	No	
Capture Proximity	No	

**FIGURE 2**  
**Model (A4) > Mesh > Figure**



Static Structural (A5)

**TABLE 8**  
Model (A4) > Analysis

Object Name	Static Structural (A5)
State	Solved
<b>Definition</b>	
Physics Type	Structural
Analysis Type	Static Structural
Solver Target	Mechanical APDL
<b>Options</b>	
Environment Temperature	22, °C
Generate Input Only	No

**TABLE 9**  
Model (A4) > Static Structural (A5) > Analysis Settings

Object Name	Analysis Settings
State	Fully Defined
<b>Step Controls</b>	
Number Of Steps	10,

## Simulation de la fracture dans une plaque trouée

Current Step Number	1,
Step End Time	1, s
Auto Time Stepping	Program Controlled
<b>Solver Controls</b>	
Solver Type	Program Controlled
Weak Springs	Off
Solver Pivot Checking	Program Controlled
Large Deflection	Off
Inertia Relief	Off
Quasi-Static Solution	Off
<b>Rotordynamics Controls</b>	
Coriolis Effect	Off
<b>Restart Controls</b>	
Generate Restart Points	Program Controlled
Retain Files After Full Solve	No
Combine Restart Files	Program Controlled
<b>Nonlinear Controls</b>	
Newton-Raphson Option	Program Controlled
Force Convergence	Program Controlled
Moment Convergence	Program Controlled
Displacement Convergence	Program Controlled
Rotation Convergence	Program Controlled
Line Search	Program Controlled
Stabilization	Program Controlled
<b>Advanced</b>	
Inverse Option	No
Contact Split (DMP)	Off
<b>Output Controls</b>	
Stress	Yes
Surface Stress	No
Back Stress	No
Strain	Yes
Contact Data	Yes
Nonlinear Data	No
Nodal Forces	No
Volume and Energy	Yes
Euler Angles	Yes
General Miscellaneous	No
Contact Miscellaneous	No
Store Results At	All Time Points
Result File Compression	Program Controlled
<b>Analysis Data Management</b>	
Solver Files Directory	G:\plate tuto2\plate with hole 2_files\dp0\SYS\MECH\
Future Analysis	None

Scratch Solver Files Directory	
Save MAPDL db	No
Contact Summary	Program Controlled
Delete Unneeded Files	Yes
Nonlinear Solution	No
Solver Units	Active System
Solver Unit System	nmm

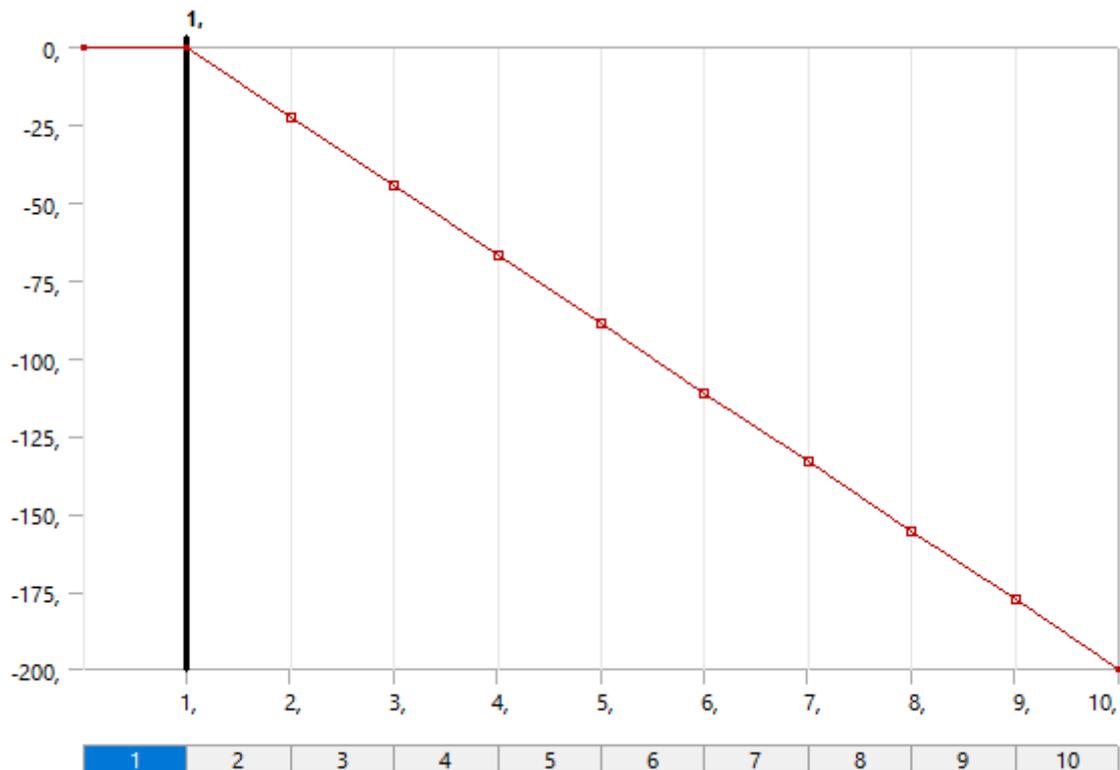
**TABLE 10**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Analysis Settings**  
**Step-Specific "Step Controls"**

Step	Step End Time
1	1, s
2	2, s
3	3, s
4	4, s
5	5, s
6	6, s
7	7, s
8	8, s
9	9, s
10	10, s

**TABLE 11**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Loads**

Object Name	<i>Fixed Support</i>	<i>Pressure</i>
State	Fully Defined	
<b>Scope</b>		
Scoping Method	Geometry Selection	
Geometry	1 Face	
<b>Definition</b>		
Type	Fixed Support	Pressure
Suppressed	No	
Define By		Normal To
Applied By		Surface Effect
Loaded Area		Deformed
Magnitude		Tabular Data
<b>Tabular Data</b>		
Independent Variable		Time

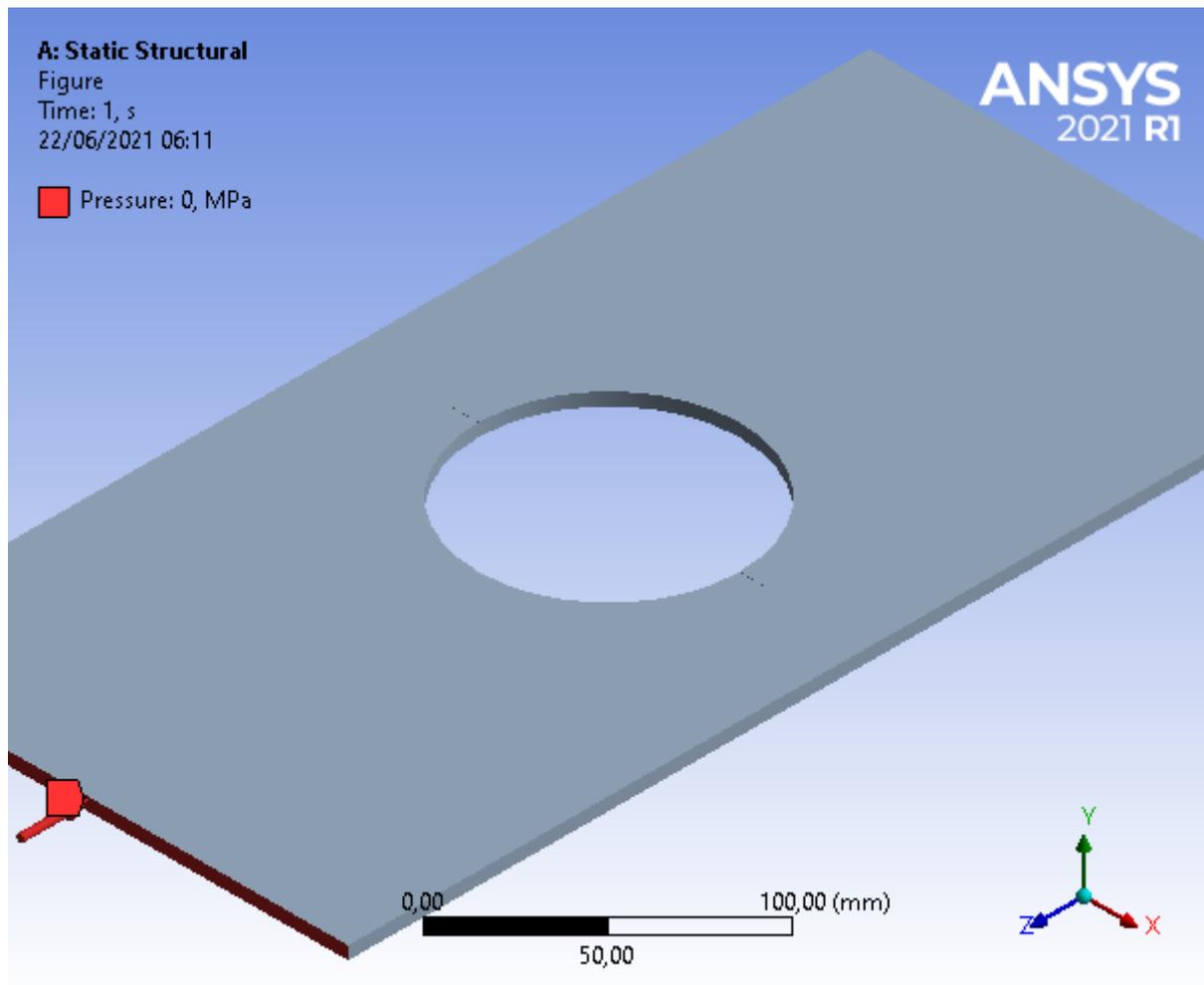
**FIGURE 3**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Pressure**



**TABLE 12**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Pressure**

Steps	Time [s]	Pressure [MPa]
1	0,	0,
	1,	
2	2,	= -22,222
3	3,	= -44,444
4	4,	= -66,667
5	5,	= -88,889
6	6,	= -111,11
7	7,	= -133,33
8	8,	= -155,56
9	9,	= -177,78
10	10,	-200,

**FIGURE 4**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Pressure > Figure**



*Solution (A6)*

**TABLE 13**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution**

Object Name	<i>Solution (A6)</i>
State	Solved
<b>Adaptive Mesh Refinement</b>	
Max Refinement Loops	1,
Refinement Depth	2,
<b>Information</b>	
Status	Done
MAPDL Elapsed Time	6 m 35 s
MAPDL Memory Used	311, MB
MAPDL Result File Size	125,06 MB
<b>Post Processing</b>	
Beam Section Results	No
On Demand Stress/Strain	No

**TABLE 14**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Solution Information**

Object Name	<i>Solution Information</i>
State	Solved
<b>Solution Information</b>	
Solution Output	Solver Output
Newton-Raphson Residuals	0
Identify Element Violations	0
Update Interval	2,5 s
Display Points	All
<b>FE Connection Visibility</b>	
Activate Visibility	Yes
Display	All FE Connectors
Draw Connections Attached To	All Nodes
Line Color	Connection Type
Visible on Results	No
Line Thickness	Single
Display Type	Lines

**TABLE 15**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Results**

Object Name	<i>Maximum Principal Stress</i>	<i>Directional Deformation</i>
State	Solved	
<b>Scope</b>		
Scoping Method	Geometry Selection	
Geometry	All Bodies	
<b>Definition</b>		
Type	Maximum Principal Stress	Directional Deformation
By	Time	
Display Time	Last	
Calculate Time History	Yes	
Identifier		
Suppressed	No	
Orientation		Z Axis
Coordinate System		Global Coordinate System
<b>Integration Point Results</b>		
Display Option	Averaged	
Average Across Bodies	No	
<b>Results</b>		
Minimum	-38,634 MPa	0, mm
Maximum	6418,2 MPa	0,62051 mm
Average	291,3 MPa	0,30209 mm
Minimum Occurs On	Solid	
Maximum Occurs On	Solid	
<b>Minimum Value Over Time</b>		
Minimum	-38,634 MPa	0, mm
Maximum	0, MPa	0, mm

Maximum Value Over Time		
Minimum	0, MPa	0, mm
Maximum	6418,2 MPa	0,62051 mm
Information		
Time	10, s	
Load Step	10	
Substep	1	
Iteration Number	10	

FIGURE 5

Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Maximum Principal Stress

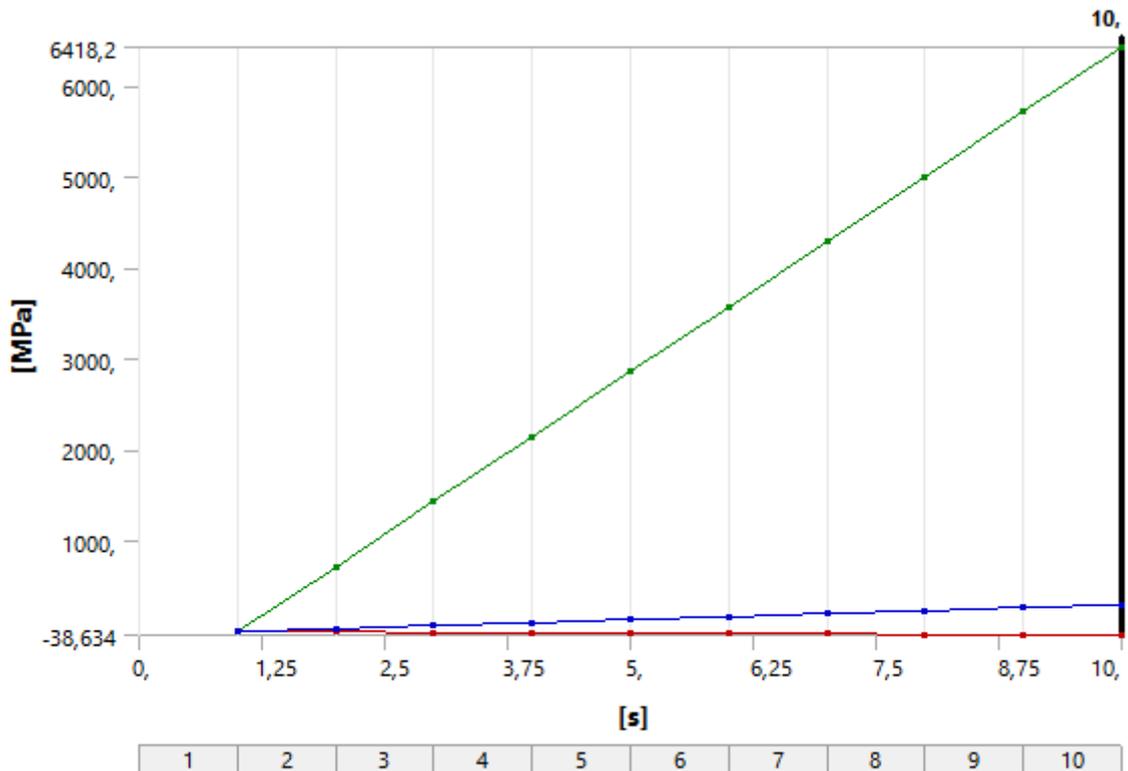


TABLE 16

Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Maximum Principal Stress

Time [s]	Minimum [MPa]	Maximum [MPa]	Average [MPa]
1,	0,	0,	0,
2,	-4,2927	713,13	32,367
3,	-8,5853	1426,3	64,734
4,	-12,878	2139,4	97,102
5,	-17,171	2852,5	129,47
6,	-21,463	3565,7	161,84
7,	-25,756	4278,8	194,2
8,	-30,049	4991,9	226,57
9,	-34,341	5705,1	258,94
10,	-38,634	6418,2	291,3

FIGURE 6

Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Maximum Principal Stress > Figure

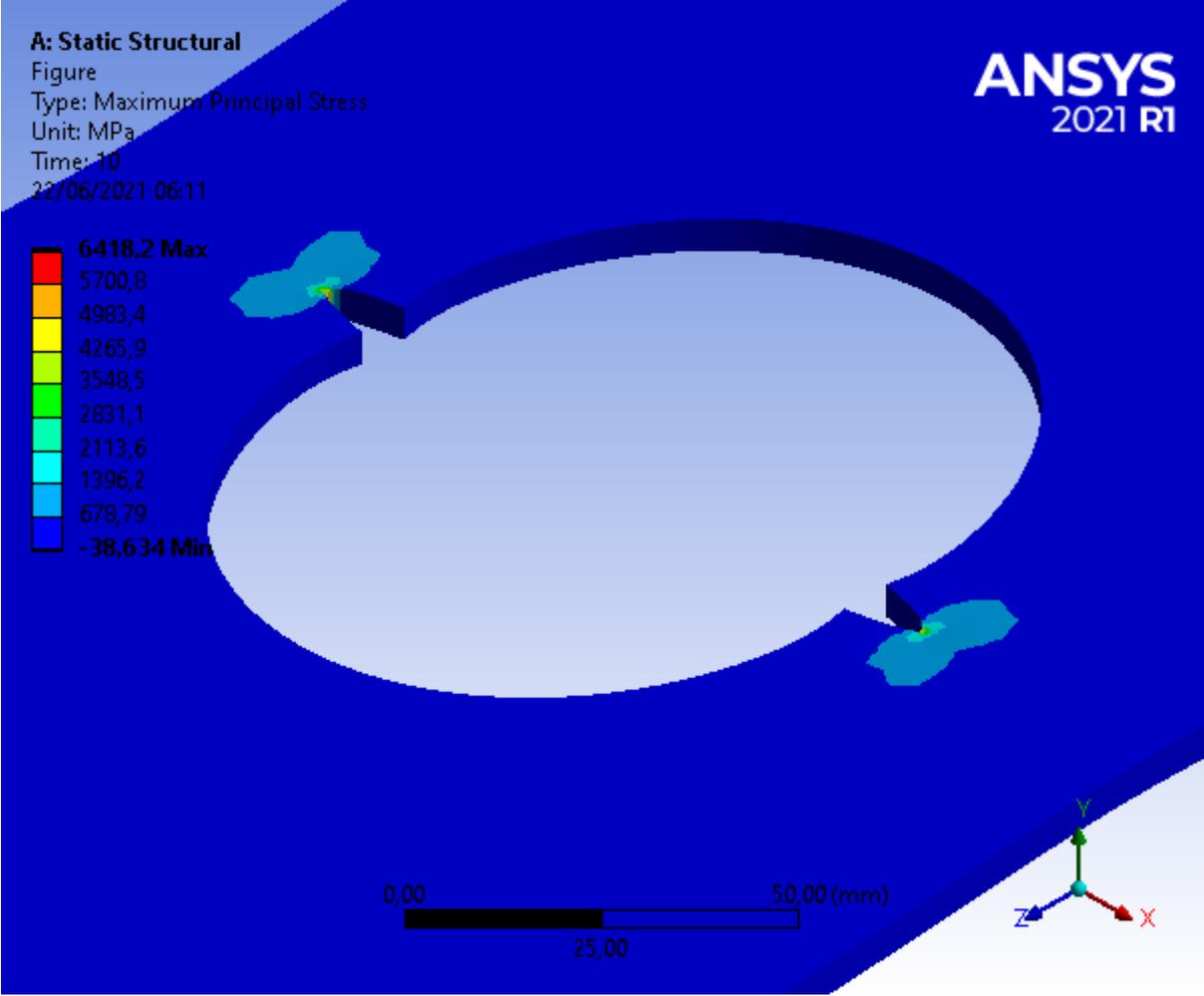
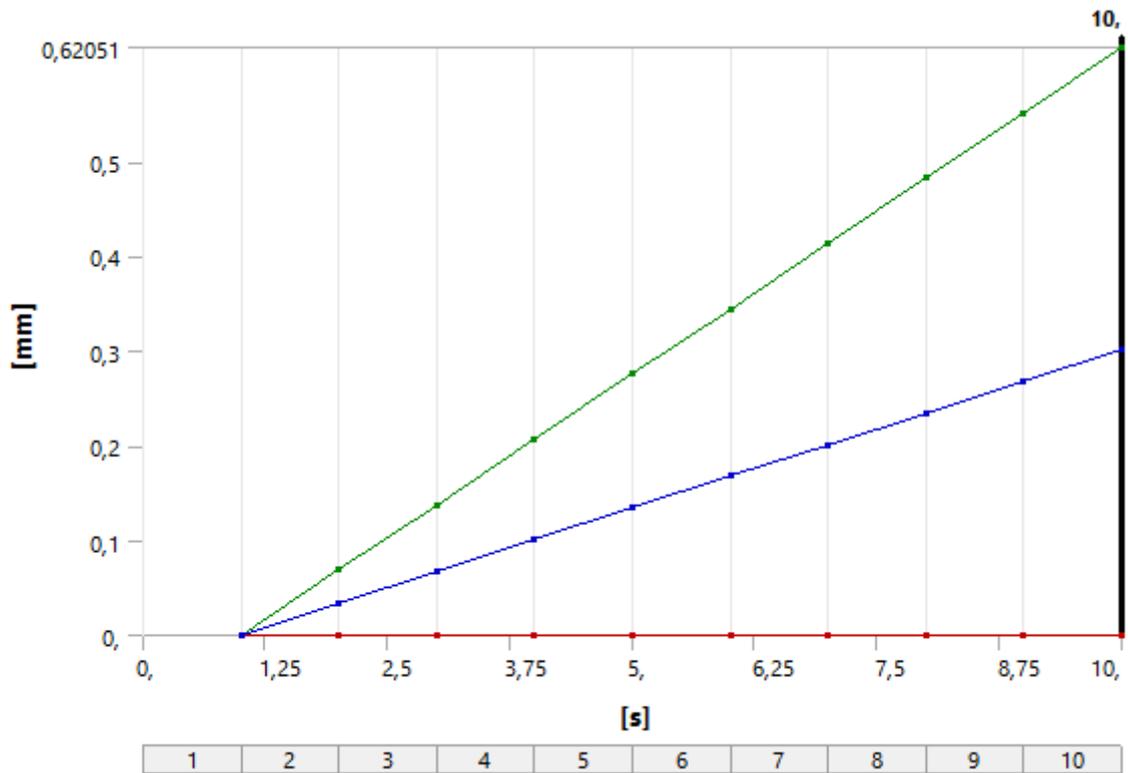


FIGURE 7

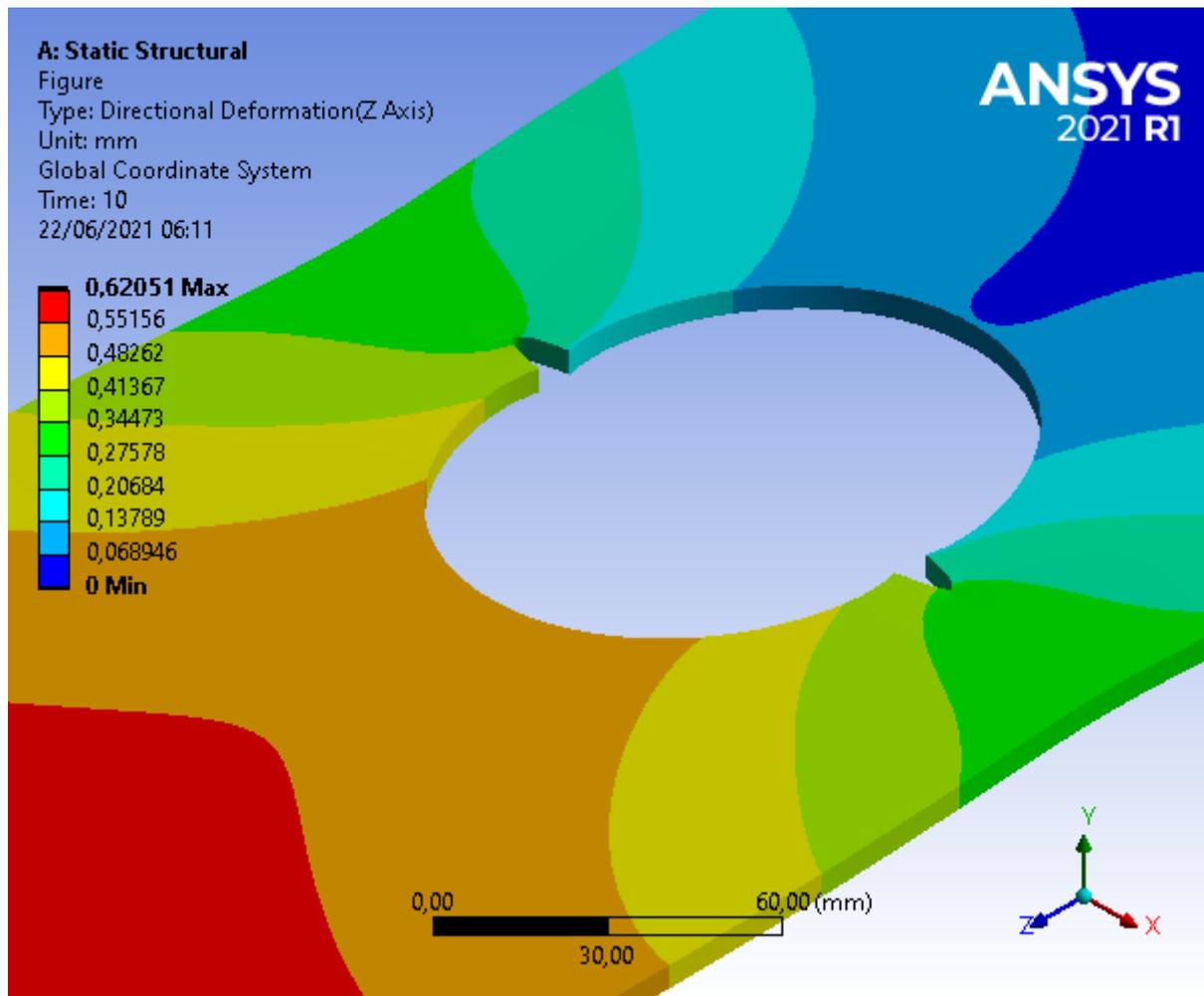
Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Directional Deformation



**TABLE 17**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Directional Deformation**

Time [s]	Minimum [mm]	Maximum [mm]	Average [mm]
1,	0,	0,	0,
2,		6,8946e-002	3,3566e-002
3,		0,13789	6,7131e-002
4,		0,20684	0,1007
5,		0,27578	0,13426
6,		0,34473	0,16783
7,		0,41367	0,20139
8,		0,48262	0,23496
9,		0,55156	0,26852
10,		0,62051	0,30209

**FIGURE 8**  
**Model (A4) > Static Structural (A5) > Solution (A6) > Directional Deformation > Figure**



**Material Data**

*Structural Steel*

**TABLE 18**  
**Structural Steel > Constants**

Density	7,85e-006 kg mm <sup>-3</sup>
Coefficient of Thermal Expansion	1,2e-005 C <sup>-1</sup>
Specific Heat	4,34e+005 mJ kg <sup>-1</sup> C <sup>-1</sup>
Thermal Conductivity	6,05e-002 W mm <sup>-1</sup> C <sup>-1</sup>
Resistivity	1,7e-004 ohm mm

**TABLE 19**  
**Structural Steel > Color**

Red	Green	Blue
132,	139,	179,

**TABLE 20**  
**Structural Steel > Compressive Ultimate Strength**

Compressive Ultimate Strength MPa
0,

**TABLE 21**  
**Structural Steel > Compressive Yield Strength**

Compressive Yield Strength MPa
250,

**TABLE 22**  
**Structural Steel > Tensile Yield Strength**

Tensile Yield Strength MPa
250,

**TABLE 23**  
**Structural Steel > Tensile Ultimate Strength**

Tensile Ultimate Strength MPa
460,

**TABLE 24**  
**Structural Steel > Isotropic Secant Coefficient of Thermal Expansion**

Zero-Thermal-Strain Reference Temperature C
22,

**TABLE 25**  
**Structural Steel > S-N Curve**

Alternating Stress MPa	Cycles	Mean Stress MPa
3999,	10,	0,
2827,	20,	0,
1896,	50,	0,
1413,	100,	0,
1069,	200,	0,
441,	2000,	0,
262,	10000	0,
214,	20000	0,
138,	1,e+005	0,
114,	2,e+005	0,
86,2	1,e+006	0,

**TABLE 26**  
**Structural Steel > Strain-Life Parameters**

Strength Coefficient MPa	Strength Exponent	Ductility Coefficient	Ductility Exponent	Cyclic Strength Coefficient MPa	Cyclic Strain Hardening Exponent
920,	-0,106	0,213	-0,47	1000,	0,2

**TABLE 27**  
**Structural Steel > Isotropic Elasticity**

Young's Modulus MPa	Poisson's Ratio	Bulk Modulus MPa	Shear Modulus MPa	Temperature C
2,e+005	0,3	1,6667e+005	76923	

**TABLE 28**  
**Structural Steel > Isotropic Relative Permeability**

Relative Permeability
10000

## **Conclusion générale**

Les plaques trouées sont couramment utilisées dans les applications technologiques et spécialement en construction mécanique, mais ils sont source de concentrations de contraintes et d'initiation de fissure qui causent des ruptures brutales. La propagation des fissures fait l'objet de la recherche scientifique.

Notre travail est consacré au calcul des contraintes au voisinage du trou et le facteur d'intensité de contrainte dans la zone de concentration de contraintes et dans la fissure. Enfin une simulation numérique sous ANSYS Workbench nous a permis d'évaluer les contraintes, le facteur de concentration de contraintes en fonction du rayon  $R$  et la profondeur de la fissure.

## Références

---

- [1] Konish, H.J. and Whitney, J.M., “Approximate Stresses in an Orthotropic Plate Containing a Circular Hole”, Journal of Composite Materials, Vol. 9, pp. 157-166, 1975.
- [2] Tan, S.C., “Laminated Composite Containing an Elliptical Opening Approximate Stress Analyses and International Journal of Mechanical And Production Engineering, ISSN: 2320-2092, Volume- 3, Issue-5, May-2015.
- [3] Ko, W. “Stress concentration around a small circular hole in the Hi-Mat composite plates”, NASA TM 86038, 1985.
- [4] Concentration de contraintes, Jian LU Henri, Paul LIEURADE, BM 5 040, Techniques de L’Ingénieur, traité Génie mécanique
- [5] Détermination des contraintes résiduelles par méthode ultrasonore, Farid BELAHCENE, Techniques de l’Ingénieur, IN 8-1 12-2002 N
- [6] Concentration de contraintes, Paul LIEURADE, B50-40, Techniques de l’Ingénieur, traité Génie mécanique
- [7] Mécanique de la rupture, Jean-Luc ENGERAND, B 5 060 –1, Techniques de l’Ingénieur, traité Génie mécanique.
- [8] Yunitaka Murakami, Theory of Elasticity and Stress Concentration, Kyushu University, Fukuoka, Japan, 2017.
- [9] Helmut Klöcker, Mécanique des Milieux continus Elasticité, CHAPITRE VII, ELASTICITE PLANES.
- [10] Mécanique des structures Tome 3, Serge LAROZE, CÉPADUÈS-ÉDITIONS, TOULOUSE – France septembre 2005
- [11] Michael Clifford, An Introduction to Mechanical Engineering, University of Nottingham, 1998.
- [12] Surjya Kumar Maiti, FRACTURE MECHANICS Fundamentals and Applications, Cambridge University Press 2015