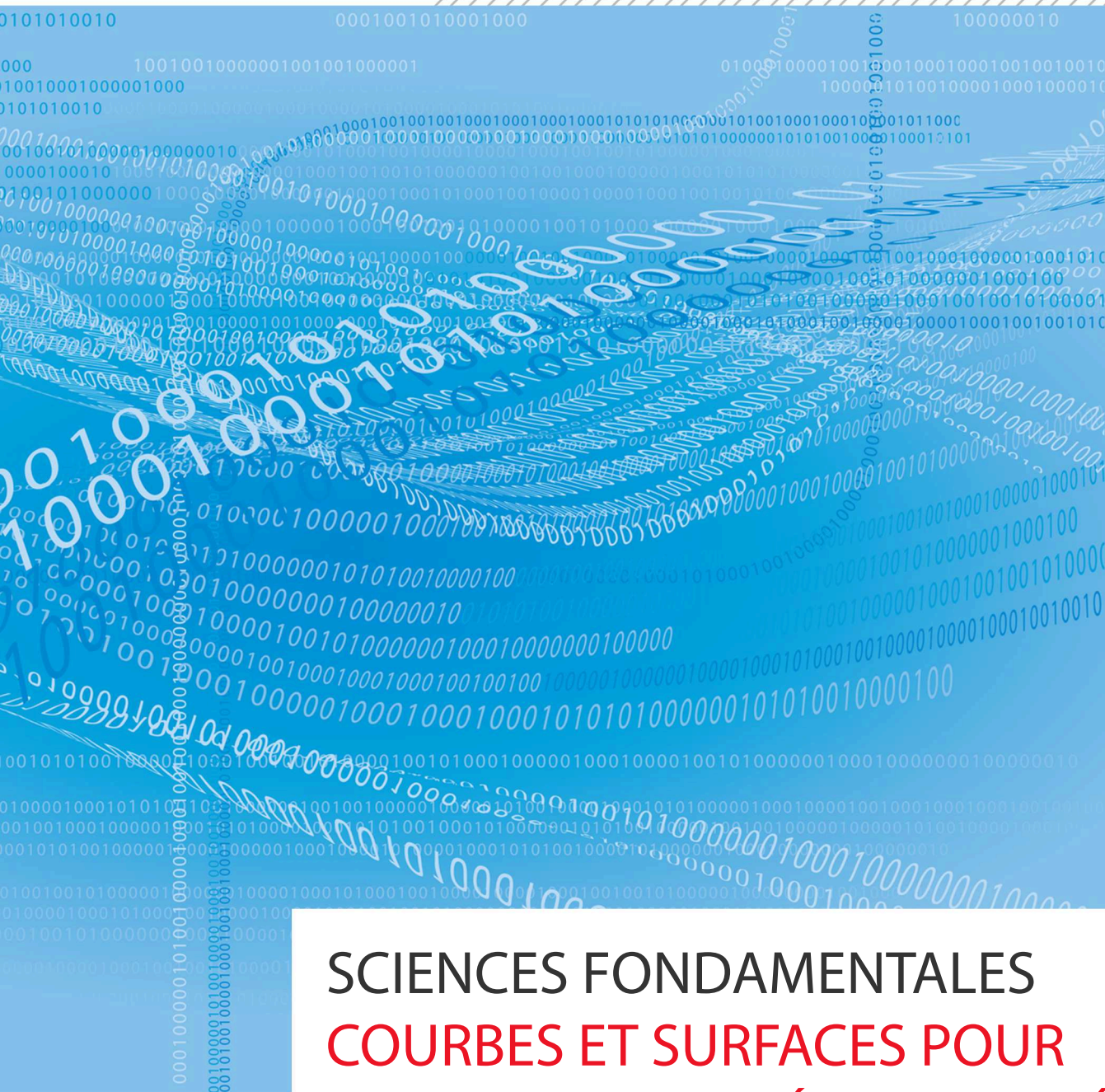




LES FOCUS  
TECHNIQUES DE L'INGÉNIEUR



SCIENCES FONDAMENTALES  
COURBES ET SURFACES POUR  
LA CFAO, PAR M. BÉZIER, LE CRÉA-  
TEUR DES « COURBES DE BÉZIER

février / 2022



**TECHNIQUES  
DE L'INGÉNIEUR**

Réf. : **A1440 V1**

# Courbes et surfaces pour la CFAO

Date de publication :  
**10 mai 1992**

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Mathématiques**

par **Pierre BÉZIER**

**Pour toute question :**  
Service Relation clientèle  
Techniques de l'Ingénieur  
Immeuble Pleyad 1  
39, boulevard Ornano  
93288 Saint-Denis Cedex

**Par mail :**  
infos.clients@teching.com  
**Par téléphone :**  
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **24/01/2022**

Pour le compte : **7200106152 - éditions ti // céline BLONBOU // 92.170.153.116**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

# Courbes et surfaces pour la CFAO

par **Pierre BÉZIER**

*Ingénieur de l'École Nationale Supérieure des Arts et Métiers  
Ingénieur de l'École Supérieure d'Électricité  
Docteur en mathématiques*

<b>1. Problèmes</b> .....	A 1 440 - 2
1.1 Combinaisons booléennes .....	— 2
1.2 Recopie d'une maquette .....	— 2
1.3 Approximation de points .....	— 2
<b>2. Conditions à remplir</b> .....	— 2
2.1 Rapidité.....	— 2
2.2 Automatisation.....	— 2
2.3 Accessibilité .....	— 2
<b>3. Courbes</b> .....	— 3
3.1 Généralités .....	— 3
3.2 Représentation de P. de Casteljaou .....	— 3
3.3 Cubiques paramétriques de J. Ferguson.....	— 3
3.4 Méthode d'Hermite.....	— 4
3.5 Méthode UNISURF .....	— 4
3.6 Splines.....	— 8
<b>4. Surfaces</b> .....	— 9
4.1 Généralités .....	— 9
4.2 Carreaux de J. Ferguson.....	— 10
4.3 Carreaux de S. Coons.....	— 10
4.4 Surfaces triangulaires .....	— 11
4.5 Carreaux UNISURF .....	— 12
4.6 Surfaces splines non rationnelles et rationnelles .....	— 15
<b>5. Référentiels déformables</b> .....	— 15
5.1 Généralités .....	— 15
5.2 Applications .....	— 15
<b>Références bibliographiques</b> .....	— 16

**J**usqu'à une date récente, les dessins de pièces de mécanique ne donnaient pas une description complète de l'objet qu'ils étaient censés représenter. Les surfaces requérant quelque précision étaient définies par des dimensions assorties de tolérances ; leur géométrie était fondée sur l'emploi de la droite et du cercle ; les dépouilles et les raccordements étaient déterminés de façon plus ou moins vague, et parfois implicite, et leur réalisation était laissée à l'initiative de professionnels hautement qualifiés : modelers, fondeurs ou ajusteurs de matrices. Quant aux autres formes gauches, elles étaient représentées par des tracés de diverses sections, et reproduites ensuite par copie de modèles dérivant des tracés par une interpolation laissée aux soins d'opérateurs très expérimentés.

Afin d'utiliser la commande numérique pour diriger des aléseuses, des tours, des fraiseuses, des rectifieuses, des machines d'électroérosion ou de soudure, il devenait indispensable de disposer d'une définition complète et précise de toutes les surfaces à réaliser. Cette question a donné lieu à beaucoup de travaux.

On trouvera en références bibliographiques la liste des principaux ouvrages publiés en français ou en anglais ; la liste des articles parus dans les revues spécialisées compterait plusieurs milliers de références.

## 1. Problèmes

Les problèmes posés par la mise en œuvre de la CFAO sont de plusieurs sortes, et cela seul suffirait à expliquer la diversité des solutions offertes. De façon schématique, on peut distinguer trois catégories principales.

**Nota :** CFAO : Conception et Fabrication Assistées par Ordinateur.

### 1.1 Combinaisons booléennes

Une forme est constituée par la combinaison booléenne de solides classiques tels que les parallélépipèdes rectangles, les cylindres et les cônes de révolution, les sphères et les tores, auxquels il faut adjoindre des surfaces de raccordement (conçues ou arrondies) dont le rôle est secondaire.

On peut citer, à ce sujet, les logiciels tels que APT ou la version primitive d'EUCLID de Datavision, mais cette question ne sera pas abordée dans la suite de cet article, car les problèmes qu'elle pose relèvent de l'informatique plutôt que des mathématiques traditionnelles. Il faut, par exemple, définir les intersections des différents solides qui limiteront, sur les faces de ceux-ci, les zones à usiner.

### 1.2 Recopie d'une maquette

On veut définir un objet matérialisé par une maquette tridimensionnelle, mais qui n'est connue, et encore avec une certaine approximation, que par un réseau de courbes, sections planes ou lignes principales ; l'intérieur des mailles, d'abord interpolé à la main sur un objet en relief, doit être représenté, pour être usinable, par une expression mathématique.

Cette méthode convient aux objets qui jouent un rôle technique et dont la maquette doit être reproduite avec une acceptable précision, de l'ordre de  $10^{-4}$  par exemple. Pour ceux qui ont une fonction esthétique, il n'y a pas lieu d'être aussi exigeant ; cependant, si l'on veut assembler plusieurs éléments et assurer en même temps leur interchangeabilité, les limites précédentes ne peuvent être notablement élargies.

### 1.3 Approximation de points

Sur une maquette, on a relevé les coordonnées tridimensionnelles de points ; leur espacement est fonction de la plus ou moins grande régularité de la surface, ce qui les empêche souvent de se situer aux sommets d'un maillage à peu près régulier.

La définition d'une surface, ou d'une famille de surfaces, contenant ces points ou passant *au mieux* près d'eux, nécessite le recours à une solution particulière.

## 2. Conditions à remplir

L'opération consistant à définir numériquement la forme d'un objet n'est qu'une étape d'un processus général soumis à beaucoup d'obligations ; par exemple, il faut qu'il soit, à un moment donné, matérialisé pour être soumis à des expériences relevant de la dynamique des fluides ou de la mécanique des milieux continus, ou tout simplement à un jugement esthétique.

### 2.1 Rapidité

Pour supporter la comparaison avec des procédés qui bénéficient d'une très longue expérience, d'une tradition et de tours de main, un système doit apporter un gain de temps appréciable, dans le tracé des plans comme dans la réalisation de maquettes tridimensionnelles, qui peuvent être à petite échelle en période préparatoire, ou parfois à grande échelle au moment de la prise de décision finale.

### 2.2 Automatisation

Dans un processus où le jugement subjectif a joué parfois un rôle déterminant, il serait avantageux de pouvoir se fier à un automatisme total, mais il faut bien convenir qu'il n'existe guère d'algorithme parfait, et l'on doit admettre de se réserver la possibilité de recourir à une décision arbitraire lorsqu'il a été mis en défaut dans un cas particulier.

### 2.3 Accessibilité

Enfin, il ne faut surtout pas oublier qu'un système est fait pour être mis à la disposition d'opérateurs, tels que les projeteurs et les agents de maîtrise qui, par leur formation et par l'exercice de leur profession, ont développé une bonne connaissance pratique de la géométrie de l'espace, mais qui n'ont pas eu besoin de pratiquer l'analyse mathématique.

Il semble donc favorable qu'un système soit fondé sur une théorie mathématique aisément assimilée par les utilisateurs.

### 3. Courbes

#### 3.1 Généralités

Après quelques tentatives de représentation à l'aide des séries de Fourier (Fayard) ou des formes cartésiennes (Inaba), telles que :

$$y = f(x) \quad \text{ou} \quad f(x, y) = 0 \quad (1)$$

la représentation universellement employée maintenant est celle des fonctions paramétriques polynomiales rationnelles ou non rationnelles, qui avaient fait l'objet des travaux d'Isaac Schönberg après 1940, mais sur lesquelles l'attention de l'industrie n'avait guère été attirée, car il n'existait pas encore alors de moyens de calcul assez rapides pour justifier une application pratique.

#### 3.2 Représentation de P. de Casteljaou

Dès 1958, Paul de Casteljaou, mathématicien chez Citroën, réalisa des travaux remarquables, mais ceux-ci ne furent publiés sous forme détaillée qu'en 1985, en raison de la discrétion qui était traditionnelle dans cette entreprise.

Sous sa forme la plus simple, la représentation d'un arc de courbe compris entre les valeurs 0 et 1 d'un paramètre  $u$  s'exprime, pour une cubique, par :

$$P(u) = \sum_{i=0}^3 s_i \cdot \mathcal{B}_{i,3}(u) \quad (2)$$

les  $s_i$  étant les vecteurs reliant les sommets  $S$  d'un polygone à une origine arbitraire  $O$  (figure 1), et les  $\mathcal{B}_i$  étant des fonctions de Bernstein de degré trois, dont la forme générale est :

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{B}_{i,m}(u) &= \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} \\ \text{avec } \binom{m}{i} &= \frac{m!}{i!(m-i)!} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

l'indice  $i$  représentant le rang d'une fonction dans une collection de  $(m+1)$  fonctions de degré  $m$ .

Les points  $S_i$ , appelés *pôles* par l'auteur, sont situés dans un espace cartésien à deux ou trois dimensions. La ligne brisée qui les relie entre eux rappelle de loin la forme de la courbe (figure 2). On observe, en particulier, que l'arc de courbe est tangent en son origine  $P(0)$  au premier côté du polygone, et au dernier en son extrémité  $P(1)$ . La courbure, en ces points, dépend des deux premiers et des deux derniers côtés. D'autres propriétés seront signalées dans le paragraphe 3.5, en particulier à propos de l'emploi de fonctions de degré supérieur à 3.

#### 3.3 Cubiques paramétriques de J. Ferguson

En 1964, James Ferguson, de chez Boeing, a publié, dans le *Journal of the Association for Computing Machinery* (JACM), une étude sur les surfaces paramétriques (§ 4.2) dans laquelle un arc de courbe paramétrique, limité par les valeurs 0 et 1 du paramètre, et de degré trois, est défini par les conditions aux limites suivantes :

$$P(0), \quad P(1), \quad \frac{dP}{du}(0) \quad \text{et} \quad \frac{dP}{du}(1)$$

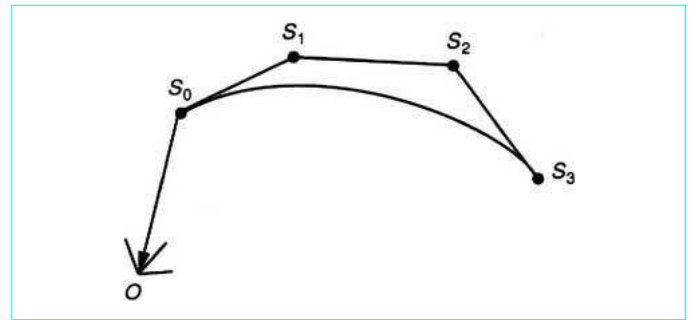


Figure 1 - Courbe cubique

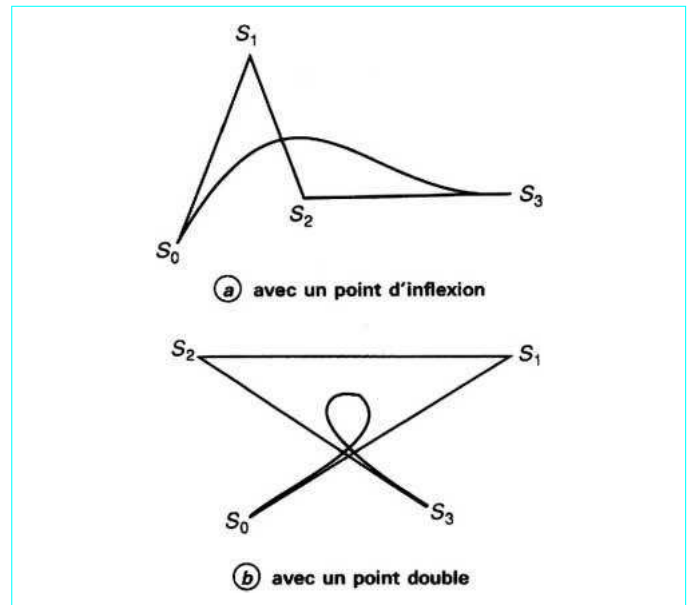


Figure 2 - Courbes cubiques

L'arc de courbe étant représenté par l'expression :

$$P(u) = \sum_{i=0}^3 a_i \cdot u^i \quad (4)$$

on en déduit que :

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= P(0) \\ a_1 &= \frac{dP}{du}(0) \\ a_2 &= 3 [P(1) - P(0)] - 4 \frac{dP}{du}(0) - \frac{dP}{du}(1) \\ a_3 &= 2 [P(0) - P(1)] + \frac{dP}{du}(0) + \frac{dP}{du}(1) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

avec  $u \in [0, 1]$ .

### 3.4 Méthode d’Hermite

Le principe de la méthode d’Hermite peut s’appliquer à la définition d’une courbe de degré  $m$  astreinte à passer par  $(m + 1)$  points dont les coordonnées sont connues dans un espace bidimensionnel ou tridimensionnel (figure 3).

On attribue à chacun une valeur du paramètre, comprise entre 0 et 1, et qui croît en fonction du rang dans l’ordre de passage par les points.

La forme générale étant :

$$P(u) = \sum_{i=0}^m b_i \cdot u^i$$

on dispose de  $(m + 1)$  équations linéaires dont les  $b_i$  sont les inconnues.

Si le principe de la résolution du problème est simple, sa mise en œuvre peut se heurter à des difficultés pratiques.

#### 3.4.1 Choix des valeurs paramétriques

L’attribution de la valeur du paramètre ne relève d’aucune loi, sinon de la règle de progressivité. L’opérateur est donc libre, à l’intérieur de cette limite, de prendre une décision arbitraire.

La solution la plus simple est de choisir des valeurs formant une progression arithmétique, et cette méthode donne satisfaction lorsque la courbure varie peu et si les points sont espacés de façon assez régulière.

On peut aussi prendre en compte la longueur de la ligne brisée reliant les points, ou celle des arcs de cercle reliant les points trois à trois.

Si ces méthodes, et d’autres qui relèvent du même principe, ne donnent pas satisfaction, l’opérateur est libre de choisir ces valeurs, excepté les valeurs 0 et 1 attribuées aux points limites, et de jouer ainsi sur la forme de la courbe.

#### 3.4.2 Action sur les conditions aux limites

L’opérateur ne peut agir directement sur la pente des tangentes, et en particulier aux points limites, ce qui complique l’obtention d’une continuité de pente entre segments adjacents, et plus encore l’obligation d’osculation qui peut être requise par la dynamique des fluides.

Pour que le raccordement tangentiel entre courbes soit assuré, il suffit que les vecteurs représentant les dérivées premières soient colinéaires, mais sans que leur identité de module soit indispensable. Quant au rayon de courbure, il est exprimé par :

$$R = \frac{\left| \frac{dP}{du} \right|^3}{\left| \frac{dP}{du} \wedge \frac{d^2P}{du^2} \right|} \tag{6}$$

mais pour que les centres de courbure coïncident il faut que les plans tangents principaux soient confondus (§ 3.5.7).

#### 3.4.3 Temps et prix de calcul

Dès que le nombre de points de passage s’élève, les temps et les prix du calcul s’accroissent encore plus vite.

#### 3.4.4 Risques d’oscillations

La méthode d’Hermite assure le passage rigoureux de la courbe par les points imposés mais on constate que, dès que leur nombre s’élève, elle peut présenter des oscillations indésirables et que l’histogramme des courbures en fonction de la longueur de la rectifiée devient chaotique ; on ne peut faire disparaître cet inconvénient qu’en remplaçant l’arc de courbe unique par des arcs de plus bas degré mis bout à bout.

### 3.5 Méthode UNISURF

#### 3.5.1 Principe

Les travaux accomplis chez Renault ont abouti à une représentation à l’aide des fonctions de Bernstein, comme ceux de l’équipe de Citroën (§ 3.2), mais, à l’inverse de ces derniers, ils étaient fondés sur des considérations géométriques beaucoup plus qu’analytiques.

Dans un cube unité (figure 4), on inscrit une courbe  $C$ , dont les extrémités sont les points  $A(0, 0, 0)$  et  $B(1, 1, 1)$ . En  $A$ , sa tangente est  $OX$  et son plan tangent principal est  $XOY$  ; en  $B$ , la tangente est parallèle à  $OZ$  et le plan tangent principal est parallèle à  $YOZ$ .

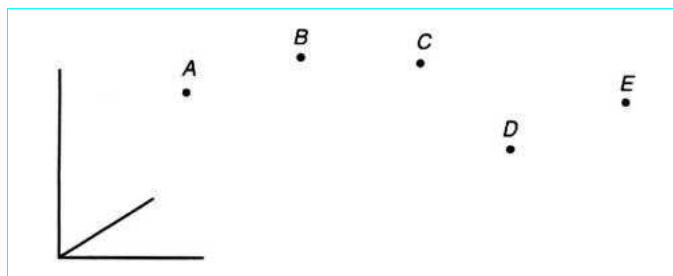


Figure 3 – Points de passage d’une courbe

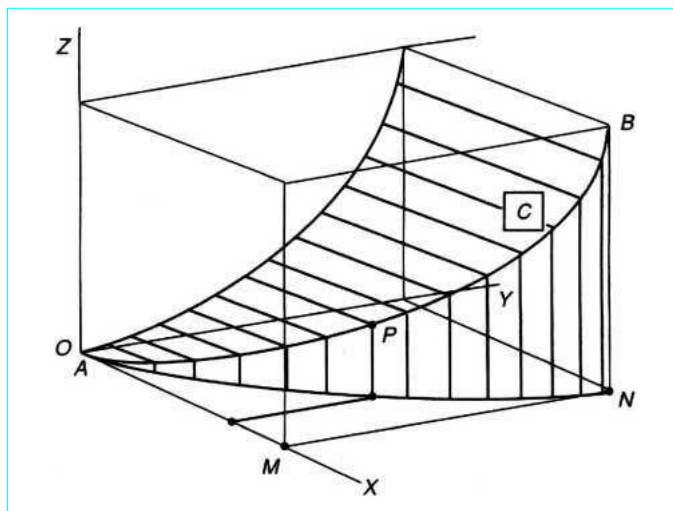


Figure 4 – Courbe de base

### 3.5.2 Représentation par les fonctions $f$

Un point  $P$  de cette courbe est défini par trois fonctions polynomiales d'un même paramètre  $u$  que l'on fait varier de 0 à 1 :

$$P(u) = \begin{cases} x = f_1(u) = u^3 - 3u^2 + 3u \\ y = f_2(u) = -2u^3 + 3u^2 \\ z = f_3(u) = u^3 \end{cases} \quad (7)$$

$$\forall u \in [0, 1]$$

Par une transformation linéaire, le cube unité devient un parallélépipède quelconque (figure 5) situé dans un référentiel orthonormé  $OXYZ$ , et qui constitue lui-même un référentiel  $oxyz$ , particulier à la courbe, dont les vecteurs unités sont respectivement  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  et  $\mathbf{a}_3$ , et dont l'origine  $o$  est reliée à  $O$  par un vecteur  $\mathbf{a}_0$ . Un point  $\pi$  de la courbe  $\Gamma$  est défini par :

$$\pi(u) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 \cdot f_1(u) + \mathbf{a}_2 \cdot f_2(u) + \mathbf{a}_3 \cdot f_3(u) \quad (8)$$

Pour représenter le parallélépipède, on peut utiliser les vecteurs  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$  et  $\mathbf{a}_3$  ayant  $o$  comme origine commune ; il est préférable au contraire de les placer bout à bout afin de constituer un polygone  $AMNB$ , dont la forme rappelle celle de la courbe  $\Gamma$ , et que l'on appelle **polygone caractéristique**.

Pour choisir les fonctions  $f_1, f_2$  et  $f_3$ , on leur a imposé les conditions suivantes :

$$\left. \begin{aligned} f_1(0) = 0 & \quad f_1(1) = 1 \\ f_2(0) = 0 & \quad f_2(1) = 1 \\ f_3(0) = 0 & \quad f_3(1) = 1 \\ \frac{df_2}{du}(0) = 0 & \quad \frac{df_1}{du}(1) = 0 \\ \frac{df_3}{du}(0) = 0 & \quad \frac{df_2}{du}(1) = 0 \\ \frac{d^2f_3}{du^2}(0) = 0 & \quad \frac{d^2f_1}{du^2}(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

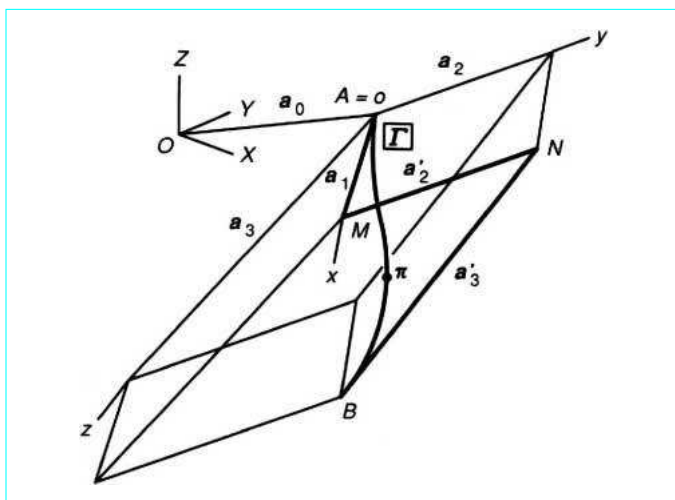


Figure 5 - Transformation linéaire de la courbe de base

Afin d'augmenter la variété des courbes, on utilise des vecteurs et des fonctions supplémentaires, en imposant à celles-ci des conditions analogues aux précédentes.

La forme générale d'une fonction de rang  $i$  dans une famille de  $(m + 1)$  fonctions de degré  $m$  est donnée par la formule :

$$f_{i,m}(u) = \frac{(-u)^i}{(i-1)!} \cdot \frac{d^{i-1} \left[ \frac{(1-u)^m - 1}{u} \right]}{du^{i-1}} \quad (10)$$

et cela s'applique même à la fonction  $f_0$ , qui est égale à 1, puisque l'on est convenu que :

$$0! \equiv 1 \equiv 0^0$$

Les fonctions  $f_i$ , sous une autre forme, sont :

$$f_{i,m}(u) = \sum_{j=0}^m (-1)^{i+j} \binom{m}{j} \binom{j-1}{i-1}$$

Il n'y a pas de limite théorique au degré des fonctions, mais il est rarement nécessaire d'aller au-delà de 8.

#### ■ Quelques propriétés intéressantes des fonctions $f$

- L'arc de courbe est entièrement situé à l'intérieur du polyèdre convexe qui contient tous les sommets de son polygone caractéristique. Si la courbe est plane, le polyèdre se réduit à un polygone plan (figure 6).

- Si l'on fait subir une translation et/ou une rotation au polygone caractéristique d'une courbe, la forme de celle-ci ne change pas.

- La famille des fonctions est symétrique en  $u$  et  $(1-u)$  et deux courbes dont les polygones sont respectivement  $AMN...B$  et  $B...NMA$  sont géométriquement identiques, un point  $P(u)$  de la première coïncidant avec le point  $P'(1-u)$  de la seconde.

- Les dérivées premières aux points limites  $A$  et  $B$  sont respectivement égales à  $m \cdot \mathbf{a}_1$ , et  $m \cdot \mathbf{a}_m$ .

- Les dérivées deuxièmes aux points limites  $A$  et  $B$  sont respectivement égales à :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2P}{du^2}(0) &= m(m-1)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1) \\ \frac{d^2P}{du^2}(1) &= m(m-1)(\mathbf{a}_m - \mathbf{a}_{m-1}) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

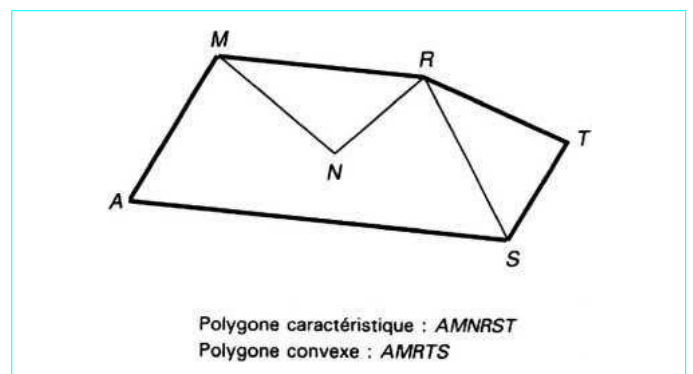


Figure 6 - Polygones caractéristique et convexe

Le rayon de courbure en un des points limites est obtenu par le tracé de la figure 7, le centre de courbure étant, évidemment, du côté opposé à celui de  $M$ .

● Une courbe ayant, par exemple,  $AMNRB$  pour polygone caractéristique (figure 8), on porte à partir d'une origine commune  $\Omega$  des vecteurs respectivement équipollents à  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$  et  $\mathbf{a}_4$ . Leurs extrémités sont les sommets du polygone caractéristique d'une courbe qui est, à l'échelle  $1/m$ , l'hodographe de la première, c'est-à-dire que la dérivée au point  $P(u)$  est égale à  $m$  fois le vecteur  $\Omega\pi$ , les points  $P$  et  $\pi$  correspondant à la même valeur du paramètre  $u$ .

Cette propriété permet de reconnaître facilement l'existence de points particuliers de  $C$  (inflexion, rebroussement, point de courbure nulle, etc.) dans une courbe plane ou dans la projection d'une courbe gauche.

### 3.5.3 Représentation par les fonctions de Bernstein

Les sommets d'un polygone caractéristique  $AMNR... B$  (figure 9) étant définis par les vecteurs  $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m$  qui les relie à une origine arbitraire  $O$ , la position d'un point  $P$  est donnée par :

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{s}_i \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u) \quad u \in [0, 1]$$

Le symbole  $\mathcal{B}_{i,m}(u)$  représente la fonction de Bernstein de rang  $i$  dans une famille de  $(m+1)$  courbes de degré  $m$ , qui a la forme :

$$\mathcal{B}_{i,m}(u) = \binom{m}{i} u^i (1-u)^{m-i} \quad (12)$$

Parmi les propriétés des fonctions de Bernstein, on retiendra les suivantes.

■ Pour une valeur donnée du paramètre  $u$ , la somme des  $(m+1)$  fonctions de Bernstein est égale à 1, soit :

$$\sum_{i=0}^m \mathcal{B}_{i,m}(u) \equiv 1 \quad \forall u \in [0, 1]$$

ce qui explique pourquoi la forme de la courbe est indépendante de la position du point  $O$  et, par conséquent, invariante dans les translations ou rotations du polygone caractéristique (condition exprimée par Cauchy).

■ Dans l'intervalle  $[0, 1]$  une fonction de Bernstein ne possède qu'un maximum ; il correspond à la valeur  $\frac{i}{m}$  de la variable et, sauf pour les fonctions de rang zéro et  $m$ , sa valeur est voisine de 0,3. Si l'on imprime, par exemple, un déplacement représenté par un vecteur  $\Delta$  au sommet de rang  $i$  ( $i \in [0, m]$ ), un point  $P$  de la courbe initiale devient un point  $P'$  tel que (figure 10) :

$$\mathbf{P}'(u) = \mathbf{P}(u) + \Delta \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u)$$

C'est le point  $P\left(\frac{i}{m}\right)$  qui subit le déplacement maximal, qui est voisin de 0,3  $\Delta$ , le point  $P\left(\frac{i}{m}\right)$  étant proche du sommet de rang  $i$ .

### 3.5.4 Représentation par la méthode de Horner

En additionnant entre eux les coefficients vectoriels relatifs à une même puissance de  $u$ , on obtient la représentation la plus simple qui puisse être traitée sur ordinateur par la méthode de Horner, soit :

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i \cdot u^i \quad (13)$$

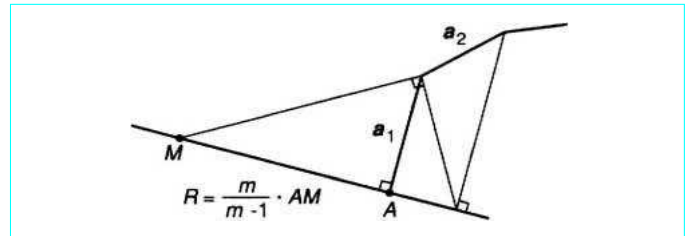


Figure 7 - Tracé du rayon de courbure

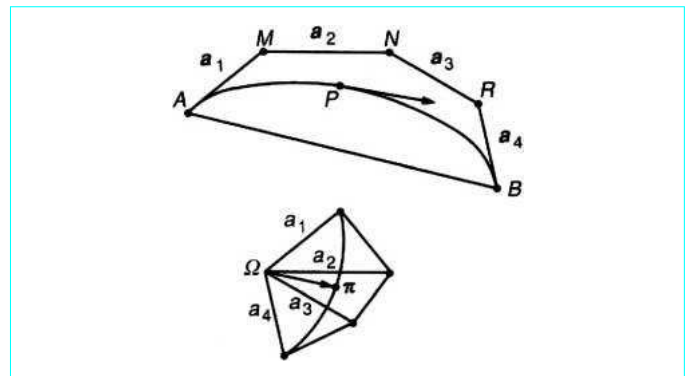


Figure 8 - Courbe AB et son hodographe

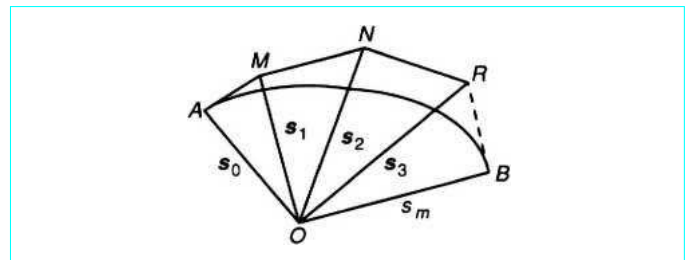


Figure 9 - Représentation par les fonctions de Bernstein

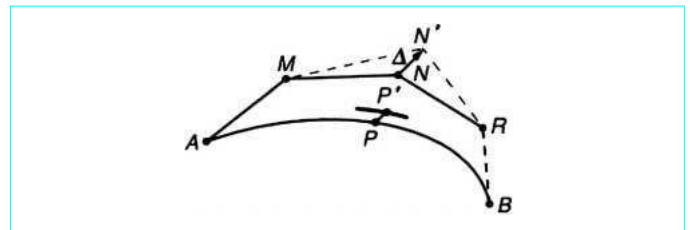


Figure 10 - Déformation résultant du déplacement d'un sommet d'un polygone



La forme du polygone constitué par des vecteurs  $\mathbf{b}_i$  n'a aucun rapport visible avec celle de la courbe, et cette représentation n'a d'autre avantage que de simplifier les calculs.

### 3.5.5 Formes matricielles

Il existe des matrices, d'ailleurs inversables, qui permettent de passer facilement d'une forme de représentation à l'autre. Elles sont caractérisées par les formules suivantes, dans lesquelles les lettres  $\ell$  et  $c$  représentent respectivement le rang de la ligne et de la colonne de leur terme général :

$$\left. \begin{aligned} \|\mathbf{a}_i\| \cdot \|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{s}\| &= \|\mathbf{s}_i\|, \text{ avec } \|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{s}\| = \begin{vmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{vmatrix} \\ \|\mathbf{a}_i\| \cdot \|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}\| &= \|\mathbf{b}_i\|, \text{ avec } \|\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}\| = \begin{vmatrix} (-1)^{\ell+c} & & \\ & \ell-2 & \\ & & \ell-c \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

### 3.5.6 Modifications

En dehors de la modification de la forme d'un arc de courbe par déformation de son polygone caractéristique, on peut agir selon les procédés suivants.

#### 3.5.6.1 Sectionnement

La fraction d'un arc de courbe  $\mathbf{P}(u)$  comprise entre les points  $P(u_0)$  et  $P(u_1)$  s'exprime (figure 11) par :

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{b}_i [u_0 + (u_1 - u_0)u]^i \quad (15)$$

puisque la quantité entre [ ] varie de  $u_0$  à  $u_1$  lorsque  $u$  varie de 0 à 1.

On observe que les valeurs  $u_0$  et  $u_1$  ne sont pas obligatoirement comprises entre 0 et 1 et que  $u_1$  peut être indifféremment supérieur ou inférieur à  $u_0$ .

Les vecteurs de la représentation de Horner d'un segment compris entre les points  $P(u_0)$  et  $P(u_1)$  de la courbe  $P(u)$  sont obtenus à l'aide de la matrice :

$$\|\mathbf{b}'_i\| = \|\mathbf{b}_i\| \cdot \left\| u_0^{c-1} \cdot (u_1 - u_0)^{\ell-1} \cdot \begin{pmatrix} c-1 \\ \ell-1 \end{pmatrix} \right\| \quad (16)$$

#### 3.5.6.2 Élévation fictive du degré

L'élévation fictive du degré est utilisée pour résoudre les problèmes suivants.

■ Homogénéiser le degré de courbes intervenant dans la définition d'une surface paramétrique.

■ Préparer la modification de la forme d'un arc de courbe de degré  $m$  en proposant à l'opérateur un polygone à  $(m+n)$  côtés, représentant la même courbe, mais qu'il est libre de déformer tout en respectant, s'il le veut, les conditions de raccordement en ses points limites.

L'arc de courbe étant représenté par la formule de Horner :

$$\mathbf{P}(u) = \begin{vmatrix} u^0 & u & \dots & u^m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{vmatrix} \quad (17)$$

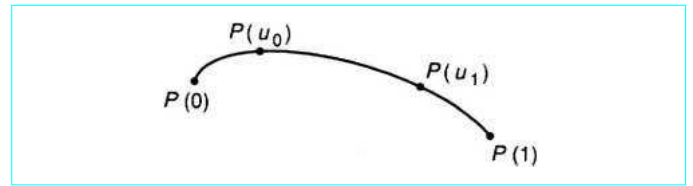


Figure 11 – Sectionnement de la courbe  $\widehat{P(0)P(1)}$

après élévation fictive on a :

$$\mathbf{P}(u) = \begin{vmatrix} u^0 & u & \dots & u^{m+n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{vmatrix} \quad (18)$$

et les  $\mathbf{s}'$  représentant les sommets du nouveau polygone sont obtenus à l'aide des inverses des matrices du paragraphe 3.5.5.

#### 3.5.6.3 Réduction du degré

Trouver un polygone qui divise exactement un autre est un problème qui n'a généralement pas de solution exacte. Il faut alors recourir à un procédé d'approximation.

Par exemple, si l'on trace les hodographes successifs d'une courbe de degré  $m$  et si l'on constate que les sommets de l'hodographe de rang  $k$  sont des points très proches les uns des autres, on peut supposer qu'il existe une courbe de degré  $(m-k)$  voisine de la première, et qui peut constituer une approximation suffisante.

On procède alors à un essai en attribuant aux points limites des dérivées identiques à celles de la courbe d'origine. Ainsi, avec les dérivées des deux premiers rangs, on définit une courbe du cinquième degré, dont on ajuste ensuite la forme en déformant son polygone.

Si l'on ne peut obtenir un résultat satisfaisant, il faut diviser la courbe d'origine en segments dont chacun se prêterait mieux au processus.

### 3.5.7 Conditions de raccordement

Pour raccorder au point  $P$  (figure 12) la courbe  $C$  de degré  $m$ , dont le polygone caractéristique a pour derniers vecteurs  $\mathbf{a}_{m-1}$  et  $\mathbf{a}_m$ , et la courbe  $C'$  de degré  $m'$ , dont le polygone caractéristique a pour premiers vecteurs  $\mathbf{a}'_1$  et  $\mathbf{a}'_2$ , il faut et il suffit de remplir les conditions suivantes :

— tangence :  $\mathbf{a}'_1 = g \cdot \mathbf{a}_m \quad \forall g \in \mathbb{R} \quad (19)$

— osculation, c'est-à-dire coïncidence des centres de courbure, la condition précédente étant satisfaite, soit :

$$\mathbf{a}'_2 = h \cdot \mathbf{a}_m + g^2 \cdot \frac{m'}{m} \cdot \frac{m-1}{m'-1} \cdot \mathbf{a}_{m-1} \quad \forall h \in \mathbb{R} \quad (20)$$

ce qui se traduit par un tracé très simple.

Parution : mai 1992 - Ce document a été délivré pour le compte de 7200106152 - éditions ti // celine BLONBOU // 92.170.153.116

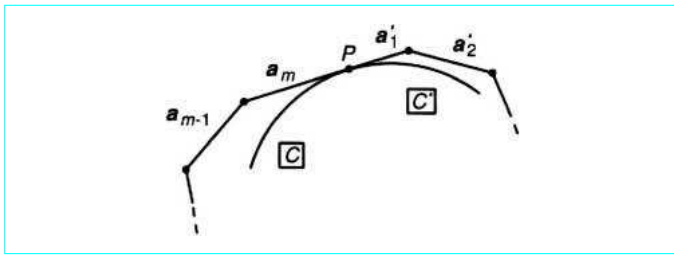


Figure 12 - Raccordement des courbes C et C'

### 3.6 Splines

#### 3.6.1 Généralités

Le mot anglais *spline* a malencontreusement prévalu, alors qu'il se traduit en français par les substantifs *latte* ou *baguette*.

En imaginant les diverses théories des splines, leurs auteurs ont voulu créer un système automatique dans lequel une courbe ou une surface sont astreintes à passer par des points bien définis.

Une spline est constituée par la juxtaposition d'arcs de courbes paramétriques polynomiales reliant deux points de passage consécutifs ; le raccordement entre deux arcs est assuré naturellement en leur extrémité commune, origine pour l'un et extrémité pour l'autre, par l'égalité des pentes, et éventuellement des courbures ou même d'un raccordement à un ordre plus élevé. Cette continuité peut être garantie par l'égalité de leurs dérivées successives, mais cette condition suffisante n'est pas nécessaire pour assurer la continuité géométrique, celle que recherchent les utilisateurs dans l'industrie ; en effet, pour que deux arcs soient tangents en leur point de raccordement, il suffit que leurs vecteurs dérivées soient colinéaires, c'est-à-dire proportionnels sans être forcément égaux ; cette liberté se retrouve, sous une forme un peu plus compliquée, quand il s'agit d'osculations (§ 3.5.7).

#### 3.6.2 Répartition de la valeur du paramètre

Entre les points extrêmes d'une spline, il est simple d'avoir une variation d'un seul paramètre, qui passe de façon continue d'une valeur  $t_0$  à  $t_m$  lorsqu'il existe  $(m + 1)$  points de passage ; ces valeurs peuvent être respectivement 0 et 1, mais ce n'est pas obligatoire.

Pour choisir les valeurs intermédiaires, la solution la plus simple est de leur faire constituer une progression arithmétique de raison  $(t_m - t_0)/m$  ; mais il peut se trouver des raisons pour écarter cette méthode comme pour les polynomiales d'Hermite (§ 3.4) ; en effet, si les points de passage sont inégalement espacés, ou si la courbure a des variations rapides, l'égalité des dérivées risque d'imposer, dans certains arcs, des formes qui ne conviennent pas ; l'opérateur peut alors choisir, soit par un algorithme analogue à celui qui a été décrit (§ 3.4.1), soit par une décision arbitraire, des valeurs qui ne croissent pas de façon régulière ; dans le premier cas, la spline est dite uniforme, et non uniforme dans le deuxième.

Si l'on veut néanmoins que chaque arc de courbe compris entre deux points consécutifs soit défini par un paramètre particulier variant de 0 à 1, on emploie un paramètre auxiliaire  $u$ , défini par :

$$u = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \tag{21}$$

ainsi lorsque  $t$  passe de  $t_i$  à  $t_{i+1}$ ,  $u$  varie de 0 à 1, et l'on se retrouve dans les conditions choisies par J. Ferguson (§ 3.3).

Pour déterminer les coefficients de la fonction polynomiale caractérisant une courbe, on ne dispose donc, à l'origine, que des coordonnées cartésiennes des points de passage ; afin de les

compléter, dans le cas des cubiques, qui ont longtemps été les plus utilisées, il faut y ajouter les valeurs des dérivées ; celles-ci peuvent être le résultat d'un algorithme ou, plus souvent, d'une décision arbitraire ; puis, de proche en proche, les dérivées à l'extrémité d'un arc servent à définir celles de l'origine du suivant. On a rappelé (§ 3.6.1) que l'identité n'était pas une condition indispensable, mais que le recours à une décision arbitraire ôtait à la méthode son caractère d'automatisme.

#### 3.6.3 Splines non rationnelles, uniformes ou non uniformes

Un point d'un arc de courbe spline est défini par l'expression :

$$P(u) = \sum_{i=0}^m s_i \cdot F_i(u) \tag{22}$$

les fonctions  $F$ , pour une cubique, étant par exemple :

$$\left. \begin{aligned} F_0(u) &= \frac{1}{6} (-u^3 + 3u^2 - 3u + 1) \\ F_1(u) &= \frac{1}{6} (3u^3 - 6u^2 + 4) \\ F_2(u) &= \frac{1}{6} (-3u^3 + 3u^2 - 3u + 1) \\ F_3(u) &= \frac{1}{6} u^3 \end{aligned} \right\} \tag{23}$$

Les coefficients  $s_i$  sont des vecteurs ayant une origine quelconque et une extrémité constituée par leur point de définition ; la somme des fonctions  $F$  étant identiquement égale à 1, cela explique pourquoi l'origine commune des vecteurs  $s$  peut être située n'importe où et pourquoi la forme d'une courbe ne varie pas lorsque la collection de ses points de définition subit, en bloc, une translation ou une rotation. On emploie ici l'expression **points de définition** alors que l'on utilise trop souvent *points de contrôle*, qui est un anglicisme mal traduit ; en français le substantif *contrôle* signifie, par son étymologie, vérification ou inspection.

En examinant les fonctions  $F$ , on fait les observations suivantes.

■ Les fonctions  $F_0$  et  $F_3$  sont respectivement nulles, ainsi que leurs dérivées, pour  $u = 1$  et pour  $u = 0$  ; ainsi le coefficient  $s_3$  n'a pas d'influence sur la position du point origine de l'arc de courbe et sur la dérivée correspondante. Il en va de même du coefficient  $s_0$  pour l'extrémité.

■ Pour définir des fonctions  $F$  d'une façon plus générale, on peut utiliser une fonction unique  $F$  (figure 13), limitée, par exemple, pour  $F_0$ , entre  $u = 3/4$  et  $u = 1$ , soit :

$$\text{et, par conséquent} \quad \left. \begin{aligned} F_0(u) &= F\left(\frac{3}{4} + \frac{u}{4}\right) \\ F_1(u) &= F\left(\frac{2}{4} + \frac{u}{4}\right) \\ F_2(u) &= F\left(\frac{3}{4} + \frac{u}{4}\right) \\ F_3(u) &= F\left(\frac{u}{4}\right) \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

avec  $u \in [0, 1]$

et telle que :

$$\sum_{i=0}^3 F_i(u) \equiv 1 \quad \forall u$$

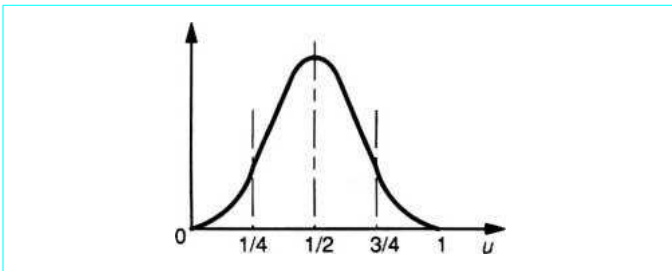


Figure 13 – Représentation de la fonction  $F$

Parmi les fonctions qui possèdent cette propriété, celles de Bernstein sont les plus souvent employées.

■ Les points limites d'un arc de courbe de degré  $m$  sont respectivement les barycentres des  $m$  premiers ou derniers points de définition. On ne peut donc modifier leur position qu'en déplaçant les uns ou les autres des points de définition ; ce n'est pas toujours intuitif, car il faut tenir compte des coefficients de pondération, et parce que l'on agit alors en même temps sur la pente de la tangente au point limite correspondant.

Une solution classique consiste à superposer les  $m$  premiers ou derniers points de définition ; ils sont alors confondus avec leur barycentre, c'est-à-dire avec le point limite ; la tangente y est alors confondue avec le vecteur qui le relie au point de rang  $(m + 1)$  mais, les deux premières dérivées étant nulles, la courbure au point limite l'est aussi.

■ Les fonctions  $F$  sont, deux à deux, symétriques par rapport à  $u$  et  $(1 - u)$ . En conséquence, la forme d'un arc de courbe  $C$  (figure 14), compris entre les points  $P(0)$  et  $P(1)$ , dépend des points  $S_0, S_1, S_2$  et  $S_3$ .

La forme de l'arc  $C'$  dépend des points  $S'_0, S'_1, S'_2$  et  $S'_3$ , qui sont tels que :

$$S'_0 = S_1 ; \quad S'_1 = S_2 \quad \text{et} \quad S'_2 = S_3$$

En conséquence :

$$P'(0) = P(1)$$

et 
$$\frac{dP'}{du}(0) = \frac{dP}{du}(1) \tag{25}$$

et les deux arcs se raccordent tangentiellement. En utilisant des fonctions du cinquième degré et six points de définition par arc, on obtient un raccordement par osculation, c'est-à-dire l'identité des centres de courbure.

■ Il existe plusieurs façons de modifier la forme d'un arc de courbe, par exemple en déplaçant les points de définition, en intercalant des points de passage supplémentaires ou en donnant au paramètre  $t$  des valeurs qui, tout en étant croissantes, ne constituent pas une progression arithmétique ; dans ce dernier cas, la spline est dite *non uniforme*.

### 3.6.4 Splines rationnelles uniformes ou non uniformes (NURBS)

Excepté les paraboles, une spline non rationnelle ne peut représenter exactement une conique ; on peut considérer que c'est un défaut, bien qu'une cubique soit capable d'en fournir une acceptable approximation.

C'est pourquoi on a étudié les formes rationnelles qui remédient à cet inconvénient.

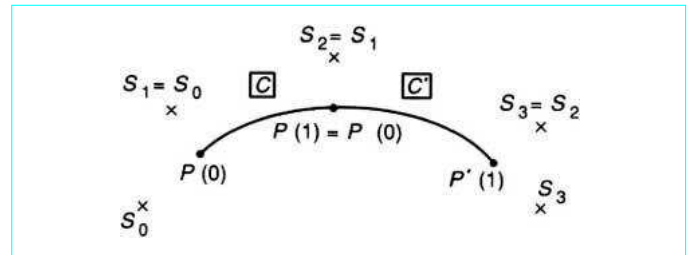


Figure 14 – Arcs de courbes et leurs points de définition

Une courbe est représentée par l'expression :

$$P(u) = \frac{R(u)}{H(u)} \tag{26}$$

dans laquelle  $R(u)$  est une polynomiale à coefficients vectoriels et  $H(u)$  une polynomiale à coefficients scalaires.

La forme classique de  $P$  est :

$$P(u) = \frac{\sum_{i=0}^m s_i \cdot w_i \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u)}{\sum_{i=0}^m w_i \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u)} \tag{27}$$

dans laquelle les  $w_i$  sont des poids attribués aux sommets  $S_i$  du polygone caractéristique, et cette forme se prête à la représentation exacte des coniques.

L'opérateur dispose de plusieurs moyens pour agir sur la forme d'une spline rationnelle.

- déplacer un sommet, ou plusieurs, de son polygone caractéristique ;
- modifier les valeurs des paramètres attribués à certains points de passage intermédiaires ;
- intercaler des points de passage entre ceux qui existaient à l'origine ;
- modifier les poids  $w_i$  attribués aux points de définition ;
- spécifier le rapport entre les modules des dérivées des deux arcs de courbe qui se raccordent en un point de passage.

Les représentations qui possèdent toutes ces possibilités sont les **splines rationnelles non uniformes à base polynomiale**, connues par l'acronyme **NURBS** de l'anglais *Non Uniform Rational Base Splines*.

Il faut convenir que, pour un opérateur, la quantité et la diversité des moyens disponibles peut poser un problème de choix.

## 4. Surfaces

### 4.1 Généralités

Parmi les premiers travaux accomplis en France à propos de la CFAO, il faut citer ceux de Jean-Marc Brun et Michel Théron, chercheurs à la faculté d'Orsay vers 1965.

Leur solution était fondée sur la combinaison booléenne de solides définis par des droites et des cercles. Cette méthode se prêtait mal à la description d'objets ayant des formes plus variées, tels par exemple des aéronefs, les coques de bateaux, les aubes de turbines, les carrosseries d'automobiles, etc. On ne cite cette solution que pour mémoire et la suite de la présente étude se limitera à celle des solutions paramétriques.

Les applications industrielles sont différentes selon qu'il faut traiter de la dynamique des fluides, de la mécanique des milieux

continus, de l'architecture ou de l'esthétique ; cela suffit pour expliquer la variété des solutions offertes, dont certaines ont même été conçues pour suivre au plus près des pratiques traditionnelles.

## 4.2 Carreaux de J. Ferguson

### 4.2.1 Principe

La méthode a été exposée par James Ferguson, ingénieur chez Boeing, dans le *Journal of the Association for Computing Machinery* (JACM) en avril 1964.

Le contour d'un carreau (figure 15) est défini par quatre cubiques paramétriques  $P(u, 0)$ ,  $P(u, 1)$ ,  $P(0, v)$  et  $P(1, v)$ .

En chaque coin, on connaît donc les dérivées partielles paramétriques.

Pour compléter la définition, on choisit arbitrairement en chaque coin une dérivée mixte  $\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}$ . On possède alors les seize conditions qui déterminent les coefficients  $a$  de l'expression :

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 a_{ij} \cdot u^i v^j \quad (28)$$

### 4.2.2 Choix des dérivées mixtes

Il est difficile de se fier uniquement à l'intuition pour choisir les dérivées mixtes. On préfère, en général, imposer des coordonnées cartésiennes arbitraires à quatre points situés à l'intérieur du carreau, et dont les coordonnées paramétriques sont connues.

### 4.2.3 Conditions de raccordement

Pour que deux carreaux  $C$  et  $C'$  (figure 16) se raccordent tangentiuellement le long d'une ligne commune  $P(0,0)P(1,0)$ , il suffit que les dérivées de l'une soient identiques à celles de l'autre. Dans ces conditions, il est évident que la dérivée  $\frac{\partial P}{\partial v}(u_0, 0)$  de l'une est identique à  $\frac{\partial P'}{\partial w}(u_0, 1)$ , qui est celle de l'autre.

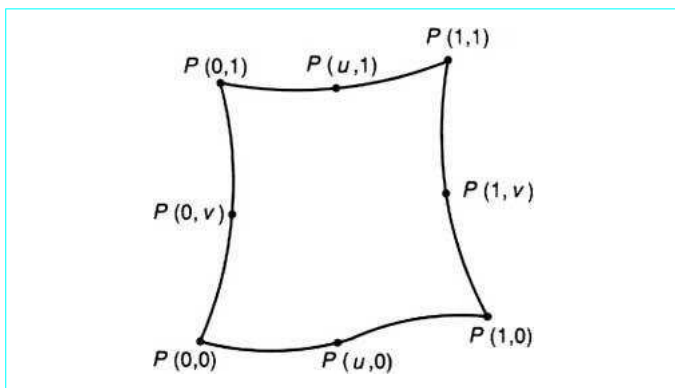


Figure 15 - Carreau de Ferguson

Le respect de cette condition assez restrictive n'était pas un obstacle grave tant qu'il s'agissait des formes assez simples comme celles d'un fuselage ou d'une aile, mais certaines zones, comme le nez du fuselage, les raccordements entre les ailes et le fuselage, ou les glaces planes du poste de pilotage, devaient être traitées selon la méthode traditionnelle. Il est certain que le système de Ferguson a été complété pour se prêter à la définition totale des éléments d'une aéronef.

## 4.3 Carreaux de S. Coons

### 4.3.1 Données du problème

Steven A. Coons, enseignant alors au MIT, reçut d'un grand constructeur d'automobiles, au début de la décennie de 1960, la mission suivante :

« Sur la maquette d'une carrosserie de voiture, on a tracé des lignes, planes ou gauches, formant un carroyage. Les quatre côtés d'un carreau étant des courbes paramétriques préalablement définies, déterminer les points internes du carreau en assurant son raccordement tangentiuel avec ses voisins. »

### 4.3.2 Solution

Les quatre lignes limites d'un carreau étant respectivement de la forme :

$$P(u, 0), P(u, 1), P(0, v), P(1, v) \quad u, v \in [0, 1]$$

un point intérieur  $P(u, v)$  est représenté par :

$$P(u, v) = P(u, a) \cdot F_a(v) + P(b, v) \cdot F_b(u) - P(a, b) \cdot F_a(u) \cdot F_b(v) \quad (29)$$

les symboles  $a$  et  $b$  prenant les valeurs 0 et 1 ;

les fonctions  $F$  sont les interpolantes d'Hermite (figure 17), soit :

$$F_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1 \quad F_1(t) = -2t^3 + 3t^2 \quad (30)$$

Au point  $P(u_0, 0)$  (figure 18), la tangente à la génératrice isoparamétrique  $P(u_0, 0)$  est représentée par le vecteur  $\frac{\partial P}{\partial v}(u_0, 0)$  ; or, on a :

$$\frac{\partial P}{\partial v}(u_0, 0) = \frac{\partial P}{\partial v}(0, 0) \cdot F_0(u_0) + \frac{\partial P}{\partial v}(1, 0) \cdot F_1(u_0) \quad (31)$$

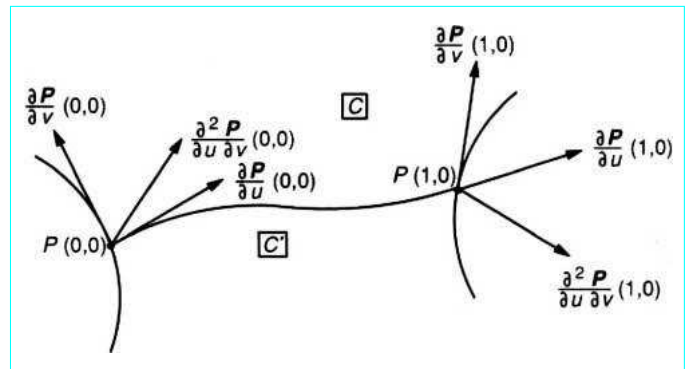


Figure 16 - Conditions de raccordement de Ferguson

Le vecteur tangent à  $P(u_0, v)$  ne dépend donc (figure 18) que des vecteurs  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}(0, 0)$  et  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}(1, 0)$ , pondérés par les valeurs de  $F_0(u_0)$  et  $F_1(u_0)$ .

Pour que deux carreaux  $C$  et  $C'$  se raccordent tangentiellement le long de leur limite commune  $AB$ , il suffit que les vecteurs  $\mathbf{AM}$ ,  $\mathbf{BN}$ ,  $\mathbf{AQ}$  et  $\mathbf{BR}$  remplissent la condition :

$$\frac{\mathbf{AM}}{\mathbf{AQ}} = \frac{\mathbf{BN}}{\mathbf{BR}} = k \quad k \in \mathbb{R} \quad (32)$$

car, alors, les parallélogrammes  $PM'DN'$  et  $PQ'FR'$  sont homothétiques et les vecteurs  $\mathbf{PD}$  et  $\mathbf{PF}$  sont colinéaires.

On observera que, si cette condition est suffisante, elle n'est pas nécessaire, car il faut seulement que les vecteurs  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial w}$  et  $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial u}$  soient coplanaires, mais l'emploi de cette condition serait laborieux car il aboutit à une indétermination qu'il faut lever arbitrairement.

### 4.3.3 Limitations

La solution de Coons s'applique automatiquement dès que l'on a choisi le coefficient  $k$  de l'équation (32) à condition que les courbes limites de deux carreaux voisins soient tangentes en leur point de raccordement ; mais elle ne s'applique sans difficulté que si les carreaux sont de formes et de dimensions analogues. Par exemple, dans le cas de la figure 19, au point  $A$ , le coefficient  $k$  est voisin de 1, mais si on l'applique aussi en  $B$ , on voit que le vecteur  $\mathbf{BG}$  du carreau  $C'$  serait trop grand pour définir convenablement le côté  $BD$ .

Par ailleurs, on observe que les dérivées mixtes aux coins d'un carreau sont identiquement nulles car on a :

$$\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial u \partial v} \begin{pmatrix} 0, 0 \\ 0, 1 \\ 1, 0 \\ 1, 1 \end{pmatrix} \equiv 0 \quad (33)$$

c'est-à-dire qu'il n'y a pas de torsion, et que la zone environnante semble être méplate, ce qui est un inconvénient, au moins sur le plan esthétique. On remédie à ce défaut en modifiant arbitrairement les coordonnées cartésiennes de quatre points, situés à l'intérieur du carreau, dont on conserve les coordonnées paramétriques. Le procédé n'est plus alors totalement automatique mais son usage ne présente guère de difficultés.

### 4.3.4 Raccordement osculateur

Pour des objets qui jouent un rôle dans des phénomènes de la dynamique des fluides, on peut chercher à assurer, entre deux carreaux, la continuité de la courbure, c'est-à-dire l'osculation.

Il faut alors que les lignes limites soient osculatrices entre elles en leur point de raccordement, ce qui impose, pour la suite du procédé, de les exprimer à l'aide de fonctions du cinquième degré, et d'utiliser, au lieu des interpolantes d'Hermite, des fonctions :

$$\left. \begin{aligned} G_0 &= -6t^5 + 15t^4 - 10t^3 + 1 \\ G_1 &= 6t^5 - 15t^4 + 10t^3 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Dans ces conditions, les termes :  $\frac{\partial^2 \mathbf{P}}{\partial u \partial v}$ ,  $\frac{\partial^3 \mathbf{P}}{\partial u^2 \partial v}$ ,  $\frac{\partial^3 \mathbf{P}}{\partial u \partial v^2}$

et  $\frac{\partial^4 \mathbf{P}}{\partial u^2 \partial v^2}$  sont nuls aux quatre coins du carreau ; il faut donc ajouter arbitrairement au tenseur les seize termes remplaçant les valeurs nulles afin d'éviter les défauts d'aspect, mais c'est une opération assez laborieuse.

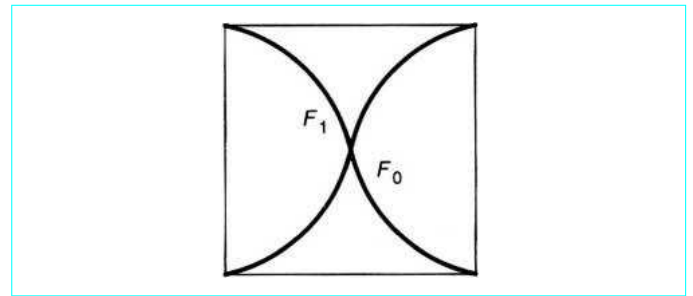


Figure 17 - Interpolantes d'Hermite

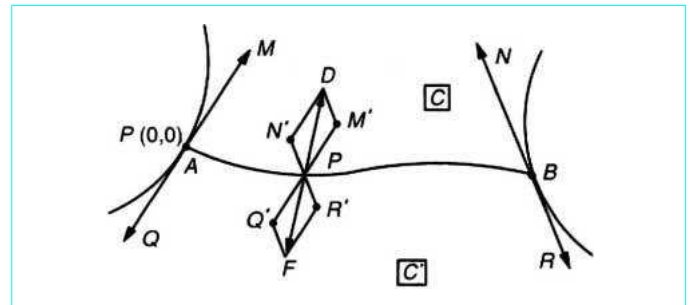


Figure 18 - Conditions de raccordement de Coons

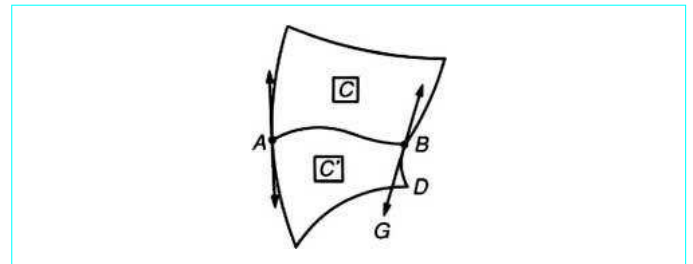


Figure 19 - Difficultés de raccordement au point B

## 4.4 Surfaces triangulaires

### 4.4.1 Généralités

Quand une surface est de forme très irrégulière, comme c'est le cas, par exemple, pour un levé topographique, ou lorsque les points, dont on a mesuré les coordonnées cartésiennes à l'aide d'un procédé mal adapté, forment un réseau plus ou moins irrégulier, la première opération consiste à relier les points trois à trois en prenant comme critère leur distance cartésienne ; on emploie pour cela l'algorithme de Delauney. Ensuite, on transforme les facettes triangulaires planes en surfaces élémentaires gauches tangentes entre elles.

### 4.4.2 Définition d'une surface gauche

Pour définir une surface triangulaire gauche, on lui assigne d'abord, en chacun des trois sommets, une normale dont la direction est obtenue par la pondération de celles des normales des surfaces planes ayant ce sommet en commun ; on y ajoute des conditions de minimisation de l'énergie de déformation et, en cas de besoin, des conditions laissées à l'appréciation de l'opérateur.

### 4.4.3 Indexage des sommets

Les sommets du réseau caractéristique ainsi obtenus sont affectés d'un triple indice dont les termes ont un total égal au degré des fonctions d'interpolation utilisées. La figure 20 donne l'exemple d'une face du quatrième degré.

Par exemple, le sommet  $S_{211}$  correspond à  $i = 2 ; j = 1 ; k = 1$  avec  $i + j + k = 4$ .

### 4.4.4 Expression des points

Les coordonnées barycentriques  $u, v$  et  $w$  sont liées par la relation  $u + v + w = 1$ , et un point intérieur à la surface est défini par la relation :

$$P(u, v, w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m s_{ijk} \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u) \cdot \mathcal{B}_{j,m}(v) \cdot \mathcal{B}_{k,m}(w) \quad (35)$$

et l'on rappelle les conditions :

$$\left. \begin{aligned} i + j + k &= m \\ u, v, w &\in [0, 1] \\ u + v + w &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

### 4.4.5 Conditions de raccordement tangentiel

Pour que deux surfaces (figure 21) ayant  $AB$  comme limite commune, définie par le polygone caractéristique  $ACD...B$ , se raccordent tangentiellement, il faut et il suffit que les points tels que  $C, D, E$  et  $F$  soient coplanaires.

## 4.5 Carreaux UNISURF

### 4.5.1 Principe

Par analogie avec la représentation des courbes, un carreau est déterminé par un réseau caractéristique dont les mailles quadrangulaires ne sont pas forcément planes et dont les paramètres sont traités par des fonctions qui ne sont pas obligatoirement du même degré.

La numérotation des sommets du réseau de la figure 22 montre que la surface est du quatrième degré par rapport à  $u$  et du cinquième par rapport à  $v$ .

Les courbes définies par les polygones  $S_{00}, S_{10}, \dots, S_{40}$  et  $S_{05}, S_{15}, \dots, S_{45}$  sont des directrices principales de la surface ; les polygones intermédiaires, tels que, par exemple,  $S_{02}, S_{12}, \dots, S_{42}$  déterminent des directrices auxiliaires. Les premières sont situées sur la surface alors que les autres n'y appartiennent pas. Elles servent à définir des points  $T_{u_0, j}$  qui, avec  $P(u_0, 0)$  et  $P(u_0, 1)$  sont les sommets du polygone caractéristique d'une génératrice courante  $P(u_0, v)$ , dite *iso-u*. Le même raisonnement s'applique aux polygones dont les sommets sont  $S_{j, 0}, S_{j, 1}, \dots, S_{j, 5}$ .

Il est évident qu'une génératrice *iso-u*,  $P(u_0, v)$  rencontre la génératrice *iso-v*,  $P(u, v_0)$  au point  $P(u_0, v_0)$ .

Ainsi, les deux familles d'isoparamétriques forment, sur le carreau, un réseau de coordonnées.

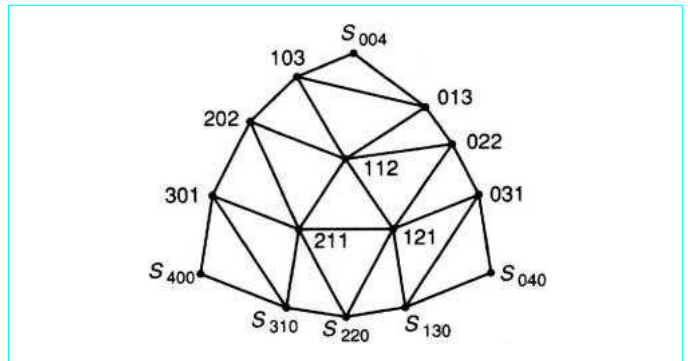


Figure 20 - Numérotation des sommets d'un réseau triangulaire

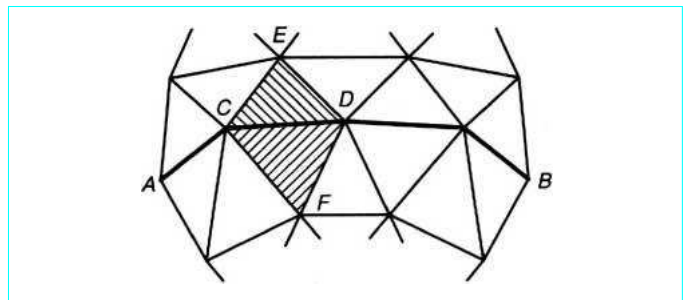


Figure 21 - Conditions de raccordement entre deux surfaces triangulaires

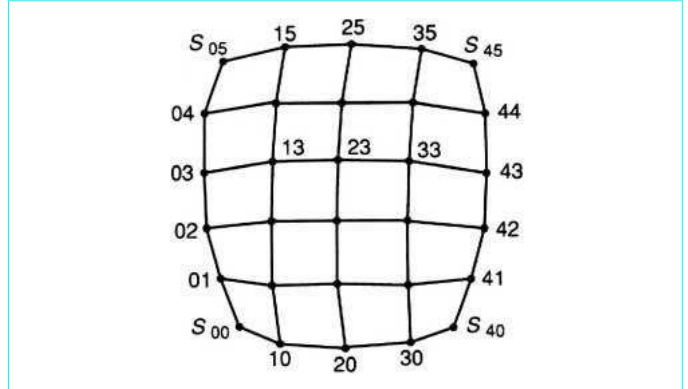


Figure 22 - Numérotation des sommets du réseau

### 4.5.2 Représentation

#### 4.5.2.1 Représentation avec les fonctions f

Comme pour les courbes, on pourrait représenter les points internes d'un carreau à l'aide des fonctions  $f$  décrites au paragraphe 3.5.2. La formule est compliquée, son utilisation ne présente aucun intérêt et son existence n'est signalée que pour mémoire.

**4.5.2.2 Représentation avec les fonctions de Bernstein**

Un point défini par les valeurs  $u_0$  et  $v_0$  de ses coordonnées paramétriques est représenté par :

$$P(u_0, v_0) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n s_{ij} \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u_0) \cdot \mathcal{B}_{j,n}(v_0) \quad (37)$$

**4.5.2.3 Représentation par la méthode de Horner**

Le regroupement des coefficients vectoriels des mêmes puissances de  $u$  et de  $v$  donne la formule :

$$P(u_0, v_0) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} \cdot u^i v^j \quad (38)$$

**4.5.3 Propriétés**

■ Par analogie avec la propriété des courbes, une surface est toujours contenue à l'intérieur du polyèdre convexe formé par certains sommets de son réseau caractéristique, et qui contient tous les autres.

■ Si le sommet  $S_{ij}$  d'un réseau subit un déplacement  $\Delta$ , tout point  $P(u_0, v_0)$  subit un déplacement  $\delta$  égal à :

$$\delta = \Delta \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u_0) \cdot \mathcal{B}_{j,n}(v_0) \quad (39)$$

Le déplacement maximal s'applique au point  $P\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}\right)$  qui est voisin de  $S_{ij}$  et, comme les maximums des fonctions  $\mathcal{B}$  sont voisins de 0,3, on peut en première approximation admettre que  $\delta$  est voisin de  $\frac{\Delta}{10}$ .

■ Si l'on modifie la position d'un sommet appartenant à un polygone du contour extérieur du réseau, par exemple  $S_{00}, S_{10}, \dots, S_{40}$  de la figure 22, la ligne limite de la surface est modifiée, et par conséquent ses conditions de raccordement avec son carreau voisin.

■ Il existe une surface réglée ayant pour directrices la directrice principale de la surface (soit la courbe  $\widehat{P_{00}P_{40}}$  par exemple) et la première directrice auxiliaire (soit la courbe  $\widehat{P_{01}P_{41}}$  de la figure 22). Les génératrices sont les droites joignant les points des deux directrices qui correspondent à la même valeur de  $u$  (figure 23). Ces génératrices sont colinéaires avec les tangentes aux génératrices isoparamétriques de la surface. En conséquence, en déplaçant un des sommets du polygone caractéristique de la première directrice auxiliaire, on modifie les conditions de continuité de pente de la surface le long de la ligne commune avec son carreau voisin.

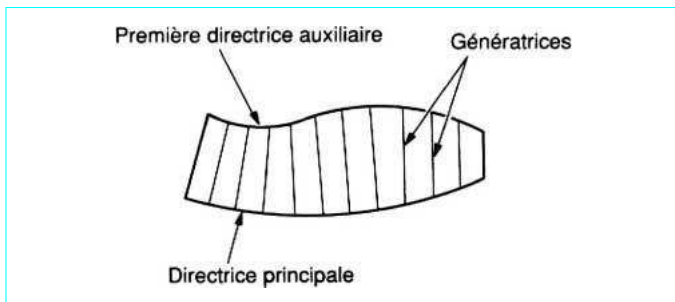


Figure 23 – Directrices d'une surface

**4.5.4 Sectionnement**

Pour isoler une fraction d'une surface comprise entre les génératrices  $P(u_0, v), P(u_1, v), P(u, v_0)$  et  $P(u, v_1)$ , on utilise la formule :

$$P(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n b_{ij} [u_0 + (u_1 - u_0)u]^i \cdot [v_0 + (v_1 - v_0)v]^j \quad (40)$$

et l'on déduit les vecteurs  $b'_{ij}$  du carreau qui a été isolé en employant les matrices (16).

**4.5.5 Élévation fictive du degré**

Comme pour une courbe, on procède à une élévation fictive du degré en ajoutant des zéros au tenseur des  $b_{ij}$ , soit :

$$\begin{pmatrix} b_{00} & \dots & b_{0n} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m0} & \dots & b_{mn} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

**4.5.6 Abaissement du degré**

Théoriquement, on peut essayer de réduire à une même valeur le degré des directrices principales et auxiliaires en  $u$ , et ensuite celles qui sont définies en  $v$ ; mais il ne faut pas se dissimuler que cette opération est laborieuse car il faut faire intervenir, en alternance, des calculs et des décisions arbitraires.

**4.5.7 Représentation du vecteur torsion**

Soit  $ABCD$  (figure 24) une maille située au coin du réseau caractéristique d'un carreau de degré  $m \times n$ , le point  $A$  étant par exemple le sommet  $S_{00}$ .

Le vecteur torsion en  $A$  est égal à :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v}(0,0) = m \cdot n \cdot MC \quad (42)$$

On peut observer que si l'on représente un carreau de Coons par son réseau caractéristique, les mailles situées aux quatre coins sont des parallélogrammes puisque la torsion y est identiquement nulle.

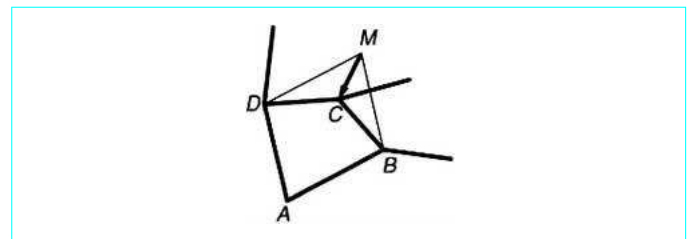


Figure 24 – Tracé du vecteur torsion

4.5.8 Conditions de raccordement

Pour assurer le raccordement tangentiel de deux carreaux  $C$  et  $C'$  dont le polygone caractéristique de leur limite commune est  $AB$  (figure 25), il suffit que la proportion des côtés des mailles de la première rangée des polygones caractéristiques des deux réseaux soit identique pour chaque sommet, soit :

$$\frac{AA'}{AA''} = \dots = \frac{MM'}{MM''} = \dots = \frac{BB'}{BB''} = k \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (43)$$

Cependant, si les côtés  $AA', \dots, MM', \dots, BB'$  sont parallèles, il suffit que les côtés  $AA'', \dots, MM'', \dots, BB''$  leur soient parallèles, aucune obligation de proportionnalité n'étant plus imposée. Dans ce cas, on observe que les deux carreaux sont tangents à un cylindre dont la directrice est la courbe  $AB$ , les génératrices étant parallèles aux droites  $AA'$ .

La continuité de pente est assurée parce qu'en tout point de  $AB$  les dérivées  $\frac{\partial P}{\partial v}(u,0)$  et  $\frac{\partial P'}{\partial w}(u,0)$  sont colinéaires, et dans le rapport  $k$  (figure 26). On a vu que, pour les solutions de Ferguson ou de Coons, l'obligation de proportionnalité pouvait être une contrainte gênante. Le cas de la figure 27b a été évoqué (§ 4.2.3 et § 4.3.3).

Une autre configuration se présente si l'on doit fractionner une surface ayant, par exemple, trois côtés (figure 27a) pour créer trois carreaux quadrilatères dont les côtés ne peuvent être deux à deux tangents au point  $A$ .

Pour que deux surfaces  $C$  et  $C'$  (figure 28) soient tangentes le long de leur ligne limite  $AB$ , il faut qu'en tout point de celle-ci les vecteurs représentant les dérivées partielles, soit  $\frac{\partial P}{\partial u}, \frac{\partial P}{\partial v}$  et  $\frac{\partial P'}{\partial w}$  soient coplanaires.

Cette condition peut s'exprimer en imposant la nullité de leur produit mixte, mais cela n'aboutit qu'à une indétermination qu'il est difficile de lever.

La surface  $C$  (figure 29) étant définie, on connaît, en un point de  $P(0,0)P(1,0)$ , les valeurs de  $\frac{\partial P}{\partial u}(u_0,0)$  et de  $\frac{\partial P}{\partial v}(u_0,0)$ .

On peut alors inclure dans la définition de  $C'$  la condition :

$$\frac{\partial P'}{\partial w}(u_0,0) = h(u) \cdot \frac{\partial P}{\partial v}(u_0,0) + k(u) \cdot \frac{\partial P}{\partial u}(u_0,0) \quad (44)$$

Si l'on a préalablement imposé à la surface  $C'$  les valeurs de  $\frac{\partial P'}{\partial w}(0,0)$  et  $\frac{\partial P'}{\partial w}(1,0)$ , on connaît les valeurs de  $h(0), h(1), k(0)$  et  $k(1)$  (figure 30).

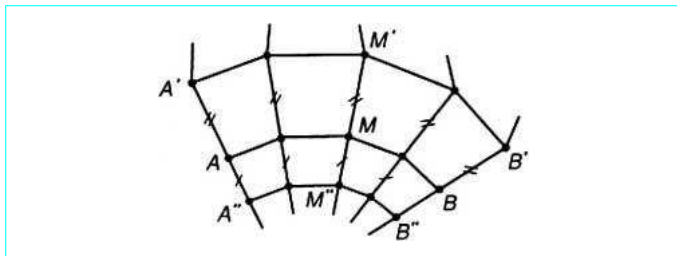


Figure 25 - Conditions de raccordement de deux carreaux UNISURF

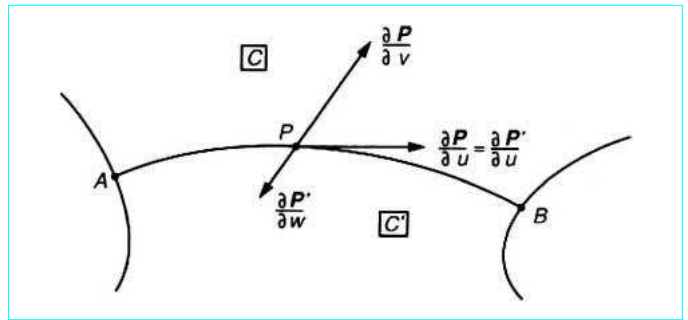


Figure 26 - Conditions simplifiées de raccordement

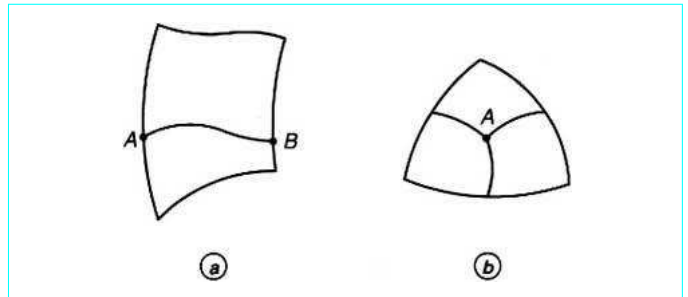


Figure 27 - Difficultés de raccordement

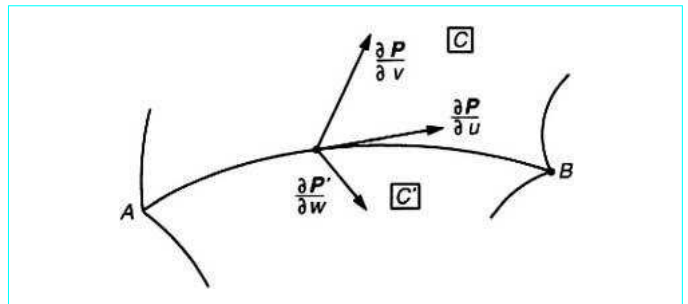


Figure 28 - Conditions générales de raccordement

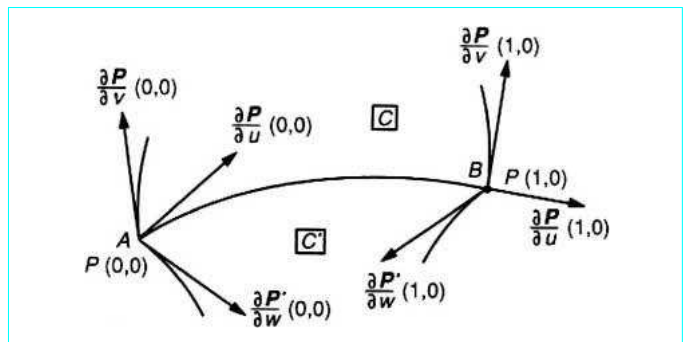


Figure 29 - Conditions de raccordement aux limites



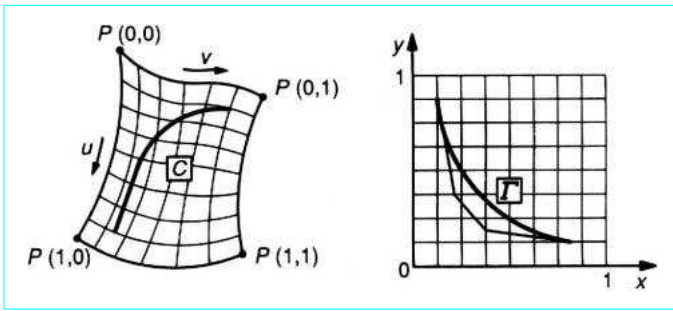


Figure 30 – Dualité entre carreaux cartésien et paramétrique

On peut choisir arbitrairement les coefficients des fonctions  $h$  et  $k$ , et leur degré. Si la courbe  $P(u, 0)$  est de degré  $m$ , et si les degrés des fonctions  $h$  et  $k$  sont respectivement  $\eta$  et  $\chi$ , la courbe directrice auxiliaire, lieu des extrémités des vecteurs  $\frac{\partial \mathbf{P}'}{\partial w}(u_0, 0)$ , a pour degré en  $u$  la plus grande des deux valeurs de :

$$(m + \eta) \text{ ou } (m + \chi - 1)$$

Il est avantageux de donner aux fonctions  $h$  et  $k$  la forme des cubiques d'Hermite, car leurs dérivées sont nulles pour  $u = 0$  ou  $u = 1$ , et cela simplifie la définition des carreaux situés à droite et à gauche de  $C'$ .

## 4.6 Surfaces splines non rationnelles et rationnelles

De même qu'une courbe spline est déterminée par un polygone caractéristique dont les sommets sont les points de définition, un carreau spline est déterminé par un réseau caractéristique.

Les conditions de raccordement sont tirées directement de celles qui concernent les courbes, qu'elles soient non rationnelles (§ 3.6.3) ou rationnelles (§ 3.6.4).

# 5. Référentiels déformables

## 5.1 Généralités

Dans les paragraphes précédents, on a considéré des courbes et des surfaces inscrites dans un espace cartésien ; ce point de vue est logique puisque toute réalisation pratique s'effectue à l'aide de machines ou d'écrans utilisant des référentiels cartésiens ou, éventuellement, cylindriques ou sphériques.

Or, il se trouve parfois qu'il est avantageux de pousser plus loin cette conception et de travailler d'abord dans un référentiel paramétrique pour revenir finalement dans un référentiel cartésien, qui est nécessaire pour l'exécution de tracés et d'usinages.

On se limitera ici à trois cas pratiques :

- tracé d'une courbe sur un carreau paramétrique ;
- tracé d'un carreau sur un carreau paramétrique ;
- déformation généralisée d'une collection de carreaux paramétriques.

## 5.2 Applications

### 5.2.1 Tracé d'une courbe sur un carreau paramétrique

Pour définir une courbe  $C$  tracée sur un carreau dont on connaît le réseau caractéristique (figure 30), on lui fait correspondre un référentiel cartésien.

Le carreau paramétrique porte un référentiel constitué par les génératrices *iso-u* et *iso-v*, qui sert à déterminer les coordonnées  $(u, v)$  de quelques points de la courbe que l'on veut définir.

Sur le référentiel cartésien on porte des points  $\pi(x, y)$  dont les coordonnées sont respectivement égales à celles des points  $P(u, v)$  de la courbe  $C$ .

La courbe  $\Gamma$  est caractérisée par son polygone et représentée par l'expression :

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^p c_k \cdot w^k \\ y &= \sum_{k=0}^p e_k \cdot w^k \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

dans laquelle les  $c_k$  et  $e_k$  sont des scalaires et non des vecteurs.

On pose :  $u = x$  et  $v = y$

et, dans le carreau paramétrique, un point est défini par :

$$\mathbf{P}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} \cdot u^i \cdot v^j \quad (46)$$

En remplaçant  $u$  et  $v$  par les valeurs trouvées en (45), on exprime les points de  $C$  en fonction de  $w$ , soit :

$$\mathbf{P}(u, v) = \mathbf{P}(w) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} \left( \sum_{k=0}^p c_k \cdot w^k \right)^i \cdot \left( \sum_{k=0}^p e_k \cdot w^k \right)^j \quad (47)$$

et, en regroupant tous les coefficients correspondant à la même puissance de  $w$  :

$$\mathbf{P}(w) = \sum_{\ell=0}^{(m+n)p} \mathbf{f}_{\ell} \cdot w^{\ell} \quad (48)$$

On voit que, en se limitant à l'emploi de cubiques, le résultat est de degré 18 ; il est alors préférable de rechercher une approximation acceptable si l'on ne veut pas que le temps et le prix des calculs deviennent trop élevés ou prohibitifs.

Des courbes telles que  $\Gamma$  et  $C$  sont appelées respectivement **transposées** et **transposantes**.

Il faut observer que si une transposante est contenue dans deux carreaux mitoyens dont les degrés respectifs  $v$  et  $w$  sont différents, elle subit au passage par la ligne frontière une réfraction dont il faut tenir compte dans la définition de la transposée.

Ce phénomène est régi par une formule semblable à celle de Huyghens, mais dans laquelle les tangentes remplacent les sinus. Cela provient de ce que, si l'on considère que l'un des deux carreaux est isotrope, le second ne l'est pas.

Parution : mai 1992 - Ce document a été délivré pour le compte de 7200106152 - éditions ti // celine BLONBOU // 92.170.153.116

### 5.2.2 Tracé d'un carreau sur un carreau paramétrique

Dans le référentiel cartésien de la figure 30, on définit un carreau à l'aide de deux paramètres  $w$  et  $z$ , soit :

$$\left. \begin{aligned} x &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^r c_{k\ell} \cdot w^k \cdot z^\ell \\ y &= \sum_{k=0}^p \sum_{\ell=0}^r e_{k\ell} \cdot w^k \cdot z^\ell \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

les  $c$  et les  $e$  étant des scalaires.

Le passage sur le carreau paramétrique donne l'expression :

$$P(w, z) = \sum_{g=0}^{(m+n)p} \sum_{h=0}^{(m+n)r} f_{gh} \cdot w^g \cdot z^h \quad (50)$$

Si une telle solution est théoriquement satisfaisante, elle conduit à une quantité prohibitive de calculs, et l'on emploie des méthodes de calcul point par point qui sont acceptables depuis que le prix des mémoires des ordinateurs est devenu presque négligeable.

### 5.2.3 Déformation généralisée d'une famille de carreaux paramétriques

On rappelle que, en raison des propriétés des fonctions  $f$  (§ 3.5.2) ou de celles de Bernstein (§ 3.5.3), si un polygone caractéristique est composé de  $n$  vecteurs égaux et colinéaires, la courbe correspondante est évidemment une droite, et si l'on suppose que la longueur du segment  $[P(0)P(1)]$  est égale à l'unité, l'abscisse métrique d'un point  $P(u)$  est égale à  $u$ .

Par conséquent, dans un référentiel triparamétrique constitué par un treillis régulier (figure 31) dont les arêtes sont orthogonales et de longueur unité, les coordonnées paramétriques  $(u, v, w)$  d'un point sont identiques à ses coordonnées métriques  $(x, y, z)$ . Si l'on impose à un nœud  $S_{i,j,k}$  du treillis d'ordre  $m \times n \times p$  un déplacement  $\Delta$ , un point de coordonnées paramétriques  $(u_0, v_0, z_0)$  subit en conséquence un déplacement  $\delta$  égal à :

$$\delta = \Delta \cdot \mathcal{B}_{i,m}(u_0) \cdot \mathcal{B}_{j,n}(v_0) \cdot \mathcal{B}_{k,p}(w_0) \quad (51)$$

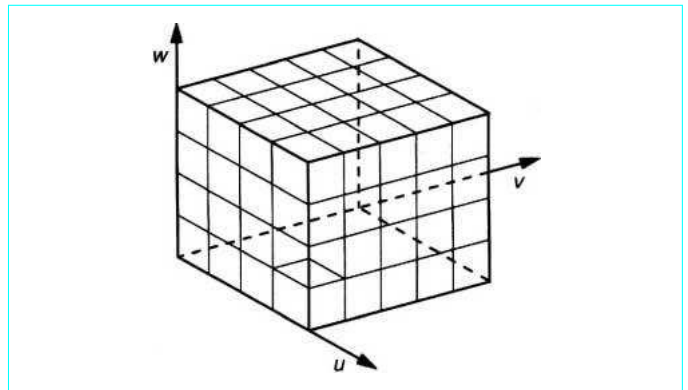


Figure 31 - Treillis régulier

Ce déplacement est maximal pour le point  $P\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{n}, \frac{k}{p}\right)$  et sa valeur est approximativement égale à  $0,03 \Delta$ .

Une forme étant délimitée par une collection de carreaux paramétriques, on veut lui faire subir une déformation d'ensemble caractérisée par quelques vecteurs  $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r$ , relatifs à autant de points significatifs  $P(x, y, z)$  répartis sur les carreaux ; il faut en conséquence déplacer autant de nœuds du treillis unité, en les choisissant par leurs triples indices  $(i, j, k)$  tels que :

$$i \approx mx ; \quad j \approx ny ; \quad k \approx pz$$

Les déplacements des nœuds du treillis étant des  $\Delta_\ell$ , celui d'un point  $P(x, y, z)$  d'un carreau est égal à :

$$\delta = \sum_{\ell=1}^r \Delta_\ell \cdot \mathcal{B}_{i,m}(x) \cdot \mathcal{B}_{j,n}(y) \cdot \mathcal{B}_{k,p}(z) \quad (52)$$

et, les  $\delta$  étant donnés, les  $\Delta$  sont les racines d'un simple système d'équations linéaires.

Il ne serait cependant pas pratique de modifier chaque point des carreaux, car cela nécessiterait une énorme quantité de calculs. Ce serait plus raisonnable de modifier seulement les sommets des réseaux caractéristiques mais, dans ce cas, la continuité entre les carreaux n'est pas théoriquement assurée, et il peut devenir nécessaire de procéder, de façon arbitraire, à des ajustements locaux.

## Références bibliographiques

- |  |  |   |
|--|--|---|
| <p>[1] BARSKY (B.), BARTELS (R.H.) et BEATTY (J.C.). – <i>An introduction to splines for use in computer graphics</i>. Éd. Morgan-Kaufmann (1987).</p> <p>[2] BARSKY (B.), BARTELS (R.H.) et BEATTY (J.C.). – Traduction de [1], <i>B-splines et Beta-splines</i>. Collection Mathématiques et CAO, tomes 6 et 7, Éd. Hermès (1988).</p> <p>[3] BÉZIER (P.). – <i>Essai de définition des courbes et surfaces expérimentales</i>. Thèse de doctorat d'État, Université Paris VI (1977).</p> <p>[4] BÉZIER (P.). – <i>Mathematical basis of UNISURF CAD system</i>. Éd. Butterworth (1986).</p> <p>[5] BÉZIER (P.). – <i>Courbes et surfaces</i>. Collection Mathématiques et CAO, tome 4, Éd. Hermès (1987).</p> | <p>[6] de CASTELJAU (P.). – <i>Formes à pôles</i>. Collection Mathématiques et CAO, tome 2, Éd. Hermès (1986).</p> <p>[7] CHIYOKURA (H.). – <i>Solid modelling with DESIGN-BASE</i>. Éd. Addison-Wesley (1988).</p> <p>[8] COONS (S.). – <i>Surfaces for computer aided design of space forms</i>. Technical report MAC-TR-41. MIT Cambridge Mass. (1967).</p> <p>[9] COONS (S.). – <i>Méthode matricielle</i> (traduction de [8]). Collection Mathématiques et CAO, tome 5, Éd. Hermès (1987).</p> <p>[10] DING (Q.L.) et DAVIES (B.J.). – <i>Surface engineering geometry for computer aided design and manufacture</i>. Éd. Ellis Horwood Ltd (1987).</p> <p>[11] FARIN (G.). – <i>Bézier polynomials over triangles</i>. Brunel University Uxbridge GB (1986).</p> | <p>[12] FIOROT (J.C.) et JEANNIN (P.). – <i>Courbes et surfaces rationnelles</i>. Masson (1989).</p> <p>[13] GARDAN (Y.). – <i>Méthodes de base</i>. Collection Mathématiques et CAO, tome 1, Éd. Hermès (1985).</p> <p>[14] ROGERS (D.F.) et ADAMS (J.A.). – <i>Mathematics elements for computer graphics</i>. Éd. McGraw-Hill (1989).</p> <p>[15] SABLONNIÈRE (P.). – <i>Bases de Bernstein et approximations splines</i>. Thèse de doctorat d'État, Université d'Ascq-lès-Lille (1982).</p> |
|--|--|---|

Tous ces livres contiennent un répertoire de plusieurs centaines d'articles ; consulter aussi les revues CAD (Butterworth), CAGD (North Holland) et les comptes rendus des congrès PROLAMAT (Elsevier).

# Gagnez du temps et sécurisez vos projets en utilisant une source actualisée et fiable



RÉDIGÉE ET VALIDÉE  
PAR DES EXPERTS




MISE À JOUR  
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE  
SUR TOUS SUPPORTS  
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS  
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 340 000 utilisateurs chaque mois
- + de 10 000 articles de référence et fiches pratiques
- Des Quiz interactifs pour valider la compréhension 

## SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



### Questions aux experts\*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



### Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



### Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



### Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



### Info parution

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

\*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

## Les offres Techniques de l'Ingénieur

### INNOVATION

- Éco-conception et innovation responsable
- Nanosciences et nanotechnologies
- Innovations technologiques
- Management et ingénierie de l'innovation
- Smart city – Ville intelligente

### MATÉRIAUX

- Bois et papiers
- Verres et céramiques
- Textiles
- Corrosion – Vieillessement
- Études et propriétés des métaux
- Mise en forme des métaux et fonderie
- Matériaux fonctionnels. Matériaux biosourcés
- Traitements des métaux
- Élaboration et recyclage des métaux
- Plastiques et composites

### MÉCANIQUE

- Frottement, usure et lubrification
- Fonctions et composants mécaniques
- Travail des matériaux – Assemblage
- Machines hydrauliques, aérodynamiques et thermiques
- Fabrication additive – Impression 3D

### ENVIRONNEMENT – SÉCURITÉ

- Sécurité et gestion des risques
- Environnement
- Génie écologique
- Technologies de l'eau
- Bruit et vibrations
- Métier : Responsable risque chimique
- Métier : Responsable environnement

### ÉNERGIES

- Hydrogène
- Ressources énergétiques et stockage
- Froid industriel
- Physique énergétique
- Thermique industrielle
- Génie nucléaire
- Conversion de l'énergie électrique
- Réseaux électriques et applications

### GÉNIE INDUSTRIEL

- Industrie du futur
- Management industriel
- Conception et production
- Logistique
- Métier : Responsable qualité
- Emballages
- Maintenance
- Traçabilité
- Métier : Responsable bureau d'étude / conception

### ÉLECTRONIQUE – PHOTONIQUE

- Électronique
- Technologies radars et applications
- Optique – Photonique

### TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION

- Sécurité des systèmes d'information
- Réseaux Télécommunications
- Le traitement du signal et ses applications
- Technologies logicielles – Architectures des systèmes
- Sécurité des systèmes d'information

### AUTOMATIQUE – ROBOTIQUE

- Automatique et ingénierie système
- Robotique

### INGÉNIERIE DES TRANSPORTS

- Véhicule et mobilité du futur
- Systèmes aéronautiques et spatiaux
- Systèmes ferroviaires
- Transport fluvial et maritime

### MESURES – ANALYSES

- Instrumentation et méthodes de mesure
- Mesures et tests électroniques
- Mesures mécaniques et dimensionnelles
- Qualité et sécurité au laboratoire
- Mesures physiques
- Techniques d'analyse
- Contrôle non destructif

### PROCÉDÉS CHIMIE – BIO – AGRO

- Formulation
- Bioprocédés et bioproductions
- Chimie verte
- Opérations unitaires. Génie de la réaction chimique
- Agroalimentaire

### SCIENCES FONDAMENTALES

- Mathématiques
- Physique Chimie
- Constantes physico-chimiques
- Caractérisation et propriétés de la matière

### BIOMÉDICAL – PHARMA

- Technologies biomédicales
- Médicaments et produits pharmaceutiques

### CONSTRUCTION ET TRAVAUX PUBLICS

- Droit et organisation générale de la construction
- La construction responsable
- Les superstructures du bâtiment
- Le second œuvre et l'équipement du bâtiment
- Vieillessement, pathologies et réhabilitation du bâtiment
- Travaux publics et infrastructures
- Mécanique des sols et géotechnique
- Préparer la construction
- L'enveloppe du bâtiment
- Le second œuvre et les lots techniques

## OFFRE



### Mathématiques pour l'ingénieur

Pour maîtriser les outils propres aux mathématiques pures et appliquées  
Ref : TIP052WEB

## PRÉSENTATION

Les outils conceptuels indispensables à la mise en équation des problèmes techniques: les définitions, les théorèmes de base et leur mise en application, les outils classiques comme le calcul matriciel, les méthodes d'approximation pour la simulation numérique, etc.

Les applications concrètes de l'outil mathématique: la CAO, les ondelettes, etc.

## VOTRE COMMANDE :

Référence	Titre de l'ouvrage	Prix unitaire H.T	Qté	Prix total H.T
TIP052WEB	Mathématiques pour l'ingénieur	1 355 €	1	1 355 €
Total H.T en €				1 355 €
T.V.A : 5,5%				74,53 €
Total TTC en €				1 429,53 €

## VOS COORDONNÉES :

Civilité  M.  Mme

Prénom \_\_\_\_\_

Nom \_\_\_\_\_

Fonction \_\_\_\_\_

E-mail \_\_\_\_\_

Raison sociale \_\_\_\_\_

Adresse \_\_\_\_\_

Code postal \_\_\_\_\_

Ville \_\_\_\_\_

Pays \_\_\_\_\_

Date :

Signature et cachet obligatoire

### CONDITIONS GÉNÉRALES DE VENTE

Conditions générales de vente détaillées sur simple demande ou sur [www.technique-ingenieur.fr](http://www.technique-ingenieur.fr)

Si vous n'êtes pas totalement satisfait, vous disposeriez d'un délai de 15 jours à compter de la réception de l'ouvrage pour le retourner à vos frais par voie postale. Livraison sous 30 jours maximum.