République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie

Département des mathématiques et informatique

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MASTER

Filière : (Mathématiques/Informatique)

Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Par

Kermiche Sabrina

Bouaziz Ouarda

Existence et multiplicité des solutions d'un problème elliptique

Date de soutenance : 19/06/2021

Devant le jury

GUAFAIFIA Rafik	MCA	Université de Tébessa	Président
AKROUT Kamel	Prof	Université de Tébessa	Rapporteur
NABTI Abderrazak	MCA	Université de Tébessa	Examinateur

Année Universitaire: 2020 / 2021

REMERCIEMENTS

C'est avec une profonde émotion que je rends grâce à Ellahe de m'avoir donné la force et le courage d'achever ce travail humble que j'ai tant attendu et espéré.

Je tiens à remercier particulièrement mon encadreur le Professeur: **Akrout Kamel**, dont les orientations opportunes, les recommandations perspicaces et les conseils avisés

, m'ont été d'un précieux apport, et auquel j'exprime ma profonde gratitude pour sa gentillesse et pour la grande patience dont il m'a fait preuve tout le long de l'élaboration de.mon mémoire.

Je remercie le Docteur: **Guefaifia Rafik** d'avoir accepté de présider le jury et d'évaluer ce travail.

Je remercie aussi le Docteur: **Nabti Abderrazak** d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury.

Il est important pour moi de remercier tous mes enseignants d'université Larbi Tébessi - Tébessa.

TABLE DES MATIÈRES

Résumé

Cette mémoire comporte des résultats d'existence et multiplicité des solutions non triviales d'une équations elliptique non-locale avec condition sur la frontière de Steklov Neumann de la forme suivante

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(x)}u + a(x)\,|u|^{p(x)-2}\,u = f(x,u) \text{ dans } \Omega, \\ \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\,\dfrac{\partial u}{\partial v} + b\,(x)\,|u|^{q(x)-2}\,u = g\,(x,u) \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N\,(N \geq 2)$, est un domaine borné avec une frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ est la dérivée suivant la normale, $p\,(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right), q\,(x) \in C\,(\partial\Omega)\,, p\,(x)\,, q\,(x) > 1, p\,(x) \neq q\,(y)$,pour toute $x \in \overline{\Omega}, y \in \partial\Omega$,
$f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \partial\Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,sont des fonctions carathéodory satisfaisant certaines hypothèses appropriées. Les fonctions a et b sont continues telles que

$$a_1 \leq a\,(x) \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b\,(x) \leq b_2,$$

pour certaines constantes positives a_1, a_2, b_1, b_2..

Abstract

This memory includes results of existence and multiplicity of non-trivial solutions of a non-local elliptic equations with condition on the Steklov Neumann frontier of the following form

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(x)}u + a(x)\left|u\right|^{p(x)-2}u = f(x,u) \text{ on } \Omega, \\ \\ \left|\nabla u\right|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial v} + b\left(x\right)\left|u\right|^{q(x)-2}u = g\left(x,u\right) \text{ in } \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N \left(N \geq 2\right)$, is a bounded domain with a Lipschitzian boundray $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ is the derivative according to the normal, $p\left(x\right) \in C\left(\overline{\Omega}\right), q\left(x\right) \in C\left(\partial\Omega\right), p\left(x\right), q\left(x\right) > 1, p\left(x\right) \neq q\left(y\right)$,for all $x \in \overline{\Omega}, y \in \partial\Omega$,
$f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,are carathéodory functions satisfying certain appropriate hypotheses. The functions a and b are continuous such that

$$a_1 \leq a\left(x\right) \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b\left(x\right) \leq b_2,$$

for some positive constants $a_1, a_{2,} b_1, b_2$..

الملخص

تتضمن هذه الأطروحة نتائج وجود وتعدد الحلول غير التافهة للمعادلات الإهليلجية غير المحلية بشرط ستيكلوف نيومان على الحافة والمعطاة بالشكل التالي

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(x)}u + a(x)|u|^{p(x)-2}u = f(x,u) & \text{في} \quad \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\dfrac{\partial u}{\partial v} + b(x)|u|^{q(x)-2}u = g(x,u) & \text{على} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

حيث $\Omega \epsilon \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ مجموعة محدودة ليبشيتزية على الحافة $\partial\Omega$، $\frac{\partial}{\partial v}$ المشتقة بالنسبة للشعاع الناظمي، $p(x) \in C(\overline{\Omega})$، $q(x) \in C(\partial\Omega)$، $p(x)$، $q(x) > 1$، $p(x) \neq q(x)$ مهما يكن $x \epsilon \overline{\Omega}$، $y \in \partial\Omega$.

$f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، $g: \partial\Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$، دوال كاراتيودورية، تحقق بعض الفرضيات المناسبة.

الدالتان a وb مستمرتان حيث:

$$a_1 \leq a(x) \leq a_2 \text{ و } b_1 \leq b(x) \leq b_2$$

من أجل بعض الثوابت الموجبة a_1، a_2، b_1، b_2 .

0.1 INTRODUCTION

L'étude de divers problèmes avec exposant variable a reçu une attention considérable au cours des dernières années. Ces problèmes sont intéressants dans des applications telles que la modélisation de l'électro-rhégologiefuids [36], traitement d'image [14], et soulèvent de nombreux problèmes mathématiques difficiles. Nous nous référons aux documents de synthèse [19] [37], pour les avancées et les références dans ce domaine. L'étude de la variation des problèmes de croissance non standard est un nouveau sujet intéressant voir [15] [17].

Dans cette mémoire, nous fournissons des résultats d'existence pour la classe suivante d'équation elliptique non locales avec condition sur la frontière de Steklov Neumann

$$\begin{cases} (-\Delta)_{p(x)}u + a(x)\,|u|^{p(x)-2}\,u = f(x,u) \text{ dans } \Omega, \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\,\dfrac{\partial u}{\partial v} + b\,(x)\,|u|^{q(x)-2}\,u = g\,(x,u)\ \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1.1}$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^N\,(N \geq 2)$, est un domaine borné avec une frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, $\dfrac{\partial}{\partial v}$ est la dérivée normale, $p\,(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right), q\,(x) \in C\,(\partial\Omega)\,, p\,(x)\,, q\,(x) > 1, p\,(x) \neq q\,(y)$,pour toute $x \in \overline{\Omega}, y \in \partial\Omega$,

$f : \Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}, g : \partial\Omega\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$,sont des fonctions carathéodory satisfaisant certaines hypothèses appropriées. Les fonctions a et b sont continues telles que

$$a_1 \leq a\,(x) \leq a_2 \text{ et } b_1 \leq b\,(x) \leq b_2,$$

pour certaines constantes positives $a_1, a_{2,} b_1, b_2$. $(-\Delta)_{p(x)}\,u = -\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p(x)-2}\,\nabla u\right)$est appelée $p\,(x)$-Laplacienne.

Lorsque $p\,(x) \equiv p$ (une constante), $p\,(x)$-Laplacien est l'habituel p-laplacien. Le $p(x)$-laplacien possède des non-linéarités plus compliquées que le p-laplacien (voir [26]).

Jusqu'à ces jours, de nombreux résultats ont été obtenus pour des solutions aux équations liées à la $p(x)$-laplacien. Précisément, de nombreux auteurs ont étudié de manière approfondie les problèmes de valeurs aux limites non linéaires impliquant cet opérateur. Nous n'indiquerons dans cette introduction que les résultats qui sont liés à ceux-là.

Dans ce qui passe, un certain nombre de variantes du problème (0.1.1) ont été étudiées dans la littérature lorsque $p(x)$ est une constante. Voir, par exemple, [3], [4], [10],[24], [31], [32],[33], [34], [41], [42].

En particulier, si $a(x) = b(x) = 1, p(x) = p$ et $q(x) = q$ (une constante), le problème (0.1.1) devient

$$\begin{cases} (-\Delta)_p u + a(x)\,|u|^{p-2}\,u = f(x,u) \text{ dans } \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\,\frac{\partial u}{\partial v} + b\,(x)\,|u|^{q-2}\,u = g\,(x,u) \ \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1.2}$$

Bonder et Rossi [10], ont considéré l'existence de solutions non triviales du problème (0.1.2) lorsque $f(x,u) \equiv 0$ et différents cas discutés où $g(x,u)$ est sous-critique, critique et supercritique avec respect à u. Plus tard, Martinez et Rossi [31], ont étudié l'existence de solutions lorsque $p = q$ et les termes de perturbation $f(x,u)$ et $g(x,u)$ satisfont aux conditions de type Landesman-Lazer. Plus tard, J. H. Zhao et P. H. Zhao [44] ont étudié le problème des valeurs aux limites non linéaires(0.1.2) lorsque $f(x,u)$ et $g(x,u)$ satisfont à la condition de type Ambrosetti-Rabinowitz et ont obtenu des résultats de multiplicité.

Ces dernières années, des problèmes de type(1.1) impliquant le $p(x)$-laplacien (voir [2],[3],[4], [8], [9], [22], [41], [42]) a été intensivement étudié par de nombreux auteurs.

Dans [22], Ekincioglu et Ayazoglu, ont considéré le problème (0.1.1) avec $b(x) = 0$. Ils ont étudié l'existence de solutions du problème (0.1.1) avec méthode variationnelle. sous des conditions convenables sur f et g, ils ont prouvé que le problème (0.1.1) a au moins dans ce cas une solution faible non triviale $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. Aussi, dans [42], $Z.Y$ ucedag a étudié le problème (0.1.1) avec $a(x) = 1$, $b(x) = 1$ et $g(x,u) \equiv 0$ et a prouvé que le problème (0.1.1) dans ce cas a au moins une solution faible non triviale $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Inspiré des résultats ci-dessus et grâce à un récent principe de concentration-compacité pour le Immersion de trace de Sobolev avec des exposants variables obtenus dans [5], [15], [17], [25], [35], [41],[42], (voir Section 2 pour plus de détails), nous étudions le problème de Steklov pondéré (0.1.1), qui généralise, améliore et étend les références mentionnées ci-dessus dans d'autres conditions appropriées. Cela donne et fait importance et signification de ce projet. Notez que nous avons besoin d'une méthode variationnelle, lemme du col de montagne et le principe d'Ekeland [17], pour atteindre notre objet.

A savoir, nous considérons le problème (0.1.1) dans les deux cas, premièrement, avec $f(x,u) = v_1(x)h_1(u)$, et pour certaines hypothèses et en utilisant la méthode variationnelle et le théorème du col de montagne nous montrons l'existence d'une solution faible non triviale du problème (0.1.1). Deuxièmement, avec $f(x,u) = v_1(x)h_1(u) + \lambda |u|^{\gamma(x)-2}\, u$, et pour certaines hypothèses et en utilisant le théorème du col de montagne combiné au principe variationnel d'Ekeland, nous prouvons l'existence de deux solutions non triviales.

Ce travail est organisé comme suit. Dans le chapitre 2, nous présentons quelques connaissances préliminaires nécessaires sur les espaces de Lebesgue et de Sobolev à exposants variables. Le chapitre 3 contient notre premier théorème et son preuve. Dans le chapitre 4, nous donnons et prouvons notre deuxième résultat.

CHAPITRE 1

Préliminaires

Contents

1.1 Rappels sur les espaces de Sobolev

Dans cette section, on fait un bref rappel sur les espaces de Sobolev. Pour une présentation plus complète de ces espaces, on pourra consulter par exemple l'ouvrage de **H. Brezis** [1] ou **R. A. Adams** [12].

Soit p un réel avec $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et un ouvert de $\mathbb{R}^N$. On désigne par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^1 sur Ω, à support compact inclus dans Ω.

Définition 1.1.1 *On appelle espace de Sobolev d'ordre* 1 *sur* Ω *l'espace*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p, \forall i = 1, 2, ..., N \right\},$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ *désigne la dérivée partielle de* u *au sens des distributions. En d'autres termes, une fonction* $u \in L^p(\Omega)$ *est dans* $W^{1,p}(\Omega)$ *s'il existe* N *fonctions* $v_1, ...v_N \in L^p(\Omega)$ *tels que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega v_i \varphi dx, \forall \varphi \in D(\Omega), \forall i \in \{1, 2, ..., N\}.$$

On note $v_i = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}, \forall i = 1, 2, ..., N.$
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Pour $p = 2, W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ *est muni du produit scalaire*

$$(u, v)_{H^1} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)}$$

et de la norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 1.1.1 *L'espace* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach pour* $1 \leqslant p \leqslant \infty$, *il est réflexif pour* $1 < p < \infty$ *et séparable pour*$1 \leqslant p < \infty$.

L'espace $(H^1(\Omega), \|.\|_{H^1})$ (est un espace de Hilbert séparable).

Définition 1.1.2 *Soit* $1 \leqslant p < 1, W_0^{1,p}(\Omega)$ *désigne l'adhérence de* $D(\Omega)$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$.

L'espace $W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme induite par* $W^{1,p}(\Omega)$ *est un espace de Banach séparable, il est de plus réflexif pour tout réel* p *vérifiant* $1 < p < 1$.

Théorème 1.1.1 *On suppose que est de classe* C^1. *Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \text{ avec } 1 \leqslant p < \infty$$

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $u = 0$ *sur* $\Gamma = \partial\Omega$

(ii) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1.2 ***(Inégalité de Poincaré voir [1])***
Soit p *un réel avec* $1 \leqslant p < 1$, *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *alors*

$$\exists C > 0, \forall u \in W_0^{1,P}(\Omega)\, \|u\|_{L^p} \leqslant C \|\nabla u\|_{\left(L^p(\Omega)\right)^N}.$$

De plus, l'application $u \longrightarrow \|\nabla u\|_{(L^p(\Omega))^N}$ *est une norme sur* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *qui est équivalente à celle induite par* $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1.3 *L'espace* $\left(W_0^{1,p}(\Omega), \|.\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\right)$ *est uniformément convexe.*

Définition 1.1.3 *Soit* p *et* q *deux réels vérifiant,* $1 < q \leqslant \infty$ *et* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *On désigne par* $W^{1,q}(\Omega)$ *l'espace dual de* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.1.2 *(voir[30]) Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N, p$ *et* q *deux réels,* $1 < p < +\infty$ *et* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Alors l'opérateur défini sur $L^p(\Omega)$ *par*

$$u \longmapsto |u|^{p-2}\, u$$

a des valeurs dans $L^q(\Omega)$, *de plus il est continu.*

1.1.1 Théorème d'injection de Sobolev

Énonçons les théorèmes "d'injection" continue, ou compacte établis pour les espaces de Sobolev définis sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^N$.

Définition 1.1.4 *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon continue dans un espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si :*

(a) *X est un sous-espace de Y.*

(b) *$\exists C > 0$ tel que pour tout $u \in X$: $\|u\|_Y \leqslant C \|u\|_X$.*

Définition 1.1.5 *On dit qu'un espace de Banach X s'injecte de façon compacte dans u en espace de Banach Y et on note $X \hookrightarrow Y$ si :*

(i) *X s'injecte de façon continue dans Y.*

(ii) *Toute suite faiblement convergente dans X converge fortement dans Y.*

Théorème 1.1.4 ***(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)*** *Soit $1 \leqslant p < N$ alors*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ où } p^* \text{ est donné par } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N},$$

et il existe une constante $C = C(p, N)$ telle que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}, \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Soit $1 \leqslant p < N$. Alors

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [p, p^*],$$

et pour le cas limite $p = N$, on a

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \in [N, \infty].$$

Corollaire 1.1.1 *Soit un ouvert de $\mathbb{R}^N$ de classe C^1, avec $\Gamma = \partial\Omega$ borné, soit $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on a*

1 Si $1 \leqslant p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$

2 Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [p, +\infty[$,

3 Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

De plus, si $p > N$ alors on a pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$

$$|u(x) - u(y)| \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} |x - y|^\alpha \text{ p.p } x, y \in \Omega$$

avec $\alpha = 1 - \dfrac{N}{p}$ et C dépend seulement de Ω, p et N. En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.

Théorème 1.1.5 ***(Rellich-Kondrachov)*** *Soit Ω un ouvert borné de classe C^1. On a :*

1. Si $p < N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1, p^*[$ où $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$
2. Si $p = N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^q(\Omega) \forall q \in [1, +\infty[$
3. Si $p > N$ alors $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow C(\bar{\Omega})$

En particulier $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L^p(\Omega)$, pour tout p.

1.2 Espaces de Sobolev d'exposants variables

Nous rappelons maintenant certaines propriétés nécessaires des espaces d'exposants variables. Nous référons le lecteur à [[15], [17], [25], [41], [42]] et les références qui y figurent pour plus de détails. Laisser être un domaine borné $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$. Nous considérons l'ensemble

$$C_+\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{p \in C\left(\overline{\Omega}\right), p\left(x\right) > 1, \forall x \in \overline{\Omega}\right\}.$$

Pour tout $p \in C_+ \left(\overline{\Omega}\right)$, nous définissons,

$$p^- = \inf_{\Omega} p(x), p^+ = \sup_{\overline{\Omega}} p(x).$$

On peut noter $C_+ \left(\partial\Omega\right)$ et p^-, p^+ pour tout $p(x) \in C(\partial\Omega)$. Nous définissons,

$$L^{p(x)}\left(\Omega\right) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R}, \text{mesurable} : \int_{\Omega} |u\left(x\right)|^{p(x)} dx < \infty \right\},$$

et

$$L^{p(x)}\left(\partial\Omega\right) = \left\{ u : \partial\Omega \to \mathbb{R}, \text{mesurable} : \int_{\partial\Omega} |u\left(x\right)|^{p(x)} d\sigma < \infty \right\},$$

avec des normes sur $L^{p(x)}(\Omega)$ et $L^{p(x)}(\partial\Omega)$ définies respectivement par

$$|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} = \inf\left\{ \mu > 0 : \int\limits_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

et

$$|u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} = \inf\left\{ \mu > 0 : \int\limits_{\partial\Omega} \left| \frac{u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} d\sigma \leq 1 \right\},$$

où $d\sigma$ est la mesure de surface sur $\partial\Omega$. Les espaces $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{L^{p(x)}(\Omega)})$ et $(L^{p(x)}(\partial\Omega), |.|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)})$ deviennent des espaces de Banach, que nous appelons espaces de Lebesgue à exposants variables. Définissons l'espace

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) : |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\},$$

équipé à la norme

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \inf\left\{ \mu > 0 : \int_{\Omega} \left(\left| \frac{u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} + \left| \frac{\nabla u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} \right) dx \leq 1 \right\},$$

pour $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$,si nous définissons

$$\|u\| = \inf\left\{ \mu > 0 : \int\limits_{\Omega} \left(a(x) \left| \frac{u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} + b(x) \left| \frac{\nabla u(x)}{\mu} \right|^{p(x)} \right) dx \leq 1 \right\},$$

puis, à partir des hypothèses sur les fonctions a et b, $\|u\|$est une norme équivalente sur $W^{1,p(x)}(\Omega)$. Dénoter par $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^{\infty}(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Proposition 1.2.1 *(voir [15], [17]).*

– *L'espace $(L^{p(x)}(\Omega), |.|_{L^{p(x)}(\Omega)})$ est un espace de Banach séparable, uniformément convexe, et son conjugué est l'espace $L^{p'(x)}(\Omega)$ où $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$. De plus, l'inégalité de Hölder plus ancienne est vraie, c'est-à-dire pour tout $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ et $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, on a*

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq \left(\frac{1}{p^-} + \frac{1}{(p')} \right) |u|_{p(x)} |v|_{p'(x)} .$$

– *Si* $p_1, p_2 \in C_{+}(\overline{\Omega})$, *avec* $p_1(x) \leq p_2(x)$, *pour tout* $x \in \overline{\Omega}$, *alors* $L^{p_1(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_2(x)}(\Omega)$ *et l'injection est continue.*

Proposition 1.2.2 *(Voir [41], [42]).*

– $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *et* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *sont deux espaces de Banach. séparables et réflexifs*

– *Si* $q \in C_+\left(\overline{\Omega}\right)$ *avec* $q(x) < p^*(x)$, *pour tout* $x \in \overline{\Omega}$, *alors, l'injection de* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *dans* $L^{q(x)}(\partial\Omega)$, *est compacte et continue, où*

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{Np(x)}{N-p(x)}, & si\ p(x) < N, \\ \infty, & si\ p(x) \geq N. \end{cases} .$$

– *Si* $q \in C_+(\partial\Omega)$ *avec* $q(x) < p(x)$ *pour tout* $x \in \partial\Omega$, *puis,l'injection de trace à partir de* $W^{1,p(x)}(\Omega)$ *dans* $L^{q(x)}(\partial\Omega)$, *est compacte et continue, où*

$$p^*(x) = \begin{cases} \dfrac{(N-1)\,p(x)}{N-p(x)}, & si\ p(x) < N, \\ \infty, & si\ p(x) \geq N. \end{cases} .$$

Pour simplifier, nous désignons

$$\Gamma(u) = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)} + a(x)\,|u|^{p(x)}\,dx.$$

Proposition 1.2.3 *(voir [41], [42]) Il existe des constantes positives* ξ_1, ξ_2, *de telle sorte que :*

– *Si* $\Gamma(u) \geq 1$,*alors,* $\xi_1 \|u\|^{p^-} \leq \Gamma(u) \leq \xi_2 \|u\|^{p^+}$,

– *Si* $\Gamma(u) \leq 1$,*alors,* $\xi_1 \|u\|^{p^+} \leq \Gamma(u) \leq \xi_2 \|u\|^{p^-}$,

– $\Gamma(u) \geq 1\,(=1, \leq 1) \Leftrightarrow \|u\| \geq 1\,(=1, \leq 1)$

posons

$$\rho(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\,dx.$$

Ensuite, nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.2.4 *(voir [15], [17], [25]) Pour tous* $u \in L^{p(x)}(\Omega)$, *on a*

– $|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1(resp = 1, > 1) \Leftrightarrow \rho(u) < 1(resp = 1, > 1)$,

– $|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} > 1 \Longrightarrow |u|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega)}$,

– $|u|_{L^{p(x)}(\Omega)} < 1 \Longrightarrow |u|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega)} \leq \rho(u) \leq |u|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega)}$, Posons aussi

$$\rho_{\partial}(u) = \int_{\partial\Omega} |u(x)|^{p(x)}\, dx.$$

Proposition 1.2.5 *(voir [15], [17], [25]) Pour tous $u \in L^{p(x)}(\partial\Omega)$, on a*

– $|u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} > 1 \Longrightarrow |u|^{p^-}_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} \leq \rho\,(u) \leq |u|^{p^+}_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}$,

– $|u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} < 1 \Longrightarrow |u|^{p^+}_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} \leq \rho\,(u) \leq |u|^{p^-}_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}$.

Proposition 1.2.6 *(voir [15], [17], [25]) Si p et q sont des fonctions mesurables, telles que $p \in L^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ et $1 \leq p(x).q(x) \leq \infty$, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors, pour tout $u \in L^{q(x)}(\mathbb{R}^N)$, avec $u \neq 0$, on a*

– $|u|_{p(x)q(x)} \leq 1 \Longrightarrow |u|^{p^+}_{p(x)q(x)} \leq \left| |u|^{p(x)} \right|_{q(x)} \leq |u|^{p^-}_{p(x)q(x)}$,

– $|u|_{p(x)q(x)} \geq 1 \Longrightarrow |u|^{p^-}_{p(x)q(x)} \leq \left| |u|^{p(x)} \right|_{q(x)} \leq |u|^{p^+}_{p(x)q(x)}$.

Définition 1.2.1 *Soit X un espace de Banach et $\varphi \in C^1(X, \mathbb{R}), c \in \mathbb{R}$. Nous disons que φ satisfait à la $(PS)_c$ condition au niveau c si une suite $(u_n) \subset X$, telle que*

$$\varphi\,(u_n) \to c, \textit{ et } \varphi'\,(u_n) \to 0, \textit{ dans } X^*, \textit{ quand } n \to \infty,$$

contient une sous-suite convergente.

1.3 L'opérateur p-Laplacien

L'opérateur p-Laplacien est un opérateur aux dérivées partielles quasi-linéaire elliptique du second ordre défini par

$$\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\, \nabla u\right) = |\nabla u|^{p-4} \left\{ |\nabla u|^{p-2}\, \Delta u + (p+2) \sum_{i,j=1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\}.$$

Avec $1 < p < +\infty$, cet opérateur sous forme divergence est dégénéré lorsque $p \neq 2$ et pour $p = 2$, le p-Laplacien coïncide avec le Laplacien usuel Δ.

1.3.1 Propriétés de l'opérateur p-Laplacien

Considérons maintenant l'opérateur p-Laplacien défini sur l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans son dual $W^{-1,q}(\Omega)$ où est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N, p$ et q deux réels, $1 < p < 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Pour tout u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, pour tout $i, 1 \leqslant i \leqslant N$, on déduit de la proposition 1.1.2 que $\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ appartient à $L^q(\Omega)$, d'où on peut définir l'application suivante sur $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^2$

$$(u,v) \longmapsto a(u,v) = \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^N \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Théorème 1.3.1 *Pour tout u de $W_0^{1,p}(\Omega)$, l'application*

$$W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, v \longmapsto a(u,v)$$

est une forme linéaire continue, d'où il existe un unique élément, noté $A(u)$ de $\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)'$, tel que

$$a(u,v) = \langle A(u), v\rangle, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

L'application $A : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)', u \longmapsto A(u)$, est notée

$$-\Delta_p(u) = -\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right).$$

Proposition 1.3.1 *L'opérateur $-\Delta_p$ est borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$ dans $W^{-1,q}(\Omega)$.*

Théorème 1.3.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.*

$-\Delta_p : W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{-1,q}(\Omega)$ est uniformément continu sur tout ensemble borné de $W_0^{1,p}(\Omega)$.

$(-\Delta_p)^{-1} : W^{-1,q}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$est continu.

L'opérateur composé $(-\Delta_p)^{-1}$:

$$W^{-1,q}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

est compact si $1 \leqslant q < \dfrac{Np}{N-p}$.

Théorème 1.3.3 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, avec $N \geqslant 3$. Pour $p \in]1, +\infty[$, nous définissons la fonctionnelle : $W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$\Psi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx,$$

alors Ψ est différentiable sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ et

$$\langle \Psi'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v dx = \langle -\Delta_p u, v\rangle$$

Théorème 1.3.4 (La convergence dominée de Lebesgue) *Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \geqslant 1$ on ait $\|f_n\| \leqslant g$ p.p sur Ω alors $f \in L^1(\Omega)$ et*

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|f_n - f\| = 0, \int_\Omega f(x)dx = \lim_{n \longrightarrow \infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Proposition 1.3.2 *Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, telle que$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0$ alors, il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ et une sous-suite extraite $(f_{n_i})_i$ telles que :*

$f_{n_i}(x) \longrightarrow f(x)$ p.p sur Ω.

$|f_{n_i}(x)| \leqslant g(x)$ pour tout i et p.p sur Ω.

1.4 Quelques éléments de la théorie des points critiques

1.4.1 Différentiabilité et points critiques

Définition 1.4.1 (Dérivée directionnelle) *Soit w une partie d'un espace de Banach X et $J : w \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction à valeurs réelles. Si $u \in w$ et $v \in X$ sont tels que pour $t > 0$ assez petit on a $u - tv \in w$, on dit que J admet (au point u) une dérivée dans la direction v si*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t}$$

existe. On notera cette limite par $J'_v(u)$.

Définition 1.4.2 (Différentiabilité au sens de Gâteaux) *On dit que la fonction J d'un ouvert w d'un espace de Banach X, à valeurs réelles, est différentiable au sens de Gâteaux (ou G-différentiable) en $u \in w$, s'il existe $\varphi \in X'$ tel que dans chaque direction $v \in X$ où $J\ (u+tv)$ existe pour $t > 0$ assez petit, la dérivée directionnelle $J'_v(u)$ existe et on a*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{J(u + tv) - J(u)}{t} = \langle \varphi, v \rangle$$

L'application φ est appelée la différentielle de J au sens de Gâteaux au point u (ou la G-différentielle de J au point u), on note $J'(u) = \varphi$

Proposition 1.4.1 ***(voir** [29])Soit J une fonction continue de w dans $\mathbb{R}$ et G-différentiable dans un voisinage de $u \in w$. On désigne par $J'(v)$ la G-différentielle de J en v et on suppose que l'application $v \longmapsto J'(v)$ est continue au voisinage de u. Alors,*

$$J(v) = J(u) + \langle J'(u), v - u \rangle + o(v - u),$$

c'est à dire que J est différentiable au sens de Fréchet et sa différentielle coïncide avec $J'(u)$.

Définition 1.4.3 *Soient X un espace de Banach, $w \subset X$ un ouvert et $J \in C^1(w, \mathbb{R})$. On dit que $u \in w$ est un point critique de J si $J'(u) = 0$. Avec $J'(u)$ est la G-différentiellede J au point u. Si u n'est pas un point critique alors, on dit que u est un point régulier de J. Si $c \in \mathbb{R}$, on dit que c est une valeur critique de J, s'il existe $u \in w$ tel que $J(u) = c$ et $J'(u) = 0$. Si c n'est pas une valeur critique donc, on dit que c est une valeur régulière de J.*

Définition 1.4.4 *Soient X un espace de Banach, F et $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ et un ensemble de contraintes*

$$S = \{v \in X, Fv = 0\}$$

Nous supposons que $F'v \neq 0$ pour tout $v \in S$. On dit que $c \in \mathbb{R}$ est valeur critique de J sur S s'il existe $u \in S$, et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$J(u) = c \text{ et } J'(u) - \lambda F'(u) = 0$$

Le point u est un point critique de J et le réel est appelé multiplicateur de Lagrange pour la valeur critique c ou bien le point critique u.

1.4.2 Semi continuité inférieure

Définition 1.4.5 *Soit X un espace de Banach et w est une partie de X. Une fonction $J : w \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement (s.c.i) si pour toute suite $(u_n)_n$ de w convergeant faiblement vers $u \in w$ on a $J(u) \leqslant \lim_{n \longrightarrow \infty} \inf J(u_n)$.*

Proposition 1.4.2 ***(voir [29])*** *Soit X un espace de Banach réflexif, $K \subset X$ un convexe fermé et $J : K \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction faiblement séquentiellement s.c.i. De plus, si K est non* *borné, on suppose que pour toute suite* $(u_n)_n$ *de* K *telle que* $\|u_n\| \longrightarrow \infty$, *on a* $J(u_n) \longrightarrow \infty$. *Alors* J *est bornée inférieurement et elle atteint son minimum i.e*

$$\exists u \in k, J(u) = \inf_{v\in k} J(u) = \min_{v\in k} J(v)$$

Définition 1.4.6 *Soit* (X, d) *un espace métrique. Une fonction* f *définie de* X *dans* $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *est dite semi-continue inférieurement, si*

$$\forall\epsilon > 0, \exists\eta > 0, \forall x \in B(x_0, \eta), f(x_0) - \epsilon \leqslant f(x).$$

Proposition 1.4.3 *Une fonction* $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est semi continue inférieurement en* x_0 *si est seulement si*

$$f(x_0) \leqslant \lim_{x\to x_0} \inf f(x)$$

Théorème 1.4.1 ***(voir** [21]) Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *une fonction semi continue inférieurement et bornée inférieurement. Soit* $\epsilon > 0$ *et* $x \in X$ *tel que,*

$$\bar{f}(x) \leqslant \inf_X f(x) + \frac{\epsilon}{2},$$

alors $\forall\lambda > 0, \exists x_\lambda \in X$ *tel que*

- $f(x_\lambda) \leqslant \bar{f}(x)$
- $d(x_\lambda, \bar{x}) \leqslant \lambda$
- *Pour tout* $x \in X$ *avec* $x \neq \bar{x}, f(x_\lambda) < f(x) + \frac{\epsilon}{\lambda} d(x, x_\lambda)$

Théorème 1.4.2 *Soit* X *un espace de Banach,* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ *une fonction semi continue inférieurement et bornée inférieurement. On suppose de plus que* φ *est Gâteaux différentielle en tout point* $u \in X$, *alors*

$$\forall\epsilon > 0, \exists u_\epsilon \in X \text{ tele que } u_\epsilon \leqslant \inf_X \varphi + \epsilon$$

et

$$\|D\varphi(u_\epsilon)\| \leqslant \epsilon.$$

CHAPITRE 2

Le théorème du col de montagne et le principe variationnel d'Ekeland

Contents

2.1 Le TPM à dimension finie

Dans cette section, nous présenterons deux TPM, à partir d'un TPM unidimensionnel qui aidera à comprendre la généralisation aux dimensions supérieures. Nous introduirons également une condition de compacité connue sous le nom de Palais-Smale, qui, comme nous le verrons, est nécessaire pour la TPM (dimensionnelle infinie) d'Ambrosetti et de Rabinowitz.

2.1.1 Le TPM unidimensionnel

Nous commençons par énoncer un lemme bien connu, celui de Rolle.

Lemme 2.1.1 (Théorème de Rolle) *.Soit* $f \in C^1([x_1, x_2], \mathbb{R})$ *avec* x_1 *et* $x_2 \in \mathbb{R}$ *tel que* $x_1 \neq x_2$*. Si* $f(x_1) = f(x_2)$ *alors, il existe au moins un* $x_3 \in (x_1, x_2)$ *tel que :*

$$f'(x_3) = 0.$$

Comme conséquence du théorème de Heine-Borel rappelons que, l'intervalle fermé

$$[x_1, x_2] \in \mathbb{R} \text{ est compact,} \tag{2.1.1}$$

et aussi puisque f *est continue, il y atteint à la fois son maximum et son minimum par le théorème des valeurs extrêmes. Maintenant, si* f *est constante dans* $[x_1, x_2]$ *avec* $f(x_1) = f(x_2)M$ *alors, bien sûr* $f'(x) \equiv 0$ *pour tout* $x \in [x_1, x_2]$*. Donc si* f *n'est pas constante dans* $[x_1, x_2]$*, le théorème des valeurs extrêmes et la condition*

$$f(x_1) = f(x_2) \tag{2.1.2}$$

implique qu'au moins un des extremum de f *se produit en un point intérieur* x_3 *de* $[x_1, x_2]$*, donc,* x_3 *est un point critique de* f*. Une conséquence du théorème de Rolle (2.1.1) est le col de montagne suivant théorème dans* $\mathbb{R}$*, [29, , p. 48].*

Théorème 2.1.1 (TPM dans $\mathbb{R}$) *Soit* $x_1 < x_3 < x_2$ *sont des nombres réels distincts et* $f \in C^1(\mathbb{R})$*. Si*

$$f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}, \tag{2.1.3}$$

alors, il existe un point critique ς *de* f *dans* (x_1, x_2) *tel que*

$$f(\varsigma) = \max_{[x_1,x_2]} f = \inf_{[a,b]\in\Gamma} \max_{x\in[a,b]} f(x)$$

où

$$\Gamma = \{[a,b] \ tq \ a \leq x_1 < x_2 \leq b\}.$$

Remarque 2.1.1 *On remarque qu'on peut écrire* Γ *sous la forme suivante :*

$$\Gamma = \{\Sigma \subset \mathbb{R}, \Sigma \ compact\ et\ connecté\ avec\ x_1, x_2 \in \Sigma\}. \tag{2.1.4}$$

Preuve. *Si nous supposons que* $f(x_1) \leq f(x_2)$ *(l'inverse fonctionne aussi bien), alors le théorème du valeur moyenne implique que*

$$Il\ y\ a\ un\ point\ \widetilde{x_1'} \in [x_1, x_3) tq\ f(\widetilde{x_1'}) = f(x_2). \tag{2.1.5}$$

Si nous appliquons maintenant le théorème de Rolle (2.1.1), au plus petit nombre x_1' *satisfaisant la condition (2.1.5), on serait assuré de l'existence d'un maximum dans* $[x_1', x_2]$*. Il découle maintenant de (2.1.3) que :*

$$\max_{[x_1,x_2]} f \geq \max_{[x_1',x_2]} f \geq f(x_3) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

et depuis $[x_1, x_2] \in \Gamma$

$$\max_{[x_1,x_2]} f = \inf_{[a,b]\in\Gamma} \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

■

2.1.2 Le TPM N-Dimensionnel

Rappelons la condition de compacité (2.1) que nous avons indirectement utilisée dans le TPM unidimensionnel. Il n'est pas surprenant qu'une condition de compacité soit également requise dans des dimensions plus élevées, en effet si nous écrivons la dimension supérieure (finie) Γ de ci-dessus comme suite

$$\Gamma = \left\{\Sigma \subset \mathbb{R}^N, \Sigma \text{ compact et connecté avec } x_1, x_2 \in \Sigma\right\}$$

et notons que dans les dimensions supérieures, il n'y a aucune garantie que

$$\inf_{\Sigma\in\Gamma}\max_{\Sigma} f = c$$

est un maximum donc on ne pouvons pas dire que c est critique. Nous en montrerons un exemple plus tard, mais d'abord quelques définitions.
Tout au long de ce travail, les dérivées Φ', Φ'', etc... seront les dérivées généralisées de Frechét définies comme suit.

Définition 2.1.1 *Supposons que X et Y sont des espaces de Banach, Ω est un sous-ensemble ouvert de X, cartes en Y, et $a \in \Omega$. S'il existe $\Lambda \in B(X,Y)$ (l'espace de Banach de tous les mappages linéaires bornés de X en Y) tel que*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\|\Phi(a+x) - \Phi(a) - \Lambda x\|}{\|x\|} = 0, \tag{2.1.6}$$

alors Λ est appelé le dérivé de Frechét de Φ en a, on le note par $\Phi'(a)$, ou parfois par $D\Phi(a)$.

Définition 2.1.2 (Suite de Palais-Smale) *Soit X un espace de Banach et*

$$\Phi : X \to \mathbb{R}$$

une fonctionnelle C^1. On appelle une suite $u_n \in X$ une suite de Palais-Smale (la suite PS) sur X si $\Phi(u_n)$ est borné et $\Phi'(u_n) \to 0$. S'il arrive que $(u_n) \to c$ pour certains $c \in \mathbb{R}$ la suite PS sera appelée une suite PS.
Nous pouvons maintenant, à l'aide de la définition ci-dessus, définir ce que l'on entend par la condition de Palais-Smale.

Définition 2.1.3 (La condition de Palais-Smale) *Soit Φ et X comme ci-dessus (2.1.2), on dit que satisfait la condition de Palais-Smale sur X et on la note par (PS), si chaque suite PS a une sous suite convergente.*

Remarque 2.1.2 *La condition (PS) est forte que $(PS)_c$ dans le sense que si (PS) est vérifiée, alors $(PS)_c$ est satisfaite pour tout $c \in \mathbb{R}$, tandis que l'inverse n'est pas nécessairement vrai.*

Example 1 *Supposons que* $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *est un polynôme quadratique*

$$\Phi(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + c \tag{2.8}$$

en $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$*, qui est non dégénéré dans le sens où*

$$\Phi''(x) = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$$

induit la carte linéaire inversible $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*. Alors* Φ *satisfait* (PS)*.*

Courant a prouvé le TPM de dimension finie, travaillant sur la théorie des surfaces minimales instables, en utilisant un lemme de déformation et l'hypothèse que Φ devient infini à la frontière du domaine considéré. Voici une version moderne (voir [3, ch. 5] et [17, ch. II] par exemple) de celle où nous supposons plutôt que Φ est coercitif, c-à-d qu'il tend vers $+\infty$ lorsque $\|x\| \longrightarrow +\infty$.

Théorème 2.1.2 (MPT dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) *Supposons que* $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ *est coercitive et possède deux minimums relatives stricts et séparées* x_1 *et* x_2*. Il possède alors un troisième point critique* x_3 *qui n'est pas un minimiseur relatif et donc distinct de* x_1 *et* x_2*, il est caractérisé par le principe de minmax*

$$\Phi(x_3) = \inf_{\Sigma \in \Gamma} \max_{x \in \Sigma} \Phi(x),$$

où

$$\Gamma = \left\{ \Sigma \subset \mathbb{R}^N, \Sigma \text{ compact et connecté avec } x_1, x_2 \in \Sigma \right\}.$$

est la classe des « chemins » reliant x_1 *et* x_2*.*

Remarque 2.1.3 *Nous allons sauter la preuve de ce théorème mais mentionner que dans la preuve originale [16], Courant utilise une déformation où les points* $P \in \Sigma$ *sont déplacés vers* $P' \in \Sigma'$ *suivant la direction du gradient* Φ *tel que* $\Phi(P') < \Phi(P)$*, où* Σ *et* Σ' *sont "minimisant les ensembles de connexion" connectant* x_1 *à* x_2*. Pour d'autres preuves, voir [39],[29]. Tout d'abord, il faut se demander où réside toute condition de compacité dans ce qui précède le théorème, car nous n'avons rien mentionné concernant la compacité en l'énonçant (sauf en relation avec). En fait, comme on le voit dans la démonstration de ce théorème dans [39], la compacité est induite par la coercivité de la proposition suivante également jette un peu de lumière sur cette question.*

Proposition 2.1.1 *Soit $X = \mathbb{R}^N$ dans la définition 2.1.2 et donc $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ dans la même définition. Si la fonction*

$$|\Phi| + \|\Phi'\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \textit{est coercitive}, \tag{2.1.7}$$

puis Φ satisfait (PS).

Preuve. Cela découle du théorème de Bolzano-Weierstrass qui implique que tout suite de Palais-Smale bornée contient une sous-suite convergente. La limite de la suite de Palais-Smale découle de notre hypothèse que $|\Phi| + \|\Phi'\| : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est coercitive. Notant que puisque X est de dimension finie, il est localement compact (cf. chapitre un de [39]). ■

Corollaire 2.1.1 *Soit X et Φ comme dans la proposition 2.2.1, et remplaçant la condition (2.1.7) avec ce qui suit :*

$$\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \textit{ est coercitive}, \tag{2.1.8}$$

puis Φ satisfait (PS).

Remarque 2.1.4 *On voit ainsi qu'en dimensions finies, la coercivité de Φ implique que Φ satisfait (PS), mais dans les espaces de dimension infinis la coercivité de Φ se traduit par une compacité bornée (et pas nécessairement (PS) voir 2 et une certaine incompatibilité (concernant $\Phi \in C^1(X)$ pour un certain espace de Banach X, cf. [39]).*

Example 2 (Coercivité $\not\Rightarrow$ (PS) (en générale) dans les espaces de dimension infinis) *Pour montrer que Φ peut être borné inférieure et coercitive mais ne parvient toujours pas à satisfaire (PS) dans un espace de Banach de dimension infinie X, considérons l'exemple suivant ([14, p. 107]). Laisser*

$$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

Remarque 2.1.5 *Si $\Bbbk$ est l'ensemble de tous les points critiques de Φ dans X, et la restriction $\Phi\mid_B$ d'un ensemble $B \subset \Bbbk$ est uniformément borné, alors, B est relativement compacte.*

2.2 Le principe variationnel d'Ekeland et le TPM

Cette section est dédiée à deux résultats célèbres, à savoir : variationnel d'Ekeland principe dont nous donnerons une preuve approfondie et que nous utiliserons pour prouver le autre résultat, qui est le théorème des cols d'Ambrosetti et Rabinowitz [6], qui généralise le TPM de Courant (théorème 2.1.2) les espaces de Banach à une dimension infinie .
Il y a plusieurs manières de prouver le théorème : par exemple par diverses déformations les lemmes tels que dans [6], [7], [23], [39], [29], mais on peut aussi utiliser un théorème dû à I. Ekeland [20] connu sous le nom de principe variationnel d'Ekeland ou le ϵ-principe. Nous allons utilisez le dernier résultat mentionné et pour cela nous avons besoin de quelques définitions.

2.2.1 Principe variationnel d'Ekeland

Définition 2.2.1 *Soit X un espace de Banach et $\Phi : X \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle bornée inférieur, c-à-d*

$$\inf \Phi > -\infty.$$

On dit que la suite $(x_j)_j$ est une suite minimisante si

$$\lim_j \Phi(x_j) = \inf_{x\in X} \Phi(x). \tag{2.2.1}$$

La fonctionnelle $\Phi : X \to \mathbb{R}$ est dite semi-continue (faiblement) inférieur si à chaque fois $lim_j x_j = x$ fortement (faiblement) il vient

$$\lim_{j\to\infty} \inf \Phi(x_j) \geq \Phi(x). \tag{2.2.2}$$

De plus on dit que la fonctionnelle $\Phi : X \to \mathbb{R}$ est séquentiellement faiblement continue si chaque fois que $lim_j x_j = x$ faiblement, il vient

$$\lim_{j\to\infty} \Phi(x_j) \geq \Phi(x). \tag{2.2.3}$$

Considérons un espace métrique complet X et une fonctionnelle semi-continue inférieure $\Phi : X \to \mathbb{R}\cup \{+\infty\}$ qui est borné par l'inférieure. Si $(x_j)_j$ est une suite minimisante, alors pour tout $\epsilon > 0$ il existe j_0 tel que pour $j > j_0$

$$\Phi(x_j) \leq \inf_X \Phi + \epsilon.$$

On appelle x un point ϵ-minimum de Φ si

$$\Phi(x) \leq \inf_X \Phi + \epsilon.$$

De l'existence d'un tel ϵ-minimum, Ekeland a trouvé un certain nombre d'autres propriétés dont Φ trois sont énoncés dans le théorème suivant, dont la preuve nous donnerons, d'autres preuves peuvent être trouvées dans [20],[40],[18].

Théorème 2.2.1 (Principe variationnel d'Ekeland) *Soit X une espace métrique complète et $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonctionnelle semi-continue inférieure, non identique égal à $+\infty$ $(\Phi \not\equiv +\infty)$ qui est borné à l'inférieur $(\inf \Phi > -\infty)$.*
Soient $\epsilon > 0$ et $x \in X$ tels que

$$\Phi(x) \leq \inf_{u \in X} \Phi(u) + \epsilon, (x \text{ est un } \epsilon - \text{minimum de } \Phi).$$

Alors, pour tout $\delta > 0$ il existe $y = y(\epsilon) \in X$ tel que :

$$\Phi(x) \leq \Phi(y), \tag{2.2.4}$$

$$dist(x, y) \leq \delta, \tag{2.2.5}$$

et

$$\Phi(y) \leq \Phi(u) + \frac{\epsilon}{\delta} dist(u, y), \forall u \in X, tq\ u \neq y. \tag{2.2.6}$$

2.3 Le théorème des cols de montagne.

Nous avons vu dans le TPM unidimensionnel qu'il y a non seulement une condition de compacité nécessaire (2.1.1) mais aussi une condition géométrique condition, cf. équation (2.2). De même ici, nous avons besoin non seulement du Palais-Smale condition de compacité mais aussi une condition géométrique que nous allons introduire maintenant :
mais définissons d'abord la classe de tous les chemins joignant $u = 0$ et $u = e$,

$$\Gamma := \{\gamma \in C([0,1], X, \gamma(0) = 0, \gamma(1) = e\}, \tag{2.3.1}$$

où

$$e \in X, \|e\| > r > 0. \tag{2.3.2}$$

Clairement, $\Gamma \neq \emptyset$, puisque $\gamma(t) = te$ est dans Γ. Ensuite, nous supposons que la condition géométrique

$$\inf_{u \in S(0,\rho)} \Phi(u) > \max\{\gamma(0), \gamma(e)\} \tag{2.3.3}$$

est satisfait pour tous

$$u \in S(0,\rho) = \{u \in X : \|u - 0\| \leq \rho\}. \tag{2.3.4}$$

Notez que Φ cela peut être illimité par le bas, mais nous exigeons seulement qu'il soit limité ci-dessous sur $S(0,\rho)$ pour certains$\rho > 0$.

Théorème 2.3.1 (Le théorème des cols de montagne) *Soit X un espace de Banach et*

$$\Phi : X \to \mathbb{R}$$

une fonctionnelle C^1 satisfaisant à la condition de Palais-Smale (PS). De plus, supposons qu'il existe e, r satisfaisant (2.3.2) et que la condition géométrique (2.3.3) est remplie. Puis, il existe une valeur critique

$$c \geq \inf_{u \in S(0,\rho)} \Phi(u)$$

de Φ caractérisé par

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} \Phi(u), \tag{2.3.5}$$

*avec S et Γdonnés respectivement par (**??**) et (**??**).*

Preuve. Si nous considérons de (2.3.1) comme un espace normé pour la topologie uniforme générée par la norme

$$\|\gamma\|_\Gamma = \max_{t \in [0,1]} |\gamma(t)|, \text{pour } \gamma \in \Gamma,$$

et de ne $\Psi : \Gamma \to \mathbb{R}$ par

$$\Psi(\gamma) = \max_{t \in [0,1]} \Phi(\gamma(t)).$$

Ensuite, est semi-continue inférieure comme la limite supérieure d'une famille de semi-continue inférieure les fonctions. Il est également délimité par le bas depuis

$$c = \inf_{\Gamma} \Psi \geq \max \left\{ \Phi \left(0 \right), \Phi \left(e \right) \right\},$$

par conséquent, nous pouvons utiliser le principe variationnel d'Ekeland. C'est à dire. pour tout $\epsilon > 0$, il existe un chemin $\gamma_\epsilon \in \Gamma$ tel que

$$\begin{cases} \Psi(\gamma_\epsilon) \leq c + \epsilon, \text{et} \\ \Psi(\gamma) \geq \Psi(\gamma_\epsilon) - \epsilon \left\| \gamma - \gamma_\epsilon \right\|_\Gamma \text{ pour tous } \gamma \in \Gamma. \end{cases} \tag{2.3.6}$$

laisser

$$M(\epsilon) := \left\{ t[0,1], \Phi(\gamma_\epsilon(t)) = \max_{s \in [0,1]} \Phi(\gamma_\epsilon(s)) \right\},$$

alors, (2.3.6) implique qu'il existe un $t_\epsilon \in M(\epsilon)$ tel que

$$\left\| \Phi' \left(\gamma_\epsilon \left(t_\epsilon \right) \right) \right\| \leq \epsilon.$$

La condition $(PS)_c$ avec séquence Palais-Smale $x_n = \gamma_{1/n}(t_{1/n})$ alors faites le travail pour terminer la preuve. ■

CHAPITRE 3

Résultat d'existence via le théorème du col de montagne

Contents

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons énoncer et prouver le premier résultat principal du travail. Plus précisément, nous allons considérez le problème 1.1 dans le cas

$$f(x,u) = v_1(x)h_1(u), \text{et } g(x,u) = v_2(x)h_2(u),$$

où v_1, h_1, v_2 et h_2, sont des fonctions mesurables satisfaisant à certaines conditions d'intégrabilité, précisément, nous supposons les hypothèses suivante.

(A_1) Il existe $c_1 > 0, \alpha, S \in C + (\overline{\Omega})$, tel que pour tout $(x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}$ on a

$$v_1(x) \in L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega), h_1(u) \leq c_1 |u|^{\alpha(x)-1},$$

et

$$1 < \alpha(x) < s(x) < p^*(x). \tag{3.1.1}$$

(A_2) Il existe $c_2 > 0, \beta, T \in C_+(\partial\Omega)$, tel que pour tout $(x,u) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$, on a

$$v_2 \in L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega), h_2(u) \leq c_2 |u|^{\beta(x)-1},$$

$$1 < \beta(x) < T(x) < p_*(x), q(x) < p_*(x). \tag{3.1.2}$$

(A_3) Il existe $M_1 > 0$, $\theta_1 > p^+$ tel que pour tout $x \in \Omega$, on a

$$0 < \theta_1 v_1(x) H_1(u) \leq v_1(x)h_1(u)u, |u| \geq M_1,$$

où $H_1(t) = \int_0^t h_1(s)ds$.

(A_4) Il existe$M_2 > 0$,$\theta_{\ 2} > p^+$ tel que pour tout$x \in \partial\Omega$,

$$0 < \theta_2 v_2(x) H_2(u) \leq v_2(x)h_2(u)u, |u| \geq M_2,$$

où $H_2(t) = \int_0^t h_2(s)ds$.

Définition 3.1.1 *On dit que $u \in X := W^{1,p(x)}(\Omega)$, est une solution faible pour le problème (0.1.1), si pour tout $v \in X$, nous avons*

$$\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v + a(x) |u|^{p(x)-2} uv \right) dx - \int_\Omega v_1(x)h_1(u)vdx$$

$$+ \int_{\partial\Omega} b(x) |u|^{q(x)-2} uvd\sigma - \int_{\partial\Omega} v_2(x)h_2(u)vd\sigma = 0.$$

Nous donnons ci-dessous le premier résultat principal que nous allons prouver.

3.2 Résultat principal

Théorème 3.2.1 *Si* $\min(\alpha^-, \beta^-) > p^+$, *et* $\min(\theta_1, \theta_2) > q^+$, *alors, sous l'hypothèse* $(A_1) - (A_4)$,*le problème (0.1.1) a une solution non triviale.*

La preuve du théorème 3.2.1, est divisée en plusieurs lemmes. Tout d'abord, nous définissons la fonctionnelle $\Psi : X \to \mathbb{R}$, associé au problème(0.1.1), comme suite :

$$\Psi(u) = I(u) + J(u) - \phi(u),$$

où

$$I(u) = \int_\Omega \frac{|\nabla u|^{p(x)} + a(x)\,|u|^{p(x)}}{p(x)} dx, J(u) = \int_{\partial\Omega} \frac{b(x)\,|u|^{q(x)}}{q(x)} d\sigma,$$

et

$$\phi(u) = \int_\Omega v_1(x) H_1(u) dx + \int_{\partial\Omega} v_2(x) H_2(u) d\sigma.$$

On rappelle de [41], que $I \in C^1(X, \mathbb{R})$, d'ailleurs, pour tout $u, v \in X$, nous avons

$$\left\langle I'(u), v \right\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v + a(x)\,|u|^{p(x)-2}\, uv dx.$$

De plus, la fonctionnelle I' satisfait aux propriétés suivantes.

Proposition 3.2.1 *[41]*

- *[(i)]* $I' : X \to X^*$ *est un opérateur continu, borné et strictement monotone.*
- *[(ii)]* I' *est une application de type* (S_+), *c'est-à-dire si* $u_n \to u$ *dans* X *et* $\limsup\limits_{n\to\infty} < I'(u_n) - I'(u), u_n - u > \leq 0$, *alors,* $u_n \to u$ *fortement dans* X.

Proposition 3.2.2 *(voir [41], [42])* $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ *et pour tout* $u, v \in X$, *on a*

$$\left\langle J'(u), v \right\rangle = \int_{\partial\Omega} b(x)\,|u|^{q(x)-2}\, uv d\sigma.$$

De plus, $J : X \to \mathbb{R}$ *et* $J' : X \to X^*$, *sont séquentiellement faiblement-fortement continus, à savoir,* $u_n \rightharpoonup u$ *dans* X *implique que* $J(u_n) \to J(u)$ *et* $J'(u_n) \to J'(u)$.

Remarque 3.2.1 *Il n'est pas difficile de le prouver à partir de* $(A_1), (A_2)$, *Propositions 1.2.2,1.2.6 et l inégalité de Hölder, on a* $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *et pour tout* $u, v \in X$, *nous obtenons*

$$\left\langle \phi'(u), v \right\rangle = \int_\Omega v_1(x) h_1(u(x)) v(x) dx + \int_{\partial\Omega} v_2(x) h_2(u(x)) v(x) d\sigma.$$

Notons qu'à partir des propositions 3.1, 3.2 *et de la remarque* 3.1, *on voit que* $\Psi \in C^1(X, \mathbb{R})$ *et pour tout* $u, v \in X$, *on obtient*

$$\begin{aligned} \left\langle \Psi'(u), v \right\rangle &= \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p(x)-2} \nabla u \nabla v + a(x) |u|^{p(x)-2} uv \right) dx \\ &+ \int_{\partial\Omega} b(x) |u|^{q(x)-2} uv d\sigma - \int_\Omega v_1(x) h_1(u(x)) v(x) dx \\ &- \int_{\partial\Omega} v_2(x) h_2(u(x)) v(x) d\sigma. \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions faibles du problème (0.1.1), correspondent aux points critiques de la fonctionnelle Ψ.

Lemme 3.2.1 *Supposons que* $\min(\alpha^-, \beta^-) > p^+$, *et* $(A_1) - (A_2)$ *sont satisfaits. Alors, il existe* $m, r > 0$ *tel que, pour* $u \in X$

$$si\ \ \|u\| = r, alors,\ \Psi(u) \geq m.$$

Preuve. Soit $u \in X$, avec$\|u\| < 1$. alors, l'hypothèse (A_1) implique que pour tout $x \in \Omega$, on a

$$H_1(u) \leq \frac{c_1}{\alpha(x)} |u|^{\alpha(x)}. \tag{3.2.1}$$

et l'hypothèse(A_2) implique que pour tout $x \in \partial\Omega$, on a

$$H_2(u) \leq \frac{c_2}{\beta(x)} |u|^{\beta(x)}. \tag{3.2.2}$$

Par conséquent, à partir des propositions 1.2.1,1.2.6 et de l'inégalité Hölder, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi(u) &\geq \frac{1}{p^+}\Gamma(u) - \int_\Omega v_1(x) H_1(u) dx - \int_{\partial\Omega} v_2(x) H_2(u) d\sigma \\ &\geq \frac{1}{p^+}\Gamma(u) - \frac{c_1}{\alpha^-} \int_\Omega |v_1(x)| |u|^{\alpha(x)} dx - \frac{c_2}{\beta^-} \int_{\partial\Omega} |v_2(x)| |u|^{\beta(x)} d\sigma. \\ &\geq \frac{1}{p^+}\Gamma(u) - \frac{c_1}{\alpha^-} |v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)} \left| |u|^{\alpha(x)} \right|_{L^{\frac{s(x)}{\alpha(x)}}(\Omega)} - \frac{c_2}{\beta^-} |v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)} \left| |u|^{\beta(x)} \right|_{L^{\frac{T(x)}{\beta(x)}}(\partial\Omega)} \\ &\geq \frac{1}{p^+}\Gamma(u) - \frac{c_1}{\alpha^-} |v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)} \max(|u|^{\alpha^-}_{L^{S(x)}(\Omega)}, |u|^{\alpha^+}_{L^{S(x)}(\Omega)}) \\ &\quad - \frac{c_2}{\beta^-} |v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)} \max(|u|^{\beta^-}_{L^{T(x)}(\partial\Omega)}, |u|^{\beta^+}_{L^{T(x)}(\partial\Omega)}) \end{aligned}$$

Puisque $1 < S(x) < p^*(x)$,$1 < T(x) < p_*(x)$, et d'après la proposition 2.2, il existe $c_3, c_4 > 0$, tel que

$$|u|_{L^{S(x)}}(\Omega) \leq c_3 \|u\|, |u|_{L^{T(x)}(\partial\Omega)} \leq c_4 \|u\|. \tag{3.2.3}$$

Donc, en utilisant la proposition 2.3, nous obtenons pour $\theta = \min(\theta_1, \theta_2)$,

$$\begin{aligned}
\Psi(u) &\geq \frac{\xi_1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{c_3}{\alpha^-}|v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)}\|u\|^{\alpha^-} - \frac{c_4}{\beta^-}|v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)}\|u\|^{\beta^-} \\
&\geq \|u\|^{p^+}\left(\frac{\xi_1}{p^+} - \frac{c_3}{\alpha^-}|v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)}\|u\|^{\alpha^- - p^+} - \frac{c_4}{\beta^-}|v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)}\|u\|^{\beta^- - p^+}\right) \\
&\geq \|u\|^{p^+}\left(\frac{\xi_1}{p^+} - \eta\|u\|^{\min\left(\alpha^- - p^+, \beta^- - p^+\right)}\right). \\
\eta &= \frac{c_3}{\alpha^-}|v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)} + \frac{c_4}{\beta^-}|v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)}.
\end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\alpha^-, \beta^- > p^+$, on peut choisir $\|u\| = r$, assez petit pour que

$$\frac{\xi_1}{p^+} - \eta r^{\min\left(\alpha^- - p^+, \beta^- - p^+\right)} > 0.$$

Enfin, nous concluons que

$$\Psi(u) \geq r^{p^+}\frac{\xi_1}{p^+} - \eta r^{\min\left(\alpha^- - p^+, \beta^- - p^+\right)} := m > 0.$$

■

Lemme 3.2.2 *Si* $\min(\theta_1, \theta_2) > q^+$, *et* $(A_1)-(A_4)$ *sont satisfaits, alors,* Ψ *satisfait la condition* (PS).

Preuve. Soit $\{u_n\}$ une suite dans$X$, telle que

$$\Psi(u_n) \to c, \text{ et } \Psi'(u_n) \to 0, \text{dans } X^*, \text{ quand } n \to \infty,$$

où c est un constante positif.

Depuis $\Psi(u_n) \to c$, alors, il existe $M_1 > 0$, tel que

$$|\Psi(u_n)| \leq M_1. \tag{3.2.4}$$

D'autre part, le fait que $\Psi'(u_n) \to 0$ en X^*, implique que $< \Psi'(u_n), u_n > \to 0$, en particulier, $< \Psi'(u_n), u_n >$ est borné. Ainsi, il existe $M_2 > 0$, tel que

$$|\langle \Psi'(u_n), u_n \rangle| \leq M_2. \tag{3.2.5}$$

Nous affirmons que la séquence $\{u_n\}$ est bornée. Si ce n'est pas vrai, en passant à une sous-suite, si nécessaire, nous pouvons supposer que $\|u_n\| \to \infty$. Sans perte de généralité, nous supposons que $\|u_n\| \geq 1$: De (3.2.4) et (3.2.5), on obtient pour $\theta := \min(\theta_1, \theta_2)$

$$\begin{aligned} M_1 &\geq |\Psi(u_n)| = I(u_n) + J(u_n) - \phi(u_n) \\ &\geq \frac{1}{p^+}\Gamma(u_n) + \frac{1}{q^+}\int_{\partial\Omega} b(x)\,|u_n|^{q(x)}\,d\sigma - \phi(u_n) \\ &\geq \frac{1}{p^+}\Gamma(u_n) + \frac{1}{\theta}\int_{\partial\Omega} b(x)\,|u_n|^{q(x)}\,d\sigma - \phi(u_n), \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

et

$$M_2 \geq -\left\langle \Psi'(u_n), u_n \right\rangle = -\Gamma(u_n) - \int_{\partial\Omega} b(x)\,|u_n|^{q(x)}\,d\sigma + \left\langle \phi'(u_n), (u_n) \right\rangle, \tag{3.2.7}$$

Par combinaison de (3.2.6), (3.2.7), et l'utilisation de proposition 1.2.3, nous donnons

$$\begin{aligned} \theta M_1 + M_2 &\geq \left(\frac{\theta}{p^+ - 1}\right)\Gamma(u_n) - \theta\phi(u_n) + \langle \phi'(u_n), (u_n) \rangle \\ &\geq \left(\frac{\theta}{p^+ - 1}\right)\xi_1\,\|u_n\|^{p^-} + \int_\Omega v_1(x)\,(h_1(u_n)\,u_n - \theta_1 H_1(u_n))\,dx \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} v_2(x)\,(h_2(u_n)\,u_n - \theta_2 H_2(u_n))\,d\sigma. \end{aligned}$$

Par conséquence, les hypothèses $(A_3) - (A_4)$ implique,

$$\theta M_1 + M_2 \geq \left(\frac{\theta}{p^+ - 1}\right)\xi_1\,\|u_n\|^{p^-}.$$

Notons que $\theta = \min(\theta_1, \theta_2) > p^+$. Donc en laissant n tend vers ∞, nous obtenons une contradiction.

Par conséquence, $\{u_n\}$ est borné dans X. Ainsi, jusqu'à une sous-suite, il existe $u \in X$ tel que, $\{u_n\}$ converges faiblement vers u dans X.

Puisque $q(x) < p_*(x)$ et $S(x) < p^*(x)$, on en déduit par la proposition 1.2.2 cette

$$\begin{cases} u_n \to u, \text{ fortement dans } L^{S(x)}(\Omega), \\ u_n \to u, \text{ fortement dans } L^{q(x)}(\Omega). \end{cases}$$

Pour compléter la preuve, il reste à montrer que $u_n \to u$, fortement dans X. Pour cette, on a

$$\begin{aligned}\langle I'(u_n), u_n - u\rangle &= -\langle \Psi'(u_n), u_n - u\rangle + \int_{\partial\Omega} b(x)|u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u)\, d\sigma \\ &\quad - \int_{\Omega} v_1(x) h_1(u_n)(u_n - u)\, dx - \int_{\partial\Omega} v_2(x) h_2(u_n)(u_n - u)\, d\sigma.\end{aligned}$$

On utilisant l'inégalité de Hölder et la proposition 1.2.2, 1.2.6, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega} b(x)|u_n|^{q(x)-1}|u_n - u|\, dx &\le b_2 |u_n - u|_{L^{q(x)}} |u|^{q(x)-1}_{L^{\frac{q(x)}{q(x)-1}}} \\ &\le b_2 |u_n - u|_{L^{q(x)}} \max\left(|u_n|^{q^+-1}_{L^{q(x)}}, |u_n|^{q^--1}_{L^{q(x)}}\right) \\ &\le c_1 |u_n - u|_{L^{q(x)}} \max\left(\|u_n\|^{q^+-1}, \|u_n\|^{q^--1}\right),\end{aligned}$$

alors, nous obtenons

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} b(x)|u_n|^{q(x)-2} u_n (u_n - u)\, dx = 0. \tag{3.2.8}$$

D'autre part, en utilisant (A_1), proposition 1.2.2, 1.2.6, et l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} v_1(x) h_1(u_n)(u_n - u)\, dx \\ \le\ & \int_{\Omega} c_1 |v_1(x)| |u_n|^{\alpha(x)-1} |u_n - u|\, dx \\ \le\ & |u_n - u|_{L^{S(x)}} |v_1(x)|_{L^{\frac{S(x)}{S(x)-\alpha(x)}}} \left||u_n|^{\alpha(x)-1}\right|_{L^{\frac{S(x)}{\alpha(x)-1}}} \\ \le\ & |u_n - u|_{L^{S(x)}} |v_1(x)|_{L^{\frac{S(x)}{S(x)-\alpha(x)}}} \max\left(\left||u_n|^{\alpha^+-1}\right|_{L^{S(x)}}, \left||u_n|^{\alpha^--1}\right|_{L^{S(x)}}\right) \\ \le\ & |u_n - u|_{L^{S(x)}} |v_1(x)|_{L^{\frac{S(x)}{S(x)-\alpha(x)}}} \max\left(\|u_n\|^{\alpha^+-1}, \|u_n\|^{\alpha^--1}\right).\end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} v_1(x) h_1(u_n)(u_n - u)\, dx = 0. \tag{3.2.9}$$

De même, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\partial\Omega} v_2(x) h_2(u_n)(u_n - u)\, d\sigma = 0. \tag{3.2.10}$$

Par combinaison (3.2.8)-(3.2.10), et en utilisant le fait que $\langle \Psi'(u_n), u_n - u\rangle \to 0$, on conclure cette

$$\langle I'(u_n), u_n - u\rangle = \int_{\Omega} \left(|\nabla u_n|^{p(x)-2} \nabla u_n \nabla(u_n - u) + a(x)|u_n|^{p(x)-2}(u_n - u)\right) dx \to 0,$$

En passant à la limite lorsque n tend vers ∞, et on utilisant le fait que u_n converge faiblement vers u, on obtient

$$\langle I'(u), u_n - u\rangle \to 0.$$

Par conséquence

$$\lim_{n\to\infty} \langle I'(u_n) - I'(u), u_n - u\rangle = 0.$$

Puisque I' est de type (S_+) (voir proposition 1.2.1), on en déduit que $u_n \to u$ fortement dans X. ceci complète la preuve. ■

Lemme 3.2.3 *Si* $\min(\theta_1, \theta_2) > q^+$, *et* $(A_3), (A_4)$ *tenir. Alors, il existe* $e_0 \in X$ *tel que*

$$\|e_0\| > r, \text{ et } \Psi(e_0) < 0,$$

où r *est donné par le lemme 3.2.1.*

Preuve. Par $(A_3), (A_4)$, il existe $m_1 > 0, m_2 > 0$, tel que, pour tout $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, on a

$$\begin{cases} v_1(x) H_1(t) \geq m_1 |t|^{\theta_1}, \text{pour tout } (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \\ \\ v_2(x) H_2(t) \geq m_2 |t|^{\theta_2}, \text{pour tout } (x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.2.11}$$

Soit $e \in X$, tel que $\int_\Omega |e|^{\theta_1} dx > 0$, et soit $t > 1$,assez large. Ensuite nous avons

$$\begin{aligned} \Psi(te) &= \int_\Omega \frac{|\nabla(te)|^{p(x)} + a(x)|te|^{p(x)}}{p(x)} dx = \int_{\partial\Omega} b(x) \frac{|te|^{q(x)}}{q(x)} d\sigma \\ &\quad - \int_\Omega v_1(x) h_1(te)\, dx - \int_{\partial\Omega} v_2(x) h_2(te)\, d\sigma. \end{aligned}$$

Donc, à partir de 3.2.11, nous obtenons

$$\begin{aligned} \Psi(te) &= \frac{t^{p^+}}{p^-} \int_\Omega |\nabla(e)|^{p(x)} + a(x)|e|^{p(x)} dx + \frac{t^{q^+}}{q^-} b_2 \int_{\partial\Omega} |(e)|^{q(x)} d\sigma \\ &\quad - m_1 t^{\theta_1} \int_\Omega |e|^{\theta_1} dx - m_2 t^{\theta_2} \int_{\partial\Omega} |e|^{\theta_2} d\sigma. \end{aligned}$$

Puisque $\min(\theta_1, \theta_2) > \max(q^+, p^+)$,puis, on concluons que

$$\Psi(te) \to -\infty, \text{si } t \to \infty.$$

ensuite, on peut choisir $t_0 > 0, e_0 = t_0 e$,tel que $\|e_0\| > r$ et $\Psi(e_0) < 0$ ■

Preuve. [preuve du théorème (3.2.1)] A partir du lemme 3.2.3, il existe $e_0 \in X$ avec $\|e_0\| > r$, pour certains $r > 0$, et

$$\Psi(e_0) < 0 = \Psi(0). \tag{3.2.12}$$

D'un autre coté, le lemme 3.2.1 implique que

$$\inf_{\|u\|=r} \Psi(u) \geq m > 0 = \Psi(0). \tag{3.2.13}$$

En combinant les équations (3.2.12), (3.2.13) avec le lemme 3.2.2, nous en déduisons que toutes les conditions du théorème de col de montagne sont satisfaits.

Ainsi, à partir du théorème 2.3.1, nous déduisons l'existence d'un point u de Ψ, qui est une solution faible pour le problème (0.1.1). De plus, l'équation (3.2.13) implique que u n'est pas trivial. La preuve du théorème 3.2.1 est maintenant terminée. ■

CHAPITRE 4

Multiplicité de solutions via le théorème du col de montagne combiné avec le principe variationnel d'Ekeland

Contents

4.1 Introduction

Une question naturelle est de savoir si le problème (0.1.1) a des solutions s'il est affecté par une petite perturbation. Pour cela, nous considérons (0.1.1) dans le cas

$$f(x,u) = v_1(x)h_1(u) + \lambda |u|^{\gamma(x)-2} u, \text{and } g(x,u) = v_2(x)h_2(u),$$

où λ est un paramètre positif, et $\gamma \in C_+(\overline{\Omega})$ est telle que

$$1 < \gamma^- \leq \gamma^+ < p^-.$$

Maintenant, nous énonçons les hypothèses sur le terme de perturbation $f(x,u)$ et $g(x,u)$ pour le problème (0.1.1) comme suit :

(A_5) Il existe $1 < d_1 < p^-$, tel que

$$\liminf_{u\to 0} \frac{v_1(x)H_1(u) + \frac{\lambda}{\gamma(x)} |u|^{\gamma(x)}}{|u|^{d_1}} > 0 \text{ uniformément,pour } x \in \Omega.$$

(A_6) Il existe $1 < d_2 < q^-$tel que,

$$\liminf_{u\to 0} \frac{v_2(x)H_2(u)}{|u|^{d_2}} > 0$$

uniformément,pour $x \in \partial\Omega$.

4.2 Résultat principal

Théorème 4.2.1 *Supposons que* $\min(\alpha^-, \beta^-) > p^+$*, et* $(A_1) - (A_6)$ *tiennent. Alors, il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour chaque* $\lambda \in (0, \lambda_0)$*, le problème (0.1.1) a au moins deux solutions non triviales.* *La fonctionnelle associée au problème (0.1.1) est donnée par :*

$$\Phi_\lambda(u) = \Psi(u) - \lambda \int_\Omega \frac{|u|^{\gamma(x)}}{\gamma(x)} dx.$$

où Ψ_λ *est donné dans la section* 3.

Remarque 4.2.1 *On a* $\Phi_\lambda \in C^1(X, \mathbb{R})$*. De plus, les solutions faibles du problème (0.1.1) correspondent à des points critique du fonctionnel* Φ_λ

Lemme 4.2.1 *Supposons que* $\min(\alpha^-, \beta^-) > p^+$, *et* $(A_1), (A_2)$ *sont maintenus. Ensuite, il existe trois positifs constantes* m, r *et* λ_0, *tels que, pour tout* $u \in X$ *et tout* $\lambda \in (0, \lambda_0)$,

$$si \, \|u\| = r, \, alors, \; \Phi_\lambda(u) \geq m.$$

Preuve. Soit $u \in X$ avec $\|u\| < 1$. Ensuite, à partir de (3.2.1), (3.2.2), l'inégalité Hölder et la proposition 1.2.6, on obtient

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(u) \;&\geq\; \frac{1}{p^+}\Gamma(u) - \frac{c_1}{\alpha^-}\int_\Omega |v_1(x)|\,|u|^{\alpha(x)}\,dx - \frac{\lambda}{\gamma^-}\int_\Omega |u|^{\gamma(x)}\,dx - \frac{c_2}{\beta^-}\int_{\partial\Omega} |v_2(x)|\,|u|^{\beta(x)}\,d\sigma \\
&\geq\; \frac{1}{p^+}\Gamma(u) - \frac{c_1}{\alpha^-}|v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)} \left||u|^{\alpha(x)}\right|_{L^{\frac{s(x)}{\alpha(x)}}(\Omega)} - \frac{c_2}{\beta^-}|v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)} \left||u|^{\beta(x)}\right|_{L^{\frac{T(x)}{\beta(x)}}(\partial\Omega)} \\
&\quad - \frac{\lambda}{\gamma^-}\int_\Omega |u|^{\gamma(x)}\,dx \\
&\geq\; \frac{1}{p^+}\Gamma(u) - \frac{c_1}{\alpha^-}|v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)} \max(|u|^{\alpha^-}_{L^{S(x)}(\Omega)}, |u|^{\alpha^+}_{L^{S(x)}(\Omega)}) - \frac{\lambda}{\gamma^-}\max(|u|^{\gamma^-}_{L^{\gamma(x)}(\Omega)}, |u|^{\gamma^+}_{L^{\gamma(x)}(\Omega)}) \\
&\quad - \frac{c_2}{\beta^-}|v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)} \max(|u|^{\beta^-}_{L^{T(x)}(\partial\Omega)}, |u|^{\beta^+}_{L^{T(x)}(\partial\Omega)})
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le fait que

$$1 < \min(s(x), \gamma(x)) \leq \max(s(x), \gamma(x)) < p^*(x), \text{et } 1 < T(x) < p_*(x).$$

Alors, par la proposition 1.2.2, X est continuellement incorporé dans $L^{S(x)}(\Omega), L^{\gamma(X)}(\Omega)$ et $L^{T(x)}(\partial\Omega)$. Alors, La proposition 1.2.3, implique que

$$\begin{aligned}
&\Phi_\lambda(u) \\
\geq\;& \frac{\xi_1}{p^+}\|u\|^{p^+} - \frac{c_1}{\alpha^-}|v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)}\|u\|^{\alpha^-} - \frac{c_2}{\beta^-}|v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)}\|u\|^{\beta^-} - \frac{\lambda}{\gamma^-}c_3\|u\|^{\gamma^-} \\
\geq\;& \|u\|^{\gamma^-}\left(\frac{\xi_1}{p^+}\|u\|^{p^+-\gamma^-} - \frac{c_1}{\alpha^-}|v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)}\|u\|^{\alpha^--\gamma^-} - \frac{c_2}{\beta^-}|v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)}\|u\|^{\beta^--\gamma^-} - \frac{\lambda}{\gamma^-}c_3\right) \\
\geq\;& \|u\|^{\gamma^-}\left[\frac{\xi_1}{p^+}\|u\|^{p^+-\gamma^-} - \left(\frac{c_1}{\alpha^-}|v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)} + -\frac{c_2}{\beta^-}|v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)}\right)\|u\|^{k-\gamma^-} - \frac{\lambda}{\gamma^-}c_3\right] \\
\geq\;& \|u\|^{\gamma^-}\left[\frac{\xi_1}{p^+}\|u\|^{p^+-\gamma^-} - C\|u\|^{k-\gamma^-} - \frac{\lambda}{\gamma^-}c_3\right] \\
\geq\;& \|u\|^{\gamma^-}\left(\varphi\|u\| - \frac{\lambda}{\gamma^-}c_3\right),
\end{aligned}$$

où $k = \min(\alpha^-, \beta^-)$, C est donné par

$$C = \frac{c_1}{\alpha^-} |v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)} - \frac{c_2}{\beta^-} |v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)},$$

et φest une fonction continue sur $[0, \infty)$, définie par

$$\varphi(t) = \frac{\xi_1}{p^+} \|u\|^{t^{p^+-\gamma^-}} - C \|u\|^{t^{k-\gamma^-}}.$$

Mettre

$$r = \left(\frac{\xi_1(p^+ - \gamma^-)}{C_{p^+}(k - \gamma^-)}\right)^{\frac{1}{k-p^+}}.$$

il est facile de voir que

$$\max_{t\geq 0} \varphi(t) = \varphi(r) > 0.$$

Mettre

$$\lambda_0 = \frac{\gamma^- \varphi(r)}{c_3}, \text{et } m = r^{\gamma^-}(\varphi(r) - \frac{\lambda}{\gamma^-} c_3). \tag{4.2.1}$$

Ensuite, il est facile de voir que si $\|u\| = r$, alors, pour tous les $\lambda \in (0, \lambda_0)$, nous avons

$$\Phi_\lambda(u) \geq m > 0.$$

■

Lemme 4.2.2 *Supposons que*(A_3) *et* (A_4) *tiennent. Alors, pour tout* $\lambda > 0$, *il existe* $e_0 \in X$, *tel que*

$$\|e_0\| > r \text{ et } \Phi_\lambda(e_0) < 0.$$

Preuve. Soit $e \in X$, tel que $\int_\Omega |e|^{\theta_1} dx > 0$, et soit $t > 1$, assez grand, alors, à partir de (3.13), nous avons

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(te) &= \int_\Omega \frac{|\nabla(te)|^{p(x)} + a(x)\,|(te)|^{p(x)}}{p(x)}dx + \int_{\partial\Omega} \frac{b(x)\,|(te)|^{q(x)}}{q(x)}d\sigma \\
&\quad - \int_\Omega \left(v_1(x)H_1(te) + \lambda \frac{|(te)|^{\gamma(x)}}{\gamma(x)} \right) dx - \int_{\partial\Omega} v_2(x)H_2(te)d\sigma \\
&\leq \int_\Omega \frac{|\nabla(te)|^{p(x)} + a(x)\,|(te)|^{p(x)}}{p(x)}dx + \int_{\partial\Omega} \frac{b(x)\,|(te)|^{q(x)}}{q(x)}d\sigma - \int_\Omega v_1(x)H_1(te) \\
&\quad + \lambda \frac{|(te)|^{\gamma(x)}}{\gamma(x)}dx - \int_{\partial\Omega} v_2(x)H_2(te)d\sigma \\
&\leq \frac{t^{p^+}}{p^-} \int_\Omega |\nabla(e)|^{p(x)} + a(x)\,|e|^{p(x)}\,dx + \frac{b_2 t^{p^+}}{q^-} \int_{\partial\Omega} |e|^{q(x)}\,d\sigma \\
&\quad - m_1 t^{\theta_1} \int_\Omega |e|^{\theta_1}\,dx - m_2 t^{\theta_2} \int_{\partial\Omega} |e|^{\theta_2}\,d\sigma
\end{aligned}$$

puisque $q^+ < p^+ < \min(\theta_1, \theta_2)$, alors, on voit que

$$\Phi_\lambda(te) \to -\infty, \text{quand } t \to \infty.$$

Ainsi, nous pouvons trouver $t_0 > 0$ suffisamment grand pour que

$$\|e_0\| > r, \text{et } \Phi_\lambda(e_0) < 0,$$

où $e_0 = t_0 e$. Ceci termine la démonstration du lemme 4.2.2. ■

Lemme 4.2.3 *Supposons que $(A1) - (A4)$ tiennent. Ensuite, pour tout $\lambda > 0$, Φ_λ satisfait la condition (PS).*

Preuve. Soit $\{u_n\} \subset X$ une suite telle que

$$\Phi_\lambda(u_n) \to c, \Phi'_\lambda(u_n) \to 0, \text{dans } X^*, \text{quand } n \to \infty,$$

où c est un constante positif.

Comme dans la preuve du lemme 3.2.2, on peut trouver deux constantes positifs M_1 et M_2, telles que

$$\Phi_\lambda(u_n) \leq M_1, \tag{4.2.2}$$

et

$$\left|\left\langle \Phi_\lambda'(u_n), u_n\right\rangle\right| \le M_2. \tag{4.2.3}$$

Nous affirmons que la suite $\{u_n\}$est bornée. Si ce n'est pas vrai, en passant à une sous-suite si nécessaire, nous pouvons supposer que $\|u_n\| \to \infty$. Sans perte de généralité, nous supposons que$\|u_n\| \ge 1$. De (4.2.2) et (4.2.3), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\Phi(u_n) &= I(u_n) + J(u_n) - \phi(u_n) \\
&\ge \frac{1}{p^+}\Gamma(u_n) + \frac{1}{q^+}\int_{\partial\Omega} b(x)\,|u_n|^{q(x)}\,d\sigma - \phi(u_n) \\
&\ge \frac{1}{p^+}\Gamma(u_n) + \frac{1}{\theta}\int_{\partial\Omega} b(x)\,|u_n|^{q(x)}\,d\sigma - \phi(u_n).
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

où $\theta = \min(\theta_1, \theta_2)$.

D'autre part,

$$M_2 \ge -\left\langle \Phi_\lambda'(u_n), u_n\right\rangle = -\Gamma(u_n) - \int_{\partial\Omega} b(x)\,|u_n|^{q(x)}\,d\sigma + \left\langle \phi'(u_n), u_n\right\rangle. \tag{4.2.5}$$

En vertu des hypothèses $(A_3) - (A_4)$, proposition 1.2.3 et en combinant (4.2.4), (4.2.5), on obtient

$$\begin{aligned}
\theta M_1 + M_2 &\ge \left(\frac{\theta}{P^+} - 1\right)\Gamma(u_n) - \theta\phi(u_n) + \left\langle \phi'(u_n), u_n\right\rangle \\
&\ge \left(\frac{\theta}{P^+} - 1\right)\xi_1\,\|u_n\|^{p^-} + \int_\Omega v_1(x)(h_1(u_n)u_n - \theta H_1(u_n))dx \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} v_2(x)(h_2(u_n)u_n - \theta H_2(u_n))d\sigma + \lambda\int_\Omega (1 - \frac{\theta}{\gamma(x)})\,|u_n|^{\gamma(x)}\,dx \\
&\ge \left(\frac{\theta}{P^+} - 1\right)\xi_1\,\|u_n\|^{p^-} + \lambda\int_\Omega (1 - \frac{\theta}{\gamma(x)})\,|u_n|^{\gamma(x)}\,dx.
\end{aligned}$$

D'où,

$$\theta M_1 + M_2 \ge \left(\frac{\theta}{P^+} - 1\right)\xi_1\,\|u_n\|^{p^-} + \lambda\int_\Omega (1 - \frac{\theta}{\gamma(x)})\,|u_n|^{\gamma(x)}\,dx. \tag{4.2.6}$$

D'après la proposition 2.2, il existe $c > 0$ tel que

$$\int_\Omega |u_n|^{\gamma(x)}\,dx \le |u_n|^k_{L^{\gamma(x)}(\Omega)} \le c\,\|u_n\|^k, \text{où } k = \gamma^- \text{ou } \gamma^+. \tag{4.2.7}$$

En combinant (4.2.6) et (4.2.7), on en déduit que

$$\theta M_1 + M_2 \ge \left(\frac{\theta}{P^+} - 1\right)\xi_1\,\|u_n\|^{p^-} - c\lambda\left(\frac{\theta}{\gamma^-} - 1\right)\|u_n\|^k.$$

Depuis $\theta > p^{+} > \gamma^{-}$et $p^{-} > k$, puis, en laissant n tend vers l'infinité, on obtient une contradiction. Il s'ensuit que la suite$\{u_n\}$ est bornée en X. Il existe donc $u \in X$ tel que, jusqu'à sous-suite, $\{u_n\}$ converge faiblement vers $u \in X$. Enfin, des arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve du lemme 3.2.2 complète la preuve du lemme 4.2.3.Nous allons maintenant appliquer le principe variationnel d'Ekeland pour déterminer la deuxième solution du problème (0.1.1). Pour cela, nous avons besoin du lemme suivant. ■

Lemme 4.2.4 *Supposons que* (A_5) *et* (A_6) *tiennent. Alors, pour tout* $\lambda > 0$*, il existe* $e \in X$ *tel que* $\Phi_\lambda(te) < 0$ *pour tout* $t > 0$ *assez petit.*

Preuve. Soit $u \in X$ *avec* $0 < \|u\| < 1$*. A partir de* (A_5) *et* (A_6)*, il existe deux constantes positives* $c_1, c_2 > 0$*, tel que pour tout* $x \in \Omega$*, on a*

$$v_1(x)H_1(u) + \frac{\lambda}{\gamma(x)}|u|^{\gamma(x)} \geq c_1 |u|^{d_1}, \textit{ et } v_2(x)H_2(u) \geq c_2 |u|^{d_2} \textit{ pour tout } x \in \partial\Omega. \tag{4.2.8}$$

Preuve. Soit $e \in X$ tel que

$$\int_\Omega |e|^{d_1} dx, \int_{\partial\Omega} |e|^{d_2} d\sigma, \int_{\partial\Omega} |e|^{q(x)} d\sigma \neq 0.$$

Alors, (4.8) implique que pour tout $t > 0$ assez petit, on a

$$\begin{aligned}
\Phi_\lambda(te) &\leq \frac{t^{p^-}}{p^-}\Gamma(e) + \frac{t^{p^-}}{q^-}b_2 \int_{\partial\Omega} |e|^{q(x)} d\sigma - c_1 t^{d_1} \int_\Omega |e|^{d_1} dx - c_2 t^{d_2} \int_{\partial\Omega} |e|^{d_2} d\sigma \\
&\leq t^{d_1}\left(t^{p^- - d_1}\frac{\Gamma(e)}{p^-} - c_1 \int_\Omega |e|^{d_1} dx\right) \\
&\quad + t^{d_2}\left(t^{q^- - d_2}\frac{b_2}{q^-}\int_{\partial\Omega} |e|^{q(x)} d\sigma - c_2 \int_{\partial\Omega} |e|^{d_2} d\sigma\right)
\end{aligned}$$

mettre

$$t_1 = \left(\frac{p^- c_1 \int_\Omega |e|^{d_1} dx}{\Gamma(e)}\right)^{\frac{1}{p^- - d_1}}, \text{et } t_2 = \left(\frac{q^- c_2 \int_{\partial\Omega} |e|^{d_2} d\sigma}{b_2 \int_{\partial\Omega} |e|^{q(x)} d\sigma}\right)^{\frac{1}{q^- - d_2}}.$$

Puisque $d_1 < p^-$ et $d_2 < q^-$, on voit d'après(4.9), que si $0 < t < \min(t_1, t_2)$, alors, $\Phi_\lambda(te) < 0$. ■

Nous sommes maintenant en mesure de donner la preuve du deuxième résultat principal de ce travail.

Preuve. [Preuve du théorème 4.2.1] Soit $\lambda_0 > 0$ une constante donnée par l'équation (4.1). Par les lemmes 4.2.1,4.2.2,4.2.3 et le théorème du col de montagne, on en déduit que pour tout $\lambda \in (0, \lambda_0), \Phi_\lambda$a un point critique $u_1 \in X$ qui est une solution faible pour le problème (0.1.1). De plus, u_1 satisfis

$$\Phi_\lambda(u_1) \geq m > 0, \tag{4.2.9}$$

ce qui implique que u_1 n'est pas trivial.

Par contre, en utilisant le lemme 4.2.1, on a

$$\inf_{u\in\partial B(0,r)} (\Phi_\lambda(u_1)) > 0,$$

et à partir du lemme 4.2.4, il existe $e \in X$ tel que $\Phi_\lambda(te) < 0$ pour $t > 0$ assez petit. De plus,comme dans la preuve du lemme 4.2.1, pour $u \in B(0, r)$, on a

$$\Phi_\lambda(u) \geq \frac{\xi_1}{p^+} \|u\|^{p^+} - \frac{c_1}{\alpha^-} |v_1|_{L^{\frac{s(x)}{s(x)-\alpha(x)}}(\Omega)} \|u\|^{\alpha^-} - \frac{c_2}{\beta^-} |v_2|_{L^{\frac{T(x)}{T(x)-\beta(x)}}(\partial\Omega)} \|u\|^{\beta^-} - \frac{\lambda}{\gamma^-} c_3 \|u\|^{\gamma}.$$

alors

$$-\infty < \underline{c} = \inf_{u\in\partial \overline{B(0,r)}} (\Phi_\lambda(u)) < 0.$$

Soit $\epsilon > 0$, tel que

$$0 < \epsilon < \inf_{u\in\partial B(0,r)} (\Phi_\lambda(u)) - \inf_{u\in B(0,r)} (\Phi_\lambda(u)).$$

En utilisant les informations ci-dessus, le fonctionnel $\Phi_\lambda : \overline{B(0, r)} \to \mathbb{R}$, est la limite inférieure et $\Phi_\lambda C^1 \left(\overline{B(0, r)}, \mathbb{R}\right)$. Par conséquent, le principe d'Ekeland implique l'existence de $u \in \overline{B(0, r)}$, tel que

$$\begin{cases} \underline{c} \leq \Phi_\lambda(u_\epsilon) \leq \underline{c} + \epsilon \\ \Phi_\lambda(u_\epsilon) < \Phi_\lambda(u) + \epsilon \|u - u_\epsilon\|, u \neq u_\epsilon. \end{cases}$$

Puisque

$$\Phi_\lambda(u_\epsilon) \leq \inf_{u\in\overline{B(0,r)}} (\Phi_\lambda(u)) + \epsilon \leq \inf_{B(0,r)} (\Phi_\lambda(u)) + \epsilon < \inf_{\partial B(0,r)} (\Phi_\lambda(u)).$$

Ensuite, nous en déduisons que $u_\epsilon \in B(0, r)$.

Maintenant, on définit Λ_λ :$\overline{B(0, r)} \to \mathbb{R}$ par

$$\Lambda_\lambda(u) = \Phi_\lambda(u) + \epsilon \|u - u_\epsilon\|.$$

Il est clair que u_ϵ est un minimum de Λ_λ. Par conséquent, pour $t > 0$ assez petit et pour tout $v \in B(0,1)$,on a

$$\frac{\Lambda_\lambda\left(u_\epsilon + hv\right) - \Lambda_\lambda\left(u_\epsilon\right)}{h} \geq 0.$$

C'est-à-dire,

$$\frac{\Phi_\lambda\left(u_\epsilon + hv\right) - \Phi_\lambda\left(u_\epsilon\right)}{h} + \epsilon \left\|v\right\| \geq 0.$$

En laissant t tend vers ∞, on obtient

$$\Phi_\lambda^{'}\left(u_\epsilon + tv\right) + \epsilon \left\|v\right\| \geq 0.$$

Cela implique que

$$\left\|\Phi_\lambda^{'}\left(u_\epsilon\right)\right\| \leq \epsilon.$$

A partir des arguments évoqués ci-dessus, on déduit l'existence d'une suite $\{u_n\} \subset B(0,r)$, telle cette

$$\Phi_\lambda\left(u_n\right) \to \underline{c} < 0, \text{et} \quad \Phi_\lambda^{'}\left(u_n\right) \to 0. \tag{4.2.10}$$

Puisque $\{u_n\} \subset B(0,r)$, alors, $\{u_n\}$, est borné dans X. Donc, jusqu'à une sous-suite, il existe $u_2 \in X$, tel que $\{u_n\}$ converge faiblement vers $u_2 \in X$. Ainsi, par la preuve du lemme 4.2.3, on en déduit que $u_n \to u$ fortement dans X. Puisque $\Phi_\lambda \in C^1(X,\mathbb{R})$, alors

$$\Phi_\lambda^{'}\left(u_n\right) \to \Phi_\lambda^{\prime}\left(u_2\right), \text{quand } n \to \infty$$

Par conséquent, à partir de (4.2.10), nous concluons que

$$\Phi_\lambda^{'}\left(u_2\right) = 0, \left\|u_2\right\| < r, \text{ et } \Phi_\lambda\left(u_2\right) < 0. \tag{4.2.11}$$

Cela implique que u_2 est une solution non triviale pour le problème (0.1.1). Enfin, en combinant (4.2.9) et (4.2.11), on obtient

$$\Phi_\lambda\left(u_2\right) < 0 \ < \Phi_\lambda\left(u_1\right).$$

La preuve de théorème 4.2.1 est complète maintenant. ∎

Conclusion

Cette mémoire contient des résultats d'existence et de multiplicité de solutions non triviales d'équations elliptiques non locales avec condition sur la frontière de Steklov Neumann. Ces résultats sont obtenus en utilisant le théorème du col de montagne combiné avec le principe variationnel d'Ekeland.

En peut généralisé ces résultats pour des autres classe d'équations, en changeant l'opérateur ou la condition sur le bord.

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. A. Adams. Sobolev Spaces. Academic Press, New York, 1975.

[2] R. Alsaedi, A. Dhifli, A. Ghanmi, Low perturbations of p-biharmonic equations with competing nonlinearities, Complex Var. Elliptic Equ.,(2020) DOI :10.1080/17476933.2020.1747057.

[3] A. Ayoujil, On the superlinear Steklov problem involving the p(x)-Laplacian, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ., 38(2014), 1–13.

[4] M. Allaoui, A. R. El Amrouss and A. Ourraoui, Existence and multiplicity of solutions for a Steklov problem involving the p(x)-Laplace operator, Electron. J. Differential Equations, 132(2012), 1–12.

[5] Yu. A. Alkhutov, M. D. Surnachev, A Harnack inequality for a transmission problem with p(x)-Laplacian, Applicable Analysis, 98(1-2)(2019), 332-344.

[6] A. Ambrosetti, P. H. Rabinowitz, J. Funct. Anal., 14, 349-381 (1973).

[7] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems, (Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2007).

[8] K. Ben Ali, A. Ghanmi, K. Kefi, Minimax method involving singular p(x)-Kirchhoff equation, J. Math. Phys. 58, 111505(2017), https ://doi.org/10.1063/1.5010798.

[9] K. Ben Ali, A. Ghanmi, K. Kefi, On the Steklov problem involving the p(x)-Laplacian with indefinite weight, Opuscula Math. 37(6) (2017), 779-794.

[10] J. F. Bonder and J. D. Rossi, Existence results for the p-Laplacian with nonlinear boundary conditions, J. Math. Anal. Appl., 263(1)(2001), 195–223.

[11] H. Brezis, L. Nirenberg, Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol XLIV, 939-963 (1991).

[12] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson. Parie.

[13] J. Chabrowski, Y. Fu, Existence of solutions for p(x)-Laplacian problems on bounded domains, J. Math. Anal. Appl. 306 (2005), 604-618.

[14] Y. Chen, S. Levine, M. Rao,Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math. 66(4)(2006), 1383-1406.

[15] R. Chammem, A. Ganmi, A. Sahbani,Existance of solution for singular fractional Laplacian problem with variable exponents and indefinite weights. Complex Var. Elliptic Equ.,(2020) DOI : 10.1080/17476933.2020.1756270.

[16] R. Courant, Edited by : H. Bohr, R. Courant, J. J. Stoker, Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces, (Interscience Publishers, Inc, 250 Fifth Avenue, New York 1, N. Y. 1950).

[17] N. T. Chung, H. Q. Toan, On a class of fractional Laplacian problems with variable exponents and indefinite weights, Collect Math. 71(2019), 223-237.

[18] D. G. De Figueiredo, Lectures on The Ekeland Variational Principle with Applications and Detours, (Springer-Verlag, Heidelberg, West Germany 1989)

[19] L. Diening, P. H äst ö, A. Nekvinda, Open problems in variable exponent Lebesgue and Sobolev spaces, in : P. Drabek, J. Rakosnik (Eds.), FSDONA04, Proceedings, Milovy, Czech Republic, (2004), 38-58.

[20] I. Ekeland, Journal of Math. Anal. and Appl. 47, 324-353 (1974).

[21] I. Ekeland. On the variational principle. J. Math. Anal. Appl, 47 :323353, 1974.

[22] I. Ekincio ğlu and R.Ayazo ğlu , On Steklov Boundary Value Problems for p(x)-Laplacian equations, Electron. J. Math. Anal. Appl., 5(2)(2017) 289-297.

[23] L. C. Evans Partial differential equations, (American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2002).

[24] X. Fan, Q. Zhang, and D. Zhao, Eigenvalues of p(x)-Laplacian Dirichlet problem, J. Math. Anal. Appl., 302(2015), 306–317.

[25] X. Fan, D. Zhao, On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, J Math Anal Appl., 263(2001), 424–446.

[26] X.L. Fan, Q.H. Zhang, D. Zhao, Eigenvalues of p(x)-Laplacian Dirichlet problem, J. Math. Anal. Appl. 302 (2005), 306–317.

[27] Y. Jabri, The Mountain Pass Theorem : variants, generalizations and some applications, (Cambridge University Press, The Pitt Building, Trumpington Street, Cambridge, UK, 2003).

[28] T. C Halsey, Electrorheological fluids, Science, 258(1992), 761-766.

[29] O. Kavian, Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques. Springer-Verlag.

[30] M. T. Lacroix-Sonrier. Distributions, Espaces de Sobolev, Applications. Ellipses marketing, Paris, 1999.

[31] S. Martinez and J. D. Rossi, Weak solutions for the p-Laplacian with a nonlinear boundary condition at resonance, Electron. J. Differ. Equ., 27 (2003), 1-14.

[32] M. Mavinga, M.N. Nkashama, Steklov spectrum and nonresonance for elliptic equations with nonlinear boundary conditions, Electron. J. Differ. Equ., 19(2010), 197–205.

[33] R. A. Mashiyev, B. Çekiç, M. Avci., Z. Y ücedag, Existence and multiplicity of weak solutionsfor nonuniformly elliptic equations with nonstandard growth condition, Complex Var. Elliptic Equ., 57(5)(2012), 579-595.

[34] W. Orlicz, Uber konjugierte exponentenfolgen, Studia Math., 3(1931), 200-211.

[35] M. A. Ragusa, A. Tachikawa, Regularity for minimizers for functionals of double phase with variable exponents, Adv. Nonlinear Anal., 9(2020) 710-728.

[36] M. Ruzicka, Electrorheological fluids : modelling and mathematical theory, Lecture notes in math., Vol.1784. Berlin : Springer-Verlag, 2000.

[37] S. Samko, On a progress in the theory of Lebesgue spaces with variable exponent : Maximal and singular operators, Integral Transforms Spec.Funct., 16(2005), 461-482.

[38] W. NI. AND J. SERRIN, Nonexistence theorems for quasilinear partial dierential equations. Red.Circ. Mat. Palermo, suppl. Math. 8 (1985), 171-185.

[39] M. Spivak, Calculus on Manifolds, (Perseus Books Publishing, L. L. C., n.p. 1965).

[40] S. A. Terziân, Minimization and Mountain-Pass Theorems, (University of Ruse, Bulgarian.y.), September 2011.

[41] Z. Wei and Z. Chen, Existence results for the p(x)-Laplacian with nonlinear boundary condition, Applied Math., Article ID 727398, doi :10.5402/2012/727398, 2012.

[42] Z. Yücedag, Existence results for Steklov problem with nonlineair boundary condition, Middle east journal of science. 5(2)(2019), 2618-6136.

[43] V. V. Zhikov, Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, Math. USSR. Izv., 29(1987), 33–66.

[44] J. H. Zhao and P. H. Zhao, Infinitely many weak solutions for a p-Laplacian equation with nonlinear boundary conditions, Electron. J. Differ. Equ., 2007(2007), 1-14.