



République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la
Recherche Scientifique
Université Larbi Tébessi -Tébessa-
*Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la
Nature et de la Vie*
Département : Sciences de la Matière



N d'ordre :.....

Série :.....

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de

Doctorat en sciences

Option : *Physique théorique*

Thème

Etude des équations relativistes pour certaines formes d'interaction dans un espace courbé

Présenté par :

Houcine Aounallah

Devant le jury

Pr. Faïçal Chemam	Président	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Pr. Abdelmalek Boumali	Rapporteur	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>
Pr. Mekki Aouachria	Examineur	<i>Université de Batna</i>
Pr. Slimen Zaim	Examineur	<i>Université de Batna</i>
Pr. Mohamed Loutfi Benkhedir	Examineur	<i>Université Larbi-Tébessi, Tébessa</i>

Date de Soutenance : 10 Juillet 2019

© *Thèse effectuée au*
Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique



**Etude des équations relativistes pour
certaines formes d'interaction dans un
espace courbé**

Houcine Aounallah

ملخص

في هذه المذكرة قنا بدراسة الحركة الكمومية النسبية للجسيمات المشحونة في وجود كمون اهرانوف- بوهم و كولوم التي تنتجها العيوب الطوبولوجية مثل الجبال الكونية وأحادي القطب الكلي في الفضاء المتبادل و غير المتبادل، تم الحصول على التعبير على طاقات الحالة المرتبطة ودالة الموجة، تمت مناقشة صحة معيار باولي في تأثير اهرانوف- بوهم. كما تم دراسة تأثير العيوب الطوبولوجية في نظرية الشنت في الفضاء المتبادل و غير المتبادل.

Abstract

In this these, we analyze the relativistic quantum motion of a charged particles in the presence of an d'Aharonov-Bohm and Coulomb potentials in the space-times produced by an idealized cosmic string and global monopole in the commutative and the non-commutative spacetimes. Expressions are obtained for the bound state energies and wave functions. The validity of the Pauli criterion in the Aharonov-Bohm effect is well discussed. In addition, we have study the effect of the topological defects on the diffusion theory for both commutative and the non-commutative spacetimes.

Résumé

Dans cette thèse, nous analysons le mouvement quantique relativiste de particules chargées en présence de potentiels d'Aharonov-Bohm et Coulomb dans l'espace-temps produit par les défauts topologiques tels que les cordes cosmique et les monopoles globale dans un espace commutatif et noncommutatif. Des expressions sont obtenues pour les énergies d'état liées ainsi que les fonctions d'onde. L'influence de l'effet d'Aharonov-Bohm sur la validité du critère de Pauli a été aussi discutée. Aussi, nous avons dictuté l'effet de défauts topologique dans la théorie du diffusion dans un espace commutatif et noncommutatif.

Dédicace

*A mes parents,
A ma famille,
A mes amis,*

Je dédie cet humble travail.

Remerciements

Je veux remercier très chaleureusement toutes les personnes qui ont collaboré de près ou de loin à ce travail ainsi que toutes les personnes qui ont contribué à ma formation durant ces années et qui ont été d'un grand apport sur le plan de l'enrichissement de mon savoir individuel et intellectuel.

D'abord, je veux remercier de façon particulière mon Promoteur, Professeur Abdelmalek Boumali pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant volontiers de m'encadrer, pour sa patience, ses conseils précieux, ses encouragements incessants jusqu'à l'achèvement de cet écrit.

J'adresse mes vifs remerciements aux membres du jury Professeur Chemam Faïçal président de jury, Professeur Benkhedir Mohamed-Loutfi, Professeur Mekki Aouachrai et Professeur Slimen Zaim pour avoir accepté d'examiner ma thèse.

Je veux remercier tous les personnes du Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique.

Table des matières

ملخص	i
Abstract	ii
Résumé	iii
Dédicace	iv
Remerciements	v
Liste des Tableaux	ix
Liste des Figures	x
Liste des symboles	xiii
Les Chapitres	
Introduction	1
Les Chapitres	
1 Les équations relativistes dans un espace-temps courbé	5
1.1 Formalisme et notation de l'espace-temps courbé	5

1.1.1	Formalisme tensoriel	6
1.1.2	Introduction de vierbein	7
1.1.3	connexions de spin	8
1.1.4	Le tenseur de torsion	10
1.1.5	Le tenseur de Courbure	10
1.1.6	Le tenseur d'Einstein	12
2	Les bosons scalaires en présence des défauts topologiques	13
2.1	L'équation de DKP en présence des cordes cosmiques	13
2.1.1	Les solutions dans un espace commutatif	17
2.1.2	les solutions dans un espace non-commutatif	19
2.2	L'équation de DKP en présence d'un monopole global	23
2.2.1	Solutions dans un espace commutatif	25
2.2.2	Solutions dans un espace non-commutatif	28
2.3	Discussion des résultats	30
3	Les bosons vecteurs en présence des défauts topologiques	31
3.1	L'équation de DKP en présence des cordes cosmiques	31
3.1.0.1	<i>cas de</i> $P = (-1)^{j+1}$:	35
3.1.0.2	<i>cas de</i> $P = (-1)^j$:	36
3.1.1	Solutions dans un espace commutatif	38
3.1.1.1	<i>cas de</i> $P = (-1)^{j+1}$:	38
3.1.1.2	<i>cas de</i> $P = (-1)^j$:	40
3.1.2	Solutions dans un espace non-commutatif	41
3.1.2.1	<i>cas de</i> $P = (-1)^{j+1}$	41
3.1.2.2	<i>cas de</i> $P = (-1)^j$	44
3.2	L'équation de DKP en présence d'un monopole global	46
3.2.0.1	<i>cas de</i> $P = (-1)^{j+1}$	46
3.2.0.2	<i>cas de</i> $P = (-1)^j$	47
3.2.1	Solutions dans un espace commutatif	48
3.2.1.1	<i>cas de</i> $P = (-1)^{j+1}$:	48

3.2.1.2	<i>cas de $P = (-1)^j$</i> :	48
3.2.2	Solutions dans un espace non-commutatif	48
3.2.2.1	<i>cas de $P = (-1)^{j+1}$</i> :	48
3.2.2.2	<i>cas de $P = (-1)^j$</i>	49
3.3	Discussion des résultats	50
4	Calcul de La section efficace de l'équation de DKP	52
4.1	Les particules bosoniques scalaires	52
4.1.1	L'équation de DKP de spin 0 en présence des cordes cosmiques . .	52
4.1.2	L'équation de DKP de spin 0 en présence d'un monopole global . .	58
4.2	Les particules bosoniques vectorielles	59
4.2.1	L'équation de DKP de spin 1 en présence des cordes cosmiques . .	59
4.2.1.1	<i>cas de $P = (-1)^{j+1}$</i> :	59
4.2.1.2	<i>cas de $P = (-1)^j$</i>	60
4.2.2	L'équation de DKP de spin 1 en présence d'un monopole global . .	61
4.2.2.1	<i>cas de $P = (-1)^{j+1}$</i>	61
4.2.2.2	<i>cas de $P = (-1)^j$</i>	61
4.3	Discussion des résultats	62
	Conclusion	63
A	L'effet électromagnétique du potentiel d'Aharonov-Bohm	65
A.0.1	La théorie classique	65
A.0.2	Transformation de jauge	66
A.0.3	Théorie quantique	67
A.0.4	La phase dans une région sans champ	68
A.0.5	L'équation de Schrödinger	68
A.1	Critère de Pauli et effet de vecteur d'Aharonov-Bohm	69
A.1.1	Cas non-relativiste	70
A.1.2	Règle de commutations En présence de défauts topologiques . . .	72

B Liste des articles

83

Liste des tableaux

Table	page
Table	page

Liste des Figures

Figure	page
Figure	page

Liste des symboles

j^μ Le quadricourant

A^ν Le quadripotentiel

ψ_{DKP} La fonction d'onde de l'équation DKP

\square Le dalembertien

(DO) L'oscillateur de Dirac

$H_n(x)$ La Fonction de Hermite

DKP L'équation de Duffin-Kemmer-Petiau

β Les matrices de Kemmer

$\vec{\alpha}$ Les matrices de Dirac

Δ Laplacien

ψ_{KG} La fonction d'onde de Klein-Gordon

ψ_{DKP} La fonction d'onde de Kemmer

$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ Symboles de Christoffel

e_μ^a les tétrades de l'espace

η^a_b La métrique de l'espace Minkowskien

$g_{\mu\nu}$ Le tenseur fondamental

$\vec{\gamma}$ Les matrices gamma de Dirac

$\omega^a_{\mu b}$ connection de spin

D_σ fonction de Wigner

$G_{\mu\nu}$ Le tenseur d'Einstein

KGO L'oscillateur de Klein-Gordon

L_n^{2s+1} fonction de Laguerre

NO espace non commutatif

Introduction

La mécanique quantique a maintenant plus de cent ans, à commencer par la description par Max Planck, en 14 décembre 1900, du problème des radiations par corps noir et par le texte d'Albert Einstein en 1905 sur la théorie quantique pour expliquer l'effet photo-électrique. Cependant, la théorie quantique a été reformulée vers 1925 avec les relations de commutation de Heisenberg ou algèbre de l'espace de phases et le principe d'incertitude associé. L'une des caractéristiques fondamentales est de traiter avec des opérateurs qui ne commutent pas, plus précisément, les relations de commutations entre les positions et les moments.

Dans la dynamique relativiste, les solutions exactes des équations relativistes [1–10] sont très importantes en raison de la compréhension de la physique que de telles solutions peuvent apporter. Ces solutions sont des outils précieux pour déterminer les contributions radiatives à l'énergie. L'étude des systèmes quantiques dans des espaces-temps courbes remonte à la fin des années vingt et au début des années trente du siècle dernier [11–15], lorsque la généralisation des équations de Schrödinger et de Dirac aux espaces courbes a été discutée, motivée par idée de construire une théorie combinant physique quantique et relativité générale.

La théorie générale de la relativité, en tant que théorie métrique, prédit que la gravitation se manifeste par la courbure de l'espace-temps. Cette courbure est caractérisée par le tenseur de Riemann. D'autre part, nous savons qu'il existe des liens entre les propriétés

topologiques de l'espace et les lois physiques locales, de sorte que la géométrie intrinsèque locale de l'espace ne suffit pas pour décrire complètement la physique d'un système donné. Comme exemple d'effet gravitationnel d'origine topologique, nous pouvons mentionner le fait que ce n'est que lorsqu'une particule est transportée autour d'une corde cosmique le long d'une courbe fermée qu'elle est remarquée. Cette situation correspond à l'analogie gravitationnel [16] de l'effet électromagnétique d'Aharonov-Bohm (AB) [17], dans lequel des électrons sont transmis au-delà d'un solénoïde contenant un champ magnétique. Ces effets sont d'origine topologique plutôt que locale. En fait, la topologie non triviale de l'espace-temps, ainsi que sa courbure, conduit à un certain nombre d'effets gravitationnels intéressants. Par conséquent, il est également important d'étudier le rôle joué par une topologie non triviale, par exemple, sur un système quantique. Comme exemples de ces recherches, nous pouvons citer l'étude de la diffusion topologique dans le contexte de la mécanique quantique sur un cône [18, 19], et les recherches sur l'interaction d'un système quantique avec des singularités coniques [20, 21] et sur la mécanique quantique sur défauts topologiques de l'espace temps [22–24].

Le rôle joué par la topologie dans les propriétés physiques d'une variété de systèmes a été une question très importante dans les domaines de recherche comme étant différents entre eux comme la théorie de la gravitation et la physique de la matière condensée, par exemple. Les défauts topologiques apparaissent dans la gravitation comme des monopoles, des cordes et des murs [25]. Dans la physique de la matière condensée, ce sont des tourbillons dans les supraconducteurs ou les superfluides, les murs de domaine dans les matériaux magnétiques [26], les solitons dans les polymères quasi-unidimensionnels [27] et les dislocations ou les divulgations dans les solides désordonnés ou les cristaux liquides [28]. La modification de la topologie d'un médium introduit par un défaut linéaire tel qu'une image dans un solide élastique ou une chaîne cosmique dans l'espace-temps a de forts effets sur les propriétés physiques du moyen [29, 30]. Cette similitude entre les divulgations et les cordes cosmiques va au-delà de la topologie : pour certaines applications, les deux types de défauts peuvent être traités par les mêmes méthodes géométriques [31].

Le sujet est l'étude des propriétés, de l'évolution et des implications cosmologiques des défauts topologiques tels que les cordes cosmiques, parois de domaines, monopoles et

textures. Ce domaine de recherche s'est énormément développé au cours de la dernière décennie et demeure l'un des domaines les plus actifs de la cosmologie moderne. L'intérêt croissant pour les défauts topologiques a au moins une triple motivation : d'abord, les défauts apparaissent dans une large classe de modèles de particules élémentaires. Ils sont inévitablement formés au cours des transitions de phase dans l'univers primitif, et leur évolution ultérieure et les signatures d'observation doivent donc être comprises. Deuxièmement, la cosmologie observationnelle a posé un certain nombre d'énigmes perplexes, allant de l'origine de la structure à grande échelle à l'asymétrie baryonique de l'univers. Des solutions crédibles pour certaines de ces énigmes cosmiques ont invoqué des défauts topologiques d'un genre ou d'un autre. Enfin, outre leurs possibles rôles astrophysiques, les défauts topologiques sont des objets fascinants à part entière. Leurs propriétés, très différentes de celles de systèmes plus familiers, peuvent donner naissance à une riche variété de phénomènes physiques inhabituels.

La première classification des défauts topologiques et une discussion de leur évolution ont été données par Kibble en 1976. Depuis lors, on a beaucoup appris sur l'évolution et les conséquences cosmologiques de divers défauts topologiques. Les défauts topologiques sont prédits dans certaines théories unifiées des interactions fondamentales. Des exemples de tels défauts topologiques sont la paroi de domaines, la corde cosmique et le monopôle, dans cette thèse, nous étudions l'équation Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) dans les défauts topologiques c'est : la corde cosmique, et le monopôle.

L'idée de la géométrie non commutatives (NC) est une ancienne, Heisenberg a proposé dans une lettre à Peierls pour résoudre le problème des intégrales divergentes dans la théorie relativiste de champ quantique. L'idée s'est propagée via Pauli à Oppenheimer. Enfin, H. S. Snyder, un étudiant d'Oppenheimer, a publié la première analyse systématique d'une théorie quantique construite sur des espaces non-commutatifs [32]. Pauli a appelé ce travail mathématiquement ingénieux mais l'a rejeté pour des raisons de physique. Le but de notre travail est d'examiner l'équation de DKP dans l'espace non commutatif avec le potentiel de \mathbf{AB} et de Coulomb. Dans le cadre de la non-commutativité, la situation est plus compliquée et la plupart des modèles ne peuvent pas être résolus avec précision. Du fait de l'absence d'une solution analytique exacte, nous utiliserons dans nos calculs la

théorie de la perturbation simple mais riche [33, 34].

L'effet d'Aharonov-Bohm (AB) [17], qui prétend établir l'importance physique des potentiels de vecteurs en mécanique quantique (mais d'abord prédit par Ehrenberg et Sidday [35]), reste un sujet de controverse. Bocchieri et Loinger [36] ont notamment nié l'existence même de l'effet AB, tandis que Henneberger [37] a mis en cause son interprétation originale d'AB [17]. Plus précisément, bien que la solution de Henneberger permette l'existence de l'effet AB, elle ne conduit pas à la diffusion de AB, c'est-à-dire que la section efficace correspondante pour la diffusion d'une particule chargée sur un solénoïde inaccessible est égale à zéro. On trouvera une longue liste de références concernant l'effet AB et la controverse qui l'entoure dans l'article de Ruijsenaars [38], qui analyse en détail l'analyse classique d'Aharonov-Bohm (AB) et le point de vue de Henneberger.

L'équation DKP est une équation d'onde relativiste qui décrit les particules de spin-0 et de spin-1, et elle est une généralisation directe aux particules de spin entier de Dirac dans laquelle on remplace les matrices gamma par des métriques bêta, les quatre matrices β satisfaisant Algèbre de Kemmer [39–42]. L'équation de DKP a suscité un intérêt croissant, par exemple dans la théorie de la chromodynamique quantique [43], la théorie de l'approche causale [44], la covariance galiléenne à cinq dimensions [45], la formulation de la dynamique covariante hamiltonienne dans la théorie des champs [46].

L'objectif principal de ce travail est de résoudre l'équation DKP en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm (AB) et Coulomb dans un champ gravitationnel des défauts topologiques.

La thèse comporte trois chapitres : Dans le premier chapitre, nous présentons un formalisme mathématique, deuxième chapitre l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) de spin-0 en présence des défauts topologiques, le troisième nous présentons l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) de spin-1 en présence des défauts topologiques. Enfin, nous terminons notre étude par une conclusion globale.

Les équations relativistes dans un espace-temps courbé

La relativité générale est la théorie de l'espace, du temps et de la gravitation formulée par Einstein en novembre 1915 et indépendamment par Hilbert. Elle a été développée pour la gravitation dirigée centralement et a été vérifiée pour la première fois par l'expérience Eddington [47]. Elle est souvent considérée comme une théorie très abstraite et difficile, en partie à cause du nouveau point de vue introduit sur la nature de l'espace-temps car cela va à l'encontre de certaines notions intuitives et profondément enracinées, et en partie parce que les mathématiques nécessaires à une formulation précise des idées et des équations de la relativité générale (par exemple "gravité" est une manifestation de la courbure de l'espace-temps) et la plus connue étant l'utilisation de la géométrie différentielle dans la théorie de la relativité d'Einstein qui ne sont pas familières à la plupart des physiciens.

Pour explorer cette voie plus avant, nous devons acquérir les connaissances mathématiques relatives à ces espaces courbes et d'introduire les tenseurs qui ont été utilisés dans notre travail [48–52], puis étudier l'effet d'Aharonov Bohm [17].

1.1 Formalisme et notation de l'espace-temps courbé

La théorie générale de la relativité exige un espace courbé à 4 dimensions : trois d'espace, une de temps pour la description du monde physique, pour cela Einstein a supposé que

l'espace physique est de cette nature et a ainsi jeté les bases de sa théorie de la gravitation, pour cela, dans cette section nous allons donner un aperçu de la géométrie qui est utilisée en relativité générale, cette géométrie a été un grand progrès dans la compréhension de l'expansion de l'espace et de la forme de l'univers.

1.1.1 Formalisme tensoriel

L'espace-temps Minkowskien est un espace affine à quatre dimensions dont l'espace vectoriel réel associé est muni d'un produit scalaire ; cela signifie qu'il existe une base des coordonnées $\{e_\mu\}$, ($\mu = 0, 1, 2, 3$) désigne une tétrade (vierbein) de l'espace vectoriel telle que

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu}, \quad (1.1)$$

$\eta_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique relatif à l'espace-temps de Minkowski, avec

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

On peut alors définir une fonction $f(x)$, En différenciant cette fonction, nous obtenons

$$\begin{aligned} df(x) &= \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Nous utilisons la convention d'Einstein pour la sommation des indices répétés, la dernière relation peut être réécrite comme

$$df(x) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu, \quad (1.4)$$

On pose

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (1.5)$$

alors la différentielle df devient comme suit

$$df(x) = \partial_\mu f(x) dx^\mu. \quad (1.6)$$

Puisque l'équation (1.6) est vraie pour toute fonction définie sur un voisinage du point donné, le symbole de la fonction peut être omis, de sorte que nous puissions écrire

$$dx \equiv e_\mu dx^\mu, \quad (1.7)$$

avec

$$e_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad (1.8)$$

le changement de système de coordonnées de la base $\{e_\mu\}$ à la base $\{e_\nu\}$ en M à l'aide de relations du type

$$e_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} e_\nu. \quad (1.9)$$

1.1.2 Introduction de vierbein

Il est certain que ce qui va nous intéresser ce sont les propriétés géométriques (les invariants) qui sont indépendantes des coordonnées arbitraires, le carré de la distance infinitésimale entre le point x^μ et un point infiniment voisin $x^\mu + dx^\mu$ s'écrit formellement

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu. \quad (1.10)$$

Nous avons choisi une base de nos vecteurs $\{e_\mu^a, e_\nu^b\}$, dans cette base les composantes de tenseur $g_{\mu\nu}$ est défini en tétrades $e_\mu^a(x)$ par

$$g_{\mu\nu} = \eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (1.11)$$

Ou de manière équivalente, nous avons

$$\eta^{ab} = g^{\mu\nu} e_\mu^a e_\nu^b. \quad (1.12)$$

Pour obtenir e'_b l'inverse de e^a_μ , utilisant les relations d'orthogonalité qui est défini par les relations

$$e^\mu_a e^a_\nu = \delta^\mu_\nu, \quad (1.13)$$

$$e^a_\mu e^\mu_b = \delta^a_b, \quad (1.14)$$

δ^μ_ν est le tenseur mixte invariant (Symbole de Kronecker).

1.1.3 connexions de spin

La quadrivecteur \mathbf{A} aura pour composantes covariantes dans la base des $\{e_\mu\}$

$$\mathbf{A} = A^\mu \cdot e_\mu, \quad (1.15)$$

la différentielle d'un quadrivecteur \mathbf{A}

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= d(A^\mu \cdot e_\mu) \\ &= (dA^\mu) e_\mu + A^\mu de_\mu. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Utilisons les relations (1.6) et (1.9), on trouve que

$$\begin{aligned} d\mathbf{A} &= \partial_\nu A^\mu dx^\nu e_\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda dx^\nu e_\mu \\ &= (\partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda) dx^\nu e_\mu. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Les symboles de Christoffel $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ (appelé aussi les coefficients de connexion) sont symétriques

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\nu}. \quad (1.18)$$

On définit la dérivée covariante du champ de vecteurs A^μ par la formule

$$\nabla_\nu A^\mu = \partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} A^\lambda. \quad (1.19)$$

Pour calculer explicitement les $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$, il suffit de partir de la différentielle du tenseur métrique

$$dg_{\mu\nu} = d(e_\mu \cdot e_\nu)$$

$$= (\Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\mu\lambda}) dx^\rho = \partial_\rho g_{\mu\nu} dx^\rho. \quad (1.20)$$

Donc

$$\partial_\rho g_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\rho}^\lambda g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\rho}^\lambda g_{\mu\lambda}. \quad (1.21)$$

De même manière on trouve que

$$\partial_\mu g_{\rho\nu} = \Gamma_{\rho\mu}^\lambda g_{\lambda\nu} + \Gamma_{\nu\mu}^\lambda g_{\rho\lambda}, \quad (1.22)$$

$$\partial_\nu g_{\mu\rho} = \Gamma_{\mu\nu}^\lambda g_{\lambda\rho} + \Gamma_{\rho\nu}^\lambda g_{\mu\lambda}, \quad (1.23)$$

A partir les équations (1.22) et (1.23), on trouve que

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}). \quad (1.24)$$

Ainsi, on trouve que

$$\nabla_\nu A_\mu = \partial_\nu A_\mu - \Gamma_{\mu\nu}^\lambda A_\lambda. \quad (1.25)$$

Maintenant, trouvez le même objet de manière mixte et converti en base de coordonnées :

$$\begin{aligned} \nabla_\mu X^a &= \partial_\mu X^a + \omega_{\mu b}^a X^b \\ &= \partial_\mu (e_\nu^a X^\nu) + \omega_{\mu b}^a e_\lambda^b X^\lambda \\ &= e_a^\sigma (e_\nu^a \partial_\mu X^\nu + X^\nu \partial_\mu e_\nu^a + \omega_{\mu b}^a e_\lambda^b X^\lambda) \\ &= \partial_\mu X^\nu + e_a^\nu \partial_\mu e_\lambda^a X^\lambda + e_a^\nu e_\lambda^b \omega_{\mu b}^a X^\lambda. \end{aligned} \quad (1.26)$$

La comparaison avec l'équation (1.8) donne

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\nu = e_a^\nu \partial_\mu e_\lambda^a + e_a^\nu e_\lambda^b \omega_{\mu b}^a. \quad (1.27)$$

d'une façon équivalente

$$\omega_{\mu b}^a = e_\nu^a e_b^\lambda \Gamma_{\mu\lambda}^\nu - e_b^\lambda \partial_\mu e_\lambda^a, \quad (1.28)$$

Un peu de manipulation nous permet d'écrire cette relation comme la disparition de la dérivé covariant du tétrade,

$$\nabla_{\mu} e_{\nu}^a = \partial_{\mu} e_{\nu}^a - \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} e_{\lambda}^a + \omega_{\mu b}^a e_{\nu}^b = 0. \quad (1.29)$$

1.1.4 Le tenseur de torsion

Le tenseur de torsion, qui est parfois connu sous le nom de "postulat tetrad". Notez que cela est toujours vrai. En base de coordonnées les connexions de spin données par

$$\omega_b^a = \omega_{\mu b}^a dx^{\mu}. \quad (1.30)$$

La première équation de structure de Cartan, est une équation fondamentale de géométrie différentielle dérivée en premier lieu de Cartan. Il définit la forme de torsion comme la dérivé extérieur covariant de la forme tétrade, les relations déterminantes pour la torsion et la courbure sont alors

$$T^a = de^a + \omega_b^a \wedge e^b. \quad (1.31)$$

Le tenseur de torsion de la géométrie de Riemann peut aussi être écrite explicitement en fonction de connexion affine par

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu}^{\lambda} &= e_a^{\lambda} T_{\mu\nu}^a \\ &= e_a^{\lambda} (\partial_{\mu} e_{\nu}^a - \partial_{\nu} e_{\mu}^a + \omega_{\mu b}^a e_{\nu}^b - \omega_{\nu b}^a e_{\mu}^b) \\ &= \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Avec la condition de torsion

$$\omega_b^a \wedge e^b = -de^a. \quad (1.33)$$

1.1.5 Le tenseur de Courbure

D'autre part, on définit le tenseur $R_{\nu\rho\sigma}^{\beta}$, on l'appelle le tenseur de Riemann-Christoffel ou le tenseur de courbure, les composants de ce tenseur est formulé à l'aide des symboles de

Christoffel par la formule suivante

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} = \partial_{\rho}\Gamma_{\nu\sigma}^{\beta} - \partial_{\sigma}\Gamma_{\nu\rho}^{\beta} + \Gamma_{\nu\sigma}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\rho}^{\beta} - \Gamma_{\nu\rho}^{\alpha}\Gamma_{\alpha\sigma}^{\beta}, \quad (1.34)$$

le tenseur $R_{\nu\rho\sigma}^{\beta}$ vérifie les symétries suivante

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} = -R_{\nu\sigma\rho}^{\beta}. \quad (1.35)$$

L'identité suivante est dite l'identité cyclique :

$$R_{\nu\rho\sigma}^{\beta} + R_{\rho\sigma\nu}^{\beta} + R_{\sigma\nu\rho}^{\beta} = 0. \quad (1.36)$$

D'autres symétries apparaissent maintenant, à savoir,

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma}. \quad (1.37)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\nu\mu} = R_{\sigma\rho\nu\mu}. \quad (1.38)$$

Les composantes du tenseur de Ricci se déduisent par contraction

$$R_{\nu\rho\mu}^{\mu} = R_{\nu\rho}, \quad (1.39)$$

en multipliant (1.31) par $g^{\mu\sigma}$ on trouve

$$R_{\nu\rho} = R_{\rho\nu}. \quad (1.40)$$

Un autre fois on trouve

$$g^{\nu\rho}R_{\nu\rho} = R. \quad (1.41)$$

R est le scalaire de Ricci et est appelé la courbure scalaire ou la courbure totale qui possède les propriétés suivantes :

- Si l'espace est plat, le scalaire de Ricci est nul.
- Si l'espace est courbé comme une sphère, le scalaire de Ricci est positif.
- Si l'espace est courbé comme une selle de cheval, le scalaire de Ricci est négatif.

1.1.6 Le tenseur d'Einstein

Le tenseur d'Einstein qui est donc une constante dans un espace Riemannien donné est dès lors défini par la forme covariante

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (1.42)$$

Il est symétrique

$$G_{\mu\nu} = G_{\nu\mu}. \quad (1.43)$$

Le tenseur est donc construit pour une métrique uniquement Riemannienne, et est automatiquement non divergent

$$\nabla_{\mu}G_{\mu\nu} = 0. \quad (1.44)$$

Ce tenseur a conduit Einstein pour obtenir les équations d'Einstein qui relient la géométrie de l'espace-temps à la distribution de matière, décrite par le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$, comme suit

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \quad (1.45)$$

la constante de proportionnalité κ , appelée constante d'Einstein.

Les bosons scalaires en présence des défauts topologiques

2.1 L'équation de DKP en présence des cordes cosmiques

Dans un espace plat, l'équation de DKP libre s'écrit par [39–42]

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - \frac{Mc}{\hbar})\psi = 0, \quad (2.1)$$

dont les matrices β^μ , avec $(\mu = 0, 1, 2, 3)$, satisfait les relations de commutation suivants :

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\rho + \eta^{\rho\nu} \beta^\mu, \quad (2.2)$$

$$(\beta^\mu)^3 = \eta^{\mu\mu} \beta^\mu, \quad \mu = \nu = \rho \quad (2.3)$$

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho = 0, \quad \mu \neq \nu \neq \rho \quad (2.4)$$

$$(\beta^\mu)^2 \beta^\rho + \beta^\rho (\beta^\mu)^2 = \eta^{\mu\mu} \beta^\rho, \quad \mu = \nu \neq \rho \quad (2.5)$$

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\mu = 0, \quad \mu = \rho \neq \nu \quad (2.6)$$

où $\eta^{\mu\nu}$ est le tenseur métrique espace-temps de Minkowski (pour plus d'information voir l'article de Kemmer [1, 2, 41] et la thèse de Boumali [53]). En ce qui suit, Les matrices β^μ

sont choisies comme suit [54]

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \nu & \tilde{0} \\ \tilde{0}_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \beta^i = \begin{pmatrix} \hat{0} & \rho^i \\ -\rho^i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (2.7)$$

où $\hat{0}$, $\tilde{0}$, $\mathbf{0}$ sont des matrices nulles de dimensions 2×2 , 2×3 , 3×3 respectivement, et avec

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Dans un espace courbé, avec le champ externe l'équation DKP donnée par la formule [4, 55, 56]

$$\left\{ i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S^{ab} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu \right) - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \Psi = 0, \quad (2.9)$$

avec $S^{ab} = [\beta^a, \beta^b]$, $\omega_{\mu ab}$ sont les connexions de spin, et enfin $\tilde{\beta}^\mu$ sont les matrices de DKP satisfaisant à la relation

$$\tilde{\beta}^\mu = e_{(a)}^\mu \beta^a, \quad (2.10)$$

avec les relations suivantes

$$e_{(a)}^\mu e_{(a)}^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{ab}, \quad (2.12)$$

$$e_{(a)}^\mu e_{(\mu)}^{(b)} = \delta_{ab}. \quad (2.13)$$

Les connexions de spin $\omega_{\mu ab}$ peuvent être écrites en fonction des symboles de Christoffel $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ comme suit

$$\omega_{\mu ab} = e_{(a)l} e_{(b)}^j \Gamma_{j\mu}^l - e_{(b)}^j \partial_\mu e_{(a)j}, \quad (2.14)$$

avec

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{g^{\mu\rho}}{2} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}), \quad (2.15)$$

sont les symboles de Christoffel [57]. D'autre part, on peut aussi calculer les connexions de spin en utilisant l'équation de structure de Maurer-Cartan dont

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0. \quad (2.16)$$

Pour le cas d'une corde cosmique dont [20, 58-61]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - a'^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (2.17)$$

avec $-\infty < t < +\infty, 0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, le paramètre $a' = 1 - \frac{4G}{c^2}u$ est le déficit angulaire défini dans la l'intervalle $(0, 1]$, et enfin u représente la densité de masse linéaire de la corde cosmique, Les connexions de spin sont ainsi calculées, et données comme suit [5, 62]

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & a' \cos \theta \\ -a' \sin \theta & -a' \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

où les tétrades $e_{(a)}^\mu$ sont choisis pour être

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a' r \sin \theta} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Le cas particulier $a' = 1$ donne l'espace de Minkowski en coordonnées sphériques.

Maintenant, revenons à notre cas : l'équation de DKP dans un potentiel d'Aharonov-Bohm et en présence d'un potentiel Coulombien est

$$\left\{ \frac{\beta^0}{\hbar c} \left(E - \frac{kq}{r} \right) + i\beta^1 \partial_r + \frac{i\beta^2}{r} (\partial_\theta - \beta^2 \beta^1) + \frac{i\beta^3}{a' r \sin \theta} [(\partial_\varphi - ia') - a' \sin \theta \beta^3 \beta^1 - a' \cos \theta \beta^3 \beta^2] - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \psi = 0. \quad (2.20)$$

Ici le vecteur de potentiel **AB** prend la forme (Voir l'annexe A)

$$A_0 = \frac{kq}{r}, \quad A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin \theta}. \quad (2.21)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons les coordonnées sphériques, et on suppose

que l'axe de la solénoïde coïncident avec l'axe oz. Ainsi, partons de la fonction d'onde ψ suivante

$$\psi_{DKP} = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T. \quad (2.22)$$

Insérerons cette équation dans l'équation (2.20), et après un calcul algébrique, on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \psi_2 - i \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \psi_3 - \frac{i}{r} \left(\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) \psi_4 \\ - \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \psi_5 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_1, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_2, \quad (2.24)$$

$$i\partial_r \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_3, \quad (2.25)$$

$$\frac{i}{r} \partial_\theta \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_4, \quad (2.26)$$

$$\frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_5. \quad (2.27)$$

En mettant les équations (2.24), (2.25), (2.26), (2.27) dans l'équation (2.23), on trouve

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right\} \psi_1 = 0, \quad (2.28)$$

Ici

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{a'^2 \sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right\}, \quad (2.29)$$

$$L_z = -\frac{i\hbar}{a'} \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right), \quad (2.30)$$

$$l = |\lambda| + n', \quad (n' = 0, 1, 2, \dots), \quad \lambda = \frac{m - \alpha}{a'}, \quad (2.31)$$

avec l sont les valeurs propres communes entre L_z et L^2 respectivement : on note que ces valeurs propres dépendent du flux magnétique m_0 et du paramètre géométrique de l'espace a' .

Pour résoudre l'équation (2.28), posons que

$$\psi_1 = \frac{R(r)}{r} \chi(\theta, \varphi), \quad (2.32)$$

on trouve alors

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} - \frac{l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R(r) = 0. \quad (2.33)$$

Avant de solutionner cette équation différentielle, on distingue deux cas : les solutions dans un espace commutatif et non-commutatif.

2.1.1 Les solutions dans un espace commutatif

Dans cette section, nous sommes intéressés à résoudre l'équation (2.33) dans un espace commutatif. Pour cela, on utilise les substitutions suivantes

$$\rho = \xi r, \quad \xi^2 = \frac{4(M^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2}, \quad (2.34)$$

$$\gamma = \frac{kq}{\hbar c}, \quad \zeta = \frac{2\gamma E}{\hbar c \xi}, \quad (2.35)$$

l'équation (2.33) transformera à l'équation suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(-\frac{l(l+1) - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{\zeta}{\rho} - \frac{1}{4} \right) \right\} R(\rho) = 0, \quad (2.36)$$

Utilisant le changement

$$R(\rho) = N \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} u(\rho), \quad (2.37)$$

alors, l'équation (2.36) est réduite à l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + (2(s+1)\rho - \rho^2) \frac{du(\rho)}{d\rho} \\ & + [(s(s+1) - (l(l+1) - \gamma^2)) - (\zeta + s + 1)\rho] u(\rho) = 0, \end{aligned} \quad (2.38)$$

avec

$$s(s+1) = l(l+1) - \gamma^2, \quad (2.39)$$

ou

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}. \quad (2.40)$$

On trouve ainsi que

$$R_n(\rho) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - E^2)n!}}{(c\hbar) 2(n+s+1)\Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}, \quad (2.41)$$

dont

$$s + \varsigma + 1 = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.42)$$

Concernant le spectre d'énergie, on obtient

$$E_n = \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\left|\frac{m-\alpha}{a'}\right| + \kappa + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right)^2}}}. \quad (2.43)$$

Maintenant, en ce qui concerne la fonction d'onde totale, nous avons deux conditions

- Pour le cas du sous-espace S_+ , où $\lambda_1 > 0$ et $l_1 = \lambda_1 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_1 l_1} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar}\right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r}\right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r}\partial_\theta \\ \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (2.44)$$

avec

$$\psi_1 = N_{norm} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (2.45)$$

- Pour le cas du sous-espace S_- , où $\lambda_2 < 0$ et $l_2 = -\lambda_2 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_2 l_2} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar}\right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r}\right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r}\partial_\theta \\ \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (2.46)$$

avec

$$\psi_1 = N_{norm} P_{l_2}^{\lambda_2} (\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (2.47)$$

2.1.2 les solutions dans un espace non-commutatif

Le mathématicien Alain Connes, comme Riemann au XIXe siècle, a introduit une nouvelle généralisation de la géométrie, dite non commutative, qui permet peut-être de combiner les équations de la relativité générale d'Einstein avec celle du modèle standard des particules élémentaires, mais aussi d'expliquer l'origine du boson de Higgs.

Dans cette section, nous étudions les coordonnées non commutatives en remplaçant le produit commutative des fonctions des opérateurs $f(x)g(x)$ par le produit star de Moyal $f(x) * g(x)$, cette approche a stimulé une grande quantité de recherche de la géométrie non commutative et de son utilisation en physique théorique, surtout la gravité quantique et la théorie des cordes.

Ainsi, on définit produit star de Moyal $f(x) * g(x)$ par [63–65]

$$f(x) * g(x) = f(x) \exp \left[\frac{i}{2} \Theta_{ij} \overleftarrow{\partial}_i \overrightarrow{\partial}_j \right] g(x), \quad (2.48)$$

dont la position et l'impulsion satisfaisant les relations de commutation suivantes (Θ_{ij} constant) [64–66]

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\Theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \quad (2.49)$$

Maintenant, en utilisant le décalage de Bopp (Bopp shift) pour relier les variables non commutatives aux variables commutatives, on trouve

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{1}{2} \Theta_{ij} p_j, \quad (2.50)$$

$$\hat{p}_i = p_i. \quad (2.51)$$

où Θ_{ij} sont des éléments matriciels antisymétriques qui contrôlent la non-commutativité de l'espace-temps, et \hat{r} déterminé jusqu'au premier ordre dans les paramètres de non commutativité comme suit

$$\hat{r} = r - \frac{L\Theta}{4\hbar r} + O(\Theta^2), \quad (2.52)$$

$$\frac{1}{\hat{r}} = \frac{1}{r} + \frac{L \cdot \Theta}{4\hbar r^3} + 0 (\Theta^2). \quad (2.53)$$

Dans l'espace de la corde cosmique non commutatif, en remplaçant le vecteur \mathbf{AB} par la relation

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin\theta}, \quad (2.54)$$

on trouve la relation suivante

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L} + \frac{2i\hbar^2 \alpha}{a'} \cos\theta \delta(\cos^2\theta - 1) e_r. \quad (2.55)$$

Ainsi, en utilisant la méthode de Bopp-shift, l'équation (2.33) se transforme de la façon suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(c\hbar)^2 r} - \frac{l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R(r) - \frac{\mathbf{L}\Theta}{2\hbar} \left\{ \left(\frac{kqE}{(c\hbar)^2}\right) \frac{1}{r^3} + \left(l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2\right) \frac{1}{r^4} \right\} R(r) = 0. \quad (2.56)$$

En utilisant la théorie de perturbation stationnaire, l'équation (2.56) pour $\Theta = 0$ prend la forme

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(E^{(0)})^2 - (Mc^2)^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E^{(0)}}{(c\hbar)^2 r} - \frac{l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R^{(0)}(r) = 0. \quad (2.57)$$

Suivant les mêmes étapes précédentes du cas de l'espace commutatif, on aura

$$R_{nl}^{(0)}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{\left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2\right)} n!}{(c\hbar) 2(n+s+1) \Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}, \quad (2.58)$$

dont

$$s + \varsigma + 1 = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.59)$$

Enfin, le spectre d'énergie est donné par

$$\begin{aligned}
 E_{nl}^{(0)} &= \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\left|\frac{m-\alpha}{a'}\right| + n' + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right)^2}}} \\
 &= \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right)^2}}, \tag{2.60}
 \end{aligned}$$

avec $l = \left|\frac{m-\alpha}{a'}\right| + n'$. Réécrivant cette équation encore sous une autre forme

$$E_{nl}^{(0)} = \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 \kappa^{-2}}}, \tag{2.61}$$

ou $\kappa = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}$, alors le spectre de l'énergie dans l'approximation non relativiste est bien donné par [67]

$$E_{nl}^{(0)} \simeq \pm Mc^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{2N^2} - \frac{\gamma^4}{2N^4} \left(\frac{N}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right]. \tag{2.62}$$

En utilisant les relations suivantes [63]

$$\begin{aligned}
 \langle r^{-k} \rangle &= \left(\frac{2^k \left(\sqrt{\left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)} \right)^k n!}{(c\hbar) 2 (n + s + 1) \Gamma (n + 2s + 2)} \right) \\
 &\times \int_0^\infty \rho^{2s+2-k} e^{-\rho} (L_n^{2s+1})^2 d\rho, \tag{2.63}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty e^{-x} x^{\varrho+s} L_n^\varrho(x) L_m^\beta(x) dx &= (-1)^{n-m} \frac{\Gamma(\varrho + s + 1) \Gamma(\beta + m + 1) \Gamma(s + 1)}{m! (n - m)! \Gamma(\beta + 1) \Gamma(s - n + m + 1)} \\
 &\times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -m, s + 1, \beta - \varrho - s \\ \beta + 1, n - m + 1 \end{matrix} \right), \tag{2.64}
 \end{aligned}$$

on obtient la premier ordre de la théorie des perturbations [63,67-69]

$$\langle r^{-3} \rangle = \frac{4 \left\{ \sqrt{(Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2} \right\}^3}{(2s+1)(2s)(n+s+1)} \left[1 + \frac{n}{s+1} \right], \quad (2.65)$$

$$\langle r^{-4} \rangle = \frac{4 \left\{ \sqrt{(Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2} \right\}^4}{(2s-1)s(2s+1)(n+s+1)} \left[1 + \frac{3n}{s+1} + \frac{3n(n-1)}{(s+1)(2s+3)} \right], \quad (2.66)$$

soit

$$\begin{aligned} E^{(NC)} &= -\frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{a'} \right) \left(l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right) \\ &\times \left[\frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^4}{(2s-1)s(2s+1)(n+s+1)} \left[1 + \frac{3n}{s+1} + \frac{3n(n-1)}{(s+1)(2s+3)} \right] \right] \\ &- \frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{a'} \right) \left[\left(\frac{kq}{c\hbar} \right) \frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^3}{(2s+1)(2s)(n+s+1)} \left\{ 1 + \frac{n}{s+1} \right\} \right], \end{aligned} \quad (2.67)$$

ou

$$E = E_n^{(0)} + E^{(NC)}. \quad (2.68)$$

Maintenant, en ce qui concerne la fonction d'onde totale, nous avons deux conditions

- Pour le cas du sous-espace S_+ , où $\lambda_1 > 0$ et $l_1 = \lambda_1 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_1 l_1}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1^{(0)}, \quad (2.69)$$

avec

$$\psi_1^{(0)} = N_{norm} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (2.70)$$

- Pour le cas du sous-espace S_- , où $\lambda_2 < 0$ et $l_2 = -\lambda_2 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_2 l_2}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a' r \sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1^{(0)}, \quad (2.71)$$

avec

$$\psi_1^{(0)} = N_{norm} P_{l_2}^{\lambda_2} (\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (2.72)$$

2.2 L'équation de DKP en présence d'un monopole global

Passons maintenant au cas de l'équation de DKP en présence d'un autre défaut topologique dite un monopole global : en partant de la métrique suivante [70–72]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b'^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (2.73)$$

avec $b' = 1 - 8\pi G\eta^2$, alors les connexions de spin sont [sonthoucine2018](#), [Haounallah](#)

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \\ -b' \sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.74)$$

dont avec les tétrades

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b'r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b'r \sin\theta} \end{pmatrix}. \quad (2.75)$$

Le potentiel vecteur \mathbf{AB} dans ce cas, prend la forme suivante

$$A_0 = \frac{kq}{r}, \quad A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi b' r \sin\theta}, \quad (2.76)$$

Ainsi, après un calcul direct, l'équation (2.9) devient

$$\left\{ \frac{\beta^0}{\hbar c} \left(E - \frac{kq}{r} \right) + i\beta^1 \partial_r + \frac{i\beta^2}{b'r} (\partial_\theta - b'\beta^2\beta^1) + \frac{i\beta^3}{b'rsin\theta} \left((\partial_\varphi - i\alpha) - b'\sin\theta\beta^3\beta^1 - \cos\theta\beta^3\beta^2 \right) - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \psi = 0, \quad (2.77)$$

ou encore

$$\frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \psi_2 - i \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \psi_3 - \frac{i}{b'r} \left(\partial_\theta + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \right) \psi_4 - \frac{i}{b'rsin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \psi_5 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_1, \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_2, \quad (2.79)$$

$$i\partial_r \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_3, \quad (2.80)$$

$$\frac{i}{b'r} \partial_\theta \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_4, \quad (2.81)$$

$$\frac{i}{b'rsin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_5. \quad (2.82)$$

Enfin, nous avons l'équation

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \psi_1 = 0, \quad (2.83)$$

dont

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{b'^2 \sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right\}, \quad (2.84)$$

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right), \quad (2.85)$$

$$l = |\lambda| + n', \quad (n' = 0, 1, 2, \dots), \quad \lambda = \frac{m - \alpha}{b'}, \quad (2.86)$$

on note ici que ces valeurs propres l dépendent du flux magnétique m_0 et du paramètre géométrique de l'espace b' .

Pour résoudre l'équation (2.83), nous effectuons le même changement qu'avant, on trouve

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} - \frac{\frac{l(l+1)}{b^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R(r) = 0. \quad (2.87)$$

Comme dans le cas des cordes cosmiques, on distingue aussi deux cas : les solutions dans un espace commutatif et non-commutatif.

2.2.1 Solutions dans un espace commutatif

Dans cette section, nous faisons un changement de variable (2.34) et (2.35) dans l'équation (2.87),

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(-\frac{\frac{l(l+1)}{b^2} - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{\zeta}{\rho} - \frac{1}{4} \right) \right\} R(\rho) = 0. \quad (2.88)$$

Faisons maintenant le changement suivante

$$R(\rho) = N \rho^{a+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) H(\rho), \quad (2.89)$$

on trouve

$$\rho^2 \frac{d^2 H(\rho)}{d\rho^2} + (2(a+1)\rho - \rho^2) \frac{dH(\rho)}{d\rho} + \left[\left(a(a+1) - \left(\frac{l(l+1)}{b^2} - \gamma^2 \right) \right) - (\zeta + a + 1)\rho \right] H(\rho) = 0. \quad (2.90)$$

Pour résoudre l'équation (2.90), nous utilisons la méthode de Frobenius [73–76]. Dans ce cas, l'équation $H(\rho)$ peut être écrit comme un développement en série de puissance infinie autour de l'origine comme suit [77]

$$H(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k. \quad (2.91)$$

En remplaçant la série (2.91) dans l'équation (2.90), on obtient la relation de récurrence suivante :

$$c_{k+1} = \frac{k + (\zeta + a + 1)}{k(k+1) + 2(a+1)(k+1)} c_k. \quad (2.92)$$

Maintenant, quand $k \rightarrow \infty$, le ration $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow 0$: Nous pouvons comprendre cette condition en disant que : Des types spéciaux de solutions exactes, qui représentent des états liés, peuvent être obtenus en recherchant des expressions polynomiales à $H(\xi)$, c'est-à-dire que les solutions peuvent être imposées de degré n . Nous pouvons argumenter ceci comme suit : en mécanique quantique, si nous voulons avoir une fonction d'onde normalisable, nous devons imposer que $\chi(\xi)$ disparaisse à $\xi \rightarrow 0$ et $\xi \rightarrow \infty$. De cette façon, les solutions d'état lié peuvent être obtenues car il n'y a pas de divergence de la fonction d'onde à $\xi \rightarrow 0$ et $\xi \rightarrow \infty$. Dans notre cas, le $H(\xi)$ a écrit comme une extension de la série de puissance autour de l'origine (voir l'équation (2.91)). En conséquence, les solutions peuvent être obtenues en imposant que l'expansion de la série de puissance (2.91) ou la série Heun biconfluente deviennent un polynôme de degré n . Cela garantit $\chi(\xi)$ se comporte F comme ξ à l'origine et disparaît à $\xi \rightarrow \infty$ [78–83]. Ainsi, pour que l'expansion de la série de puissance devienne un polynôme de degré n , deux conditions différentes doivent être satisfaites simultanément : dans ce cas, nous imposons que

$$\zeta + a + 1 = -n, \quad (2.93)$$

avec

$$a = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.94)$$

Ou $a = -\frac{1}{2} + \left(\frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. En commençant par $a_0 = 1$. on trouve

$$a_1 = \frac{(\zeta + a + 1)}{2(a + 1)} \quad (2.95)$$

$$a_2 = \frac{1 + (\zeta + a + 1)}{2 + 4(a + 1)} a_1 \quad (2.96)$$

en imposant les conditions $a_{k+1} = 0$. On obtient

$$\zeta + a + 1 = -n, \quad (2.97)$$

et le spectre d'énergie est

$$E_n = \pm Mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} - \left(\frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.98)$$

et

$$R_n(\rho) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - E^2)n!}}{(c\hbar) 2(n+a+1)\Gamma(n+2a+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{a+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) L_n^{2a+1}. \quad (2.99)$$

Maintenant, en ce qui concerne la fonction d'onde totale, nous avons deux conditions

- Pour le cas du sous-espace S_+ , où $\lambda_1 > 0$ et $l_1 = \lambda_1 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_1 l_1} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (2.100)$$

avec

$$\psi_1 = N_{norm} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (2.101)$$

- Pour le cas du sous-espace S_- , où $\lambda_2 < 0$ et $l_2 = -\lambda_2 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_2 l_2} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (2.102)$$

avec

$$\psi_1 = N_{norm} P_{l_2}^{\lambda_2}(\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (2.103)$$

2.2.2 Solutions dans un espace non-commutatif

En global monopole non commutatif en utilisant la méthode de Bopp-shift le équations (2.53), l'équation (2.87) se transforme de la façon suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(Mc^2)^2 - E^2}{(c\hbar)^2} - \frac{2(kq)E}{(c\hbar)^2 r} - \frac{\frac{l(l+1)}{b^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} - \frac{(L\Theta)}{2\hbar} \left[\left(\frac{kqE}{(c\hbar)^2}\right) \frac{1}{r^3} + \left(\frac{l(l+1)}{b^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2\right) \frac{1}{r^4} \right] \right\} R(r) = 0. \quad (2.104)$$

En utilisant la technique de perturbation, l'équation (2.104) pour $\Theta = 0$ prend la forme

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2}{(c\hbar)^2} - \frac{2(kq)E^{(0)}}{(c\hbar)^2 r} - \frac{\frac{l(l+1)}{b^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R^{(0)}(r) = 0. \quad (2.105)$$

De la même étapes précédent, on trouve la solution

$$R_n^{(0)}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{\left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2\right) n!}}{(c\hbar) 2(n+s+1) \Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) L_n^{2s+1}, \quad (2.106)$$

et le spectre d'énergie

$$\begin{aligned} E_{nl}^{(0)} &= \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left\{ n + \frac{1}{2} + \left(\left(\frac{m-\alpha}{b'} + n' \right)' \left(\frac{m-\alpha}{b'} + n' + 1 \right) + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right\}^{\frac{1}{2}}}}}} \\ &= \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left\{ n + \frac{1}{2} + \left(\frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2}}}} \end{aligned} \quad (2.107)$$

avec $l = \left| \frac{m-\alpha}{a'} \right| + n'$. cette équation encore sous la forme

$$E_{nl}^{(0)} = \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 \kappa^{-2}}}, \quad (2.108)$$

Ou $\kappa = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}$. le spectre de l'énergie s'écrit sous la forme suivante

$$E_{nl}^{(0)} \simeq \pm Mc^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{2N'^2} - \frac{\gamma^4}{2N'^3 \left\{ \frac{l(l+1)}{b'^2} + \frac{1}{4} \right\}^{\frac{1}{2}}} + \dots \right], \quad (2.109)$$

En utilisant les relations (2.65) et (2.66), on obtient

$$\begin{aligned} E^{(NC)} &= -\frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{b'} \right) \left(\frac{l(l+1)}{b'^2} - \left(\frac{kq}{c\hbar} \right)^2 \right) \\ &\times \left\{ \frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^4}{(2a-1)a(2a+1)(n+a+1)} \left[1 + \frac{3n}{a+1} + \frac{3n(n-1)}{(a+1)(2a+3)} \right] \right\} \\ &- \frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{b'} \right) \left\{ \left(\frac{kq}{c\hbar} \right)^2 \frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^3}{(n+a+1)\Gamma(n+2a+2)} \left[1 + \frac{n}{a+1} \right] \right\}, \quad (2.110) \end{aligned}$$

avec

$$E = E_n^{(0)} + E^{(NC)}. \quad (2.111)$$

Maintenant, en ce qui concerne la fonction d'onde totale, nous avons deux conditions

- Pour le cas du sous-espace S_+ , où $\lambda_1 > 0$ et $l_1 = \lambda_1 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_1 l_1}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{b'r \sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1^{(0)}, \quad (2.112)$$

avec

$$\psi_1^{(0)} = N_{norm} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (2.113)$$

- Pour le cas du sous-espace S_- , où $\lambda_2 < 0$ et $l_2 = -\lambda_2 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_2 l_2}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{b'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1^{(0)}, \quad (2.114)$$

avec

$$\psi_1^{(0)} = N_{norm} P_{l_2}^{\lambda_2} (\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (2.115)$$

2.3 Discussion des résultats

Dans ce chapitre, nous avons présenté les solutions des bosons scalaires et vecteurs en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm et Coulombien dans un champ gravitationnel des défauts topologiques tels que les cordes cosmiques et monopoles globaux dans un espace commutatif et non-commutatif, dans les deux cas, une solution exacte est obtenue, et l'influence du paramètre de la géométrie des deux espaces a été discutée, ainsi, la présence du potentiel AB modifier complètement les relations de commutation fondamentales du moment cinétique. On remarque que

- le critère de Pauli est inapplicable au vecteur AB.
- Le spectre d'énergie dans le champ gravitationnel de la corde cosmique et global monopole sont différents.
- le spectre de l'énergie est calculé en utilisant la théorie des perturbations, l'énergie est transitoire de l'espace commutatif à l'espace non-commutatif.

Les fonctions propres et les valeurs propres de L_z et L^2 ont été présentées dans la condition de limite suivante $\psi(r, \theta, \varphi)|_{\theta=0, \pi} = 0$, l'espace S est divisé en deux sous-espaces, S_+ est couvert par toutes les fonctions d'onde $\psi_{j_1 \lambda_1}(\theta, \varphi)$, et S_- est couvert par toutes les fonctions d'onde $\psi_{j_2 \lambda_2}(\theta, \varphi)$.

Les bosons vecteurs en présence des défauts topologiques

Le but de ce chapitre est l'étude des solutions de Duffin-Kemmer-Petiau de spin 1 en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm et de Coulombien dans un champ gravitationnel des défauts topologiques tels que les cordes cosmiques et les monopoles globaux dans un espace commutatif et non-commutatif.

3.1 L'équation de DKP en présence des cordes cosmiques

Avant de commencer l'étude de l'équation de DKP dans un espace-temps courbé, exposons quelques formules utiles.

L'équation de DKP décrivant un boson scalaire et vectoriel libre de masse M dans un espace-temps plat est similaire à celle de Dirac, à savoir [40–42, 84]

$$(i\beta^\mu \partial_\mu - M)\psi = 0, \quad (3.1)$$

dont les matrices β^μ avec $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ satisfaisant les relations de commutation suivantes :

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\rho + \beta^\rho \beta^\nu \beta^\mu = \eta^{\mu\nu} \beta^\rho + \eta^{\rho\nu} \beta^\mu. \quad (3.2)$$

Ces matrices ont trois représentations irréductibles, la première non triviale, la deuxième de dimension 5 pour la particule de spin-0, et la troisième de dimension 10 décrivant les

particules spin-1.

Dans un espace courbé, l'équation de DKP est donnée par [4, 55, 56]

$$\left\{ i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab}S^{ab} - \frac{ie}{\hbar c}A_\mu \right) - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \Psi = 0, \quad (3.3)$$

avec $S^{ab} = [\beta^a, \beta^b]$, et $\tilde{\beta}^\mu$ sont les matrices de DKP satisfaisant à la relation suivante

$$\tilde{\beta}^\mu = e_{(a)}^\mu \beta^a. \quad (3.4)$$

En utilisant les relations de tétrade suivantes

$$e_{(a)}^\mu e_{(a)}^\nu \eta^{ab} = g^{\mu\nu}, \quad (3.5)$$

$$e_{(a)}^\mu e_{(b)\mu} = \eta_{ab}, \quad (3.6)$$

$$e_{(a)}^\mu e_{(\mu)}^{(b)} = \delta_{ab}, \quad (3.7)$$

les connexions de spin $\omega_{\mu ab}$ peuvent se déduire à partir des symboles de Christoffel $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ comme suit [57]

$$\omega_{\mu ab} = e_{(a)l} e_{(b)}^j \Gamma_{j\mu}^l - e_{(b)}^j \partial_\mu e_{(a)j}, \quad (3.8)$$

dont

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{g^{\mu\rho}}{2} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}). \quad (3.9)$$

D'autre part, pour calculer les connexions de spin on utilise l'équation de structure de Maurer-Cartan : elle est définie par

$$de^a + \omega_b^a \wedge e^b = 0. \quad (3.10)$$

Le vecteur de potentiel \mathbf{AB} en présence des cordes cosmiques prend la forme

$$A_0 = \frac{kq}{r}, \quad A_r = A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin\theta}. \quad (3.11)$$

Ici, nous avons considéré la particule se mouvant dans un champ de vecteur potentiel d'un solénoïde long et infini de flux magnétique $\Phi = \alpha\Phi_0$ avec $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$: Nous utilisons les

coordonnées sphériques, et on suppose que l'axe de la solénoïde coïncident avec l'axe oz.

La métrique correspondante à une corde cosmique en coordonnées sphériques est donnée par [20, 58–61, 71]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - a'^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.12)$$

avec $-\infty < t < +\infty, 0 \leq r, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, le paramètre $a' = 1 - \frac{4G}{c^2}u$ est le déficit angulaire défini dans la l'intervalle $(0, 1]$, u et représente la densité de masse linéaire de la corde cosmique. Dans le cas particulier $a' = 1$ on obtient l'espace de Minkowski. On trouve les connexions de spin comme suithoucine2018

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & a' \cos \theta \\ -a' \sin \theta & -a' \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.13)$$

où les tétrades $e_{(a)}^\mu$ sont choisis par

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a' r \sin \theta} \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Ainsi, l'équation de DKP en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm et de Coulombien est donnée par

$$\left\{ \frac{\beta^0}{\hbar c} \left(E - \frac{kq}{r} \right) + i\beta^1 \partial_r + \frac{i\beta^2}{r} (\partial_\theta - \beta^2 \beta^1) + \frac{i\beta^3}{a' r \sin \theta} [(\partial_\varphi - i\alpha) - a' \sin \theta \beta^3 \beta^1 - a' \cos \theta \beta^3 \beta^2] - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \psi(r, \theta, \varphi) = 0. \quad (3.15)$$

Ici, la fonction d'onde ψ sera choisie par [85, 86]

$$\psi = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} (\Phi_0 D_0, \Phi_1 D_{-1}, \Phi_2 D_0, \Phi_3 D_{+1}, E_1 D_{-1}, E_2 D_0, E_3 D_{+1}, H_1 D_{-1}, H_2 D_0, H_3 D_{+1})^T \quad (3.16)$$

dont D sont les fonctions de Wigner avec $D_\sigma = D_{-m, \sigma}^j, \sigma = 0, +1, -1$ Davydov. A l'aide

des formules de récurrences suivantes ($\nu = \sqrt{j(j+1)}$, $a = \sqrt{(j-1)(j+2)}$)

$$\begin{aligned}\partial_\theta D_{-1} &= \frac{1}{2}(aD_{-2} - \nu D_0), \quad \frac{\lambda - \cos\theta}{\sin\theta} D_{-1} = \frac{1}{2}(aD_{-2} + \nu D_0), \\ \partial_\theta D_0 &= \frac{1}{2}(\nu D_{-1} - \nu D_{+1}), \quad \frac{\lambda}{\sin\theta} D_0 = \frac{1}{2}(\nu D_{-1} + \nu D_{+1}), \\ \partial_\theta D_{+1} &= \frac{1}{2}(\nu D_0 - aD_{+2}), \quad \frac{\lambda + \cos\theta}{\sin\theta} D_{+1} = \frac{1}{2}(\nu D_0 + aD_{+2}),\end{aligned}\quad (3.17)$$

les valeurs propres de L_z et L^2 sont

$$L_z D_{-\lambda,s}^j = \lambda D_{-\lambda,s}^j, \quad (3.18)$$

$$L^2 D_{-\lambda,s}^j = j(j+1) D_{-\lambda,s}^j, \quad (3.19)$$

$$j = |\lambda| + \kappa, \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.20)$$

ou

$$L_z = -\frac{i\hbar}{a'} \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right), \quad (3.21)$$

$$\lambda = \frac{m - \alpha}{a'}, \quad (3.22)$$

ici l sont les valeurs propres de L_z et L^2 respectivement : on note que ces valeurs propres dépendent du flux magnétique m_0 et du paramètre géométrique de l'espace a' . Après un calcul algébrique, on obtient les équations différentielles radiales comme suit

$$-\left(\partial_r + \frac{2}{r}\right) E_2 - \frac{\nu}{r} (E_1 + E_3) = \frac{Mc}{\hbar} \Phi_0, \quad (3.23)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r}\right) E_1 + i \left(\partial_r + \frac{1}{r}\right) H_1 + \frac{i\nu}{r} H_2 = \frac{Mc}{\hbar} \Phi_1, \quad (3.24)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r}\right) E_2 - \frac{i\nu}{r} (H_1 - H_3) = \frac{Mc}{\hbar} \Phi_2, \quad (3.25)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r}\right) E_3 - i \left(\partial_r + \frac{1}{r}\right) H_3 - \frac{i\nu}{r} H_2 = \frac{Mc}{\hbar} \Phi_3, \quad (3.26)$$

$$-\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r}\right) \Phi_1 + \frac{\nu}{r} \Phi_0 = \frac{Mc}{\hbar} E_1, \quad (3.27)$$

$$-\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \Phi_2 - \frac{d}{dr} \Phi_0 = \frac{Mc}{\hbar} E_2, \quad (3.28)$$

$$-\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \Phi_3 + \frac{\nu}{r} \Phi_0 = \frac{Mc}{\hbar} E_3, \quad (3.29)$$

$$-i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \Phi_1 - \frac{i\nu}{r} \Phi_2 = \frac{Mc}{\hbar} H_1, \quad (3.30)$$

$$\frac{i\nu}{r} (\Phi_1 - \Phi_3) = \frac{Mc}{\hbar} H_2, \quad (3.31)$$

$$i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \Phi_3 + \frac{i\nu}{r} \Phi_2 = \frac{Mc}{\hbar} H_3, \quad (3.32)$$

avec $\nu = \sqrt{j(j+1)}/2$. Introduisons l'opérateur $\hat{\Pi}$ [86]

$$\hat{\Pi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_3 \end{vmatrix}, \quad (3.33)$$

avec

$$\Pi_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.34)$$

L'équation

$$\hat{\Pi}\Psi = P\Psi, \quad (3.35)$$

sera discuté selon les deux parités différentes : pour $P = (-1)^{j+1}$ et $P = (-1)^j$.

3.1.0.1 cas de $P = (-1)^{j+1}$:

Dans cette cas, en utilisant l'opérateur $\hat{\Pi}$, nous pouvons éliminer les composants Φ_0, Φ_2, E_2 et écrire que

$$\Phi_0 = 0, \Phi_3 = -\Phi_1, \Phi_2 = 0, \quad (3.36)$$

$$E_3 = -E_1, E_2 = 0, H_3 = H_1. \quad (3.37)$$

Ainsi on trouve

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) E_1 + i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) H_1 + \frac{i\nu}{r} H_2 = \frac{Mc}{\hbar} \Phi_1, \quad (3.38)$$

$$-\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \Phi_1 = \frac{Mc}{\hbar} E_1, \quad (3.39)$$

$$-i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \Phi_1 = \frac{Mc}{\hbar} H_1, \quad (3.40)$$

$$\frac{2i\nu}{r} \Phi_1 = \frac{Mc}{\hbar} H_2. \quad (3.41)$$

Finalement

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right\} \Phi_1 = 0. \quad (3.42)$$

Pour résoudre cette équation, effectuons d'abord le changement suivant

$$\Phi_1 = \frac{R(r)}{r} \chi(\theta, \varphi). \quad (3.43)$$

Injectons (3.43) dans (3.42), on trouve

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} - \frac{j(j+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R(r) = 0. \quad (3.44)$$

3.1.0.2 cas de $P = (-1)^j$:

En utilisant l'opérateur $\hat{\Pi}$, nous pouvons éliminer les composants H_2 et écrire que :

$$\Phi_3 = \Phi_1, E_3 = E_1, H_3 = H_1, H_2 = 0. \quad (3.45)$$

Ainsi on trouve

$$\left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) E_2 + 2\frac{\nu}{r} E_1 + \frac{Mc}{\hbar} \Phi_0 = 0, \quad (3.46)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) E_1 + i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) H_1 - \frac{Mc}{\hbar} \Phi_1 = 0, \quad (3.47)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) E_2 - 2 \frac{i\nu}{r} H_1 - \frac{Mc}{\hbar} \Phi_2 = 0, \quad (3.48)$$

$$-\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \Phi_1 + \frac{\nu}{r} \Phi_0 - \frac{Mc}{\hbar} E_1 = 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \Phi_2 + \partial_r \Phi_0 + \frac{Mc}{\hbar} E_2 = 0, \quad (3.50)$$

$$i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \Phi_1 + \frac{i\nu}{r} \Phi_2 + \frac{Mc}{\hbar} H_1 = 0, \quad (3.51)$$

Le cas général est très difficile, et le découplage de ces équations différentielles semble impossible.

Limitons nous au cas $j = 0$, alors on peut découpler ces équations différentielles pour les composants E_2 . Dans cette condition $\nu = 0$, on trouve :

$$\left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) E_2 + \frac{Mc}{\hbar} \Phi_0 = 0, \quad (3.52)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) E_1 + i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) H_1 - \frac{Mc}{\hbar} \Phi_1 = 0, \quad (3.53)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) E_2 - \frac{Mc}{\hbar} \Phi_2 = 0, \quad (3.54)$$

$$-\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \Phi_1 - \frac{Mc}{\hbar} E_1 = 0, \quad (3.55)$$

$$\frac{i}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \Phi_2 + \partial_r \Phi_0 + \frac{Mc}{\hbar} E_2 = 0, \quad (3.56)$$

$$i \left(\partial_r + \frac{1}{r} \right) \Phi_1 + \frac{Mc}{\hbar} H_1 = 0, \quad (3.57)$$

et on obtient

$$\left\{ \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 + \partial_r \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right\} E_2 = 0, \quad (3.58)$$

ou

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right\} E_2 = 0 \quad (3.59)$$

Pour résoudre cette équation, posons que

$$E_2 = \frac{F(r)}{r} \chi(\theta, \varphi). \quad (3.60)$$

Injectons (3.60) dans (3.59), on obtient

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right\} F(r) = 0. \quad (3.61)$$

3.1.1 Solutions dans un espace commutatif

Dans cette section, nous sommes intéressés à résoudre les équation (3.44) et (3.61) dans un espace commutatif pour les deux parité $P = (-1)^{j+1}$ et $P = (-1)^j$.

3.1.1.1 cas de $P = (-1)^{j+1}$:

En utilisant les substitutions suivantes

$$\rho = \xi r, \quad \xi^2 = \frac{4(M^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2}, \quad (3.62)$$

$$\gamma = \frac{kq}{\hbar c}, \quad \varsigma = \frac{2\gamma E}{\hbar c \xi}, \quad (3.63)$$

l'équation (3.44) devient

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(-\frac{j(j+1) - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{\varsigma}{\rho} - \frac{1}{4} \right) \right\} R(\rho) = 0. \quad (3.64)$$

Utilisant le changement

$$R(\rho) = N \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} u(\rho). \quad (3.65)$$

L'équation (3.64) est réduit à l'équation suivante

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + (2(s+1)\rho - \rho^2) \frac{du(\rho)}{d\rho} \\ & + [(s(s+1) - (j(j+1) - \gamma^2)) - (\varsigma + s + 1)\rho] u(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (3.66)$$

avec

$$s(s+1) = j(j+1) - \gamma^2, \quad (3.67)$$

ou

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(j + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}. \quad (3.68)$$

Par conséquent, la solution est

$$R_n(\rho) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - E^2)n!}}{(c\hbar) 2(n+s+1)\Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}, \quad (3.69)$$

avec la condition suivante

$$s + \varsigma + 1 = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.70)$$

Finalement, le spectre d'énergie est donné par

$$E_n = \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\left|\frac{m-\alpha}{a'}\right| + \kappa + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right)^2}}}. \quad (3.71)$$

Maintenant, en ce qui concerne la fonction d'onde totale, nous avons deux conditions

- Pour le cas du sous-espace S_+ , où $\lambda_1 > 0$ et $j_1 = \lambda_1 + \kappa$, le spineur total est

$$\hat{y}\psi_{n\lambda_1 j_1} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar}\right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r}\right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r}\partial_\theta \\ \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (3.72)$$

avec

$$\psi_1 = N_{norm} P_{j_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (3.73)$$

- Pour le cas du sous-espace S_- , où $\lambda_2 < 0$ et $j_2 = -\lambda_2 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_2j_2} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{\hbar c} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (3.74)$$

avec

$$\psi_1 = N_{norm} P_{j_2}^{\lambda_2} (\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (3.75)$$

3.1.1.2 cas de $P = (-1)^j$:

En utilisant toujours les deux équation (3.62) et (3.63), l'équation (3.61) devient

$$\frac{d^2 F(\rho)}{d\rho^2} + \left(-\frac{2 - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{\zeta}{\rho} - \frac{1}{4} \right) F(\rho) = 0. \quad (3.76)$$

Utilisant le changement

$$F(\rho) = N \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} v(\rho), \quad (3.77)$$

l'équation (3.76) se réduit à l'équation suivante

$$\rho^2 \frac{d^2 v(\rho)}{d\rho^2} + (2(s+1)\rho - \rho^2) \frac{dv(\rho)}{d\rho} + [(s(s+1) - (2 - \gamma^2)) - (\zeta + s + 1)\rho] v(\rho) = 0. \quad (3.78)$$

Pour résoudre cette équation, nous utilisons la méthode de Frobenius [77]. Dans ce cas on trouve

$$c_{k+1} = \frac{k + (\zeta + s + 1)}{k(k+1) + 2(s+1)(k+1)} c_k. \quad (3.79)$$

dont

$$s(s+1) - (2 - \gamma^2) = 0, \quad (3.80)$$

ou

$$s = \frac{-1 + \sqrt{9 - 4\gamma^2}}{2}. \quad (3.81)$$

Posons que $c_0 = 1$, on trouve

$$c_1 = \frac{(\zeta + s + 1)}{2(s + 1)}, \quad (3.82)$$

$$c_2 = \frac{1 + (\zeta + s + 1)}{2 + 4(s + 1)} a_1. \quad (3.83)$$

En imposant les conditions $c_{k+1} = 0$, on obtient

$$\zeta + s + 1 = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.84)$$

Par conséquent, les solutions sont

$$F_n(\rho) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - E^2)n!}}{(c\hbar) 2(n + s + 1) \Gamma(n + 2s + 2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) L_n^{2s+1}, \quad (3.85)$$

$$E_n = \pm Mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(9 - 4\gamma^2)^{\frac{1}{2}}\right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.86)$$

3.1.2 Solutions dans un espace non-commutatif

En utilisant la méthode de Bopp-shift, et en présence des cordes cosmiques non commutatif, on trouve

$$\hat{r} = r - \frac{L \cdot \Theta}{4\hbar r} + o(\Theta^2), \quad (3.87)$$

$$\frac{1}{\hat{r}} = \frac{1}{r} + \frac{L \cdot \Theta}{4\hbar r^3} + o(\Theta^2). \quad (3.88)$$

3.1.2.1 cas de $P = (-1)^{j+1}$

l'équation (3.44) se transforme à l'équation suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(c\hbar)^2 r} - \frac{j(j+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right. \\ \left. - \frac{(L \cdot \Theta)}{2\hbar} \left[\left(\frac{kqE}{(c\hbar)^2} \right) \frac{1}{r^3} + \left(j(j+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right) \frac{1}{r^4} \right] \right\} R(r) = 0. \quad (3.89)$$

En utilisant la théorie de perturbation, l'équation (3.89) pour $\Theta = 0$ prend la forme

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(E^{(0)})^2 - (Mc^2)^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E^{(0)}}{(c\hbar)^2 r} - \frac{j(j+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R^{(0)}(r) = 0. \quad (3.90)$$

Suivant les mêmes étapes précédentes, on trouve

$$R_n^{(0)}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2)} n!}{(c\hbar) 2(n+s+1) \Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}, \quad (3.91)$$

avec la condition suivante

$$s + \varsigma + 1 = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.92)$$

Le spectre d'énergie est donnée par

$$E_n^{(0)} = \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\left|\frac{m-\alpha}{a'}\right| + \kappa + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right)^2}}}. \quad (3.93)$$

En utilisant la relation suivante [63, 87]

$$\begin{aligned} \langle r^{-k} \rangle &= \left(\frac{2^k \left(\sqrt{((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2)} \right)^k n!}{(c\hbar) 2(n+s+1) \Gamma(n+2s+2)} \right) \\ &\times \int_0^\infty \rho^{2s+2-k} e^{-\rho} (L_n^{2s+1})^2 d\rho. \quad (3.94) \\ &\int_0^\infty e^{-x} x^{\varrho+s} L_n^\varrho(x) L_m^\beta(x) dx = \\ &(-1)^{n-m} \frac{\Gamma(\varrho+s+1) \Gamma(\beta+m+1) \Gamma(s+1)}{m! (n-m)! \Gamma(\beta+1) \Gamma(s-n+m+1)} \times {}_3F_2 \left(\begin{matrix} -m, s+1, \beta-\varrho-s \\ \beta+1, n-m+1 \end{matrix} \right) \end{aligned} \quad (3.95)$$

on obtient que [63, 68, 69]

$$\langle r^{-3} \rangle = \frac{4 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^3}{(2s+1)(2s)(n+s+1)} \left[1 + \frac{n}{s+1} \right], \quad (3.96)$$

$$\langle r^{-4} \rangle = \frac{4 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^4}{(2s-1)s(2s+1)(n+s+1)} \left[1 + \frac{3n}{s+1} + \frac{3n(n-1)}{(s+1)(2s+3)} \right]. \quad (3.97)$$

Comme

$$\Theta \mathbf{L} = \Theta L_z, \quad (3.98)$$

on obtient

$$\begin{aligned} E^{(NC)} &= -\frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{a'} \right) \left(j(j+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right) \\ &\times \left[\frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^4}{(2s-1)s(2s+1)(n+s+1)} \left[1 + \frac{3n}{s+1} + \frac{3n(n-1)}{(s+1)(2s+3)} \right] \right] \\ &- \frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{a'} \right) \left[\left(\frac{kq}{c\hbar} \right) \frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^3}{(2s+1)(2s)(n+s+1)} \left[1 + \frac{n}{s+1} \right] \right], \end{aligned} \quad (3.99)$$

ou

$$E = E_n^{(0)} + E^{(NC)}. \quad (3.100)$$

Maintenant, en ce qui concerne la fonction d'onde totale, nous avons deux conditions

- Pour le cas du sous-espace S_+ , où $\lambda_1 > 0$ et $j_1 = \lambda_1 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_1 j_1}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r \sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1^{(0)}, \quad (3.101)$$

avec

$$\psi_1^{(0)} = N_{norm} P_{j_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\ell}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (3.102)$$

- Pour le cas du sous-espace S_- , où $\lambda_2 < 0$ et $j_2 = -\lambda_2 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_2 j_2}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r\sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1^{(0)}, \quad (3.103)$$

avec

$$\psi_1^{(0)} = N_{norm} P_{j_2}^{\lambda_2} (\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (3.104)$$

3.1.2.2 cas de $P = (-1)^j$

l'équation (3.61) se transforme à

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2 \left(\frac{kq}{\hbar c} \right) E}{(c\hbar)^2 r} - \frac{2 - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2}{r^2} \right. \\ \left. - \frac{(L \cdot \Theta)}{2\hbar} \left[\left(\frac{kq}{\hbar c} \right) \frac{E}{(c\hbar)^2} \frac{1}{r^3} + \left(2 - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right) \frac{1}{r^4} \right] \right\} F(r) = 0 \quad (3.105)$$

En utilisant la technique de perturbation, l'équation (3.105), pour $\Theta = 0$, prend la forme

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\left(E_n^{(0)} \right)^2 - (Mc^2)^2}{\hbar^2 c^2} - \frac{2 \left(\frac{kq}{\hbar c} \right) E_n^{(0)}}{(c\hbar)^2 r} - \frac{2 - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2}{r^2} \right\} F_n^{\Theta=0}(r) = 0. \quad (3.106)$$

Les solutions sont

$$F_n^{(0)}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{\left((Mc^2)^2 - \left(E_n^{(0)} \right)^2 \right) n!}}{(c\hbar) 2(n+s+1) \Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) L_n^{2s+1}, \quad (3.107)$$

$$E_n^{(0)} = \pm Mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (9 - 4\gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.108)$$

Avec la condition suivante

$$s + \varsigma + 1 = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.109)$$

on trouve

$$E^{NC} = -\frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m - \alpha}{a'} \right) \left(2 - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right) \\ \times \left[\frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E_n^{(0)})^2 \right)^4}{(2s - 1) a (2s + 1) (n + s + 1)} \left[1 + \frac{3n}{s + 1} + \frac{3n(n - 1)}{(s + 1)(2s + 3)} \right] \right] \\ - \frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m - \alpha}{a'} \right) \left[\left(\frac{kq}{c\hbar} \right)^2 \frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E_n^{(0)})^2 \right)^3}{(n + s + 1) \Gamma(n + 2s + 2)} \left[1 + \frac{n}{s + 1} \right] \right], \quad (3.110)$$

ou

$$E = E_n^{(0)} + E^{NC}. \quad (3.111)$$

Maintenant, en ce qui concerne la fonction d'onde totale, nous avons deux conditions

- Pour le cas du sous-espace S_+ , où $\lambda_1 > 0$ et $j_1 = \lambda_1 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_1 j_1}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a' r \sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1^{(0)}, \quad (3.112)$$

avec

$$\psi_1^{(0)} = N_{norm} P_{j_1}^{-\lambda_1} (\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (3.113)$$

- Pour le cas du sous-espace S_- , où $\lambda_2 < 0$ et $j_2 = -\lambda_2 + \kappa$, le spineur total est

$$\psi_{n\lambda_2 j_2}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a' r \sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1^{(0)}, \quad (3.114)$$

avec

$$\psi_1^{(0)} = N_{norm} P_{j_2}^{\lambda_2}(\cos\theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (3.115)$$

3.2 L'équation de DKP en présence d'un monopole global

Dans cette section, nous sommes intéressés à la résolution de l'équation de Duffin-Kemmer-Petiau en présence d'un monopole global en procédant de la même manière que dans le cas de corde cosmique. Dans le cas de la présence des monopôles la métrique est donnée par [70–72]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b'^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad (3.116)$$

avec $b' = 1 - 8\pi G\eta^2$. Les connexions de spin sont alors [5]

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b'\sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta \\ -b'\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.117)$$

En utilisant les tétrade

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b'r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b'r\sin\theta} \end{pmatrix}, \quad (3.118)$$

on trouve l'équation suivante

$$\left\{ \frac{\beta^0}{\hbar c} \left(E - \frac{kq}{r} \right) + i\beta^1 \partial_r + \frac{i\beta^2}{b'r} (\partial_\theta - b'\beta^2\beta^1) + \frac{i\beta^3}{b'r\sin\theta} ((\partial_\varphi - i\alpha) - b'\sin\theta\beta^3\beta^1 - \cos\theta\beta^3\beta^2) - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \psi = 0. \quad (3.119)$$

Distinguons ici deux cas selon la parité

3.2.0.1 cas de $P = (-1)^{j+1}$

Partons de l'équation

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \phi_1 = 0, \quad (3.120)$$

avec

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{b'^2 \sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right\}, \quad (3.121)$$

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right), \quad (3.122)$$

dont

$$l = |\lambda| + n', \quad (n' = 0, 1, 2, \dots), \quad (3.123)$$

ou

$$\lambda = \frac{m - \alpha}{b'}. \quad (3.124)$$

Ici l sont les valeurs propres de L_z et L^2 respectivement : on note que ces valeurs propres dépendent du flux magnétique m_0 et du paramètre géométrique de l'espace b' .

Pour résoudre l'équation (3.120), on utilise les changements de variables de (3.43) : on trouve ainsi l'équation suivante :

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} - \frac{j(j+1)}{b'^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right\} R(r) = 0 \quad (3.125)$$

3.2.0.2 cas de $P = (-1)^j$

Partons de l'équation suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right\} E_2(r) = 0. \quad (3.126)$$

Pour résoudre cette équation, nous effectuons d'abord le changement suivant (3.60) : dans ce cas on trouve l'équation suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right\} F(r) = 0. \quad (3.127)$$

3.2.1 Solutions dans un espace commutatif

3.2.1.1 cas de $P = (-1)^{j+1}$:

En injectant les équations (3.62), (3.63) et (3.65) dans (3.125), les solutions sont

$$R_n(\rho) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - E^2)n!}}{(c\hbar) 2(n+s+1)\Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1} \quad (3.128)$$

$$E_n = \pm Mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} - \left(\frac{j(j+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.129)$$

3.2.1.2 cas de $P = (-1)^j$:

En injectant (3.62), (3.63) et (3.77) dans l'équation (3.127), les solutions sont

$$F_n(\rho) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - E^2)n!}}{(c\hbar) 2(n+s+1)\Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1} \quad (3.130)$$

$$E_n = \pm Mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(9 - 4\gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.131)$$

3.2.2 Solutions dans un espace non-commutatif

3.2.2.1 cas de $P = (-1)^{j+1}$:

De la même façon que précédemment, les solutions trouvées sont données par

$$R_n^{(0)}(r) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - (E_n^{(0)})^2)n!}}{(c\hbar) 2(n+s+1)\Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) L_n^{2s+1} \quad (3.132)$$

$$E_n^{(0)} = \pm M c^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} - \left(\frac{j(j+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.133)$$

Ainsi, on trouve

$$E^{(NC)} = -\frac{\Theta}{\hbar} (m - \alpha) \left(\frac{j(j+1)}{b^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right) \\ \times \left[\frac{2 \left((M c^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^4}{(2s-1)s(2s+1)(n+s+1)} \left[1 + \frac{3n}{s+1} + \frac{3n(n-1)}{(s+1)(2s+3)} \right] \right] \\ - \frac{\Theta}{\hbar} (m - \alpha) \left[\left(\frac{kq}{c\hbar} \right) \frac{E}{(c\hbar)^2} \frac{2 \left((M c^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^3}{(2s+1)(2s)(n+s+1)} \left[1 + \frac{n}{s+1} \right] \right], \quad (3.134)$$

dont

$$E = E_n^{(0)} + E^{(NC)}. \quad (3.135)$$

3.2.2.2 cas de $P = (-1)^j$

Les solutions sont récapituler comme suit

$$F_n^{(0)}(r) = \left(\frac{\sqrt{\left((M c^2)^2 - (E_n^{(0)})^2 \right) n!}}{(c\hbar) 2(n+s+1) \Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) L_n^{2s+1} \quad (3.136)$$

$$E_n^{(0)} = \pm M c^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (9 - 4\gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.137)$$

Enfin, on trouve

$$E^{(NC)} = -\frac{\Theta}{\hbar} (m - \alpha) \left(2 - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right)$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^4}{(2s-1)s(2s+1)(n+s+1)} \left[1 + \frac{3n}{s+1} + \frac{3n(n-1)}{(s+1)(2s+3)} \right] \right] \\ & - \frac{\Theta}{\hbar} (m - \alpha) \left[\left(\frac{(kq)E}{(c\hbar)^2} \right) \frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^3}{(2s+1)(2s)(n+s+1)} \left[1 + \frac{n}{s+1} \right] \right], \end{aligned} \quad (3.138)$$

dont

$$E = E_n^{(0)} + E^{(NC)}. \quad (3.139)$$

3.3 Discussion des résultats

Dans ce chapitre, nous avons présenté les solutions de l'équation de DKP de spin-1 en présence des deux potentiels d'Aharonov-Bohm et Coulombien dans un champ gravitationnel crée par des défauts topologiques tels que les cordes cosmiques et les monopoles globaux dans un espace commutatif et non-commutatif. Dans les deux cas, les solutions obtenues sont exactes. L'influence du paramètre de la géométrie des deux espaces a été aussi bien discutée toute en gardant que la présence du potentiel AB modifier complètement les relations de commutation fondamentales du moment cinétique. Ainsi,

- La séparation des variables est effectuée à l'aide des fonctions de Wigner $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j$, $\sigma = 0, +1, -1$.
- À l'aide de l'opérateur de parité $\hat{\Pi}$, le système radial à 10 équations est divisé en deux sous-systèmes de 4 et 6 équations correspondant à la parité $P = (-1)^{j+1}$ et $P = (-1)^j$ respectivement.
- le critère de Pauli est inapplicable en présence du potentiel **AB**.
- Le spectre d'énergie dans le champ gravitationnel due aux cordes cosmiques et les monopoles globaux sont différents.

Les fonctions propres et les valeurs propres de L_z et L^2 ont été présentées tout en suivant la condition de limite suivante $\psi(r, \theta, \varphi)|_{\theta=0,\pi} = 0$, et l'espace S est divisé en deux sous-

espaces, S_+ est couvert par toutes les fonctions d'onde $\psi_{j_1\lambda_1}(\theta, \varphi)$, et S_- est couvert par toutes les fonctions d'onde $\psi_{j_2\lambda_2}(\theta, \varphi)$.

Calcul de La section efficace de l'équation de DKP

Le but principal de ce chapitre est l'étude de la diffusion des particules de spin-0 et 1 en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm et de Coulombien dans un champ gravitationnel créée par les défauts topologiques.

4.1 Les particules bosoniques scalaires

4.1.1 L'équation de DKP de spin 0 en présence des cordes cosmiques

Partons de l'équation suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right\} \psi_1 = 0, \quad (4.1)$$

avec

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{a'^2 \sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right\}, \quad (4.2)$$

$$L_z = -\frac{i\hbar}{a'} \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right), \quad (4.3)$$

dont

$$l = |\lambda| + n', \quad (n' = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.4)$$

$$\lambda = \frac{m - \alpha}{a'} \quad (4.5)$$

En posant que

$$\psi_1(r, \theta, \varphi) = R(r) \chi(\theta, \varphi), \quad (4.6)$$

on trouve l'équation radiale suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} \right\} R(r) = 0. \quad (4.7)$$

Faisons maintenant le changement de variable suivant

$$R(r) = e^{i\xi r} (2\xi r)^s u(r), \quad (4.8)$$

dont

$$\rho = -2i\xi r, \quad (4.9)$$

$$\xi^2 = \frac{(E^2 - M^2 c^4)}{\hbar^2 c^2}, \quad \gamma = \frac{kq}{\hbar c}, \quad \varsigma = \frac{\gamma E}{\hbar c \xi}, \quad (4.10)$$

on trouve alors

$$\rho \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \{2(s+1) - \rho\} \frac{du(\rho)}{d\rho} - (s+1 + i\varsigma) u(\rho) = 0, \quad (4.11)$$

avec

$$s(s+1) = l(l+1) - \gamma^2, \quad (4.12)$$

ou

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}. \quad (4.13)$$

En conclusion, la solution de l'équation (4.11) est

$$u(\rho) = N_{\text{norm } 1} F_1(s+1 + i\varsigma; 2(s+1), \rho), \quad (4.14)$$

ou en fonction de r

$$u(r) = N_{\text{norm } 1} F_1(s+1 + i\varsigma; 2(s+1), -2i\xi r) \quad (4.15)$$

Utilisation de l'expansion asymptotique de la fonction hypergéométrique confluyente [88]

$$F(\alpha, \beta, z) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\beta} + \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} e^{-i\pi\alpha} z^{-\alpha} \quad (4.16)$$

avec

$$-\frac{3\pi}{2} < \arg(z) \leq -\frac{\pi}{2} \quad (4.17)$$

donne

$$u(r) = N_{\text{norm}} \frac{\Gamma(2s+2)}{\Gamma(s+1+i\zeta)} e^{-2i\xi r} (-2i\xi r)^{-(s+1-i\zeta)} \quad (4.18)$$

$$+ \frac{\Gamma(2s+2)}{\Gamma(s+1-i\zeta)} e^{-i\pi(s+1+i\zeta)} (-2i\xi r)^{-(s+1+i\zeta)}$$

avec

$$(-2i\xi r)^{-(s+1-i\zeta)} = (2\xi r)^{-(s+1-i\zeta)} e^{\frac{i\pi}{2}(s+1-i\zeta)}, \quad (4.19)$$

$$(-2i\xi r)^{-(s+1+i\zeta)} = (2\xi r)^{-(s+1+i\zeta)} e^{\frac{i\pi}{2}(s+1+i\zeta)}. \quad (4.20)$$

Injectons (4.19) et (4.20) dans (4.18), on trouve

$$u(r) = N_{\text{norm}} \frac{\Gamma(2s+2)}{\Gamma(s+1+i\zeta)} e^{-2i\xi r} (2\xi r)^{-(s+1-i\zeta)} e^{\frac{i\pi}{2}(s+1-i\zeta)} \quad (4.21)$$

$$+ \frac{\Gamma(2s+2)}{\Gamma(s+1-i\zeta)} e^{-i\pi(s+1+i\zeta)} (2\xi r)^{-(s+1+i\zeta)} e^{\frac{i\pi}{2}(s+1+i\zeta)},$$

et

$$u(r) = N_{\text{norm}} \frac{\Gamma(2s+2)}{\Gamma(s+1+i\zeta)} e^{-2i\xi r} (2\xi r)^{-(s+1-i\zeta)} e^{\frac{i\pi}{2}(s+1-i\zeta)} \quad (4.22)$$

$$+ \frac{\Gamma(2s+2)}{\Gamma(s+1-i\zeta)} (2\xi r)^{-(s+1+i\zeta)} e^{-\frac{i\pi}{2}(s+1+i\zeta)}.$$

Par le biais des relations suivantes

$$\Gamma(z) = |\Gamma(z)| e^{i \arg \Gamma(z)}, \quad (4.23)$$

$$\Gamma(\bar{z}) = \overline{\Gamma(z)}, \quad (4.24)$$

on trouve que

$$\Gamma(s+1-i\varsigma) = |\Gamma(s+1-i\varsigma)| e^{i \arg \Gamma(s+1-i\varsigma)}, \quad (4.25)$$

$$\Gamma(s+1+i\varsigma) = |\Gamma(s+1-i\varsigma)| e^{-i \arg \Gamma(s+1-i\varsigma)}. \quad (4.26)$$

Ainsi, à partir des équations (4.25), (4.26) et (4.22), on trouve

$$u(r) = N_{\text{norm}} \frac{\Gamma(2s+2)}{|\Gamma(s+1-i\varsigma)|} (2\xi r)^{-(s+1)} e^{\frac{\pi s}{2}} e^{-i\xi r} \left\{ e^{-i\xi r} (2\xi r)^{i\varsigma} e^{\frac{i\pi}{2}(s+1)+i \arg \Gamma(s+1-i\varsigma)} e^{i\xi r} (2\xi r)^{-i\varsigma} e^{-\frac{i\pi}{2}(s+1)-i \arg \Gamma(s+1-i\varsigma)} \right\}, \quad (4.27)$$

dont

$$(2\xi r)^{i\varsigma} = e^{i\varsigma \ln(2\xi r)}, \quad (4.28)$$

$$(2\xi r)^{-i\varsigma} = e^{-i\varsigma \ln(2\xi r)}. \quad (4.29)$$

Ainsi

$$u(r) = N_{\text{norm}} \frac{\Gamma(2s+2)}{|\Gamma(s+1-i\varsigma)|} (2\xi r)^{-(s+1)} e^{\frac{\pi s}{2}} e^{-i\xi r} \left\{ e^{-i(\xi r - \varsigma \ln(2\xi r) - \arg \Gamma(s+1-i\varsigma) - \frac{\pi}{2}(s+1))} e^{i(\xi r - \varsigma \ln(2\xi r) - \arg \Gamma(s+1-i\varsigma) - \frac{\pi}{2}(s+1))} \right\}, \quad (4.30)$$

ou

$$u(r) = N_{\text{norm}} \frac{\Gamma(2s+2)}{|\Gamma(s+1-i\varsigma)|} (2\xi r)^{-(s+1)} e^{\frac{\pi s}{2}} e^{-i\xi r} \times 2 \cos \left(\xi r - \varsigma \ln(2\xi r) - \arg \Gamma(s+1-i\varsigma) - \frac{\pi s}{2} - \frac{\pi}{2} \right), \quad (4.31)$$

Finalement

$$u(r) = N_{\text{norm}} \frac{\Gamma(2s+2)}{|\Gamma(s+1-i\varsigma)|} (2\xi r)^{-(s+1)} e^{\frac{\pi s}{2}} e^{-i\xi r} \times \left[2 \sin \left(\xi r - \varsigma \ln(2\xi r) - \arg \Gamma(s+1-i\varsigma) - \frac{\pi s}{2} \right) \right]. \quad (4.32)$$

En Utilisant l'équation (4.8), on obtient

$$R(r) = N_{\text{norm}} \frac{\Gamma(2s+2)}{|\Gamma(s+1-i\zeta)|} \frac{e^{\frac{\pi s}{2}}}{(2\xi)} \times \left\{ \frac{2\sin(\xi r - \zeta \ln(2\xi r) - \arg\Gamma(s+1-i\zeta) - \frac{\pi s}{2})}{r} \right\}, \quad (4.33)$$

avec

$$\begin{aligned} R(r) &\simeq \frac{2\sin(\xi r - \zeta \ln(2\xi r) - \arg\Gamma(s+1-i\zeta) - \frac{\pi s}{2})}{r} \\ &\simeq \frac{2\sin(\xi r - \frac{\pi s}{2} + \delta_s)}{r} \\ &= \frac{1}{i r} \{ (-i)^s e^{i(\xi r + \delta_s)} - i^s e^{-i(\xi r + \delta_s)} \}, \end{aligned} \quad (4.34)$$

où δ_s , est une constante, appelée « phase shift »

$$\delta_s = \arg\Gamma(s+1+i\zeta). \quad (4.35)$$

et dont

$$N_{\text{norm}} = \frac{|\Gamma(s+1-i\zeta)|}{\Gamma(2s+2)} \frac{(2\xi)}{e^{\frac{\pi s}{2}}}. \quad (4.36)$$

La solution sur le centre de diffusion, dans la direction z , est définie par [89]

$$R(r) \simeq e^{i\xi z} + f(\theta) \frac{e^{i\xi r}}{r}. \quad (4.37)$$

Alors

$$e^{i\xi z} = e^{i\xi r \cos\theta} \simeq \frac{1}{2i\xi r} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) P_s(\cos\theta) [(-1)^{s+1} e^{-i\xi r} + e^{i\xi r}], \quad (4.38)$$

avec

$$f(\theta) = \frac{1}{2i\xi} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) [S_s - 1] P_s(\cos\theta). \quad (4.39)$$

ou S la matrice de diffusion dont

$$S_s = \exp(2i\delta_s). \quad (4.40)$$

Enfin

$$f(\theta) = \frac{1}{2i\xi} \sum_{s=0}^{\infty} (2s+1) f_s P_s(\cos\theta). \quad (4.41)$$

A partir des équation (4.39) et (4.41), on trouve

$$f_s = \frac{1}{2i\xi} [S_s - 1] = \frac{1}{2i\xi} [e^{2i\delta_s} - 1]. \quad (4.42)$$

En Utilisant (4.25) et (4.26), on obtient

$$\frac{\Gamma(s+1-i\zeta)}{\Gamma(s+1+i\zeta)} = \frac{|\Gamma(s+1-i\zeta)| e^{i\delta_s}}{|\Gamma(s+1-i\zeta)| e^{-i\delta_s}}, \quad (4.43)$$

dont

$$e^{2i\delta_s} = \frac{\Gamma(s+1-i\zeta)}{\Gamma(s+1+i\zeta)}. \quad (4.44)$$

Donc

$$2i\xi f_s = \frac{\Gamma(s+1-i\zeta)}{\Gamma(s+1+i\zeta)} - 1 \quad (4.45)$$

Ainsi, la fonction de diffusion $f(\theta)$ est donnée par [90]

$$f(\theta) = \frac{1}{2\xi} \left(-2 \frac{\Gamma(1-i\zeta)}{\Gamma(1+i\zeta)} \right) \left(\frac{\varsigma}{1-\cos\theta} \right) \exp \left(-i\zeta \ln \frac{(1-\cos\theta)}{2} \right). \quad (4.46)$$

Finalement, nous avons la formule de diffusion de Rutherford pour la section efficace différentielle en mécanique classique et mécanique quantique non-relativiste.

$$f(\theta) = -\varsigma \left(\frac{\Gamma(1-i\zeta)}{\Gamma(1+i\zeta)} \right) \frac{\exp(-i\zeta \ln [\sin^2(\frac{\theta}{2})])}{2\xi \sin^2(\frac{\theta}{2})}. \quad (4.47)$$

avec

$$\varsigma = \frac{\gamma E_n}{\hbar c \xi} \quad (4.48)$$

et

$$E_n = \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\left| \frac{m-\alpha}{a} \right| + \kappa + \frac{1}{2} \right)^2 - \gamma^2} \right)^2}}}. \quad (4.49)$$

Ainsi, la section efficace est donnée par

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= |f(\theta)|^2, \\ &= \left| -\varsigma \left(\frac{\Gamma(1-i\varsigma)}{\Gamma(1+i\varsigma)} \right) \frac{\exp(-i\varsigma \ln[\sin^2(\frac{\theta}{2})])}{2\xi \sin^2(\frac{\theta}{2})} \right|^2.\end{aligned}\quad (4.50)$$

4.1.2 L'équation de DKP de spin 0 en présence d'un monopole global

Partons de l'équation suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} R(r) = 0, \quad (4.51)$$

avec

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{b^2 \sin^2\theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right\}, \quad (4.52)$$

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right), \quad (4.53)$$

$$l = |\lambda| + n', \quad (n' = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.54)$$

$$\lambda = \frac{m - \alpha}{b}. \quad (4.55)$$

On trouve alors l'équation radiale suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\frac{l(l+1)}{b^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} \right\} R(r) = 0. \quad (4.56)$$

Faisons un changement de variable (4.8), (4.9) et (4.10), et injectons les dans l'équation (4.56), obtient

$$\rho \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \{2(s+1) - \rho\} \frac{du(\rho)}{d\rho} - (s+1+i\varsigma) u(\rho) = 0, \quad (4.57)$$

dont

$$s(s+1) = \frac{l(l+1)}{b^2} - \gamma^2, \quad (4.58)$$

donc

$$s = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.59)$$

Par conséquent, la solution de l'équation (4.57) est

$$u(r) = N_{\text{norm } 1} F_1(s+1+i\varsigma; 2(s+1), -2i\xi r). \quad (4.60)$$

De la même manière précédente, on trouve que la section efficace

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2,$$

dont

$$f(\theta) = -\varsigma \left(\frac{\Gamma(1-i\varsigma)}{\Gamma(1+i\varsigma)} \right) \frac{\exp(-i\varsigma \ln[\sin^2(\frac{\theta}{2})])}{2\xi \sin^2(\frac{\theta}{2})}, \quad (4.61)$$

avec

$$\varsigma = \frac{\gamma E_n}{\hbar c \xi}, \quad (4.62)$$

$$E_n = \pm M c^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} - \left(\frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.63)$$

4.2 Les particules bosoniques vectorielles

4.2.1 L'équation de DKP de spin 1 en présence des cordes cosmiques

4.2.1.1 cas de $P = (-1)^{j+1}$:

L'équation radiale suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right\} \Phi_1(r) = 0, \quad (4.64)$$

Vue la ressemblance de notre équation avec celle discutée au-dessus, alors la section efficace est donnée par

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2,$$

avec

$$f(\theta) = -\varsigma \left(\frac{\Gamma(1-i\varsigma)}{\Gamma(1+i\varsigma)} \right) \frac{\exp(-i\varsigma \ln[\sin^2(\frac{\theta}{2})])}{2\xi \sin^2(\frac{\theta}{2})}. \quad (4.65)$$

dont

$$E_n = \pm \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\frac{m-\alpha}{a^r} + \kappa + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right)^2}}}. \quad (4.66)$$

4.2.1.2 cas de $P = (-1)^j$

Soit l'équation radiale suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right\} E_2(r) = 0. \quad (4.67)$$

Cette équation prend la forme suivante

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{2 - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} \right\} E_2(r) = 0. \quad (4.68)$$

Dans cette section, faisons un changement de variable (4.8), (4.9) et (4.10), et injectons les dans l'équation (4.68), on trouve que

$$\rho \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \{2(s+1) - \rho\} \frac{du(\rho)}{d\rho} - (s+1+i\varsigma)u(\rho) = 0. \quad (4.69)$$

$$s(s+1) - (2 - \gamma^2) = 0, \quad (4.70)$$

ou

$$s = \frac{-1 + \sqrt{9 - 4\gamma^2}}{2} \quad (4.71)$$

De la même manière, la section efficace est donnée par

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2,$$

ou

$$f(\theta) = -\varsigma \left(\frac{\Gamma(1-i\varsigma)}{\Gamma(1+i\varsigma)} \right) \frac{\exp(-i\varsigma \ln[\sin^2(\frac{\theta}{2})])}{2\xi \sin^2(\frac{\theta}{2})}, \quad (4.72)$$

avec

$$E_n = \pm Mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(9-4\gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.73)$$

4.2.2 L'équation de DKP de spin 1 en présence d'un monopole global

4.2.2.1 cas de $P = (-1)^{j+1}$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{j(j+1)}{r^2} \right\} \Phi_1(r) = 0, \quad (4.74)$$

Après le calcul comme la section précédent on trouve la section efficace différentielle

$$f(\theta) = -\varsigma \left(\frac{\Gamma(1-i\varsigma)}{\Gamma(1+i\varsigma)} \right) \frac{\exp(-i\varsigma \ln[\sin^2(\frac{\theta}{2})])}{2\xi \sin^2(\frac{\theta}{2})} \quad (4.75)$$

avec

$$E_n = \pm Mc^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} - \left(\frac{j(j+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.76)$$

4.2.2.2 cas de $P = (-1)^j$

Dans cette état, la section efficace est

$$\sigma(\theta) = |f(\theta)|^2,$$

dont

$$f(\theta) = -\varsigma \left(\frac{\Gamma(1-i\varsigma)}{\Gamma(1+i\varsigma)} \right) \frac{\exp(-i\varsigma \ln[\sin^2(\frac{\theta}{2})])}{2\xi \sin^2(\frac{\theta}{2})} \quad (4.77)$$

avec

$$E_n = \pm M c^2 \left(1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (9 - 4\gamma^2)^{\frac{1}{2}} \right)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4.78)$$

4.3 Discussion des résultats

L'analyse par onde partielle de la diffusion des particule à spin-0 et 1 en présence d'un champ d'Aharonov-Bohm plus Coulombien a été réalisée en détail. Nous avons calculé la phase shift relativiste et nous avons exprimé l'amplitude de diffusion sous la forme d'une somme d'onde partielle. La limite non relativiste de la théorie la série d'ondes partielles pour l'amplitude de diffusion est bien mise en évidence. Elle est réduite à celle donnant la formule de Rutherford.

Conclusion et Perspective

L'étude des solutions exactes des équations de Dirac (spin-1/2), Klein-Gordon (spin-0) et Duffin-Kemmer-Petiau (spin-0 et 1), dans un espace-temps courbé, constitue un élément important dans la construction d'une théorie combinant la physique quantique et la gravité quantique. Dans cette direction, l'étude du comportement des particules relativistes dans ce contexte est d'un intérêt considérable.

Ainsi, l'objectif principal de notre thèse est de résoudre l'équation Duffin-Kemmer-Petiau correspondants aux particules des spin-0 et 1, en présence des deux potentiels d'Aharonov-Bohm plus Coulombien dans un espace courbé formé des défauts topologiques tels que les cordes cosmiques et les monopoles globaux : rappelons que cette équation est une équation d'onde de premier ordre, covariante et semblable à celle de Dirac. Le traitement se consacre sur deux types d'espaces, commutatif et non-commutatif, en présence des défauts topologiques. Le choix de ces deux défauts topologiques, parmi les autres types, est fondé sur la simplicité de la forme de sa métrique, et aussi pour son importance qu'ils ont eu particulièrement dans le domaine de l'astrophysique et la cosmologie jusqu'à ou domaine de la physique de l'état solide (les défauts de dislocations) : ces études ont méritées un grand intérêt dans les recherche modernes en physique théorique.

La fonction d'onde ainsi que le spectre d'énergie, pour les deux cas des défauts topologiques ont été obtenus (solutions analytiques). Le spectre d'énergie trouvé dépend fortement des paramètres des deux deux potentiels ainsi que la géométrie de l'espace-temps.

Au cour de cette étude, nous nous sommes focalisé sur le problème du critère de l'admissibilité de la fonction d'onde causé par l'effet d'Aharonov-Bohm où la présence du potentiel d'Aharonov-Bohm modifie complètement les relations de commutation fondamentales du moment cinétique dite « critère de Pauli ». Ainsi, notre système quantique (particule de spin-0 et 1 dans un potentiels d'Aharonov-Bohm plus Coulombien) est étudié à la base du formalisme de matrice de Duffin-Kemmer-Petiau en utilisant la technique de tétrade pour calculer les connections de spin. La séparation des variables est effectuée à l'aide des fonctions de Wigner $D_\sigma = D_{-m,\sigma}^j$, $\sigma = 0, +1, -1$. Aussi, à l'aide de l'opérateur de parité $\hat{\Pi}$, le système radial à 10 équations est divisé en deux sous-systèmes de 4 et 6 équations correspondant à la parité $P = (-1)^{j+1}$ et $P = (-1)^j$ respectivement.

Dans le cadre de la non-commutativité, la situation est plus compliquée et la plupart des modèles ne peuvent pas être résolus avec précision. En raison de l'absence d'une solution analytique exacte, nous avons utilisé la méthode de Bopp-shift et la théorie de perturbation. Le décalage d'énergie dû à la non-commutativité a été obtenu via la théorie de perturbation du premier ordre. Il est explicitement montré que la dégénérescence de spectre initiale est brisée lors du passage de l'espace commutatif à l'espace non-commutatif.

L'effet électromagnétique du potentiel d'Aharonov-Bohm

A.0.1 La théorie classique

D'après la théorie de Maxwell, les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} sont déterminés, dans le cas général, à partir des densités de charge ρ et de courant \mathbf{j} par les quatre équations fondamentales de l'électrodynamique classique, les Équations de Maxwell [91] :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (\text{Théorème de Gauss}), \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{Loi de Faraday}), \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Théorème d'Ampère}). \quad (\text{A.4})$$

En physique classique, une particule de charge e , vitesse \mathbf{v} qui se déplace dans le vide en présence d'un champ électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{B}) subit une force décrite par l'équation de force de Lorentz de la forme :

$$\mathbf{F} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (\text{A.5})$$

Dans la théorie classique, si $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$, la force de Lorentz est nulle. Il ne peut donc y avoir d'effet ayant une contrepartie classique. Cependant, en mécanique quantique, les phases relatives aux paquets d'ondes peuvent se manifester par des phénomènes d'interférences qui n'ont pas d'équivalent classique. Par conséquent, nous devons examiner attentivement les rôles joués par les potentiels, par exemple dans le contexte de l'équation de Schrödinger.

Les deux champs, le champ électrique et le champ magnétique peuvent s'exprimer en fonction des deux potentiels scalaire et vecteur ϕ et \mathbf{A} . En utilisant la deuxième équation de Maxwell (équation (A.2)), nous pouvons écrire un champ magnétique sous une forme

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A.6})$$

Nous pouvons faire la même chose avec la troisième équation de Maxwell (équation (A.3)) et l'équation (A.6), et réécrire le champ électrique sous la forme

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi. \quad (\text{A.7})$$

Aharonov and Bohm [17] ont prédit que les potentiels électromagnétiques \mathbf{A} et ϕ pourraient être des quantités physiques réelles et que cela pourrait être démontré par des expériences d'interférence d'électrons.

A.0.2 Transformation de jauge

Les transformations de jauge doivent être modifiées pour tenir compte de la structure dynamique de l'électromagnétisme.

Soit

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \chi, \quad (\text{A.8})$$

$$\phi' = \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \chi}{\partial t}, \quad (\text{A.9})$$

alors

$$\mathbf{E}' = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} - \nabla \phi' = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A} + \nabla \chi) - \nabla \phi' = \mathbf{E}, \quad (\text{A.10})$$

Ainsi, \mathbf{A} et ϕ ne sont pas uniques, ils peuvent être modifiés par des transformations de la jauge sans changer la nature du champ électrique ou magnétique.

A.0.3 Théorie quantique

En mécanique quantique, l'effet d'Aharonov-Bohm n'a pas un origine dans la théorie classique. Les effets physiques se produisent dans la région où $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$ et dont le potentiel vecteur \mathbf{A} n'est pas nul. Pour concrétiser ce phénomène, on introduit un solénoïde derrière le mur entre les fentes.

Considérons les intégrales de la forme suivante

$$\chi_{C1} = \int_{C1} \mathbf{A}(r) dr, \quad (\text{A.11})$$

$$\chi_{C2} = \int_{C2} \mathbf{A}(r) dr, \quad (\text{A.12})$$

avec 1 et 2 désignant deux chemins différents. La différence de phase entre les deux chemins 1 et 2 est

$$\begin{aligned} \Delta &= \chi_{C1} - \chi_{C2} \\ &= \frac{e}{\hbar c} \left\{ \int_{C1} \mathbf{A}(r) dr - \int_{C2} \mathbf{A}(r) dr \right\}. \end{aligned}$$

En Utilisant le théorème de Stokes, on trouve que

$$\Delta = \frac{e}{\hbar c} \int_C \mathbf{A}(r) dr = \frac{e\Phi}{\hbar c} \neq 0. \quad (\text{A.13})$$

Ici, $C1$ et $C2$ représentent les chemins empruntés par chaque faisceau lors du passage du solénoïde. Puisqu'ils forment un chemin fermé autour de la solénoïde, la différence de phase totale entre les faisceaux sera proportionnelle au flux magnétique à l'intérieur de la solénoïde. Donc, si nous modifions le champ magnétique dans la solénoïde, la différence de phase entre les faisceaux et le motif d'interférence se déplace : c'est ce qu'on appelle l'effet d'Aharonov-Bohm. La vérification expérimentale de l'effet d'Aharonov-Bohm a fait l'objet de plusieurs expériences complexes dont certaines mettent en jeu les microtechnologies des

circuits intégrés. Enfin, on pense que l'effet d'Aharonov-Bohm jouera un rôle important dans les circuits électroniques de demain.

A.0.4 La phase dans une région sans champ

En annulant les deux potentiels \mathbf{A} et ϕ , dans la région où $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$, un potentiel vecteur \mathbf{A}' existera toujours. Ceci constitue l'effet d'Aharonov-Bohm qui est un effet de nature quantique. Soit

$$\mathbf{A} = \nabla\chi. \quad (\text{A.14})$$

La justification de cela réside dans

$$\mathbf{B} = 0 = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \nabla\chi \quad (\text{A.15})$$

A partir de (A.14), la fonction de jauge prend la forme suivantes

$$\chi(r) = \int \mathbf{A}(r) dr, \quad (\text{A.16})$$

et le changement de jauge de phase devient

$$\psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c} \int \mathbf{A}(r) dr} \psi. \quad (\text{A.17})$$

A.0.5 L'équation de Schrödinger

Soit une particule de charge e et de masse m soumise à un champ électrique et magnétique. L'hamiltonien de cette particule est donnée par [92,93] :

$$H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi(r) + V(r) \quad (\text{A.18})$$

où $V(r)$ est une contribution arbitraire supplémentaire à l'énergie potentielle, ce qui sera mis à zéro dans la suite.

L'équation de Schrödinger de cette particule est alors

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \left[\frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi(r) \right] \psi \quad (\text{A.19})$$

On peut apercevoir que l'équation de Schrödinger n'est pas invariante lors d'une transformation de jauge. Ainsi

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi &= \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}')^2 + e\phi'(r) \right] \psi \\ &= \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\chi)^2 + \left(e\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \right) \right] \psi. \end{aligned}$$

Maintenant, on procède à un changement de phase $\psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi}\psi$, on obtient l'équation de Schrödinger suivante

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}')^2 + e\phi'(r) \right] \psi', \quad (\text{A.20})$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\chi)^2 + \left(e\phi - \frac{e}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \right) \right] \psi' \quad (\text{A.21})$$

On trouve alors que :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi' = i\hbar e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi} \left(\frac{ie}{\hbar c}\frac{\partial\chi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \psi, \quad (\text{A.22})$$

ou encore

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\chi \right) \psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right) \psi. \quad (\text{A.23})$$

On peut aussi écrire que :

$$\left(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A} - \frac{e}{c}\nabla\chi \right)^2 \psi' = e^{\frac{ie}{\hbar c}\chi} \left(-i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\mathbf{A} \right)^2 \psi \quad (\text{A.24})$$

Insérer les équations (A.22) et (A.24) dans l'équation (A.21). on a alors l'équation de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A})^2 + e\phi(r) \right] \psi. \quad (\text{A.25})$$

A.1 Critère de Pauli et effet de vecteur d'Aharonov-Bohm

A.1.1 Cas non-relativiste

Comme nous le savons, le moment cinétique angulaire satisfait aux relations suivantes [67]

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L}, \quad (\text{A.26})$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k, \quad (\text{A.27})$$

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm} \quad (\text{A.28})$$

dont

$$[L^2, L_{\pm}] = 0, \quad (\text{A.29})$$

avec

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial}{\partial\varphi} \right\}, \quad (\text{A.30})$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}. \quad (\text{A.31})$$

Ici $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ sont des opérateurs d'échelle. Le moment cinétique angulaire est basé sur ces relations de commutation que Pauli a exigées pour que la fonction propre appropriée soit intégrable, et fermée sous le fonctionnement des opérateurs. Cette condition est appelée comme critère de Pauli, et par conséquent les relations de commutations sont pertinents pour que le critère de Pauli soit applicable.

Maintenant, en présence du potentiel d'Aharonov-Bohm avec

$$A_r = A_{\theta} = 0, \quad A_{\varphi} = \frac{\phi}{2\pi r \sin\theta}, \quad (\text{A.32})$$

le moment cinétique angulaire devient

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\alpha \right)^2 \right\}, \quad (\text{A.33})$$

avec

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\alpha \right). \quad (\text{A.34})$$

En présence du potentiel d'Aharonov-Bohm, Cheng [94] a montré que le moment cinétique angulaire ne satisfait pas aux relations de commutation fondamentales, et au lieu de cette

équation, il obtient

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L} + (2im\alpha\hbar^2) \cos\theta\delta(\cos^2\theta - 1)\mathbf{e}_r. \quad (\text{A.35})$$

De cette équation nous avons

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm} \quad (\text{A.36})$$

$$[L^2, L_{\pm}] = \mp 2\alpha\hbar^2 [L_{\pm}\delta(\cos^2\theta - 1) + \delta(\cos^2\theta - 1)L_{\pm}]. \quad (\text{A.37})$$

Ces règles sont différentes des équations (A.26) et (A.29). Suivant l'argument de Cheng [94], la région où le champ magnétique existe est inaccessible à l'électron, et par conséquence les relations de commutation du moment cinétique angulaire devraient en tenir compte. Ce type de relations de communication dit global d'après Cheng [94]. Comme conséquence, le critère de Pauli n'est plus applicable. Les solutions de L_z et L^2 dans les conditions limites suivantes à $\theta = 0, \pi$,

$$\psi(\theta, \varphi)|_{\theta=0, \pi} = 0. \quad (\text{A.38})$$

Cette condition signifie que la particule est restreinte à la région doublement connectée de $\theta \neq 0, \pi$. Kretzschmar [95] a proposé les solutions suivantes

$$L_z\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = \lambda\hbar\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi), \quad (\text{A.39})$$

$$L^2\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = l(l+1)\hbar^2\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi), \quad (\text{A.40})$$

avec

$$\lambda = m - \alpha, \quad m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (\text{A.41})$$

$$l = |\lambda| + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A.42})$$

Les paramètres λ et l dépendent de la quantité α du champ magnétique. Enfin, les fonctions propres normalisées sont de la forme

$$\psi_{\lambda l}(\theta, \varphi) = c_{\lambda, l} P_l^{-|\lambda|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (\text{A.43})$$

ou

$$c_{\lambda,l} = e^{\frac{i\pi}{2}\lambda + \frac{i\pi}{2}|\lambda|} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{\Gamma(l+|\lambda|+1)}{\Gamma(l-|\lambda|+1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.44})$$

ou

$$\begin{cases} \psi_{\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi) = c_{\lambda_1, l_1} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) e^{im\varphi}, & \lambda_1 = m - \alpha > 0, l_1 = \lambda_1 + k \\ \psi_{\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi) = c_{\lambda_2, l_2} P_{l_2}^{\lambda_2}(\cos\theta) e^{im\varphi}, & \lambda_2 = m - \alpha < 0, l_2 = -\lambda_2 + k \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

L'inapplicabilité du critère de Pauli a complètement modifié l'espace Hilbert total S : l'espace Hilbert total S est divisé en deux sous-espaces, S_+ et S_- . S_+ est couvert par toutes les fonctions propres $\psi_{\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi)$, et S_- est couvert par toutes les fonctions propres $\psi_{\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi)$. Ces deux sous-espaces ne sont pas connectés par aucun opérateur.

Passons maintenant à étendre ces règles de commutations lors de la présence des défauts topologiques

A.1.2 Règle de commutations En présence de défauts topologiques

Soit

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (-i\hbar\nabla - e\mathbf{A}). \quad (\text{A.46})$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= [y(-i\hbar\nabla_z - eA_z) - z(-i\hbar\nabla_y - eA_y)] e_x \\ &+ [z(-i\hbar\nabla_x - eA_x) - x(-i\hbar\nabla_z - eA_z)] e_y \\ &+ [x(-i\hbar\nabla_y - eA_y) - y(-i\hbar\nabla_x - eA_x)] e_z. \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \times \mathbf{L} &= \{ [z(-i\hbar\nabla_x - eA_x) - x(-i\hbar\nabla_z - eA_z)] [x(-i\hbar\nabla_y - eA_y) - y(-i\hbar\nabla_x - eA_x)] \\ &- [x(-i\hbar\nabla_y - eA_y) - y(-i\hbar\nabla_x - eA_x)] [z(-i\hbar\nabla_x - eA_x) - x(-i\hbar\nabla_z - eA_z)] \} e_x \\ &+ \{ [x(-i\hbar\nabla_y - eA_y) - y(-i\hbar\nabla_x - eA_x)] [y(-i\hbar\nabla_z - eA_z) - z(-i\hbar\nabla_y - eA_y)] \\ &- [y(-i\hbar\nabla_z - eA_z) - z(-i\hbar\nabla_y - eA_y)] [x(-i\hbar\nabla_y - eA_y) - y(-i\hbar\nabla_x - eA_x)] \} e_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \{ [y(-i\hbar\nabla_z - eA_z) - z(-i\hbar\nabla_y - eA_y)] [z(-i\hbar\nabla_x - eA_x) - x(-i\hbar\nabla_z - eA_z)] \\
 & - [z(-i\hbar\nabla_x - eA_x) - x(-i\hbar\nabla_z - eA_z)] [y(-i\hbar\nabla_z - eA_z) - z(-i\hbar\nabla_y - eA_y)] \} e_z
 \end{aligned} \tag{A.48}$$

Après un calcul, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} \times \mathbf{L} &= (i\hbar) [y(-i\hbar\nabla_z - eA_z) - z(-i\hbar\nabla_y - eA_y)] e_x \\
 &+ (i\hbar e) xz (\nabla_y A_z - \nabla_z A_y) e_x \\
 &+ (i\hbar) [z(-i\hbar\nabla_x - eA_x) - x(-i\hbar\nabla_z - eA_z)] e_y \\
 &+ (i\hbar e) yz (\nabla_z A_x - \nabla_x A_z) e_y \\
 &+ (i\hbar) [x(-i\hbar\nabla_y - eA_y) - y(-i\hbar\nabla_x - eA_x)] e_z \\
 &+ (i\hbar e) z^2 (\nabla_x A_y - \nabla_y A_x) e_z
 \end{aligned} \tag{A.49}$$

ou

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} \times \mathbf{L} &= (i\hbar) [y(-i\hbar\nabla_z - eA_z) - z(-i\hbar\nabla_y - eA_y)] e_x \\
 &+ (i\hbar) [z(-i\hbar\nabla_x - eA_x) - x(-i\hbar\nabla_z - eA_z)] e_y \\
 &+ (i\hbar) [x(-i\hbar\nabla_y - eA_y) - y(-i\hbar\nabla_x - eA_x)] e_z \\
 &+ (i\hbar e) z \{ x(\nabla_y A_z - \nabla_z A_y) e_x + y(\nabla_z A_x - \nabla_x A_z) e_y \\
 &+ z(\nabla_x A_y - \nabla_y A_x) e_z \}
 \end{aligned} \tag{A.50}$$

Dans les coordonnées cartésienne on a

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{A.51}$$

$$\mathbf{B} = (\nabla_x \mathbf{e}_x + \nabla_y \mathbf{e}_y + \nabla_z \mathbf{e}_z) \times (A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z) \tag{A.52}$$

$$\mathbf{B} = (\nabla_y A_z - \nabla_z A_y) e_x + (\nabla_z A_x - \nabla_x A_z) e_y + (\nabla_x A_y - \nabla_y A_x) e_z \tag{A.53}$$

Donc

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = (x e_x + y e_y + z e_z)$$

$$\times [(\nabla_y A_z - \nabla_z A_y) e_x + (\nabla_z A_x - \nabla_x A_z) e_y + (\nabla_x A_y - \nabla_y A_x) e_z] \quad (\text{A.54})$$

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{B} = x (\nabla_y A_z - \nabla_z A_y) e_x + y (\nabla_z A_x - \nabla_x A_z) e_y + z (\nabla_x A_y - \nabla_y A_x) e_z \quad (\text{A.55})$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \times \mathbf{L} &= (i\hbar) [y (-i\hbar \nabla_z - eA_z) - z (-i\hbar \nabla_y - eA_y)] e_x \\ &+ (i\hbar) [z (-i\hbar \nabla_x - eA_x) - x (-i\hbar \nabla_z - eA_z)] e_y \\ &+ (i\hbar) [x (-i\hbar \nabla_y - eA_y) - y (-i\hbar \nabla_x - eA_x)] e_z \\ &+ (i\hbar e) z (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{A.56})$$

Dans les coordonnées sphériques on a

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{A.57})$$

$$\mathbf{B} = \left(\frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} e_\varphi \right) \times (A_r e_r + A_\theta e_\theta + A_\varphi e_\varphi) \quad (\text{A.58})$$

Avec $A_r = A_\theta = 0$ alors

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} e_r - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} e_\theta \quad (\text{A.59})$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta} \right) e_r - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta} \right) e_\theta \quad (\text{A.60})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{2\pi r^2} \left\{ \frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta} e_r + \frac{1}{\sin \theta} e_\theta \right\} \quad (\text{A.61})$$

Avec

$$e_r = \sin \theta \cos \varphi e_x + \sin \theta \sin \varphi e_y + \cos \theta e_z \quad (\text{A.62})$$

$$e_\theta = \cos \theta \cos \varphi e_x + \cos \theta \sin \varphi e_y - \sin \theta e_z \quad (\text{A.63})$$

Alors

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{2\pi r^2} \left\{ \frac{1}{\cos^2 \theta - 1} \right\} e_z \quad (\text{A.64})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{\pi r^2} \delta (\cos^2 \theta - 1) e_z \quad (\text{A.65})$$

Alors

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (i\hbar) \mathbf{L} + (i\hbar e) z (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.66})$$

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (i\hbar) \mathbf{L} + (i\hbar e) \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}) \quad (\text{A.67})$$

Avec

$$\Phi = \frac{m_0 \hbar}{e} \quad (\text{A.68})$$

$$z = r \cos \theta \quad (\text{A.69})$$

$$\mathbf{r} = r e_r \quad (\text{A.70})$$

Alors

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (i\hbar) \mathbf{L} + (i\hbar e) r e_r \left((x e_x + y e_y + z e_z) \cdot \frac{m_0 \hbar}{\pi e r^2} \delta(\cos^2 \theta - 1) e_z \right) \quad (\text{A.71})$$

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (i\hbar) \mathbf{L} + (i\hbar e) r e_r \left(z \frac{2m_0 \hbar}{e r^2} \delta(\cos^2 \theta - 1) \right) \quad (\text{A.72})$$

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (i\hbar) \mathbf{L} + (i\hbar e) r e_r \left((r \cos \theta) \frac{2m_0 \hbar}{e r^2} \delta(\cos^2 \theta - 1) \right) \quad (\text{A.73})$$

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (i\hbar) \mathbf{L} + (i\hbar e) e_r \left(\cos \theta \frac{2m_0 \hbar}{e} \delta(\cos^2 \theta - 1) \right) \quad (\text{A.74})$$

Finalement

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = (i\hbar) \mathbf{L} + (2im_0 \hbar^2) \cos \theta \delta(\cos^2 \theta - 1) e_r \quad (\text{A.75})$$

• *cas d'une corde cosmique*

En présence d'une corde cosmique, dont

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin \theta}. \quad (\text{A.76})$$

Ainsi

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} e_r - \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} e_\theta \quad (\text{A.77})$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\Phi}{2\pi r a' \sin \theta} \right) e_r - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\Phi}{2\pi r a' \sin \theta} \right) e_\theta \quad (\text{A.78})$$

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{2\pi a' r^2} \left\{ \frac{-\cos \theta}{\sin^2 \theta} e_r + \frac{1}{\sin \theta} e_\theta \right\} \quad (\text{A.79})$$

Enfin, nous avons la relation suivante

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L} + \left(\frac{2im_0}{\mathbf{a}'} \hbar^2 \right) \cos\theta\delta(\cos^2\theta - 1)e_r. \quad (\text{A.80})$$

• *cas d'un monopole global*

En présence d'un monopole global, dont

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi b' r \sin\theta}, \quad (\text{A.81})$$

Alors

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{2\pi b' r^2} \left\{ \frac{-\cos\theta}{\sin^2\theta} e_r + \frac{1}{\sin\theta} e_\theta \right\}, \quad (\text{A.82})$$

on trouve

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L} + \left(\frac{2im_0}{\mathbf{b}'^2} \hbar^2 \right) \cos\theta\delta(\cos^2\theta - 1)e_r. \quad (\text{A.83})$$

Bibliographie

- [1] A. Boumali, *Can. J. Phys* **2004**, *82*, 67–74.
- [2] A. Boumali, *Can. J. Phys* **2007**, *85*, 1417–29.
- [3] A. Boumali, *Zeitschrift für Naturforschung A* **2015**, *70*.
- [4] M. Falek, M. Merad, *Cent. Euro. J. Phys* **2010**, *8*, 3.
- [5] A. Boumali, H. Aounallah, *Advances in High Energy Physics* **2018**, *9*, ID 1031763.
- [6] A. Boumali, N. Messai, *Can. J. Phys* **2014**, 1460–1463.
- [7] N. Messai, A. Boumali, *Eur. Phys. J Plus* **2015**, *130*, 140.
- [8] H. Hassanabadi, W. S. Chung, S. Zare, H. Sobhani, *Eur. Phys. J. C* **2018**, *78*, 83.
- [9] H. Hassanabadi, M. Hosseini, S. Zare, M. Hosseinpour, *Few-Body Sy* **2019**, *60*, 12.
- [10] M. Falek, M. Merad, M. Moumni, *J. Math. Phys* **2019**, *60*, 013505.
- [11] H. Tetrode, *Z. Phys* **1928**, *50*, 336.
- [12] V. Fock, *Z. Phys* **1928**, *53*, 592.
- [13] W. Pauli, *Ann. Phys. (Leipzig)* **1933**, *18*, 337.
- [14] E. Schrödinger, *Physica B* **1932**, 899.

- [15] G. C. McVittie, *Mon. Not. R. Astron. Soc* **1932**, 92, 868.
- [16] V. B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **1987**, 35, 2031–2033.
- [17] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev* **1959**, 115, 485.
- [18] P. S. de Gerbert, R. Jackiw, *Commun. Math. Phys* **1989**, 124, 229.
- [19] J. Spinelly, E. R. B. de Mello, V. B. Bezerra, *Class. Quantum Grav* **2002**, 18, 1555.
- [20] G. A. de Marques, V. B. Bezerra, *Class. Quantum Grav* **2002**, 19, 985.
- [21] C. Furtado, F. Moraes, *J. Phys* **2000**, A33, 5513.
- [22] V. B. Bezerra, *Class. Quantum Grav* **1991**, 8, 1939.
- [23] E. S. Moreira, *Phys. Rev* **1998**, A58, 1678.
- [24] M. Alvarez, *J. Phys* **1999**, A32, 4079.
- [25] A. Vilenkin, *Phys. Rep* **1985**, 121, 263.
- [26] H. Kleinert, *Gauge fields in condensed matter*, World Scientific, Singapore, **1989**.
- [27] A. J. Heeger, *Comm. Solid State Phys* **1981**, 10, 53.
- [28] M. Kleman, *Points and lines and walls*, Wiley, New York, **1983**.
- [29] V. A. Osipov, *Phys. Lett* **1992**, A164, 327.
- [30] V. B. Bezerra, *Ann. Phys* **1990**, NY203, 392.
- [31] M. O. Katanaev, I. V. Volovich, *Ann. Phys* **1992**, NY216, 1.
- [32] H. Snyder, *Phys. Rev* **1947**, 71, 38.
- [33] H. Motavalli, A. R. Akbarieh, *Mod. Phys.A* **2010**, 25, 2523.
- [34] S. Zaim, L. Khodja, Y. Delenda, *Int. J. Mod. Phys.A* **2011**, 26, 4133.

- [35] W. Ehrenberg, R. E. Siday, *Proc. Phys. Soc. B* **1949**, 68, 8–21.
- [36] P. Bocchieri, A. Loinger, *Nuovo Cimento. A* **1978**, 47, 475.
- [37] W. C. Henneberger, *J. Math. Phys* **1981**, 22, 116.
- [38] S. N. M. Ruijsenaars, *Ann. Phys* **1983**, 146, 1–34.
- [39] G. Petiau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mém. Collect* **1936**, 8, 16.
- [40] J. R. Duffin, *Phys. Rev.* **54** **1939**, 1114.
- [41] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. A* **166** **1938**, 127.
- [42] N. Kemmer, *Proc. R. Soc. A* **173** **1939**, 91.
- [43] V. Gribov, *Eur. Phys. J C* **1999**, 10, 71.
- [44] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, J. S. Valverde, *Phys. Lett* **2000**, A268, 165–173.
- [45] M. de Montigny, F. C. Khanna, A. E. Santana, E. S. Santos, J. D. M. Vianna, *J. Phys. A* **2000**, 33, L273.
- [46] I. V. Kanatchikov, *Rep. Math. Phys* **2000**, 46, 107.
- [47] F. W. Dyson, A. S. E. Eddington, C. R. Davidson, *Phil. Trans. Roy. Soc* **1920**, 220, 221.
- [48] S. M. Carroll, *An Introduction to General Relativity and Spacetime and Geometry*, Addison Wesley, **2004**.
- [49] C. Misner, K. Thorne, J. Wheeler, *Gravitation*, Freeman, **1973**.
- [50] P. Dirac, *General theory of Relativity*, Florida State University, **1975**.
- [51] R. Wald, *General Relativity*, Chicago, **1984**.
- [52] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*, Wiley, **1972**.

- [53] A. Boumali, Doctorat, Université d'Annaba, **2006**.
- [54] Y. Nedjadi, R. C. Barrett, *Journal of Physics A : Mathematical and General* **1994**, vol 27, no. 12,, pp. 4301–4315.
- [55] K. Sogut, A. Havare, *Class. Quantum Grav* **2006**, 23, 7129–7142.
- [56] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, R. G. Teixeira, *arXiv :gr-qc/9909033*.
- [57] M. Nakahara, *Geometry and Toplogy and Physics*, IOP Publishing Ltd, **2003**.
- [58] M. Hosseinpour, H. Hassanabadi, *Int. J. Mod. Phys. A30* **2015**, 1550124.
- [59] G. de Marques, J. G. de Assis, V. B. Bezerra, *J. Math. Phys* **2007**, 48, 112501.
- [60] G. A. de Marques, V. B. Bezerra, S. G. Fernandes, *Phys. Letters. A* **2005**, 341, 39–47.
- [61] Z. Wang, Z. Long, C. Long, J. Teng, *Phys. Scr* **2015**, 90, 055201.
- [62] H. Aounallah, A. Boumali, *Physics of Particles and Nuclei Letters* **2019**, Vol. 16, No. 3, pp. 195–205.
- [63] S. Hassanabadi, M. Ghominejada, *Eur. Phys. J. Plus* **2014**, 129, 273.
- [64] B.-Q. Wang, Z.-W. Long, Chao-YunLong, Shu-RuiWu, *Physica A : Statistical Mechanics and its Applications* **2019**, Volume 517, 1, Pages 163–174.
- [65] A. Maireche, *Journal of Nano- and Electronic Physics* **2019**, Vol. 11 No 1, 01024(10pp).
- [66] T. Kanazawa, G. Lambiase, G. Vilasi, A. Yoshioka, *The Eur Phys J C* **2019**, 79, 95.
- [67] A. Davydov., *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, New York, **1976**.
- [68] S. Zaim, *J. Math. Phys., Anal., Geom* **2016**, 4, 1.
- [69] H. Hassanabadi, H. Seyedesamira, A. Boumali, S. Zarrinkamar, *J. Math. phys* **2014**, 55, 033502.
- [70] B. Manuel, A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett* **1989**, 63, 341.

- [71] A. M. de Geusa, V. B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **2002**, 66, 105011.
- [72] E. R. B. de Mello, A. A. Saharian, *Phy. Rev D* **2007**, 75, 065019.
- [73] S. Slavyanov, W. Lay, *Special Functions : A Unified Theory Based on Singularities*, Oxford University Press, Oxford,, **2000**.
- [74] P. Marioni, *Sur la forme bi-confluente de l'équation de Heun*, Vol. 264, 503-505, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, **1967**.
- [75] G. B. Arfken, H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, of 6th edition, Elsevier Academic Press, New York, NY, USA, **2005**.
- [76] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, New York, **1995**.
- [77] R. R. S. Oliveira, R. V. Maluf, C. A. S. Almeida, *Annals of Physics* **2019**, 400, 1–8.
- [78] K. Bakke, *Ann. Phys* **2014**, 341, 86–93.
- [79] K. Bakke, C. Furtado, *Ann. Phys., NY* **2015**, 355, 48.
- [80] K. Bakke, F. Moraes, *Phys. Lett. A* **2012**, 376, 2838–2841.
- [81] K. Bakke, H. Belich, *Eur. Phys. J. plus* **2014**, 129, 147.
- [82] E. R. F. Medeiros, E. R. B. de Mello, *Eur. Phys. J. C* **2012**, 72, 2051.
- [83] I. Fonseca, K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* **2016**, 131, 67.
- [84] W. H. Pauli, *Phys. Acta* **1939**, 12, 147.
- [85] A. Bogush, E. Ovsyuk, V. Red'kov, *arXiv :0905.1475v1*.
- [86] V. Kisel, E. Ovsyuk, V. Red'kov., *arXiv :1108.5858v1*.
- [87] S. K. Suslov, B. Trey, *J. Math. Phys* **2008**, 49, 012104.
- [88] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, Toronto, **1965**.

- [89] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics and Non-relativistic Theory*, Pergamon, New York, **1977**.
- [90] Q. G. L. Am, *J. Phys* **2000**, *68*, 1056–1057.
- [91] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, Prentice Hall, New Jersey, **1999**.
- [92] D. J. Griffiths, *Introduction to quantum mechanics*, Prentice Hall, New Jersey, **1995**.
- [93] J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, revised edition edition, **1994**.
- [94] C.-F. Li, *Ann. Phys* **1996**, *252*, 329.
- [95] M. Kretzschmar, *Z. Phys* **1965**, *185*, 97.

Liste des articles

1. *A. Boumali and H. Aounallah, Adv. High Energy Phys. 2018, 1031763 (2018).*
2. *H. Aounallah and A. Boumali, Physics of Particles and Nuclei Letters, 2019, Vol. 16, No. 3, pp. 195–205.*

Research Article

Exact Solutions of Scalar Bosons in the Presence of the Aharonov-Bohm and Coulomb Potentials in the Gravitational Field of Topological Defects

Abdelmalek Boumali  and Houcine Aounallah

Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, Université Larbi Tébessi-Tébessa, 12000 Tébessa, Algeria

Correspondence should be addressed to Abdelmalek Boumali; boumali.abdelmalek@gmail.com

Received 18 November 2017; Revised 21 January 2018; Accepted 19 February 2018; Published 1 April 2018

Academic Editor: Won Sang Chung

Copyright © 2018 Abdelmalek Boumali and Houcine Aounallah. This is an open access article distributed under the Creative Commons Attribution License, which permits unrestricted use, distribution, and reproduction in any medium, provided the original work is properly cited. The publication of this article was funded by SCOAP³.

We analyze the relativistic quantum motion of a charged scalar particles in the presence of an Aharonov-Bohm and Coulomb potentials in the space-times produced by an idealized cosmic string and global monopole. We have calculated and discussed the eigensolutions of DKP equation and their dependence on both the geometry of the space-times and coupling constants parameters.

1. Introduction

The analysis of gravitational interactions with a quantum mechanical system has recently attracted attention in particle physics and has been an active field of research. The general way to understand the interaction between relativistic quantum mechanical particles and gravity is to solve the general relativistic form of their wave equations. These solutions are valuable tools for examining and improving models and numerical methods for solving complicated physical problems.

The DKP equation is a relativistic wave equation which describes spin 0 and spin 1 particles, and it is a direct generalization to the Dirac particles of integer spin in which one replaces the gamma matrices by beta metrics, where the four beta matrices satisfy the Kemmer algebra [1–4]. One important question related to the DKP equation concerns the equivalence between its spin 0 and 1 sectors and the theories based on the second-order KG and Proca equations. The Dirac-like DKP equation is not new and dates back to the 1930s. Historically, the loss of interest in the DKP equation stems from the equivalence of the DKP approach to the KG and Proca descriptions in on-shell situations, in addition to the greater algebraic complexity of the DKP formulation. However, in the 1970s, this supposed equivalence

was questioned in several situations involving the breaking of symmetries and the hadronic process, showing, that in some cases, the DKP and KG theories can give different results. Moreover, the DKP equation appears to be richer than the KG equation if interactions are introduced.

The topological defects play an important role in physical properties of systems, and they appear in gravitation as monopoles, strings, and walls. Among them, cosmic string and monopole seem to be the best candidates to be observed. Cosmic strings and global monopoles are exotic topological objects: they do not produce local gravitational interaction; however, they modify the geometry of the space-time, producing planar and solid angle deficit, respectively [5].

The effect of the Aharonov-Bohm potential (**AB**) is a purely quantum phenomenon which has no classical equivalent. The eminent work of **AB** in 1959 revealed that the electromagnetic potentials are in reality fundamental physical objects that can manifest themselves in the matter where the corresponding fields exert no force (Lorentz's force is zero) [6]. They proposed an experiment to test, in quantum mechanics, the coupling of electric charges to electromagnetic field strengths through a local interaction with the electromagnetic potential **A**, but not with the field strengths themselves. Also, they predicted a quantum interference effect due to the motion of charged particles in

regions where $\mathbf{B}(\mathbf{E})$ vanishes, but not \mathbf{A} , leading to a nonlocal gauge-invariant effect depending on the flux of the magnetic field in the inaccessible region, in the magnetic case, and on the difference of the integrals over time of time-varying potentials, in the electric case [7].

The eigenproblem of the Kinetic Angular Momentum (KAM) of the electron in the Aharonov-Bohm effect has been solved by Kretzschmar [8]. The total Hilbert space of the eigenfunctions is split into two subspaces and the symmetry of the motion of the electron around the magnetic flux makes Pauli's criterion inapplicable [9–12]: that means the condition of admissibility of the wave function in the region of AB potential. In this way, Henneberger [9], based on the Pauli criterion, conclude that (i) the single valuedness imposed by Aharonov and Bohm is not the correct one and, consequently, (ii) the \mathbf{AB} effect, if it exists, may not be interpreted as scattering. Roy and Singh [10] and Li [11, 12] showed that the Pauli criterion cannot be applied in the time-dependent case: we note here that the inapplicability of the Pauli criterion means that (i) the KAM does not satisfy the fundamental commutation relations of the angular momentum and (ii) it reflects the breakdown of the symmetry of the electron's motion around the solenoid. Thus, as argued by Li [11, 12], in the presence of \mathbf{AB} potential, the KAM of the electron does not satisfy the fundamental commutation relations of the angular momentum even when the electron is restricted to the doubly connected space where it does not touch the magnetic field on the z -axis: the region where the magnetic field exists and is inaccessible to the electron should also be taken into account in the physically meaningful commutation relations. This situation has been used in the case of the interaction of the spin 0 particle with an \mathbf{AB} potential of two and three dimensions by the application of the Duffin–Kemmer–Petiau equation in Minkowski space-time [13].

The principal aim of this paper is to solve the DKP equation in the presence of a Coulomb and \mathbf{AB} potentials in the gravitational field of topological defects. In the presence of \mathbf{AB} potential, we will show that the admissibility of the wave function is inapplicable [8–12]. The inapplicability of the Pauli criterion reflects the breakdown of the symmetry of the particle's motion around the solenoid [11, 12].

The outline of this paper is as follows. In Section 2, a generalized DKP equation is introduced in a curved space-time. In Section 3, the eigenfunctions of scalar bosons in the presence of the Aharonov-Bohm and Coulomb potentials in the gravitational field of topological defects such as cosmic string and global monopole have been discussed in Sections 3 and 4. Finally, Section 5 will be a conclusion.

2. The DKP Equation in Curved Space

2.1. The Formalism. The first-order relativistic DKP equation for a free charged scalar bosons of mass M in flat space-time is given by [1–4]

$$\left(i\beta^\mu \partial_\mu - \frac{Mc}{\hbar} \right) \psi = 0, \quad (1)$$

where β^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) are the DKP matrices which satisfy the following commutation rules:

$$\beta^\kappa \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\kappa = g^{\kappa\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\kappa, \quad (2)$$

and $g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ is the Minkowski metric tensor. For the flat space, the beta matrices are chosen as follows [14]:

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} \nu & \tilde{0} \\ \tilde{0}_T & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$\beta^i = \begin{pmatrix} \tilde{0} & \rho^i \\ -\rho_T^i & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

with $\tilde{0}, \tilde{0}_T, \mathbf{0}$ as $2 \times 2, 2 \times 3, 3 \times 3$ zero matrices, respectively, and

$$\nu = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho^1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$\rho^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\rho^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

In curved space-time, (1) is written by [15–17]

$$\left\{ i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \omega_{\mu ab} S^{ab} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu \right) - \frac{Mc}{\hbar} \right\} \Psi = 0, \quad (5)$$

where A_μ denotes the vector potential associated with the electromagnetic field and $S^{ab} = [\beta^a, \beta^b]$ and $\tilde{\beta}^\mu$ are the Kemmer matrices in curved space-time. These matrices are related to their Minkowski counterparts, β, ν via

$$\tilde{\beta}^\mu = e^\mu_{(a)} \beta^a. \quad (6)$$

The following tetrad relations and the spin connection are calculated by using the relation,

$$\omega_{\mu ab} = e_{l(a)} e^j_{(b)} \Gamma^l_{j\mu} - e^j_{(b)} \partial_\mu e_{l(a)j}, \quad (7)$$

where

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{g^{\mu\rho}}{2} (g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}) \quad (8)$$

are the Christoffel symbols [18].

Now, with the aids of (6), (7), and (8), spin connection coefficients are as follows.

- (i) For the metric corresponding to a cosmic string with [19–22]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - a'^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (9)$$

where $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, and $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $\omega_{\mu ab}$ are

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & a' \cos \theta \\ -a' \sin \theta & -a' \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Here the tetrad $e_{(a)}^\mu$ are chosen to be

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a'r \sin \theta} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

The parameter a' is associated with the linear mass density η of the string by $a' = 1 - 4\eta$. It is defined in the range $(0, 1]$ and corresponds to a deficit angle $\Omega = 2\pi(1 - a')$. From the geometrical point of view, the metric in (9) describes a Minkowski space-time with a conical singularity [23].

(ii) In the case of the global monopole with [24–27]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b'^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (12)$$

we have

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \\ -b' \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where the tetrad $e_{(a)}^\mu$ are

$$e_{(a)}^\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b'r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b'r \sin \theta} \end{pmatrix}. \quad (14)$$

The parameter b' , smaller than unity, depends on the energy scale where the monopole is formed and where the symmetry is broken. The space-time described by (12) has a nonvanishing scalar curvature, $R = 2(1 - b')/b'^2 r^2$, and presents a solid angle deficit $\Omega' = 4\pi^2(1 - b'^2)$. The many interesting investigations of physical effects associated with global monopole consider this object as a point-like defect (see [28, 29] and references therein).

Let us now discuss the problem of Pauli criterion in the presence of **AB** potential for both cosmic string and global monopole cases.

2.2. Pauli Criterion and the Aharonov-Bohm Effect: Review. As we know, the KAM satisfy the following relations

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}, \quad (15)$$

with the following standard commutations rules [30]:

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k, \quad (16)$$

$$[L_z, L_\pm] = \pm \hbar L_\pm, \quad (17)$$

$$[L^2, L_\pm] = 0, \quad (18)$$

where

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}, \quad (19)$$

and where

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad (20)$$

with $L_\pm = L_x \pm iL_y$ are the ladder operators. The KAM is based on these commutation relations that Pauli required that the appropriate eigenfunction be those which are square integrable and are closed under the operation of the ladder operators. This condition is called the Pauli criterion, and consequently the commutations relations in (15) are pertinent for the Pauli criterion to be applicable.

In the presence of the **AB** potential where

$$A_r = A_\theta = 0, \quad (21)$$

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi r \sin \theta},$$

the KAM becomes

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i\alpha \right)^2 \right\}, \quad (22)$$

with

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - i\alpha \right). \quad (23)$$

Here the particle is placed in the vector potential field of an infinitely long solenoid of magnetic flux $\Phi = \alpha\Phi_0$ where $\Phi_0 = \hbar c/e$ and the parameter α is the amount of the magnetic flux.

Li [11, 12] shows that, in the presence of \mathbf{AB} potential, the KAM does not satisfy the fundamental commutation relations (15), and, instead of (15), he obtains

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L} + ie\hbar\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B}), \quad (24)$$

or

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L} + 2i\alpha\hbar^2 \cos\theta\delta(\cos^2\theta - 1)\mathbf{e}_r, \quad (25)$$

with the strength of the magnetic field is given by

$$\mathbf{B} = \frac{\Phi}{\pi r^2}\delta(\cos^2\theta - 1)\mathbf{e}_z. \quad (26)$$

From (25), both (17) and (18) are transformed into

$$\begin{aligned} [L_z, L_{\pm}] &= \pm\hbar L_{\pm}, \\ [L^2, L_{\pm}] &= \mp 2\alpha\hbar^2 [L_{\pm}\delta(\cos^2\theta - 1) + \delta(\cos^2\theta - 1)L_{\pm}]. \end{aligned} \quad (27)$$

These rules are different from (15) and (18). As described by Li, the region where the magnetic field exists is inaccessible to the electron; the commutation relations of the KAM should take it into account. This type of commutations relations as said to be global following Li and, consequently, the Pauli criterion is inapplicable.

The eigensolutions of L_z and L^2 under the boundary condition at $\theta = 0, \pi$,

$$\psi(\theta, \varphi)|_{\theta=0, \pi} = 0, \quad (28)$$

are presented by Kretzschmar [8]. This condition means that the particle is restricted to the doubly connected region of $\theta \neq 0, \pi$. According to Kretzschmar and with the substitutions

$$\begin{aligned} L_z\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) &= \lambda\hbar\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi), \\ L^2\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) &= l(l+1)\hbar^2\psi_{l\lambda}(\theta, \varphi), \\ \lambda &= m - \alpha, \quad m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ l &= |\lambda| + \kappa, \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (29)$$

the normalized eigenfunctions are of the form

$$\psi_{\lambda l}(\theta, \varphi) = c_{\lambda l} P_l^{-|\lambda|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (30)$$

where

$$c_{\lambda l} = e^{(i\pi/2)\lambda + (i\pi/2)|\lambda|} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{\Gamma(l+|\lambda|+1)}{\Gamma(l-|\lambda|+1)} \right)^{1/2}. \quad (31)$$

According to the sign of λ , we have

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi) &= c_{\lambda_1 l_1} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \\ \lambda_1 &= m - \alpha > 0, \quad l_1 = \lambda_1 + \kappa, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \psi_{\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi) &= c_{\lambda_2 l_2} P_{l_2}^{\lambda_2}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \\ \lambda_2 &= m - \alpha < 0, \quad l_2 = -\lambda_2 + \kappa. \end{aligned}$$

The parameters λ and l are dependent on the amount α of the magnetic field which is not correct when we adopt the KAM as written by (1). In addition, the inapplicability of the Pauli criterion modified completely the total Hilbert space S . Following Kretzschmar [8], the total Hilbert space S is split into two subspaces, S_+ and S_- . S_+ is spanned by all the eigenfunctions $\psi_{\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi)$, and S_- is spanned by all the eigenfunctions $\psi_{\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi)$. These two subspaces are not connected by the ladder operators.

In this stage, we are able to extend the works of Kretzschmar [8] (splitting of Hilbert space) and Li [11, 12] (the nonapplicability of Pauli's criterion) to the case of scalar bosons in the gravitational field of topological defects such as cosmic string and general monopole: first, we are interested in deducing $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ in the presence of topological defects and then solving the scalar DKP equation by taking into account the works of both authors.

(i) *Case of Cosmic String.* In cosmic string, replacing the vector \mathbf{AB} by the relation

$$A_{\varphi} = \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin\theta}, \quad (33)$$

(15) is transformed into

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L} + \frac{2i\hbar^2\alpha}{a'} \cos\theta\delta(\cos^2\theta - 1)\mathbf{e}_r. \quad (34)$$

(ii) *Case of Global Monopole.* In the global monopole, with

$$A_{\varphi} = \frac{\Phi}{2\pi b' r \sin\theta}, \quad (35)$$

(15) becomes

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar\mathbf{L} + \frac{2i\hbar^2\alpha}{b'^2} \cos\theta\delta(\cos^2\theta - 1)\mathbf{e}_r. \quad (36)$$

Both (34) and (36) are obviously different from (15). According to Li [11, 12], we note that in the presence of \mathbf{AB} potential, the KAM of the particle, in both cases, does not satisfy the fundamental commutation relations of the angular momentum even when the particle is restricted to the doubly connected space where it does not touch the magnetic field on the z -axis. The region where the magnetic field exists and is inaccessible to the particle should also be taken into account in the physically meaningful commutation relations. In the limit where $a' \rightarrow 1$ or $b' \rightarrow 1$, we recover well (25).

In what follows, we are ready to present the solutions of scalar bosons by taking into account that the fundamental commutation relations of the angular momentum are modified in both cosmic string and general monopole cases.

3. The DKP Equation with the Aharonov-Bohm and Coulomb Potentials in the Presence of a Cosmic String

3.1. *The Solutions.* The cosmic string space-time with an internal magnetic field in spherical coordinates is described by the line element

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - a'^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (37)$$

The 4-vector potential, in the background of a cosmic string, reads

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{kq}{r}, \\ A_r &= 0, \\ A_\theta &= 0, \\ A_\varphi &= \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin \theta}. \end{aligned} \quad (38)$$

From (5), and by using (3), (6), and (10), the DKP equation in the presence of both **AB** and Coulomb potentials is given by

$$\begin{aligned} &\left[\frac{\beta^0}{\hbar c} \left(E - \frac{keq}{r} \right) + i\beta^1 \partial_r + \frac{i\beta^2}{r} (\partial_\theta - \beta^2 \beta^1) \right. \\ &+ \frac{i\beta^3}{a' r \sin \theta} \left\{ (\partial_\varphi - i\alpha) - a' \sin \theta \beta^3 \beta^1 \right. \\ &\left. \left. - a' \cos \theta \beta^3 \beta^2 \right\} - \frac{Mc}{\hbar} \right] \psi = 0; \end{aligned} \quad (39)$$

with the wave function, ψ is chosen as

$$\psi = e^{-iEt/\hbar} (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T. \quad (40)$$

Inserting (40) into (39) and after an algebraic calculation, we obtain the following system of equations:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{E - keq/r}{c\hbar} \right) \psi_2 - i \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \psi_3 \\ &- \frac{i}{r} \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \psi_4 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} &- \frac{i}{a' r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \psi_5 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_1, \\ &\left(\frac{E - keq/r}{c\hbar} \right) \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_2, \end{aligned} \quad (42)$$

$$i\partial_r \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_3, \quad (43)$$

$$\frac{i}{r} \partial_\theta \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_4, \quad (44)$$

$$\frac{i}{a' r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \psi_5. \quad (45)$$

Putting (42), (43), (44), and (45) into (41), we have

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(E - keq/r)^2}{(c\hbar)^2} - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right\} \psi_1 \quad (46)$$

= 0,

where

$$\begin{aligned} L^2 &= -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{a'^2 \sin^2 \theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (47)$$

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right),$$

and where

$$\begin{aligned} l &= |\lambda| + \kappa, \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots), \\ \lambda &= \frac{m - \alpha}{a'}, \end{aligned} \quad (48)$$

where l are the eigenvalues of L_z and L^2 , respectively: we note that (i) these eigenvalues depend on the amount α of the magnetic flux and the geometric parameter of space a' and (ii) they are not integer whatever the nature of the parameter α .

In order to solve (46), we first put that

$$\psi_1(r, \theta, \varphi) = R(r) \chi(\theta, \varphi). \quad (49)$$

Expanding (46) leads to

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1) - (keq/\hbar c)^2}{r^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} \right. \\ &\left. - \frac{2keqE}{\hbar^2 c^2 r} \right\} R(r) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

By using the substitutions,

$$\begin{aligned} \rho &= \xi r, \\ \xi^2 &= \frac{4(M^2 c^4 - E^2)}{\hbar^2 c^2}, \\ \gamma &= \frac{keq}{\hbar c}, \\ \varsigma &= \frac{2\gamma E}{\hbar c \xi}, \end{aligned} \quad (51)$$

(50) becomes

$$\begin{aligned} &\left\{ \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{d}{d\rho} \right) - \frac{l(l+1) - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{1}{4} - \frac{\varsigma}{\rho} \right\} R(\rho) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (52)$$

Putting that

$$R(\rho) = e^{-\rho/2} \rho^s u(\rho), \quad (53)$$

(52) is transformed into

$$\rho \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + \{2(s+1) - \rho\} \frac{du(\rho)}{d\rho} - (s+\zeta+1)u(\rho) = 0, \quad (54)$$

with

$$s(s+1) = l(l+1) - \gamma^2, \quad (55)$$

or

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}. \quad (56)$$

In this stage the solutions are

$$u(\rho) = N_{\text{norm}} {}_1F_1(s+\zeta+1; 2(s+1), \rho), \quad (57)$$

with N_{norm} being the normalization constant and ${}_1F_1$ being the confluent series.

The confluent series becomes a polynomial if and only if [30]

$$s+\zeta+1 = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (58)$$

Consequently, the energy of spectrum is written as

$$E_n = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 / \left(n + 1/2 + \sqrt{((m-\alpha)/a' + \kappa + 1/2)^2 - \gamma^2}\right)^2}}. \quad (59)$$

Now, concerning the total wave function and according to the work of [8], we have two cases.

(i) In the subspace S_+ , where $\lambda_1 > 0$ and $l_1 = \lambda_1 + \kappa$, the total spinor is

$\Psi_{n\lambda_1 l_1}$

$$= \frac{\hbar}{Mc} e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \frac{Mc}{\hbar} \\ \frac{E - keq/r}{c\hbar} \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r \sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (60)$$

with

$$\psi_1 = N_{\text{norm}} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) \cdot \rho^s e^{-\rho/2} {}_1F_1(s+\zeta+1; 2(s+1), \rho). \quad (61)$$

(ii) For the subspace S_- , where $\lambda_2 < 0$ and $l_2 = -\lambda_2 + \kappa$, the total spinor is

$\Psi_{n\lambda_2 l_2}$

$$= \frac{\hbar}{Mc} e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \frac{Mc}{\hbar} \\ \frac{E - keq/r}{c\hbar} \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r \sin\theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (62)$$

with

$$\psi_1 = N_{\text{norm}} P_{l_2}^{\lambda_2}(\cos\theta) \cdot \rho^s e^{-\rho/2} {}_1F_1(s+\zeta+1; 2(s+1), \rho). \quad (63)$$

4. The DKP Equation with the Aharonov-Bohm and Coulomb Potentials in the Presence of a Global Monopole

4.1. *The Solutions.* The metric of the space-time in the presence of a global monopole is given by [24, 25, 27–29]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b'^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (64)$$

By using (3), (6), and (13), the DKP equation with the **AB** and Coulomb potentials is written as

$$\left[\frac{\beta^0}{\hbar c} \left(E - \frac{keq}{r} \right) + i\beta^1 \partial_r + \frac{i\beta^2}{br} (\partial_\theta - b' \beta^2 \beta^1) + \frac{i\beta^3}{b'r \sin\theta} \{ (\partial_\varphi - i\alpha) - b' \sin\theta \beta^3 \beta^1 - \cos\theta \beta^3 \beta^2 \} - \frac{Mc}{\hbar} \right] \Psi = 0, \quad (65)$$

with

$$\Psi = e^{-i(Et/\hbar)} (\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \Psi_4, \Psi_5)^T, \quad (66)$$

and with the 4-vector potential, in the background of a global monopole, reading

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{kq}{r}, \\ A_r &= 0, \\ A_\theta &= 0, \\ A_\varphi &= \frac{\Phi}{2\pi b'r \sin\theta}. \end{aligned} \quad (67)$$

Putting (3) in (65), we obtain the following system of equations:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{E - keq/r}{c\hbar} \right) \Psi_2 - i \left(\partial_r + \frac{2}{r} \right) \Psi_3 \\ & - \frac{i}{br} \left(\partial_\theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) \Psi_4 \end{aligned} \quad (68)$$

$$- \frac{i}{b'r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \Psi_5 = \frac{Mc}{\hbar} \Psi_1,$$

$$\left(\frac{E - keq/r}{c\hbar} \right) \Psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \Psi_2, \quad (69)$$

$$i\partial_r \Psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \Psi_3, \quad (70)$$

$$\frac{i}{br} \partial_\theta \Psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \Psi_4, \quad (71)$$

$$\frac{i}{b'r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \Psi_1 = \frac{Mc}{\hbar} \Psi_5. \quad (72)$$

Inserting, now, (69), (70), (71), and (72) into (68), we obtain

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{(E - keq/r)^2}{(c\hbar)^2} - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \right\} \Psi_1 \quad (73)$$

$$= 0,$$

where

$$\begin{aligned} L^2 &= -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{b'^2 \sin^2 \theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (74)$$

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right),$$

$$l = |\lambda| + \kappa, \quad (\kappa = 0, 1, 2, \dots),$$

with

$$\lambda = \frac{m - \alpha}{b'}, \quad (75)$$

and l are the eigenvalues of L_z and L^2 , respectively: we observe that (i) these eigenvalues depend on the amount α of the magnetic flux and the geometric parameter of space b' and (ii) they are not integer whatever the nature of the parameter α .

In order to solve (73), we first put that

$$\Psi_1(r, \theta, \varphi) = R(r) \chi(\theta, \varphi). \quad (76)$$

Expanding (73) leads to

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{keq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 \right. \\ & \left. - \frac{l(l+1)/b'^2}{r^2} \right\} \Psi_1(r) = 0. \end{aligned} \quad (77)$$

Using the same change of variables as in the case of cosmic string, (77) is transformed into

$$\frac{d^2 R(r)}{d\rho^2} + \left(-\frac{l(l+1)/b'^2 - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{\zeta}{\rho} - \frac{1}{4} \right) R(r) = 0. \quad (78)$$

Now let us make a change of variable

$$R(r) = \rho^a e^{-\rho/2} H(\rho), \quad (79)$$

and, putting it in (78), we have

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{d^2 H(\rho)}{d\rho^2} + \{2(a+1)\rho - \rho^2\} \frac{dH(\rho)}{d\rho} \\ & + \left[\left\{ a(a+1) - \left(\frac{l(l+1)}{b'^2} - \gamma^2 \right) \right\} \right. \\ & \left. - (\zeta + a + 1)\rho \right] H(\rho) = 0, \end{aligned} \quad (80)$$

with

$$a = -\frac{1}{2} \pm \left\{ \frac{l(l+1)}{b'^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right\}^{1/2}. \quad (81)$$

To solve (80), we use the Frobenius method [31–34]. This can be written as a power series expansion around the origin:

$$H(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k. \quad (82)$$

Inserting (82) into (80), we obtain the following recurrence relation:

$$c_{k+1} = \frac{k + (\zeta + a + 1)}{k(k+1) + 2(a+1)(k+1)} c_k. \quad (83)$$

Now, when $k \rightarrow \infty$, the ration $c_{k+1}/c_k \rightarrow 0$: we can understand this condition by saying that special kind of exact solutions, which represent bound states, can be obtained looking for polynomials expressions to $H(\rho)$; that is, the solutions can be obtained by imposing the conditions where power series becomes a polynomial of degree n . This can be argued as follows: in quantum mechanics, if we want to have a normalizable wave function, we have to impose that $R(\rho)$ vanishes at $\rho \rightarrow 0$ and $\rho \rightarrow \infty$. In this way, bound state solutions can be obtained because there is no divergence of the wave function at $\rho \rightarrow 0$ and $\rho \rightarrow \infty$. In our case, $H(\rho)$ has written as a power series expansion around the origin (see (82)). As a result of that, the solutions can be achieved by imposing that the power series expansion (82) or the biconfluent Heun series becomes a polynomial of degree n . This guaranteed that $R(\rho)$ becomes F as ρ at the origin and vanishes at $\rho \rightarrow \infty$ [35–40]. Thus, in order that the power series expansion becomes a polynomial of degree n , we impose that

$$\zeta + a + 1 = -n. \quad (84)$$

In this case, the form of spectrum of energy is

$$E_n = Mc^2 \left\{ 1 + \frac{\gamma^2}{\left[n + 1/2 + \{ l(l+1)/b'^2 + 1/4 - \gamma^2 \}^{1/2} \right]^2} \right\}^{-1/2} \quad (85)$$

Now, concerning the total wave function, we have also two cases [8].

- (i) In the subspace S_+ , where $\lambda_1 > 0$ and $l_1 = \lambda_1 + \kappa$, the total spinor is

$$\Psi_{n\lambda_1 l_1} = \frac{\hbar}{Mc} e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \frac{Mc}{\hbar} \\ \frac{E - keq/r}{c\hbar} \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{b'r \sin \theta} (\partial_\varphi - im_0) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (86)$$

with

$$\psi_1 = N'_{\text{norm}} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos \theta) \cdot \rho^a e^{-\rho/2} {}_1F_1(a + \zeta + 1; 2(a + 1), \rho). \quad (87)$$

- (ii) For the subspace S_- , where $\lambda_2 < 0$ and $l_2 = -\lambda_2 + \kappa$, the total spinor is

$$\Psi_{n\lambda_2 l_2} = \frac{\hbar}{Mc} e^{-iEt/\hbar} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \frac{Mc}{\hbar} \\ \frac{E - keq/r}{c\hbar} \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{b'r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \psi_1, \quad (88)$$

with

$$\psi_1 = N'_{\text{norm}} P_{l_2}^{\lambda_2}(\cos \theta) \cdot \rho^a e^{-\rho/2} {}_1F_1(a + \zeta + 1; 2(a + 1), \rho). \quad (89)$$

Here, N'_{norm} is the normalization constant and ${}_1F_1$ is the confluent series.

5. Conclusion

This paper is devoted to studying the solutions of the relativistic quantum motion of a charged scalar particles in the presence of an Aharonov-Bohm and Coulomb potentials in the space-times produced by an idealized cosmic string and global monopole. These solutions have been obtained, and the influence of the parameter of the geometry of both spaces has been discussed. In addition, the remarks which Li [11, 12] has been proposed concerning the **AB** effect have been extended in our case: thus, the presence of **AB** potential changes completely the fundamental commutation relations of the angular momentum. Following the works of [11, 12], we note that (i) the KAM are not satisfied even when the particle is restricted to the doubly connected space where it does not touch the magnetic field on the z -axis, (ii) the region where the magnetic field exists and is inaccessible to the electron should be taken into account in the physical commutation relations, and finally (iii) the Pauli criterion which said that “the appropriate eigenfunctions are those which are square integrable and are closed under the operation of ladder operators” is inapplicable to the vector **AB**. The existence of the magnetic field on the z -axis is the principal cause of breaking down the symmetry of particle’s motion around the z -axis.

The eigenfunctions and eigenvalues of L_z and L^2 have been presented under the following boundary condition: $\psi(r, \theta, \varphi)|_{\theta=0, \pi} = 0$, and the space S , as shown by [8], is split into two subspaces, S_+ and S_- : S_+ is spanned by all the wave function $\Psi_{n\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi)$ for cosmic string ($\Psi_{n\lambda_1 l_1}(\theta, \varphi)$ for global monopole) and S_- is spanned by all the wave function $\Psi_{n\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi)$ for cosmic string ($\Psi_{n\lambda_2 l_2}(\theta, \varphi)$ for global monopole). The eigensolutions in the gravitational field of cosmic string and a global monopole (i) are different (ii) and depend on the geometry of spaces.

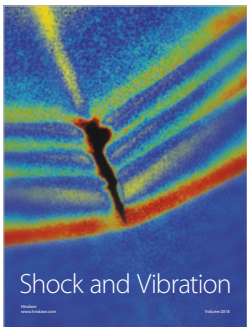
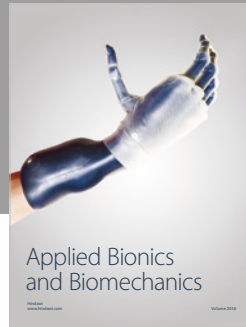
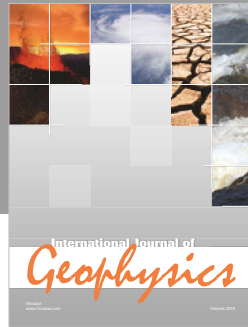
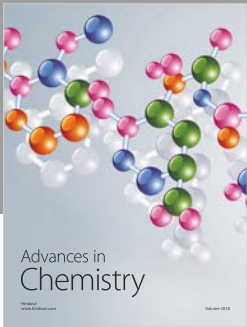
Conflicts of Interest

The authors declare that they have no conflicts of interest.

References

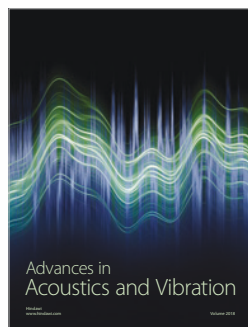
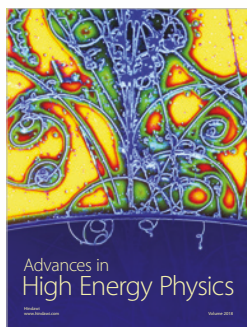
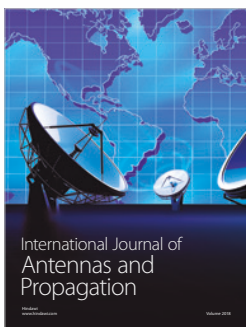
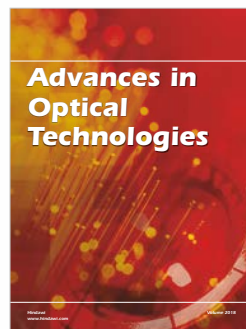
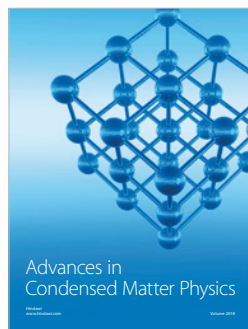
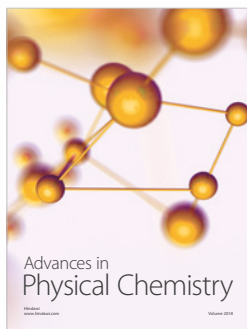
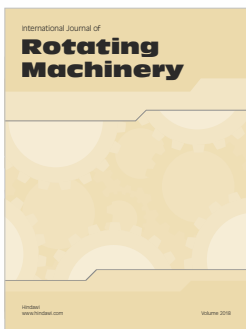
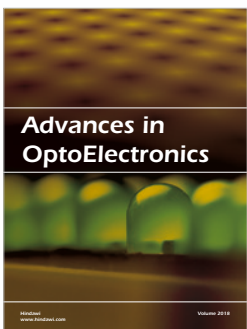
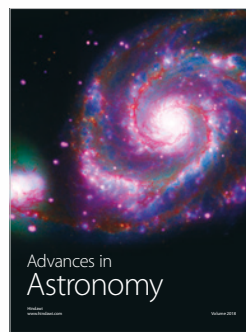
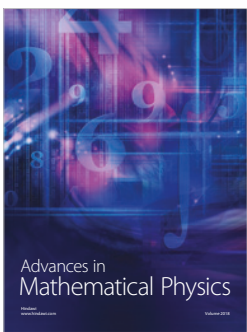
- [1] G. Petiau, *Mémoires de la Classe des Sciences Collection*, vol. 16, no 2, University of paris thesis, R. Belg., Mém. Cl. Sci. Académie Royale de Belgique, 1936.
- [2] R. J. Duffin, “On the characteristic matrices of covariant systems,” *Physical Review A: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 54, no. 12, p. 1114, 1938.
- [3] N. Kemmer, “Quantum theory of Einstein-Bose particles and nuclear interaction,” *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A166, no. 127, 1938.
- [4] N. Kemmer, “The particle aspect of meson theory,” *Proceedings of the Royal Society of London*, vol. A173, no. 91, 1939.
- [5] A. L. Cavalcanti de Oliveira and E. R. Bezerra de Mello, “Exact solutions of the Klein-Gordon equation in the presence of a dyon, magnetic flux and scalar potential in the spacetime of gravitational defects,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, no. 17, pp. 5249–5263, 2006.

- [6] Y. Aharonov and D. Bohm, "Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory," *Physical Review A: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 115, no. 3, article 485, 1959.
- [7] M. Socolovsky, *Aharonov-Bohm Effect*, vol. 191, Elsevier Ltd, 2006.
- [8] M. Kretzschmar, "On the Aharonov-Bohm effect for bound states," *Zeitschrift für Physik*, vol. 185, no. 2, pp. 97–110, 1965.
- [9] W. C. Henneberger, "Sturm-Liouville eigenproblems with an interior pole," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 22, no. 8, pp. 1575–1590, 1981.
- [10] S. M. Roy and V. Singh, "Time-dependent Aharonov-Bohm Hamiltonian and admissibility criteria of quantum wave functions," *Il Nuovo Cimento*, vol. 79, pp. 391–409, 1984.
- [11] C.-F. Li, "Pauli criterion and the vector Aharonov-Bohm effect," *Annals of Physics*, vol. 252, no. 2, pp. 329–335, 1996.
- [12] C.-F. Li, "Gauge transformation and A-B effect," *Physica B: Condensed Matter*, vol. 229, no. 3-4, pp. 354–360, 1997.
- [13] A. Boumali, "Zero spin particle in an Aharonov-Bohm potential," *Canadian Journal of Physics*, vol. 82, no. 1, pp. 67–74, 2004.
- [14] Y. Nedjadi and R. C. Barrett, "The Duffin-Kemmer-Petiau oscillator," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 27, no. 12, pp. 4301–4315, 1994.
- [15] M. Falek and M. Merad, "Duffin-Kemmer-Petiau equation in Robertson-Walker space-time," *Central European Journal of Physics*, vol. 8, no. 3, pp. 408–414, 2010.
- [16] K. Sogut and A. Havare, "Spin-1 particle in an electrical field in $(1 + 1)$ -dimensional Schrödinger spacetime," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 23, no. 23, pp. 7129–7142, 2006.
- [17] J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, and R. G. Teixeira, "Duffin-Kemmer-Petiau equation in Riemannian space-times," *Geometrical Aspects of Quantum Fields*, p. 111, 2001, <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9909033>.
- [18] M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics*, IOP Publishing Ltd, 2003.
- [19] G. D. A. Marques and V. B. Bezerra, "Non-relativistic quantum systems on topological defects spacetimes," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 19, no. 5, p. 985, 2002.
- [20] R. Kalita and D. Borah, "Discriminating Majorana neutrino phases in the light of lepton flavor violation and leptogenesis in type I+II seesaw models," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 30, no. 22, Article ID 1550130, 24 pages, 2015.
- [21] G. D. A. Marques, J. G. De Assis, and V. B. Bezerra, "Some effects on quantum systems due to the gravitational field of a cosmic string," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 48, no. 11, Article ID 112501, 2007.
- [22] Z. Wang, Z. Long, C. Long, and J. Teng, "Exact solutions of the Schrödinger equation with a coulomb ring-shaped potential in the cosmic string spacetime," *Physica Scripta*, vol. 90, Article ID 055201, 2015.
- [23] M. Hosseinpour, F. M. Andrade, E. O. Silva, and H. Hassanabadi, "Erratum to: Scattering and bound states for the Hulthén potential in a cosmic string background," *The European Physical Journal C*, vol. 77, no. 270, 2017.
- [24] M. Barriola and A. Vilenkin, "Gravitational field of a global monopole," *Physical Review Letters*, vol. 63, no. 4, pp. 341–343, 1989.
- [25] G. D. A. Marques and V. B. Bezerra, "Hydrogen atom in the gravitational fields of topological defects," *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 66, no. 10, Article ID 105011, 2002.
- [26] E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, "Polarization of the fermionic vacuum by a global monopole with finite core," *Physical Review D*, vol. 75, Article ID 065019, 2007.
- [27] E. R. B. de Mello and A. A. Saharian, "Scalar self-energy for a charged particle in global monopole spacetime with a spherical boundary," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 29, no. 13, Article ID 135007, p. 25, 2012.
- [28] E. R. Bezerra de Mello and C. Furtado, "Nonrelativistic scattering problem by a global monopole," *Physical Review D: Particles, Fields, Gravitation and Cosmology*, vol. 56, no. 2, pp. 1345–1348, 1997.
- [29] D. Barbosa, U. de Freitas, and E. R. Bezerra de Mello, "Induced self-energy on a static scalar charged particle in the spacetime of a global monopole with finite core," *Classical and Quantum Gravity*, vol. 28, no. 6, 065009, 23 pages, 2011.
- [30] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Pergamon Press, New York, NY, USA, 1976.
- [31] S. Y. Slavyanov and W. Lay, *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities*, Oxford University Press, Oxford, UK, 2000.
- [32] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier Academic Press, New York, NY, USA, 6th edition, 2005.
- [33] P. Marion, "Sur la forme bi-confluente de l'équation de Heun," *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Numérisés*, vol. 264, pp. 503–505, 1967.
- [34] A. Ronveaux, *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, New York, NY, USA, 1995.
- [35] K. Bakke and F. Moraes, "Threading dislocation densities in semiconductor crystals: a geometric approach," *Physics Letters A*, vol. 376, no. 45, pp. 2838–2841, 2012.
- [36] K. Bakke, "Bound states for a Coulomb-type potential induced by the interaction between a moving electric quadrupole moment and a magnetic field," *Annals of Physics*, vol. 341, pp. 86–93, 2014.
- [37] I. C. Fonseca and K. Bakke, "Rotating effects on an atom with a magnetic quadrupole moment confined to a quantum ring," *The European Physical Journal Plus*, vol. 131, no. 67, 2016.
- [38] E. R. Figueiredo Medeiros and E. R. Bezerra de Mello, "Relativistic quantum dynamics of a charged particle in cosmic string spacetime in the presence of magnetic field and scalar potential," *The European Physical Journal C*, vol. 72, article 2051, 2012.
- [39] K. Bakke and C. Furtado, "On the Klein-Gordon oscillator subject to a Coulomb-type potential," *Annals of Physics*, vol. 355, pp. 48–54, 2015.
- [40] G. D. A. Marques, V. B. Bezerra, and S. G. Fernandes, "Exact solution of the Dirac equation for a Coulomb and scalar potentials in the gravitational field of a cosmic string," *Physics Letters A*, vol. 341, no. 1–4, pp. 39–47, 2005.



Hindawi

Submit your manuscripts at
www.hindawi.com



PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES
AND ATOMIC NUCLEI. THEORY

Solutions of the Duffin–Kemmer Equation in Non-Commutative Space of Cosmic String and Magnetic Monopole with Allowance for the Aharonov–Bohm and Coulomb Potentials¹

Houcine Aounallah^{a, *} and Abdelmalek Boumali^a

^a*Laboratoire de Physique Appliquée et Théorique, University Larbi Tébessi–Tébessa, 12000, W. Tébessa, Algeria*

**e-mail: houcine12400@gmail.com*

Received July 9, 2018; revised November 21, 2018; accepted November 22, 2018

Abstract—In this work, we analyse the relativistic quantum motion of a charged scalar particles in the presence of a Aharonov–Bohm (AB) and Coulomb potentials in the non-commutative spacetimes produced by an idealized cosmic strings and global monopoles. Expressions are obtained for the bound state energies and wave functions.

Keywords: DKP equation, Aharonov–Bohm potential, topological defects, non-commutative-space

DOI: 10.1134/S1547477119030038

1. INTRODUCTION

The study of quantum systems in curved space-times goes back to the end of the 1920s and to the beginning of the 1930s, when the generalization of the Schrödinger and Dirac equations to curved spaces was discussed, motivated by the idea of constructing a theory which combines quantum physics and general relativity. Spinor fields and particles interacting with gravitational fields have been the subject of many investigations. Among of them, we can mention those concerning the determination of the renormalized vacuum expectation value of the energy-momentum tensor and the problem of the creation of particles in expanding universes, and those connected with quantum mechanics in different background space-times [1]. The analysis of gravitational interactions with a quantum mechanical system has recently attracted attention in particle physics and has been an active field of research. The general way to understand the interaction between relativistic quantum mechanical particles and gravity is to solve the general relativistic form of their wave equations. These solutions are valuable tools for examining and improving models and numerical methods for solving complicated physical problems. In addition, the influence of the gravitational field on quantum mechanical systems has attracted attention in particle physics several years ago. As an example, the analysis of the hydrogen atom in curved space-time has been considered in an arbitrary curved space-time [2–8].

According to the modern concepts of theoretical physics, topological defects, where they have been formed by the vacuum phase transition in the early Universe, play an important role in physical properties of systems, and they appear in gravitation as monopoles, strings and walls. Among them, cosmic strings and monopoles seem to be the best candidates to be observed. The former are linear defects, and the space-time produced by an idealized cosmic string is locally flat, however, globally conical, with a planar angle deficit determined by the string tension. So, they do not produce local gravitational interaction, however, they modify the geometry of the space-time producing planar and solid angle deficit, respectively (see [9, 10] and references therein).

The idea of non-commutative space–time geometry was at first proposed by Heisenberg and revived again by Snyder [11]: this non-commutativity of space has played an important role in understanding various phenomena for physics. In this way, we can cite the study of the thermal properties of both Klein–Gordon and Duffin–Kemmer–Petiau (DKP) oscillators [12, 13]. The study of non-commutative spaces and their implications in physics is an extremely active area of research. It has been argued in various instances that non-commutativity should be considered as a fundamental feature of space-time at the Planck scale. On the other side, the study of quantum systems in a non-commutative (NC) space has been the subject of much interest in last years, assuming that non-commutativity may be, in fact, a result of quantum gravity effects. In these studies, some attention has been given

¹ The article is published in the original.

to the models of non-commutative quantum mechanics (NCQM). The interest in this approach lies in the fact that NCQM is a fruitful theoretical laboratory where we can get some insight on the consequences of non-commutativity in field theory by using standard calculation techniques of quantum mechanics. Various non-commutative field theory models have been discussed as well as many extensions of quantum mechanics. Of particular interest are the so-called phase space non-commutativity which has been investigated in the context of quantum cosmology, black holes physics and the singularity problem. This specific formulation is necessary to implement the Bose-Einstein statistics in the context of NCQM [14–21].

The Aharonov–Bohm effect [22], is a quantum mechanical phenomenon in which an electrically charged particle is affected by an electromagnetic potential (V, \mathbf{A}) , despite being confined to a region in which both the magnetic field \mathbf{B} and electric field \mathbf{E} are zero: In 1959, Aharonov and Bohm, using the Schrödinger equation, considered the scattering of an electron in an external static magnetic field produced by an infinitely long solenoid and found an effect that does not depend on the depth of penetration of the electrons into the region of magnetic force lines. This showed that in quantum mechanics the electromagnetic field acts on charged particles even in the case when the region in which the field is localized cannot be reached by the particles. The interest in the Aharonov–Bohm effect lies in the overthrow of the classical dictum that the vector potential is only an auxiliary quantity which facilitates the calculation of the observable magnetic and electric fields. The effect will also manifest itself when we remove the slits and study the scattering of the electron waves off the solenoid. In the idealized limit of an infinitely thin solenoid where we would expect that the geometric cross-section should vanish, the Aharonov–Bohm effect ensures that the electrons still scatter. Finally, we note that the \mathbf{AB} effect has been considered by different authors for different situations [23–28].

Before continuing, an important remark concerning the \mathbf{AB} effect can be made: Henneberg [23] based on Pauli’s criterion [25, 29], he concluded that the Aharonov–Bohm effect exists, and the problem if the Pauli criterion can be applied to the Aharonov–Bohm effect has not yet been considered carefully. It can be considered as playing a purely mathematical role. However, a series of the experiments presents evidence for the reality of the Aharonov–Bohm effect [23, 25, 26]. The eigenproblem of the kinetic angular momentum (KAM) of the electron in the \mathbf{AB} effect has been solved by Kretzschmar [29]. The total Hilbert space of the eigenfunctions is split into two subspaces. The symmetry of the motion of the electron around the magnetic flux makes Pauli’s criterion inapplicable. Many authors have ignored the inapplicability of the criterion of Pauli [30], for example, see [31].

The principal aims of this paper are the study the DKP equation in cosmic string and magnetic monopoly with allowance for the Aharonov–Bohm and Coulomb potentials: The DKP equation is a relativistic wave equation which describes spin-0 and spin-1 particles, and it is a direct generalization to the Dirac particles of integer spin in which one replaces the gamma matrices by beta metrics, where the four beta matrices satisfy the Kemmer algebra [32–35]. Before starting our calculations, we make a remark about the connection of \mathbf{AB} potential with both cosmic string and global monopoles: the connection with cosmic strings is that a string is in a real sense just like a very thin solenoid. Down its middle, it carries a flux, not of a common-or-garden magnetic field, but of another field which in the very early universe was unified with electromagnetism. This exotic field is confined to a tiny region, just like in a thin solenoid, but the associated vector potential exists well away from the string. Hence particles that experience the exotic interaction will produce an Aharonov-Bohm effect [37].

The outline of this paper is as follows. In Section 2, a generalized DKP equation are introduced in a curved space-time. The eigenfunctions of scalar bosons our problem in question have been discussed in Sections 3 and 4. Finally, Section 5 will be a conclusion.

2. THE DKP EQUATION IN CURVED SPACE

2.1. The Formalism

In flat space-time, the first-order relativistic DKP equation for a free charged scalar bosons of mass M is given by [32–34, 36]

$$\left(i\beta^\mu \partial_\mu - \frac{Mc}{\hbar}\right)\Psi = 0, \quad (1)$$

where β^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) are the DKP matrices which satisfy the following commutation rules

$$\beta^\kappa \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\kappa = g^{\kappa\nu} \beta^\lambda + g^{\nu\lambda} \beta^\kappa, \quad (2)$$

$g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$ is the Minkowski metric tensor., and the beta matrices are chosen from [36].

Now, in curved space-time, Eq. (1) is written by [38–43]

$$\left\{i\tilde{\beta}^\mu \left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\omega_{\mu ab} S^{ab} - \frac{ie}{\hbar c} A_\mu\right) - \frac{Mc}{\hbar}\right\}\Psi = 0, \quad (3)$$

with A_μ denotes the vector potential associated with the electromagnetic field, $S^{ab} = [\beta^a, \beta^b]$ and $\tilde{\beta}^\mu$ are the Kemmer matrices: these matrices are related to their Minkowski counterparts via

$$\tilde{\beta}^\mu = e_{(a)}^\mu \beta^a. \quad (4)$$

The following tetrad relations and the spin connection are calculated by making use of the relation

$$\omega_{\mu ab} = e_{(a)\nu} e_{(b)}^j \Gamma_{j\mu}^\nu - e_{(b)\nu}^j \partial_\mu e_{(a)j}^\nu, \quad (5)$$

where

$$\Gamma_{\nu\lambda}^{\mu} = \frac{g^{\mu\rho}}{2}(g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\rho\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\rho}), \quad (6)$$

are the Christoffel symbols [43]. In what follows, we concentrate on the case of both cosmic string and the global monopoles.

• the corresponding metric of cosmic string is [44–48]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - a'^2 r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (7)$$

where $-\infty < t < +\infty$, $0 \leq r$, $0 \leq \theta \leq \pi$, and $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. In this case, the spin connection coefficients are [49]

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a' \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & a' \cos \theta \\ -a' \sin \theta & -a' \cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

The parameter a' is the deficit angle associated with conical geometry obeying $a' = 1 - 4\eta$, and η is the linear mass density of the string. It is defined in the range $(0,1]$ and corresponds to a deficit angle $\Omega = 2\pi(1 - a')$. Here the tetrad $e_{(a)}^{\mu}$ are chosen to be

$$e_{(a)}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a' r \sin \theta} \end{pmatrix}. \quad (9)$$

• in the case of the global monopoles with the following metric [51–53]

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b'^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (10)$$

where $b'^2 = 1 - 8\pi G\eta^2$ and the parameter η being the energy scale of symmetry breaking, the spin connection coefficients are

$$\omega_{\theta ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b' & 0 \\ 0 & -b' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\omega_{\varphi ab} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b' \sin \theta \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta \\ -b' \sin \theta & -\cos \theta & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where the tetrad $e_{(a)}^{\mu}$ are chosen to be

$$e_{(a)}^{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{b'r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b'r \sin \theta} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

2.2. Pauli Criterion and the Vector Aharonov–Bohm Effect: Review

One way to deal with the NC space is to change the standard product of the fields by the star product (alternatively called Weyl–Moyal product) [53] with

$$(f * g)(x) = \exp[i\Theta^{ij} \partial_{x_i} \partial_{x_j}] f(x) g(x), \quad (13)$$

where $\Theta^{ij} = \Theta \epsilon^{ij}$ and Θ is the non-commutative parameter. The position and momentum satisfying the following commutation relations

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\Theta_{ij}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij}. \quad (14)$$

As we know, the KAM satisfy the following relations

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}, \quad (15)$$

with the following standard commutations rules [55, 56]

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k, \quad (16)$$

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm}, \quad (17)$$

and

$$[L^2, L_{\pm}] = 0, \quad (18)$$

where

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}, \quad (19)$$

with

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (20)$$

Here $L_{\pm} = L_x \pm iL_y$ are the ladder operators. The KAM is based on these commutation relations that Pauli required that the appropriate eigenfunctions be those which are square integrable and are closed under the operation of the ladder operators. This condition is called as the Pauli criterion, and consequently the commutations relations in Eqs. (16) and (17) are pertinent for the Pauli criterion to be applicable.

In the presence of the **AB** potential with

$$A_r = A_{\theta} = 0, \quad A_{\varphi} = \frac{\phi}{2\pi r \sin \theta}, \quad (21)$$

the KAM becomes

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\alpha \right)^2 \right\}, \quad (22)$$

where

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial\varphi} - i\alpha \right). \quad (23)$$

In this stage, an important remark about the applicability of Pauli criterion in the presence of \mathbf{AB} can be made: Cheng [24], in his paper, shows that, in the presence of \mathbf{AB} , the KAM does not satisfy the fundamental commutation relations (17), and instead of this equation, he obtained

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L} + 2i\alpha \hbar^2 \cos\theta \delta(\cos^2\theta - 1) \mathbf{e}_r. \quad (24)$$

From this equation we have

$$[L_z, L_{\pm}] = \pm\hbar L_{\pm}, \quad (25)$$

$$[L^2, L_{\pm}] = \mp 2\alpha \hbar^2 \left[L_{\pm} \delta(\cos^2\theta - 1) + \delta(\cos^2\theta - 1) L_{\pm} \right]. \quad (26)$$

These rules are different from Eqs. (17) and (35). As described by Cheng [24], the region even when the region where the magnetic field exists is inaccessible to the electron, the commutation relations of the KAM should take it into account. This type of commutations relations as said to be global [24], and consequently the Pauli criterion is inapplicable. The eigensolutions of L_z and L^2 under the following boundary condition at $\theta = 0, \pi$,

$$\psi(\theta, \varphi)|_{\theta=0, \pi} = 0. \quad (27)$$

are presented by Kretzschmar [29]. This condition means that the particle is restricted to the doubly-connected region of $\theta \neq 0, \pi$: the topological explanation of \mathbf{AB} effect assumes that the presence of a solenoid makes the configuration space non-simply connected. The Aharonov–Bohm effect specifies that there can be a shift in the interference fringes whenever there is a superposition of waves with different winding numbers about the hole, and it gives that phase shift in the interference pattern as

$$\oint \mathbf{A} d\mathbf{l}.$$

The presence of the hole-in-space at the solenoid enables the existence of a vector potential $\mathbf{A}(r)$ with nonzero circulation, while keeping a zero magnetic field $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ everywhere in space. However, it does not require that this circulation be nonzero—and, in fact, it can be arbitrary, and among the possible arbitrary values of the circulation is the real number $\oint \mathbf{A} d\mathbf{l} = 0$. So, the presence of a doubly-connected region of space is perfectly consistent with a null value of the magnetic flux at the solenoid.

Now, by using the following substitutions [29]

$$L_z \psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = \lambda \hbar \psi_{l\lambda}(\theta, \varphi), \quad (28)$$

$$L^2 \psi_{l\lambda}(\theta, \varphi) = l(l+1) \hbar^2 \psi_{l\lambda}(\theta, \varphi), \quad (29)$$

with

$$\lambda = m - \alpha, \quad m = (0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (30)$$

$$l = |\lambda| + k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (31)$$

the normalized eigenfunctions are of the form

$$\psi_{\lambda, l}(\theta, \varphi) = c_{\lambda, l} P_l^{-|\lambda|}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (32)$$

where

$$c_{\lambda, l} = e^{\frac{i\pi\lambda + i\pi|\lambda|}{2}} \left(\frac{2l+1}{4\pi} \frac{\Gamma(l+|\lambda|+1)}{\Gamma(l-|\lambda|+1)} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

According to the sign of λ , we have

$$\begin{cases} \psi_{\lambda, l_1}(\theta, \varphi) = c_{\lambda, l_1} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \\ \lambda_1 = m - \alpha > 0, \quad l_1 = -\lambda_2 + k \\ \psi_{\lambda, l_2}(\theta, \varphi) = c_{\lambda, l_2} P_{l_2}^{\lambda_2}(\cos\theta) e^{im\varphi}, \\ \lambda_2 = m - \alpha < 0, \quad l_2 = -\lambda_2 + k \end{cases} \quad (34)$$

The inapplicability of the Pauli criterion modified completely the total Hilbert space \mathcal{S} : the total Hilbert space \mathcal{S} is split into two subspaces, \mathcal{S}_+ and \mathcal{S}_- . \mathcal{S}_+ is spanned by all the eigenfunctions $\psi_{\lambda, l_1}(\theta, \varphi)$, and \mathcal{S}_- is spanned by all the eigenfunctions $\psi_{\lambda, l_2}(\theta, \varphi)$. These two subspaces are not connected by the ladder operators. In what follow we calculate the KAM for both cosmic string and global monopole in non-commutative space.

• *case of cosmic string*

In non-commutative cosmic strings, replacing the vector \mathbf{AB} by the relation

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin\theta}, \quad (35)$$

we have the following relation

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L} + \frac{2i\hbar^2 \alpha}{\mathbf{a}'} \cos\theta \delta(\cos^2\theta - 1) \mathbf{e}_r. \quad (36)$$

• *case of global monopoles*

The case of non-commutative global monopoles, with

$$A_\varphi = \frac{\Phi}{2\pi b' r \sin\theta}, \quad (37)$$

Eq. (17) becomes

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L} + \frac{2i\hbar^2 \alpha}{\mathbf{b}'^2} \cos\theta \delta(\cos^2\theta - 1) \mathbf{e}_r. \quad (38)$$

In this stage, we note the following remark: (i) the non-commutative-space don't affect the KAM relations of commutations in both cosmic string and

global monopoles cases. In the limit where $a' \rightarrow 1$ ($b' \rightarrow 1$), we recover the same results as in the case of flat space. (ii) As the topologies of the configuration spaces in the cosmic string model and in the global monopole model are obviously different, however the respective \mathbf{AB} vectors turn out to be the same: this situation can be explained as follows: generally, when we investigate the effect of curvature of space on the \mathbf{AB} effect, we consider the situation in which there is not only a tube of magnetic force lines but also an external static cylindrically symmetric gravitational field with symmetry axis of that coincides with the axis of the magnetic tube: in the large distances from the symmetry axis the space becomes locally flat and the region of spatial curvature (the gravitational tube) may either coincide with the magnetic tube or include it or, finally, be included in it [56, 57]. (iii) In addition, we can see that Eqs. (38) and (50) are obviously different from Eq. (17). According to Cheng [24], In the presence of \mathbf{AB} potential, the KAM of the particle, in both cases, does not satisfy the fundamental commutation relations of the angular momentum even when the particle is restricted to the doubly-connected space where it does not touch the magnetic field on the z -axis. The region where the magnetic field exists and is inaccessible to the particle should also be taken into account in the physically meaningful commutation relations.

3. THE SCALAR BOSONS WITH THE AHARONOV–BOHM AND COULOMB POTENTIALS IN THE PRESENCE OF COSMIC STRINGS IN NON-COMMUTATIVE SPACE

3.1. The Solutions

The \mathbf{AB} vector potential in the background of a cosmic string takes the form

$$A_0 = \frac{kq}{r}, \quad A_r = A_\theta = 0, \quad A_\phi = \frac{\Phi}{2\pi a' r \sin \theta}. \quad (39)$$

where we have consider the particle in the vector potential field of an infinite long solenoid of magnetic flux $\Phi = \alpha\Phi_0$ with $\Phi_0 = \frac{hc}{e}$: here, we use the spherical coordinates, and the solenoid coincide with the z -axis. The total wave function ψ has the following form

$$\psi = e^{-\frac{iEt}{\hbar}} (\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5)^T. \quad (40)$$

After an algebraic calculation from Eq. (3), we obtain

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \right\} \times \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} \Big\} \psi_1 = 0, \quad (41)$$

with

$$L^2 = -\hbar^2 \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{a'^2 \sin^2 \theta} (\partial_\phi - i\alpha)^2 \right\}, \quad (42)$$

$$L_z = -\frac{i\hbar}{a'} \left(\frac{d}{d\phi} - i\alpha \right), \quad (43)$$

and

$$l = |\lambda| + n', \quad (n' = 0, 1, 2, \dots), \quad (44)$$

$$\lambda = \frac{m - \alpha}{a'}. \quad (45)$$

The quantum number l are the eigenvalues of L_z and L^2 respectively: we can see that these eigenvalues depend on the magnetic flux α and the geometric parameter of space a' .

In order to solve Eq. (43), we first put

$$\psi_1 = \frac{R(r)}{r} \chi(\theta, \phi). \quad (46)$$

Expanding Eq. (41) leads to

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} \right. \\ \left. - \frac{l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R(r) = 0. \quad (47)$$

In non-commutative cosmic string by putting Eq. (16) in (75) we have

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(c\hbar)^2 r} \right. \\ \left. - \frac{l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R(r) - \frac{\mathbf{L}\Theta}{2\hbar} \\ \times \left\{ \left(\frac{kqE}{(c\hbar)^2} \right) \frac{1}{r^3} + \left(l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2 \right) \frac{1}{r^4} \right\} R(r) = 0.$$

Using the perturbation technique, Eq. (12), for $\Theta = 0$, takes the form

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{(E^{(0)})^2 - (Mc)^2}{\hbar^2 c^2} \right. \\ \left. - \frac{2(kq)E^{(0)}}{(c\hbar)^2 r} - \frac{l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2}{r^2} \right\} R^{(0)}(r) = 0. \quad (48)$$

By using the following substitutions

$$\rho = \xi r, \quad \xi^2 = \frac{4(M^2 c^4 - (E^{(0)})^2)}{\hbar^2 c^2}, \quad (49)$$

$$\gamma = \frac{kq}{\hbar c}, \quad \zeta = \frac{2\gamma E^{(0)}}{\hbar c \xi}, \quad (50)$$

Eq. (11) becomes

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(-\frac{l(l+1) - \gamma^2}{\rho^2} - \frac{\zeta}{\rho} - \frac{1}{4} \right) \right\} R^{(0)}(\rho) = 0. \quad (51)$$

Putting that

$$R^{(0)}(\rho) = N \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} u(\rho), \quad (52)$$

Eq. (51) is transformed into

$$\begin{aligned} & \rho^2 \frac{d^2 u(\rho)}{d\rho^2} + (2(s+1)\rho - \rho^2) \frac{du(\rho)}{d\rho} \\ & + \left[(s(s+1) - (l(l+1) - \gamma^2)) - (\zeta + s + 1)\rho \right] \\ & \times u(\rho) = 0, \end{aligned} \quad (53)$$

with

$$s(s+1) = l(l+1) - \gamma^2, \quad (54)$$

or

$$s = -\frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}. \quad (55)$$

Thus, the solution is

$$\begin{aligned} & R_{n,l}^{(0)}(\rho) \\ & = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2)} n!}{(c\hbar) 2(n+s+1)\Gamma(n+2s+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \rho^{s+1} e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}, \end{aligned} \quad (56)$$

with the following condition

$$s + \zeta + 1 = -n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (57)$$

the energy spectrum is then

$$E_{nl}^{(0)} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(\left|\frac{m-\alpha}{a'}\right| + n' + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right)^2}}} \quad (58)$$

$$= \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left(n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}\right)^2}}, \quad (59)$$

with $l = \left|\frac{m-\alpha}{a'}\right| + n'$. This equation can be also put into another form as

$$E_{nl}^{(0)} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 \kappa^{-2}}}, \quad (60)$$

where $\kappa = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}$. In this stage, we study the behavior of the spectrum of energy in the non-relativistic approximation: for very small values of the constant γ , the energy spectrum can be expanding in a power series in γ as follows [54]

$$E_{nl}^{(0)} \approx Mc^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{2N^2} - \frac{\gamma^4}{2N^4} \left(\frac{N}{l + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right], \quad (61)$$

where $N = \left[n + n' + \underbrace{\left|\frac{m-\alpha}{a'}\right|}_l + 1 \right]$ is the principal quantum number, and $[N]$ means the biggest integer inferior to N : the different terms in (61) can be interpreted as follows: the first term corresponds to the rest energy of the particle. The second term is the same as the energy of a particle of mass M in a Coulomb field in the non-relativistic approximation. This term depends on geometrical parameters of space a' . The third term determines the relativistic correction to the energy. We see that the correction to the energy depends on the quantum number n , $l = n' + \left|\frac{m-\alpha}{a'}\right|$, and with the geometric parameter of space-time a' . Finally, in the case of a commutative space ($\Theta = 0$), in both limits $\alpha \rightarrow 0$ (annihilation of the **Aharonov-Bohm** potential) and $a' \rightarrow 1$ (flat space), we obtain

$$E_{nl}^{(0)} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 \kappa^{-2}}}, \quad (62)$$

with $\kappa = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 - \gamma^2}$ and $l = |m| + n'$. Equation (62) coincide with the habitual spectrum of energy of Coulomb potential (see Eq. (58.21) from Chap. VIII, Section 58, in [54]).

Now, for the expectation value of r^{-k} , we use the following relation [53, 59, 60]

$$\langle r^{-k} \rangle = \int_0^\infty r^{-k} |R_{n,l}^{(0)}|^2 dr \delta_{mm'}, \quad (63)$$

By substituting Eq. (59) into (62), we have

$$\langle r^{-k} \rangle = \left(\frac{2^k \left[\sqrt{((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2)} \right]^k n!}{(c\hbar) 2(n+s+1)\Gamma(n+2s+2)} \right) \quad (64)$$

$$\times \int_0^\infty \rho^{2s+2-k} e^{-\rho} (L_n^{2s+1})^2 d\rho. \quad (65)$$

Using the relation [59, 60]

$$= (-1)^{n-m} \frac{\int_0^\infty e^{-x} x^{\varrho+s} L_n^\varrho(x) L_m^\beta(x) dx}{m!(n-m)! \Gamma(\beta+1) \Gamma(s-n+m+1)} \quad (66)$$

$$\times {}_3F_2\left(\begin{matrix} -m, s+1, \beta-\varrho-s \\ \beta+1, n-m+1 \end{matrix}\right),$$

we obtain the first-order perturbation theory [53, 59, 60]

$$\langle r^{-3} \rangle = \frac{4 \left\{ \sqrt{(Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2} \right\}^3}{(2s+1)(2s)(n+s+1)} \left[1 + \frac{n}{s+1} \right], \quad (67)$$

$$\langle r^{-4} \rangle = \frac{4 \left\{ \sqrt{(Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2} \right\}^4}{(2s-1)s(2s+1)(n+s+1)} \quad (68)$$

$$\times \left[1 + \frac{3n}{s+1} + \frac{3n(n-1)}{(s+1)(2s+3)} \right],$$

where

$$\Theta \mathbf{L} = \Theta L_z. \quad (69)$$

Thus, we obtain

$$E^{(NC)} = -\frac{\Theta(m-\alpha)}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{a'} \right) \left(l(l+1) - \left(\frac{kq}{\hbar c} \right)^2 \right)$$

$$\times \left[\frac{2 \left((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2 \right)^4}{(2s-1)s(2s+1)(n+s+1)} \right]$$

$$\times \left[1 + \frac{3n}{s+1} + \frac{3n(n-1)}{(s+1)(2s+3)} \right] \quad (70)$$

$$- \frac{\Theta(m-\alpha)}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{a'} \right)$$

$$\times \left[\left(\frac{kq}{c\hbar} \right) \frac{E}{(2s+1)(2s)(n+s+1)} \left\{ 1 + \frac{n}{s+1} \right\} \right].$$

Concerning the total wave function, we have two solutions

• For the case of subspace S_+ , where $\lambda_1 > 0$ and $l_1 = \lambda_1 + \kappa$, the total spinor is

$$\Psi_{n\lambda_1 l_1}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \Psi_1^{(0)}, \quad (71) \quad \text{and}$$

with

$$\Psi_1^{(0)} = N_{\text{norm}} P_{l_1}^{-\lambda_1}(\cos \theta) \rho^s e^{\frac{p}{2} L_n^{2s+1}}. \quad (72)$$

• For the case of subspace S_- , where $\lambda_2 < 0$ and $l_2 = -\lambda_2 + \kappa$, the total spinor is

$$\Psi_{n\lambda_2 l_2}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{a'r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \Psi_1^{(0)}, \quad (73)$$

with

$$\Psi_1^{(0)} = N_{\text{norm}} P_{l_2}^{\lambda_2}(\cos \theta) \rho^s e^{-\frac{p}{2} L_n^{2s+1}}. \quad (74)$$

4. THE SCALAR BOSONS WITH THE AHARONOV–BOHM AND COULOMB POTENTIALS IN THE PRESENCE OF GLOBAL MONOPOLES IN NON-COMMUTATIVE SPACE

4.1. The Solutions

The metric of the space-time in the presence of a global monopoles is given by

$$ds^2 = dt^2 - dr^2 - b^2 r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (75)$$

Putting Eqs. (11) and (12) in Eq. (3), we obtain

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} + \frac{1}{(c\hbar)^2} \left(E - \frac{kq}{r} \right)^2 \right. \quad (76)$$

$$\left. - \left(\frac{Mc}{\hbar} \right)^2 - \frac{b'^2}{r^2} \right\} \Psi_1 = 0,$$

where

$$L^2 = -\hbar^2 \times \left\{ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right) + \frac{1}{b'^2 \sin^2 \theta} (\partial_\varphi - i\alpha)^2 \right\}, \quad (77)$$

$$L_z = -i\hbar \left(\frac{d}{d\varphi} - i\alpha \right), \quad (78)$$

$$l = |\lambda| + n', \quad (n' = 0, 1, 2, \dots), \quad (79)$$

$$\lambda = \frac{m-\alpha}{b'}, \quad (80)$$

with l are the eigenvalues of L_z and L^2 respectively: we observe that these eigenvalues depend on the magnetic flux α and the geometric parameter of space b' .

By using $\psi_1 = \frac{R(r)}{r} \chi(\theta, \varphi)$, we have

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{E^2 - M^2 c^4}{\hbar^2 c^2} - \frac{2(kq)E}{(\hbar c)^2 r} - \frac{l(l+1)}{b'^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2 \right\} R(r) = 0. \tag{81}$$

In non-commutative global monopole by using Eq. (16) in Eq. (80) we obtain

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(Mc^2)^2 - E^2}{(c\hbar)^2} - \frac{2(kq)E}{(c\hbar)^2 r} - \frac{l(l+1)}{b'^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2 \right\} R(r) - \frac{\mathbf{L}\Theta}{2\hbar} \times \left\{ \left(\frac{kqE}{(c\hbar)^2}\right) \frac{1}{r^3} + \left(\frac{l(l+1)}{b'^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2\right) \frac{1}{r^4} \right\} R(r) = 0.$$

Using the perturbation technique, Eq. (81), for $\Theta = 0$, takes the form

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{(Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2}{(c\hbar)^2} - \frac{2(kq)E^{(0)}}{(c\hbar)^2 r} - \frac{l(l+1)}{b'^2} - \left(\frac{kq}{\hbar c}\right)^2 \right\} R^{(0)}(r) = 0.$$

In this section, we are making a change of variable (52) and (53) in Eq. (82),

$$\left\{ \frac{d^2}{d\rho^2} + \left(-\frac{l(l+1)}{b'^2} - \gamma^2 - \frac{\zeta}{\rho} - \frac{1}{4} \right) \right\} R^{(0)}(\rho) = 0. \tag{82}$$

Now let us make a change of variable

$$R^{(0)}(\rho) = N\rho^{a+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) H(\rho), \tag{83}$$

So, we obtain

$$\rho^2 \frac{d^2 H(\rho)}{d\rho^2} + (2(a+1)\rho - \rho^2) \frac{dH(\rho)}{d\rho} + \left[\left(a(a+1) - \left\{ \frac{l(l+1)}{b'^2} - \gamma^2 \right\} \right) - (\zeta + a + 1)\rho \right] \times H(\rho) = 0. \tag{84}$$

To solve Eq. (85), we use the Frobenius method [38, 60–64],

$$H(\rho) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \rho^k, \tag{85}$$

we obtain the following recurrence relation:

$$c_{k+1} = \frac{k + (\zeta + a + 1)}{k(k+1) + 2(a+1)(k+1)} c_k. \tag{86}$$

Now, when $k \rightarrow \infty$, the ration $\frac{a_{k+1}}{a_k} \rightarrow 0$: We can understand this condition by saying that: Special kind of exact solutions, which represent bound states, can be obtained looking for polynomials expressions to $H(\rho)$, i.e., the solutions can be obtained by imposing the conditions where power series becomes a polynomial of degree n . We can be argued this as follows: in quantum mechanics, if we want to have a normalizable wave function, we have to impose that $\chi(\rho)$ vanishes at $\rho \rightarrow 0$ and $\rho \rightarrow \infty$. In this way, bound state solutions can be obtained because there is no divergence of the wave function at $\rho \rightarrow 0$ and $\rho \rightarrow \infty$. In our case, the $H(\rho)$ has written as a power series expansion around the origin (see Eq. (86)). As a result of that, the solutions can be achieved by imposing that the power series expansion (86) or the biconfluent Heun series becomes a polynomial of degree n . This guarantees that $\chi(\rho)$ takes a finite form as $\rho \rightarrow 0$ and vanishes when $\rho \rightarrow \infty$ [65–71]. Thus, in order that the power series expansion becomes a polynomial of degree n , two different conditions must be satisfied simultaneously: in this case we impose that

$$\zeta + a + 1 = -n, \tag{87}$$

and

$$a = -\frac{1}{2} \pm \left(\frac{l(l+1)}{b'^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{88}$$

where $a = -\frac{1}{2} + \left(\frac{l(l+1)}{b'^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. By starting with $a_0 = 1$, we have

$$a_1 = \frac{(\zeta + a + 1)}{2(a + 1)}, \tag{89}$$

$$a_2 = \frac{1 + (\zeta + a + 1)}{2 + 4(a + 1)} a_1. \tag{90}$$

Now imposing the conditions $a_{k+1} = 0$, gives

$$\zeta + a + 1 = -n. \tag{91}$$

So the eigensolutions are

$$E_{nl}^{(0)} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left\{ n + \frac{1}{2} + \left(\frac{\left| \frac{m-\alpha}{b'} \right| + n' \right) \cdot \left(\frac{\left| \frac{m-\alpha}{b'} \right| + n' + 1 \right)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right\}^2}}}} \tag{92}$$

$$= \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\left\{ n + \frac{1}{2} + \frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} + \gamma^2 \right\}^2}}},$$

$$R_{nl}^{(0)}(\rho) = \left(\frac{\sqrt{((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2) n!}}{2c\hbar(n+a+1)\Gamma(n+2a+2)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{93}$$

$$\times \rho^{a+1} \exp\left(-\frac{\rho}{2}\right) L_n^{2a+1},$$

with $l = \left| \frac{m-\alpha}{b'} \right| + n'$. Equation (92) can be rewritten into another form as

$$E_{nl}^{(0)} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 \kappa'^{-2}}}, \tag{94}$$

with $\kappa' = n + \frac{1}{2} + \left\{ \frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} - \gamma^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$ and $l = \left| \frac{m-\alpha}{b'} \right| + n'$. As in the case of cosmic string, we can make the following remarks: (i) for very small values of γ , the energy spectrum can be expanding in a power series in γ . This expansion gives

$$E_{nl}^{(0)} \approx Mc^2 \left[1 - \frac{\gamma^2}{2N'^2} - \frac{\gamma^4}{2N'^3 \left\{ \frac{l(l+1)}{b^2} + \frac{1}{4} \right\}^{\frac{1}{2}}} + \dots \right], \tag{95}$$

with $N' = \left[n + n' + \underbrace{\left| \frac{m-\alpha}{b'} \right|}_l + 1 \right]$ is the principal quantum number, and $[N']$ means the biggest integer inferior to N' : the different terms in (95) can be interpreted as follow: the first term corresponds to the rest energy of the particle. The second term is the same as the energy of a particle of mass M in a Coulomb field in the non-relativistic approximation. This term depends on the geometrical parameter of space-time b' . The third term determines the relativistic correction to the energy. As in the case of cosmic string, we see also that the correction to the energy depends on the quantum number n , $l = \left| \frac{m-\alpha}{b'} \right| + n'$, and the geometric parameter of space-time b' .

(ii) In the case of a commutative space ($\Theta = 0$), and in both limits $\alpha \rightarrow 0$ (annihilation of the **Aharonov–Bohm** potential) and $b' \rightarrow 1$ (flat space), we obtain

$$E_{nl}^{(0)} = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 + \gamma^2 \kappa'^{-2}}},$$

with $\kappa' = n + \frac{1}{2} + \sqrt{\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \gamma^2}$, and $l = |m| + n'$. Thus, as in the case of cosmic string; we recover the habitual spectrum of energy of Coulomb potential.

Now, using the relation (65) and (66), we obtain

$$E^{(NC)} = -\frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{b'} \right) \left(\frac{l(l+1)}{b^2} - \left(\frac{kq}{c\hbar} \right)^2 \right) \tag{96}$$

$$\times \left\{ \frac{2((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2)^4}{(2a-1)a(2a+1)(n+a+1)} \right.$$

$$\times \left[1 + \frac{3n}{a+1} + \frac{3n(n-1)}{(a+1)(2a+3)} \right] \left. - \frac{\Theta}{\hbar} \left(\frac{m-\alpha}{b'} \right) \right.$$

$$\times \left\{ \left(\frac{kq}{c\hbar} \right)^2 \frac{2((Mc^2)^2 - (E^{(0)})^2)^3}{(n+a+1)\Gamma(n+2a+2)} \left[1 + \frac{n}{a+1} \right] \right\}.$$

Concerning the total wave function, we have two conditions

- For the case of subspace S_+ , where $\lambda_1 > 0$ and $l_1 = \lambda_1 + \kappa$, the total spinor is

$$\Psi_{n\lambda_1 l_1}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\varphi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{b'r \sin \theta} (\partial_\varphi - i\alpha) \end{pmatrix} \Psi_1^{(0)}, \tag{97}$$

with

$$\Psi_1^{(0)} = N_{\text{norm}} P_{l_1}^{-\lambda_1} (\cos \theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (98)$$

• For the case of subspace S_- , where $\lambda_2 < 0$ and $l_2 = -\lambda_2 + \kappa$, the total spinor is

$$\Psi_{n\lambda_2 l_2}^{(0)} = \left(\frac{\hbar}{Mc} \right) e^{-\frac{iEt}{\hbar}} e^{im\phi} \begin{pmatrix} \left(\frac{Mc}{\hbar} \right) \\ \frac{1}{c\hbar} \left(E - \frac{kq}{r} \right) \\ i\partial_r \\ \frac{i}{r} \partial_\theta \\ \frac{i}{b'r \sin \theta} (\partial_\phi - i\alpha) \end{pmatrix} \Psi_1^{(0)}, \quad (99)$$

with

$$\Psi_1^{(0)} = N_{\text{norm}} P_{l_2}^{\lambda_2} (\cos \theta) \rho^s e^{-\frac{\rho}{2}} L_n^{2s+1}. \quad (100)$$

5. CONCLUSIONS

This paper is devoted to studying the solutions of the relativistic quantum motion of a charged scalar particles in the presence of an Aharonov–Bohm and Coulomb potentials in the space-times produced by an idealized cosmic string and global monopole in non-commutative space. These solutions have been obtained, and the influence of the parameter of the geometry of both topological defects has been discussed. In addition, the remarks, which Cheng [24] has been proposed concerning the **AB** effect, have been extended in our case: thus, the presence of **AB** potential changes completely the fundamental commutation relations of the angular momentum. Following the works of [24, 30, 49], we note that (i) the KAM relations are not satisfied even when the particle is restricted to the doubly connected space where it does not touch the magnetic field on the z -axis, (ii) the region where the magnetic field exists and is inaccessible to the electron should be taken into account in the physical commutation relations, and finally (iii) the Pauli criterion which said that “the appropriate eigenfunctions are those which are square integrable and are closed under the operation of ladder operators” is inapplicable to the vector **AB**. The existence of the magnetic field on the z -axis is the principal cause of breaking down the symmetry of the particle’s motion around the z -axis. The eigenfunctions and eigenvalues of L_z and L^2 have been presented under the following boundary condition $\Psi(r, \theta, \phi)|_{\theta=0, \pi} = 0$, the space S is split into two subspaces, S_+ is spanned by all the wave function $\Psi_{j_1 \lambda_1}(\theta, \phi)$, and S_- is spanned by all the wave function $\Psi_{j_2 \lambda_2}(\theta, \phi)$.

By applying the perturbative approach we studied the scalar bosons in the NC space: the spectrum of energy in the gravitational field of cosmic string and a global monopole are different. It is explicitly shown that (i) the KAM relations are not affected by the parameter Θ of the NC space, and (ii) the degeneracy of the initial spectral line is broken in the transition from commutative space into the non-commutative space.

REFERENCES

1. G. A. de Marques and V. B. Bezerra, Phys. Rev. D **66**, 105011 (2002).
2. J. Audretsch and G. Schäfer, Gen. Rel. Grav. **9**, 243 (1978).
3. E. Schrödinger, Proc. R. Irish. Acad. A **46**, 9–16 (1940).
4. L. Parker, Phys. Rev. Lett. **44**, 1559 (1980).
5. L. Parker and L. O. Pimentel, Phys. Rev. D **25**, 3180 (1982).
6. L. Parker, Phys. Rev. D **22**, 1922 (1980); Phys. Rev. D **24**, 535 (1981).
7. L. Parker, Gen. Rel. Grav. **13**, 307 (1981).
8. T. K. Leen, L. Parker, and L. O. Pimentel, Gen. Rel. Grav. **15**, 761 (1983).
9. A. Boumali and N. Messai, Can. J. Phys. **92**, 1460–1463 (2014).
10. N. Messai and A. Boumali, Eur. Phys. J. Plus **130**, 140 (2015).
11. H. Snyder, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
12. A. Boumali, Zeitschr. Naturforsch. A **70**, 619 (2015).
13. H. Hassanabadi, H. Seyedesamira, A. Boumali, and S. Zarrinkamar, J. Math. Phys. **55**, 033502 (2014).
14. M. Chaichian, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu, Phys. Rev. Lett. **86**, 2716 (2001).
15. O. F. Dayi and A. Jellal, J. Math. Phys. **43**, 4592 (2002).
16. K. Li and J. Wang, Eur. Phys. J. C **50**, 1007 (2007).
17. O. Bertolami and R. Queiroz, Phys. Lett. A **375**, 4116–4119 (2011).
18. C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, and J. N. Prata, Int. J. Mod. Phys. A **28**, 1350064 (2013).
19. C. Bastos, O. Bertolami, N. C. Dias, and J. N. Prata, J. Math. Phys. **49**, 072101 (2008).
20. C. Bastos, N. C. Dias, and J. N. Prata, Comm. Math. Phys. **299**, 709 (2010).
21. O. Bertolami, J. G. Rosa, C. M. L. de Aragao, P. Castorina, and D. Zappala, Phys. Rev. D **72**, 025010 (2005).
22. Y. Aharonov and D. Bohm, Phys. Rev. **115**, 485 (1959).
23. W. C. Henneberger, J. Math. Phys. **22**, 116 (1981).
24. C.-F. Li, Ann. Phys. **252**, 329 (1996).
25. M. Roy and V. Singh, Nuovo Cim. A **79**, 391 (1984).
26. G. N. Afanasiev, *Topological Effects in Quantum Mechanics* (Springer, Netherlands, 2012).
27. A. Boumali, Can. J. Phys. **82**, 67–74 (2004).
28. A. Boumali, Can. J. Phys. **85**, 1417–1429 (2007).
29. M. Kretzschmar, Z. Phys. **185**, 97 (1965).

30. W. Pauli, *Helv. Phys. Acta* **12**, 147 (1939).
31. V. B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **35**, 2031–2033 (1987).
32. G. Petiau, *Acad. R. Belg. Cl. Sci. Mem. Collect.* **8**, 16 (1936).
33. R. J. Duffin, *Phys. Rev.* **54**, 1114 (1939).
34. N. Kemmer, *Proc. R. Soc. A* **166**, 127 (1938).
35. N. Kemmer, *Proc. R. Soc. A* **173**, 91 (1939).
36. Y. Nedjadi and R. C. Barrett, *J. Phys. A: Math. Gen.* **27**, 4301 (1994).
37. M. Hindmarsh, *Phys. World* **2** (5), 19 (1989).
38. C. Furtado, B. G. C. da Cunha, F. Moraes, E. R. Bezerra de Mello, and V. B. Bezerra, *Phys. Lett. A* **195**, 90 (1994).
39. S. Zarrinkamar, H. Panahi, and M. Rezaei, *J. Korean Phys. Soc.* **69**, 117–123 (2016).
40. M. Falek and M. Merad, *Cent. Eur. J. Phys.* **8**, 3 (2010).
41. K. Sogut and A. Havare, *Class. Quantum Grav.* **23**, 7129–7142 (2006).
42. J. T. Lunardi, B. M. Pimentel, and R. G. Teixeira, “Duffin-Kemmer-Petiau equation in Riemannian space-times,” in *Geometrical Aspects of Quantum Fields*, Ed. by A. A. Bytsenko, A. E. Golcalves, and B. M. Pimentel (World Scientific, Singapore, 2001), p. 111.
43. M. Nakahara, *Geometry, Topology and Physics* (IOP, Bristol, 2003).
44. G. de A. Marques and V. B. Bezerra, *Mod. Phys. Lett. A* **14**, 2687 (1999); *Class. Quantum Grav.* **19**, 985 (2002).
45. M. Hosseinpour and H. Hassanabadi, *Int. J. Mod. Phys. A* **30**, 1550124 (2015).
46. G. de A. Marques, V. B. Bezerra, and S. G. Fernandes, *Phys. Lett. A* **341**, 39–47 (2005).
47. G. de Marques, J. G. de Assis, and V. B. Bezerra, *J. Math. Phys.* **48**, 112501 (2007).
48. Z. Wang, Z. Long, C. Long, and J. Teng, *Phys. Scr.* **90**, 055201 (2015).
49. A. Boumali and H. Aounallah, *Adv. High Energy Phys.* **2018**, 1031763 (2018).
50. M. Barriola and A. Vilenkin, *Phys. Rev. Lett.* **63**, 341 (1989).
51. G. de A. Marques and V. B. Bezerra, *Phys. Rev. D* **66**, 105011 (2002).
52. E. R. Bezerra de Mello and A. A. Saharian, *Phys. Rev. D* **75**, 065019 (2007).
53. S. Hassanabadi and M. Ghominejada, *Eur. Phys. J. Plus* **129**, 273 (2014).
54. A. S. Davydov, *Quantum Mechanics* (Pergamon, New York, 1976).
55. L. C. Biedenharn, J. D. Louck and P. A. Carruthers, *Angular Momentum in Quantum Mechanics* (Addison-Wisley, Reading, MA, 1981).
56. V. M. Villalba, *J. Math. Phys.* **36**, 3332–3344 (1995).
57. Yu. A. Sitenko, *Nucl. Phys. B* **372**, 622–634 (1992).
58. S. K. Suslov and, and B. Trey, *J. Math. Phys.* **49**, 012104 (2008).
59. S. Zaim, L. Khodja, and Y. Delenda, *Int. J. Mod. Phys. A* **26**, 4133 (2011).
60. S. Zaim, *J. Math. Phys., Anal., Geom.* **4**, 1 (2016).
61. S. Slavyanov and W. Lay, *Special Functions: A Unified Theory Based on Singularities* (Oxford Univ. Press, Oxford, 2000).
62. G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 6th ed. (Elsevier Academic, New York, 2005).
63. *Methods for Physicists*, sixth ed., Elsevier Academic Press, New York, 2005.
64. P. Maroni, “Sur la forme bi-confluente de l’équation de heun,” *C.R. Acad. Sci. Paris* **264**, 503–505 (1967).
65. A. Ronveaux, *Heun’s Differential Equations* (Oxford Univ. Press, New York, 1995).
66. K. Bakke and F. Moraes, *Phys. Lett. A* **376**, 2838–2841 (2012).
67. K. Bakke and H. Belich, *Eur. Phys. J. Plus* **129**, 147 (2014).
68. K. Bakke, *Ann. Phys.* **3431**, 86–93 (2014).
69. I. C. Fonseca and K. Bakke, *Eur. Phys. J. Plus* **131**, 67 (2016).
70. E. R. Figueiredo Medeiros and E. R. Bezerra de Mello, *Eur. Phys. J. C* **72**, 2051 (2012).
71. K. Bakke and C. Furtado, *Ann. Phys. (N.Y.)* **355**, 48 (2015).

SPELL: 1. ok