République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département: Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine: Mathématiques et Informatique
Filière: Mathématiques
Option: Equations aux dérivées partielles et applications
Thème:

Les Polynômes orthogonaux et les équations de Painlevé

Présenté Par:
Louali Ahlem
Haouichi Ahlem

Devant le jury :

Mr, Hafdalla Abdelhak	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Président
Mr, Degaichi Nouar	MAA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Examinateur
Mr , Saib Abdessadek	MCB	UnivérsitéLarbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance :20/06/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

دَعْوَاهُمْ فِيهَا سُبْحَانَكَ اللَّهُمَّ وَتَحِيَّتُهُمْ فِيهَا
سَلاَم
وَآخِرُ دَعْوَاهُمْ أَنِ الْحَمْدُ لِلّهِ رَبِّ الْعَالَمِينَ

يونس10

Dédicace

Je dédie ce mémoire

À mon père "Haouichi Azzeddine" et ma mère "Maïfi Hania" pour leur amour inestimable, leurs sacrifices, leur confiance, leur soutien et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquerJe prie Dieu de vous protéger et de réaliser tous vos souhaits et de vous bénir avec bonheur, santé et longue vie

À mes Mes grand-parents "Haouichi Youcef" , "Maïfi Slimen" , "Maïfi laalia" Pour leur supplication permanente, j'espère que Dieu les préserve et leur donne une longue vie et une bonne santé .Je n'oublierai jamais ma défunte grand-mère "Aisha" Tu étais et tu es toujours la plus proche de mon cœur, même si la vie nous a séparés.Je prie pour que Dieu prenne soin de toi où que tu sois.

À mes sœurs et mes frères "Nour Elhouda", "Abd Elaziz", "Med Yacine", "Tasnim", "Rihab" et "Ibrahim" Pour leur présence et leur soutien. Quoi qu'il arrive dans la vie, ton amour ne changera jamais dans mon cœur.

À mes tantes et mes oncles de la famille Haouichi ainsi que de la famille Maïfi ,Et tous leurs fils et filles spécialement Haouichi Ali, pour leurs mots d'encouragement et leur gentillesse.

À mon fiancé "Helali Thabet", avec mon amour et ma loyauté, pour son soutien , ses encouragements.Je resterai fidèle à vous et à tout ce qui nous rassemble.Ainsi qu'à la Famille Helali.

À tous mes camarades et mes amies.

Haouichi Ahlem

<u>Dédicace</u>

Je dédie mon travail a :

Mes chers ***parents Rebei*** *et* ***Karima*** *avec tous mes sentiments de respect, d'amour, de gratitude et de reconnaissance pour tous les sacrifices déployés pour m'élever dignement et assurer mon éducation dans les meilleures conditions.*

Tous mes sœurs ***Fatma*** *et ses fils Asser* ***Joud*** *et* ***Taha***, ***Sabrina***, ***Nadjette***, ***Chahrazed***, *Amani, et mon frère* ***Ahmed Abd Elmohaimen***.

Tous mes oncles et mes tantes et toute la famille de ***louali*** *et* ***Chabbi***.

Tous mes amis ***Ahlem***, ***Liliane*** *et* ***Hadil*** *pour les bons moments passés ensemble..*

Louali Ahlem

Remerciments

Tout d'abord ,Nous remercions Allah le tout puissant de nous avoir donnée la patience, la volonté et l'énergie pour faire ce travail.

Nous tenons à exprimer notre gratitude à notre directeur de mémoire monsieur *A.Saib* maître de conférences à l'université de Tébessa, monsieur *N.Degaichi* maître de conférences à l'université de Tébessa, monsieur A.Hafdallah maître de conférences à l'université de Tébessa nous les remercions de nous avoir, guidé, aidé et conseillé.

Nous adressons nos sincères remerciements à tous les professeurs, conférenciers et toutes les personnes qui par leurs propos, leurs écrits, leurs conseils et leurs critiques ont guidé mes réflexions et ont accepté de me rencontrer et de répondre à nos questions au cours de nos recherches,et nous mentionnons monsieur *D.Alaa* maître à l'université de Tébessa.

Nous adressons un grand remerciement à nos cher amie *L.Bakhouche,H.Safi*.

A.Louali & A.Haouichi

Résumé

Dans ce mémoire nous cherchons des suites de polynômes orthogonaux dont les coefficients de leurs récurrences satisfaisant une des équations de Painlevé. Ceci sans doute montre une méthode d'expressions des solutions des équations de Painlevé en termes des coefficients des récurrences des polynômes orthogonaux.

Abstract

The main object of this dissertation is to look for orthogonal polynomials sequences for which their recurrence coefficients satisfy one of the Painlevé equations. This is without a doubt presents a way to express solutions of Painlevé equations in terms of recurrence coefficients of orthogonal polynomials.

ملخص

الهدف الرئيسي من هذه المذكرة هو البحث عن متتاليات كثيرات حدود متعامدة التي تحقق معاملاتها التراجعية ، يقدم هذا بلا شك طريقة للتعبير عن Painlevé إحدى معادلات بدلالة المعاملات التراجعية للعديد Painlevéحلول معادلات من كثيرات الحدود المتعامدة.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

La théorie des polynômes orthogonaux joue un rôle important dans différentes branches des mathématiques, comme la théorie de l'approximation (meilleure approximation, interpolation), fonctions spéciales, fractions continues et équations différentielles et intégrales. La notion d'orthogonalité est issue de la théorie des fractions continues, mais est devenu plus tard une discipline indépendante. Contributeurs à la théorie de l'orthogonale les polynômes comprennent des mathématiciens exceptionnels tels qu'Abel, Chebyshev, Hermite, Laguerre,.Commençant par Szegö, des mathématiciens hongrois comme , Freud et Feldheim ont rendu indispensable contributions à la théorie de l'élimination des polynômes orthogonaux au siècle dernier.La théorie des polynômes orthogonaux sur des intervalles finis est significativement différente de la théorie des polynômes orthogonaux sur des intervalles infinis. Alors que Szegö était travail de pionnier dans la théorie de l'orthogonalité sur des intervalles finis, il n'a pas reporté ses idées à intervalles infinis. Freud a fondé le maintenant théorie de la finition des polynômes orthogonaux par rapport aux poids exponentiels sur $\mathbb{R}$ et le représentant correspondant les polynômes portent son nom. Le but de Freud était d'étendre la théorie de la meilleure approximation et les estimations de type Jackson-Bernstein par rapport à l'axe réel. La façon naturelle de faire cela était d'explorer les propriétés des polynômes orthogonaux, puisque l'espérance était que les expansions orthogonales peuvent servir d'approximation la plus proche.

Les polynômes de Jacobi, Laguerre et Hermite sont considérés comme des polynômes orthogonaux classiques. Ces polynômes ont été découverts au 19ème siècle comme solutions aux problèmes d'interpolation et à certaines équations différentielles du second ordre. Le lecteur peut être familier avec ces polynômes classiques et avec le fait qu'ils obéir à des relations de récurrence à trois termes ainsi qu'à des équations différentielles du second ordre. Il s'avère que les équations différentielles linéaires du second ordre sont uniques aux polynômes orthogonaux, par un théorème de Bochner, mais qu'une relation de récurrence de second ordre est une propriété

universelle pour les fonctions de poids dans $\mathbb{R}$
R en charge dans $\mathbb{R}$.
La théorie des polynômes orthogonaux semi-classiques n'est pas entièrement tranchant mais la dérivation d'une équation différentielle pour une classe générale de polynômes orthogonaux par Shohat fournit une pierre angulaire pour former des classes de polynômes orthogonaux semi-classiques.Ces polynômes semi-classiques sont aussi les solutions en terme de coefficients des polynômes orthogonaux d'un cas particulier d'équations différentielles linéaires du second ordre appelées équations holonomiques.
L'étude d'une classe de polynômes semi-classiques orthogonaux à intervalles illimités par rapport aux poids exponentiels généraux commencés avec G eza Freud dans les années 1970.
Une fonction définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+}$comme suit

$$\omega : x \longmapsto \exp\left(-Q\left(x\right)\right). \tag{1.1}$$

est dit un poids de Freud si $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$est paire, non négative et continue, qui satisfait certaines conditions impliquant ses dérivées du premier et du second ordre. Plus précisément, les poids de Freud sont une classe de poids de type exponentiel
est dit un poids de Freud siest dit un poids de Freud siest dit un poids de Freud si $Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non négative,paire et continu qui satisfait certaines conditions impliquant ses dérivés de premier et de second ordre.Spécifiquement, les poids de Freud sont une classe de poids de type expon*

$$\omega_{\rho} = |x|^{\rho} \exp\left(|x|^{m}\right), \quad \rho > -1, m = 2k, k \in \mathbb{N}. \tag{1.2}$$

avec un support non borné sur $\mathbb{R}$.Puisque les poids de Freud sont des fonctions paires, il s'ensuit que l'un des coeffcients de récurrence $\alpha_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ pour que les polynômes orthogonaux par rapport au poids 1.2 satisfont à une relation de récurrence à trois termes

avec un support non borné sur $\mathbb{R}$. Puisque les poids de Freud sont même des fonctions, il suit que l'un des coeffcients de récurrence $\alpha_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$ pour que les polynômes orthogonaux par rapport au poids 1.2 satisfaire une relation de récurrence à trois termes

$$P_{n+1}\left(x\right) = xP_n\left(x\right) + \beta_n P_{n-1}\left(x\right). \tag{1.3}$$

aux conditions initiales $P_{-1} = 0$ et $P_0 = 1$; et $\beta_n\left(\rho\right)$ vérifie certaines équations différentielles non linéaires de second ordre$[13]$.
Painlevé dans ses célèbres leçons de STOCKHOLM disait : “La solution peut présenter des points singuliers et qu'en principe on ne peut reconnaître le caractère régulier ou singulier d'une valeur

x_0, de x par la simple connaissance de x . Je dis en principe car les E.D.O. linéaires font exception. La question ne peut se décider que si on connaît (x_0, y_0) .”
Pour montrer la subtilité du problème

$$y^{(4)} = R\left(z, y, y', y'', y^{(3)}\right). \tag{1.4}$$

(Une EDO sur le champ complexe) où R est une fraction rationnelle en y et ses dérivées, i coefficients analytiques en z, et dont les solutions sont à points critiques fixes.Il considèra l’équation différentielle

$$y'' = \frac{(y')^2}{y}(1+i). \tag{1.5}$$

qui admet $y(x) = (Ax+B)^i$comme solution générale.Il fit remarquer que cette solution est non seulement, indéterminée quand $x \longrightarrow -B/A$,mais aussi qu’elle est multiforme. C’est ainsi qu’une série de questions commencèrent à être posées comme" Comment étudier la solution an voisinage de telles singularités ?"," Comment exprimer qu’une singularité ne donne pas lieu à des points de branchement ?"," Comment surtout décider si de telles singularités existent ou non ?"... etc.
Les points critiques mobiles (points de branchement algébriques,..etc) compliquent l’étude de ces équations, ce qui conduit à ce restereindre aux équations dont la solution générale est uniforme où à la rigueur à celles dont la solution générale présente des points critiques fixes. Ces dèrnières pouvant être uniformisés moyennant des coupures ou la construction des surfaces de Reiman adéquates.
Signalons également que les EDO à singularités fixes constituent une extention naturelle des équations linéaires.Une autre question préoccupait les mathématiciens de l’époque :obtenir à partir des EDO de nouvelles transcendantes (c’est à dire de nouvelles fonctions que ne peuvent s’exprimer au moyen de fonctions usuelles ou se ramener à des transcendantes déjà connues) et même jouissent de certaines propriétés telles être méromorphe par exemple .A ce sujet Picard en 1892 :"On a fondé autre fois les plus grandes espérences sur l’étude des EDO .On pensait obtenir de nombreuses classes nien définies de transcendantes nouvelles.Il faut reconnaître que si l’on laisse de coté les EDO linéaires ces espérences on été jusqu’ici à peu pré déçues".
En réalité cet échec ne fut pas définitif, puisque Painlevé dans ces recherches sur les équations du type

$$y^{(2)} = R(x, y, y'). \tag{1.6}$$

(où R rationelle par rapport à y', algébrique par rapport à y, analytique par rapport à x) à points critiques fixes et en réponse au problème posé par Picard en 1887 put obtenir 6 nouvelles transcendantes dites transcendantes de Painlevé.

En résumé on peut dire que les équations de Painlevé sont des EDO vérifiant un proprieté posé par Painlevé (toutes les solutions sont sous forme de points de branchement mobiles) au début de $20^{ème}$ siècle en classant tous les ordinaires de second ordre équations différentielles (1.6) et les solutions de ces équations sont appelées les transcendants de Painlevé.
Ainsi que **Les équations discrètes de Painlevé** sont des équations différentielles non-linéaires du second ordre qui ont une équation de Painlevé continue comme limite continue.
Objectif de l'étude
L' objectif de ce travail est l'éducation de la relation entre les polynômes orthogonaux et les équations de Painlevé,on utilisons les propriétés des polynômes orthogonaux à une fonction poid connue pour trouver les coefficients de réccurence vérifiants les équations de Painlevé où ces polynômes et leurs fonction poid assiciée sont définie sur l'axe réel.
-Dans le premier chapitre nous rappelons quelques notions et définitions.
-Dans le deuxième chapitre nous utilisons les polynômes de Jacobi généralisés et l'opérateur d'échelle pour trouver les coefficients de réccurence vérifiants l'équations de PainlevéVI.
- Dans le troisième chapitre nous utilisons les polynômes de Freud généralisés pour trouver les coefficients de réccurence vérifiants l'équations de d-PI.
-Dans le quatrième chapitre nous utilisons les polynômes de Charlier généralisés pour trouver les coefficients de réccurence vérifiants l'équations de PainlevéVI, V et d-PII.

Chapitre 2

Préliminaires

Ce premier chapitre contient les notions préliminaires de la théorie des plynômes orthogonaux. Différents aspects sont présentés notamment l'orthogonalité sur l'axe réel et l'orthogonalité par rapport à une variable discrète ainsi que les classifications des polynômes classiques et semi-classiques. On outre, les équations de Painlevé et leurs versions discrètes et q-analogue sont présentées brievement.

2.1 Les polynômes orthogonaux sur l'axe réel

Nous désignerons par $\mathcal{P}$ l'espace vectoriel des polynômes à une variable complexe et par $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré n. Notons par $\mathcal{P}'$ le dual algébrique de $\mathcal{P}$ et par $\langle .,. \rangle$ le crochet de dualité entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Definition 2.1 *[2] Soit $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes et $\mathcal{L}$ une fonction à valeur complexe définie sur l'espaces des polynômes par*

$$\langle \mathcal{L}, x^n \rangle = \mathcal{L}(x^n) = \mu_n, \quad n \geq 0,$$
$$\mathcal{L}(\lambda p(x) + \mu q(x)) = \lambda \mathcal{L}(p(x)) + \mu \mathcal{L}(q(x)),$$

pour tous nombres complexes λ et μ et pour tous polynômes $p(x)$ et $q(x)$.
Alors, la forme linéaire $\mathcal{L}$ est dite fonctionnelle moment déterminée par la suite formelle des moments $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$. Le nombre μ_n est appelé le moment d'ordre n.

Il résulte immédiatement, lorsque $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$, que

$$\mathcal{L}(\phi_n(x)) = \sum_{k=0}^{n} c_k \mu_k.$$

Definition 2.2 *[2] Soient une suite de polynômes $\{\phi_n(x)\}_{n\geq 0}$ et $\mathcal{L}$ une fonctionnelle moment. La suite $\{\phi_n(x)\}_{n\geq 0}$ est dite suite de polynômes orthogonaux par rapport à $\mathcal{L}$ si*

(i) $\{\phi_n(x)\}_{n\geq 0}$ *est une suite libre, i.e.* $\deg \phi_n = n$*, pour tout* $n \geq 0$.

(ii) $\langle \mathcal{L}, \phi_n(x)\, \phi_m(x) \rangle = 0, \quad n \neq m, \quad n,\ m \geq 0 \qquad (1.1)$

(iii) $\left\langle \mathcal{L}, [\phi_n(x)]^2 \right\rangle \neq 0, \quad n \geq 0. \qquad (1.2)$

La fonctionnelle moment $\mathcal{L}$ peut se représenter sous forme d'intégrale ou d'une somme, i.e., lorsqu'il existe une mesure réelle et positive ψ vérifie l'orthogonalité suivante

$$\langle \mathcal{L}, \phi_n(x)\, \phi_m(x) \rangle = \int_S \phi_n(x)\, \phi_m(x)\, d\psi(x) = k_n^2 \delta_{n,m}, \quad n,\ m \geq 0. \tag{2.1}$$

où S est le support de ψ et k_n^2 est une constante non nulle. Lorsque $k_n^2 = 1$, le système est dit orthonormal.
Dans le cas discret, i.e. si ψ admet un poids $\omega(i)$ dans le point x_i, $i \in I$, alors l'orthogonalité est vérifiée dans l'ensemble $X = \{x_j\}_{j\in I}$, i.e.

$$\langle \mathcal{L}, \phi_n(x)\, \phi_m(x) \rangle = \sum_{x_j \in X} \phi_n(x_j)\, \phi_m(x_j)\, \omega(x_j) = k_n^2 \delta_{n,m}, \quad n,\ m \geq 0. \tag{2.2}$$

Lorsque $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ est une suite de polynômes orthogonaux, i.e. SPO, par rapport à $\mathcal{L}$, il s'ensuit immédiatement que pour tout polynôme $\pi(x)$ de degré n, on a

$$\pi(x) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} c_k P_k(x) \quad \text{avec} \quad c_k = \frac{\langle \mathcal{L}, \pi(x) P_k(x) \rangle}{\left\langle \mathcal{L}, [P_k(x)]^2 \right\rangle}. \tag{2.3}$$

2.1.1 Caractérisation des SPO

Theorem 2.1 *[2] Soit $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ une $SPON$ par rapport à une FM régulière $\mathcal{L}$. Alors la suite $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence d'ordre deux suivante*

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_n) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \tag{2.4}$$

avec $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$, γ_0 est une constante arbitraire et $\gamma_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$.
Si on écrit $P_n(x) = x^n + \theta_n x^{n-1} + R(x)$, alors

$$\begin{cases} \beta_n = \theta_n - \theta_{n+1}, \ n \geq 0 \\ \textit{avec} \quad \theta_0 = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

ainsi,

$$\gamma_n = \frac{\langle \mathcal{L}, P_n^2 \rangle}{\left\langle \mathcal{L}, P_{n-1}^2 \right\rangle}, \ n \geq 1 \qquad \beta_n = \frac{\langle \mathcal{L}, x P_n^2 \rangle}{\left\langle \mathcal{L}, P_{n-1}^2 \right\rangle}, \ n \geq 0 \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} \langle \mathcal{L}, P_n^2 \rangle = \gamma_0 \gamma_1 ... \gamma_n, \ \forall n \geq 0 \\ \textit{avec} \quad \gamma_0 = \mu_0 = \langle \mathcal{L}, 1 \rangle \end{cases} \tag{2.7}$$

Si de plus, $\mathcal{L}$ est définie positive, alors les β_n sont réels et les $\gamma_n > 0$, $\forall n \geq 1$.

Theorem 2.2 (Théorème de Favard) *[2] Soient $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ et $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ deux suites de nombres complexes et $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ une suite définie par la récurrence*

$$\begin{cases} P_{n+1}(x) = (x - \beta_n) P_n(x) - \gamma_n P_{n-1}(x) \\ P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1, \end{cases} \tag{2.8}$$

alors, il existe une fonctionnelle moment $\mathcal{L}$ unique telle que $\langle \mathcal{L}, 1 \rangle = (\mathcal{L})_0 = \gamma_0$ et

$$\langle \mathcal{L}, P_n P_m \rangle = 0, \quad si \ \ m \neq n \geq 0 \tag{2.9}$$

De plus, $\mathcal{L}$ est quasi-définie si et seulement si $\gamma_n \neq 0$, $n \geq 0$, et $\mathcal{L}$ est définie positive si et seulement si β_n sont réels et les $\gamma_n > 0$, $n \geq 0$.

Definition 2.3 *[2] Une fonctionnelle moment est dite*
(i) *symétrique si tous ses moments impairs sont nuls i.e.*

$$\left\langle \mathcal{L}, x^{2n+1} \right\rangle = (\mathcal{L})_{2n+1} = 0, \forall n \geq 0. \tag{2.10}$$

(ii) *antisymétrique si tous ses moments pairs sont nuls i.e.*

$$\left\langle \mathcal{L}, x^{2n} \right\rangle = (\mathcal{L})_{2n} = 0, \forall n \geq 1 \tag{2.11}$$

On a la caractérisation suivante des suites symmétriques.

Theorem 2.3 *[2] Soit $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ une SPO normalisée par rapport à $\mathcal{L}$, alors on a les équivalences suivantes*
$a)$ *$\mathcal{L}$ est symétrique.*
$b)$ *$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, $\forall n \geq 0$.*
$c)$ *Les coefficients β_n de la récurrence, pour $n \geq 0$, sont tous nuls.*

Example 2.1 *[7] Les polynômes de Hermite sont symétriques*

$$\begin{cases} H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x \\ H_{n+2}(x) = 2xH_{n+1}(x) - 2(n+2)H_n(x), \quad n \geq 0. \end{cases} \tag{2.12}$$

Remark 2.1 *Il existe un lien très fort entre les SPO et les matrices de bandes. En effet, la relation de récurrence d'ordre deux (2.8) vérifiée par les SPO est le déterminant de la matrice tridiagonale représentée comme suit*

$$P_{n+1}(x) = \begin{vmatrix} x-\beta_n & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_n & x-\beta_{n-1} & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_1 & x-\beta_0 \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

2.1.2 Identité de Cristoffel-Darboux et les zéros

Theorem 2.4 *[2] Soit $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ une $SPON$ vérifie la relation de récurrence d'ordre deux (1.6), alors*

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \mathcal{L}, P_n^2 \rangle}{\langle \mathcal{L}, P_k^2 \rangle} P_k(x)P_k(y) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_n}{\gamma_0\gamma_1\ldots\gamma_k} P_k(x)P_k(y) \\ &= \frac{P_{n+1}(x)P_n(y) - P_n(x)P_{n+1}(y)}{x-y} \end{aligned} \tag{2.14}$$

En particulier, si en faisant tendre $y \to x$, on obtient la relation confluente

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\langle \mathcal{L}, P_n^2 \rangle}{\langle \mathcal{L}, P_k^2 \rangle} P_k^2(x) = P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) \tag{2.15}$$

Si de plus $\mathcal{L}$ est définie positive, alors la relation confluente nous donne l'inégalité suivante

$$P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0, \quad \forall n \geq 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.16}$$

Le dernier résultat permet d'obtenir les propriétés suivantes

Theorem 2.5 *[2] Soit $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle moment $\mathcal{L}$ définie positive. Si le support de $\mathcal{L}$ est un intervalle I, alors*
(i) *Chaque polynôme P_n possède n zéros $\{x_{n,k}\}_{k=1}^{n}$ réels $(n \geq 1)$, simples et distincts à l'intérieur de I, qu'on supposera ordonnés d'une manière croissante $i.e.$*

$$x_{n1} < x_{n2} < ... < x_{nn}.$$

(ii) *Les zéros de $P_n(x)$ et $P_{n-1}(x)$ sont alternés, $i.e.$ entre deux zéros de $P_n(x)$ il y a un zéro de $P_{n-1}(x)$, $\quad n \geq 2$.*
(iii) *Pour tout $k \geq 1$, la suite des zéros $\{x_{n,k}\}_{n=k}^{\infty}$ est décroissante, cependant la suite $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^{\infty}$ est croissante. En particulier, les limites*

$$\xi_i = \lim_{n\to\infty} x_{n,i} \quad \text{et} \quad \eta_j = \lim_{n\to\infty} x_{n,n-j+1}, \quad i,j \geq 1$$

existent.

Definition 2.4 *L'intervalle fermé $[\xi_1, \eta_1]$ est appelé le vrais intervalle d'orthogonalité de la SPO ou de la forme $\mathcal{L}$.*

2.2 Les polynômes orthogonaux classiques

Considérons l'équation différentielle du second ordre

$$\alpha(x)\,y'' + \beta(x)\,y' + \rho(x)\,y = \lambda(n)\,y, \tag{2.17}$$

où $\alpha(x)$, $\beta(x)$ et $\rho(x)$ sont des polynômes réels indépendants de n et $\lambda(n)$ est un polynôme de n. Supposons que $y(x)$ est un polynôme de la forme

$$y(x) = y_n(x) = x^n + \sum\nolimits_{k=0}^{n-1} C_{n,k}x^k, \quad n \geq 0 \tag{2.18}$$

En remplaçant $y_0 = 1$, $y_1(x) = x + a_1$, $y_2(x) = x^2 + ax + b$ on obtient respectivement $\rho(x) = \lambda_0$, $\beta(x) = (\lambda_1 - \lambda_0)y_1(x)$, donc $\deg\{\beta(x)\} \leq 1$ et finalement pour $y_2(x)$ on obtient

$$\alpha(x) = \frac{1}{2}\left[\lambda_2 y_2(x) - y_2'(x)\, y_1(x)\,(\lambda_1 - \lambda_0) - \lambda_0 y_2(x)\right],$$

i.e., $\deg\{\alpha(x)\} \leq 2$.
Considérons alors l'équation différentielle suivante

$$L[y](x) = \sum_{i=0}^{2} l_i(x) y^{(i)}(x) = \sum_{i=0}^{2}\left(\sum_{j=0}^{i} l_{ij}x^j\right) y^{(i)}(x) = \lambda(n)\, y(x),\ n \geq 0. \tag{2.19}$$

Si l'équation différentielle (2.19) admet une solution polynomiale non trivail de degré n, alors par comparaison, λ est nécessairement

$$\lambda = dn + an(n-1). \tag{2.20}$$

Ainsi, pour que l'équation différentielle (2.17) possède une solution polynomiale de degré n, $n \geq 0$, elle est nécessairement de la forme suivante

$$L[y](x) = \left(l_{22}x^2 + l_{21}x + l_{20}\right) y'' + (l_{11}x + l_{10})\, y' = \left[l_{22}n(n-1) + l_{11}n\right] y. \tag{2.21}$$

Avant de continuer, remarquons que pour tout $n \geq 1$, le polynôme normalisé

$$P_n(x) = x^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n,k}x^k,\ n \geq 1 \tag{2.22}$$

satisfait l'équation (2.21) si et seulement si

$$\begin{cases} l_{20}(k+2)(k+1)C_{n,k+2} + (k+1)(l_{21}k + l_{10})C_{n,k+1} + (\lambda(k) - \lambda(n))C_{n,k} = 0,\ 0 \leq k \leq n-1 \\ \text{avec la convention}\ \ c_{n,k} = 0\ \ \text{si}\ \ k > n\ \ \ \text{et}\ \ \lambda(k) - \lambda(n) = (k-n)(l_{22}(k+n-1) + l_{11}). \end{cases} \tag{2.23}$$

Dans ce cas, si on regarde l'orthogonalité des polynômes, il est clair si on remplace $P_n(x)$ dans la récurrence d'ordre deux, on en déduit une expression entre ces coefficients. En effet, $\{P_n(x)\}$ est une SPO si et seulement si

$$\begin{cases} \gamma_n = C_{n,n-2} - (C_{n,n-1})^2 + C_{n,n-1}C_{n+1,n} - C_{n+1,n-1} \neq 0\ \ \text{pour}\ n \geq 1 \\ \beta_n = C_{n,n-1} - C_{n+1,n} \quad \text{avec} \quad C_{1,-1} = 0. \end{cases} \tag{2.24}$$

Definition 2.5 *On appelle suite de polynômes orthogonaux classique, toute suite de polynômes orthogonaux $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ satisfaisant l'équation différentielle (2.21) avec l_{22}, l_{21}, l_{20}, l_{11} et l_{10} sont des constantes réelles.*

Selon le degré et les zéros du polynôme $l_2(x) = l_{22}x^2 + l_{21}x + l_{20}$, Bochner en 1929 a classé toutes les suites de polynômes orthogonaux satisfont une équation différentielle du second ordre de la forme (2.21). Par un changement de variable linéaire, il y'a seulement trois suites de polynômes orthogonaux par rapport à une fonctionnelle moment définie positive, ce sont les polynômes de Jacobi, les polynômes de Laguerre et les polynômes de Hermite.
Dans la classification de Bochner, l'autheur n'avait pas mentioné l'orthogonalité des trois suites obtenues. L'orthogonalité de la quatrième classe qui représente les polynômes de Bessel est établit pour la première fois en 1949 par Krall et Frink. Cependant, l'orthogonalité n'est pas régulière et donnée sur le cercle unité dans le plan complexe. On outre, on a la caractérisation suivante

Theorem 2.6 *Soit $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ une SPON par rapport à $\mathcal{L}$. Alors on a les équivalences suivantes*

(a) Pour chaque $n = 0, 1, 2, ...$, $P_n(x)$ est solution de l'équation

$$L(P_n)(x) = \alpha(x)P_n'' + \beta(x)P_n' = \lambda(n)\, P_n$$

où

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \ l_{22}x^2 + l_{21}x + l_{20} \not\equiv 0 \\ \beta(x) &= \ l_{11}x + l_{10} \\ \lambda(n) &= \ l_{22}n(n-1) + l_{11}n \end{aligned}$$

(p) La fonction poids $\mathcal{L}$ associée à la suite $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ vérifie l'équation fonctionnelle dite de Pearson suivante

$$(\alpha(x)\mathcal{L})' = \beta(x)\mathcal{L}. \tag{2.25}$$

(m) Il existe des constantes l_{22}, l_{21}, l_{20}, l_{11} et l_{10} avec

$$\begin{aligned} & l_{22}^2 + l_{21}^2 + l_{11}^2 \neq 0 \\ & l_{11}\mu_{n+1} + l_{10}\mu_n + n(l_{22}\mu_{n+1} + l_{21}\mu_n + l_{20}\mu_{n-1}) = 0, \ n \geq 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

avec $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ est la suite des moments de $\mathcal{L}$.

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation différentielle (2.21) admet une SPO comme solution ce qui donne le théorème suivant

Theorem 2.7 *L'équation différentielle (2.21) admet une SPO (resp. SPO définie positive) comme solution si et seulement si*

(a) $l_{11} \notin \{-nl_{22}$ tel que $n = 0, 1, 2, ...\}$

(b) *La condition (2.24) est vérifiée, i.e.,* $\gamma_n \neq 0$ *(resp.* $\gamma_n > 0$*)*, $n \geq 1$.

De plus on a

$$\begin{aligned} C_{n,n-1} &= \frac{n\left[l_{10}+l_{21}\left(n-1\right)\right]}{l_{11}+2l_{22}\left(n-1\right)} \\ C_{n,n-2} &= \frac{n\left(n-1\right)\left[l_{20}\left(l_{11}+2l_{22}\left(n-1\right)\right)+\left(l_{10}+l_{21}\left(n-2\right)\right)\left(l_{10}+l_{21}\left(n-1\right)\right)\right]}{2\left[l_{11}+2l_{22}\left(n-1\right)\right]\left[l_{11}+l_{22}\left(2n-3\right)\right]} \end{aligned} \tag{2.27}$$

2.2.1 Détermination des polynômes classiques

Comme on a dit avant, selon le degré et les zéros du polynôme $l_2(x) = l_{22}x^2 + l_{21}x + l_{20}$, on a

Jacobi

Supposons que $l_{22} \neq 0$ et $l_{21}^2 - 4l_{22}l_{20} > 0$. Alors par un changement de variable linéaire, l'équation différentielle (2.21) prend la forme suivante

$$\left(1-x^2\right)y''\left(x\right)+\left[\left(\beta-\alpha\right)-\left(\alpha+\beta+2\right)x\right]y'\left(x\right)+n\left(n+\alpha+\beta+1\right)y\left(x\right)=0. \tag{2.28}$$

Supposons que $-\left(\alpha+\beta+1\right) \notin \mathbb{N}$ donc (2.28) est admissible dont l'unique solution romalisée est les polynômes de Jacobi

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-n}\sum\nolimits_{k=0}^{n} C_{n+\alpha}^{n-k}C_{n+\beta}^{k}(x-1)^k(x+1)^{n-k}, \quad n \geq 0. \tag{2.29}$$

De plus, de (2.24), (2.27) et (2.28) on a

$$\gamma_n = \frac{4n\left(\alpha+\beta+n\right)\left(\alpha+n\right)\left(\beta+n\right)}{\left(\alpha+\beta+2n-1\right)\left(\alpha+\beta+2n\right)^2\left(\alpha+\beta+2n+1\right)},\ n \geq 1 \tag{2.30}$$

ainsi $\gamma_n \neq 0$ (resp. $\gamma_n > 0$) si et seulement si $\alpha + n \neq 0$ et $\beta + n \neq 0$ pour $n \geq 1$ (resp. $\alpha > -1$ et $\beta > -1$).

Bessel

Supposons ici que $l_{22} \neq 0$ et $l_{21}^2 - 4l_{22}l_{20} = 0$. Alors, par un changement de variable linéaire, l'équation (2.21) peut transformer à

$$x^2y''\left(x\right)+\left(\alpha x+\beta\right)y'\left(x\right)=n\left(n+\alpha-1\right)y\left(x\right). \tag{2.31}$$

Supposons que $-\left(\alpha-1\right) \notin \mathbb{N}$ donc (2.31) est admissible, elle admet la suite de polynômes romalisés unique appelée polynômes de Bessel

$$B_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } l_{10} = 0 \\ \dfrac{\left(l_{10}\right)^{-n}}{\Gamma(l_{11}+2n-1)}\sum\nolimits_{k=0}^{n} C_n^k\Gamma(l_{11}+n+k-1)\left(\dfrac{x}{l_{10}}\right)^k & \text{si } l_{10} \neq 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

De plus, de (2.24), (2.27) et (2.31) on a

$$\gamma_n = \frac{-n\beta^2 (\alpha + n - 2)}{(\alpha + 2n - 3)(\alpha + 2n - 2)^2 (\alpha + 2n - 1)}, \; n \geq 1 \tag{2.33}$$

ainsi $\gamma_n \neq 0$ si et seulement si $\beta \neq 0$.

Laguerre

Supposons ici que $l_{22} = 0$ et $l_{21} \neq 0$. Alors, par un changement de variable linéaire, l'équation (2.21) peut transformer à

$$xy''(x) + (\alpha + 1 - x) y'(x) = -ny(x). \tag{2.34}$$

Supposons que $-(\alpha - 1) \notin \mathbb{N}$ donc (2.34) est admissible, elle admet la suite de polynômes romalisés unique appelée polynômes de Laguerre

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum\nolimits_{k=0}^{n} C_{n+\alpha}^{n-k} \frac{(-x)^k}{k!}, \; n \geq 0. \tag{2.35}$$

De plus, de (2.24), (2.27) et (2.34) on a

$$\gamma_n = n(\alpha + n), \; n \geq 1 \tag{2.36}$$

ainsi $\gamma_n \neq 0$ (resp. $\gamma_n > 0$) si et seulement si $\alpha + n \neq 0$ (resp. $\alpha > -1$).

Hermite

Supposons ici que $l_{22} = l_{21} = 0$, $l_{20} \neq 0$ et $l_{11} < 0$. Alors, par un changement de variable linéaire, l'équation (2.21) peut transformer à

$$y''(x) - 2xy'(x) = -2ny(x). \tag{2.37}$$

Supposons que $-(\alpha - 1) \notin \mathbb{N}$ donc (2.37) est admissible, elle admet la suite de polynômes romalisés unique appelée polynômes de Hermite

$$H_n(x) = n! \sum\nolimits_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k}{k!(n-2k)!} \frac{x^{n-2k}}{4^k}, \; n \geq 0. \tag{2.38}$$

De plus, de (2.24), (2.27) et (2.37) on a

$$\gamma_n = n/2, \; n \geq 0. \tag{2.39}$$

2.3 Modifications des mesures

Pour une fonction poids donnée $\mu(x)$ avec les polynômes orthogonaux $P_n(x)$, une question intéréssante est que peut-on dire sur les polynômes orthogonaux par rapport à $\phi(x)d\mu(x)$, où ϕ est une fonction (rationelle ou un polynôme) positive sur le support de $\mu(x)$, et les coefficients de la récurrence. La modification d'une mesure en multipiant par un polynôme ou fonction rationnelle (appelés transformations de Darboux) ou aussi d'ajouter un nombre finis de points discrets (masses de Dirac) constituent des méthodes très fertiles pour construire des nouvelles familles de polynômes orthogonaux. Il se peut considérer des modifications dans les coefficients de la récurrence elle-même pour obtenir des nouvelles familles et déterminer ainsi la mesure correspendante.

Nous allons se concentrer ici sur la multiplication d'une mesure par l'exponentielle d'un polynôme. Considérons les équations de Toda lattice suivantes

$$\frac{d}{dt}\alpha_n(t) = \beta_n(t) - \beta_{n+1}(t), \tag{2.40}$$

$$\frac{d}{dt}\beta_n(t) = \beta_n(t)\left[\alpha_{n-1}(t) - \alpha_n(t)\right], \tag{2.41}$$

Nous allons expiliquer comment les polynômes orthogonaux sont utilisé pour donner une solution du système (2.40-2.41).

Theorem 2.8 *[12, p.41] Soit μ une mesure de probabilité avec des moments finis et α_n et β_n les coefficients de la récurrence à trois termes de la suite des polynômes orthogonaux correspendante. Soit $P_n(x,t)$ des polynômes normalisés orthogonaux par rapport à $\exp(-xt)d\mu(x)$ sous la condition que tous les moments $\int_{\mathbb{R}} x^n \exp(-xt)d\mu(x)$ existent pour tout $n \geq 0$. Alors le pair des coefficients de la récurrence de $P_n(x,t)$, notés $\alpha_n(t)$ et $\beta_n(t)$, forme une solution pour Toda (2.40-2.41) avec les conditions initiales $\alpha_n(0) = \alpha_n$ et $\beta_n(0) = \beta_n$.*

Proof. Notons la récurrence de la suite de polynômes orthogonaux correspondante par

$$xP_n(x;t) = a_{n+1}(t)P_{n+1}(x;t) + b_n(t)P_n(x;t) + a_n(t)P_{n-1}(x;t). \tag{2.42}$$

La dérivation de cette récurrence par rapport à t nous donne

$$x\frac{d}{dt}P_n(x;t) = \left(\frac{d}{dt}a_{n+1}(t)\right)P_{n+1}(x;t) + \left(\frac{d}{dt}b_n(t)\right)P_n(x;t) + \left(\frac{d}{dt}a_n(t)\right)P_{n-1}(x;t)$$
$$+ a_{n+1}(t)\frac{d}{dt}P_{n+1}(x;t) + b_n(t)\frac{d}{dt}P_n(x;t) + a_n(t)\frac{d}{dt}P_{n-1}(x;t).$$

Multiplions cette dernière par $P_{n+1}(x)$ et intégrons par rapport à μ_t en utilisant l'orthonormalité de (P_n), on en déduit

$$\int x\left(\frac{d}{dt}P_n(x)\right)P_{n+1}(x)d\mu_t(x) = \frac{d}{dt}a_{n+1} + a_{n+1}(t)\int\left(\frac{d}{dt}P_{n+1}(x)\right)P_{n+1}(x).$$

Éliminons xP_{n+1} à l'aide de la récurrence (2.42), on trouve

$$\frac{d}{dt}a_{n+1} = a_{n+1}\left\{\int\left(\frac{d}{dt}P_n(x)\right)P_n(x)d\mu_t(x) - \int\left(\frac{d}{dt}P_{n+1}(x)\right)P_{n+1}(x)d\mu_t(x)\right\}. \tag{2.43}$$

Maintenant, sachant que l'orthonormalité nous donne

$$\int P_n^2(x)e^{tx}d\mu(x) = 1,$$

alors, par dérivation par rapport à t on obtient

$$2\int\left(\frac{d}{dt}P_n(x)\right)P_n(x)d\mu_t(x) + \int xP_n^2(x)d\mu_t(x) = 0.$$

Ce qui nous donne

$$2\int\left(\frac{d}{dt}P_n(x)\right)P_n(x)d\mu_t(x) = -\int xP_n(x)P_n(x)d\mu_t(x) = -b_n.$$

En remplaçant dans (2.43) on trouve le résultat souhait. ■

Theorem 2.9 *[24, p.21] Soit μ une mesure symétrique sur l'axe réel avec tous les moments existent et soit μ_t une mesure telle que $d\mu_t(x) = \exp(tx^2)d\mu(x)$, avec $t \in \mathbb{R}$ tel que tous les moments de μ_t existent. Alors, les coefficients de la récurrence à trois termes de la suite des polynômes orthogonaux par rapport à μ_t vérifient l'équation différentielle-différence suivante*

$$\frac{d}{dt}a_n^2 = a_n^2\left[a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2\right], \tag{2.44}$$

Proof. Sachant que μ et μ_t sont symétriques sur l'axe réel, alors la récurrence de la suite de polynômes orthogonaux est

$$xP_n(x;t) = a_{n+1}(t)P_{n+1}(x;t) + a_n(t)P_{n-1}(x;t). \tag{2.45}$$

La dérivation de la récurrence par rapport à t nous donne

$$\begin{aligned} x\frac{d}{dt}P_n(x;t) = &\left(\frac{d}{dt}a_{n+1}(t)\right)P_{n+1}(x;t) + a_{n+1}(t)\frac{d}{dt}P_{n+1}(x;t) \\ &+ \left(\frac{d}{dt}a_n(t)\right)P_{n-1}(x;t) + a_n(t)\frac{d}{dt}P_{n-1}(x;t). \end{aligned}$$

Multiplions cette dernière par $P_{n+1}(x)$ et intégrons par rapport à μ_t en utilisant l'orthonormalité de (P_n), on en déduit

$$\int x\left(\frac{d}{dt}P_n(x)\right)P_{n+1}(x)d\mu_t(x)=\frac{d}{dt}a_{n+1}+a_{n+1}(t)\int\left(\frac{d}{dt}P_{n+1}(x)\right)P_{n+1}(x).$$

Éliminons xP_{n+1} à l'aide de la récurrence (2.45), on trouve

$$\frac{d}{dt}a_{n+1}=a_{n+1}\left\{\int\left(\frac{d}{dt}P_n(x)\right)P_n(x)d\mu_t(x)-\int\left(\frac{d}{dt}P_{n+1}(x)\right)P_{n+1}(x)d\mu_t(x)\right\}. \tag{2.46}$$

Maintenant, sachant que l'orthonormalité nous donne

$$\int P_n^2(x)e^{tx^2}d\mu(x)=1,$$

alors, par dérivation par rapport à t on obtient

$$2\int\left(\frac{d}{dt}P_n(x)\right)P_n(x)d\mu_t(x)+\int x^2P_n^2(x)d\mu_t(x)=0.$$

Et d'après la écurrence (2.45) on a

$$\begin{aligned}x^2P_n^2(x)&=x\big(xP_n(x)\big)P_n(x)=x\big(a_{n+1}P_{n+1}(x)+a_nP_{n-1}(x)\big)P_n(x)\\&=a_{n+1}xP_n(x)P_{n+1}(x)+a_nxP_{n-1}(x)P_n(x).\end{aligned}$$

Ainis,

$$2\int\left(\frac{d}{dt}P_n(x)\right)P_n(x)d\mu_t(x)=-\int x^2P_n^2(x)d\mu_t(x)=-\left(a_{n+1}^2+a_n^2\right).$$

En remplaçant dans (2.46), il s'ensuit que

$$\frac{d}{dt}a_{n+1}=\frac{1}{2}a_{n+1}\left(a_{n+2}^2-a_n^2\right) \tag{2.47}$$

qui est le résultat désiré en remarquant que $\frac{d}{dt}a_n^2=2a_n\frac{d}{dt}a_n$. ■

2.4 Les polynômes semi-classiques

Généralement, il y a deux façons équivalentes pour introduire les polynomes orthogonaux semi-classiques. Soit en terme de la quasi-orthogonalité soit à l'aide de l'équation de Pearson. Pour cela, on a besoin de la notion de la quasi-orthogonalité.

Definition 2.6 *La suite $\{\phi_n\}_{n\geq0}$ est dite quasi-orthogonale d'ordre $(p-1)$ par rapport à $\mathcal{L}$ si elle vérifie*

$$\begin{cases}\langle\mathcal{L},\phi_m\phi_n\rangle=0,\ 0\leq m\leq n-p,\ n\geq p\\ \exists r\geq p-1 \textit{ tel que } \langle\mathcal{L},\phi_{r-p+1}\phi_r\rangle\neq0.\end{cases} \tag{1.23}$$

On remarqu'une suite quasi-orthogonale d'ordre zéro est une suite orthogonale.

Definition 2.7 *Une $SPON$ $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ est dite semi-classique de classe s si la suite $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$, où i.e. $Q_n(x) = \dfrac{P'_{n+1}(x)}{n+1}$, $n \geq 0$, est quasi-orthogonale d'ordre s.*

Soit $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ une suite de polynômes normalisés orthogonaux par rapport à $\mathcal{L}$ régulière, on a le théorème de caractérisation suivant

Theorem 2.10 ***[18]*** *Les énoncés suivants sont équivalents*

a) La suite $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{\mathcal{L}}$.

b) Les fonctionnelles moments $\tilde{\mathcal{L}}$ et $\mathcal{L}$ vé rifient les propriétés suivantes

$i)$ Il existe un polynôme ψ unique de degré $p \geq 1$ tel que

$$\left\langle \tilde{\mathcal{L}}, R' \right\rangle = \langle \mathcal{L}, \psi R \rangle, \quad R \in \mathcal{P} \tag{2.48}$$

$ii)$ Il existe un polynôme φ unique de degré $q \geq 1$ tel que

$$\left\langle \tilde{\mathcal{L}}, xR' \right\rangle = \langle \mathcal{L}, \varphi R \rangle, \quad R \in \mathcal{P} \tag{2.49}$$

$iii)$ Définissant l'entier $s \geq 0$ par $s+1 = \max(p, q-1)$, il existe un entier $0 \leq r \leq s+2$ et un polynôme ϕ unique de degré $(s+2-r)$ tel que

$$\tilde{\mathcal{L}} = \phi \mathcal{L} \tag{2.50}$$

c) Il existe 2 entiers $s \geq 0$ et $0 \leq r \leq s+2$ tels que

$i)$ La suite $\{P_n(x)\}_{n\geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre $(s+2-r)$ par rapport à $\tilde{\mathcal{L}}$.

$ii)$ La suite $\{Q_n(x)\}_{n\geq 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{\mathcal{L}}$.

e) Ils existent 2 entiers $s \geq 0$ et $0 \leq t \leq s+2$ et un polynôme ϕ de degré t tels que

$$\phi(x) Q_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n+t} \theta_{n,\nu} P_\nu(x), \quad n \geq s+1. \tag{2.51}$$

$$\exists \sigma \geq s \text{ tel que } \theta_{\sigma,\sigma-s} \neq 0. \tag{2.52}$$

D'après ce qui précède, on peut donner la caractérisation suivante.

Theorem 2.11 ***[18]*** *Toutes les fonctionnelles moments $\mathcal{L}$ régulières pour lesquelles l'un quelconque des énoncés précédents est vérifié, sont donn ées par l'équation suivante*

$$(\phi(x)\mathcal{L})' = \psi \mathcal{L}. \tag{2.53}$$

On peut ainsi énnoncer une définition equivalente à partir de l'équation fonctionnelle de Pearson suivante

Definition 2.8 *Toute fonctionnelle moment $\mathcal{L}$ solution de l'équation de Pearson (2.53) est dite semi-classique.*

2.5 Les équations de Painlevé

Un des problèmes importants de l'analyse au 19ème siècle était de trouver de bonnes fonctions transcendantales définies par des équations différentielles algébriques non linéaires.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{I} \qquad & y" = x^2 + x, \\
\mathrm{P}_{\mathrm{II}} \qquad & y" = x^3 + xy + \alpha, \\
\mathrm{P}_{\mathrm{III}} \qquad & y'' = \frac{(y'^2}{y} - \frac{y'}{x} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{x} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}, \\
\mathrm{P}_{\mathrm{IV}} \qquad & y'' = \frac{(y'^2}{2y} + \frac{3}{2} y^3 + 4xy^2 + 2(x^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \\
\mathrm{P}_{\mathrm{V}} \qquad & y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)(y'^2 - \frac{y'}{x} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \frac{\gamma y}{x} \\
& \qquad + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}, \\
\mathrm{P}_{\mathrm{VI}} \qquad & y'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)(y'^2 - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right) y' \\
& \qquad + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right),
\end{aligned} \tag{2.54}$$

où α, β et γ sont des constants

2.6 Les équations de Painlevé Discrètes

Les équations discrètes de Painlevé sont des équations différentielles non-linéaires du second ordre dont la limite est une équation de Painlevé continue.

$$
\begin{aligned}
&\text{d-P}_{\text{I}} && x_{n+1}+x_n+x_{n-1}=\frac{z_n+a(-1)^n}{x_n}+b,\\
&\text{d-P}_{\text{II}} && x_{n+1}+x_{n-1}=\frac{x_n(\alpha n+\beta)+\gamma}{1-x_n^2},\\
&\text{d-P}_{\text{IV}} && (x_{n+1}+x_n)(x_n+x_{n-1})=\frac{(x_n^2-a^2)(x_n^2-b^2)}{(x_n+z_n)^2-c^2},\\
&\text{d-P}_{\text{V}} && \frac{(x_{n+1}+x_n-z_{n+1}-z_n)(x_n+x_{n-1}-z_n-z_{n-1})}{(x_{n+1}+x_n)(x_n+x_{n-1})}\\
& && \quad =\frac{[(x_n-z_n)^2-a^2][(x_n-z_n)^2-b^2]}{(x_n-c^2)(x_n-d^2)},
\end{aligned}
$$

où $z_n=\alpha n+\beta$ et a,b,c,d sont des canstantes.

$$
\begin{aligned}
&\text{q-P}_{\text{III}} && x_{n+1}x_{n-1}=\frac{(x_n-aq_n)(x_n-bq_n)}{(1-cx_n)(1-x_n/c)},\\
&\text{q-P}_{\text{V}} && (x_{n+1}x_n-1)(x_nx_{n-1}-1)=\frac{(x_n-a)(x_n-1/a)(x_n-b)(x_n-1/b)}{(1-cx_nq_n)(1-x_nq_n/c)},\\
&\text{q-P}_{\text{VI}} && \frac{(x_nx_{n+1}-q_nq_{n+1})(x_nx_{n-1}-q_nq_{n-1})}{(x_nx_{n+1}-1)(x_nx_{n-1}-1)}\\
& && \quad =\frac{(x_n-aq_n)(x_n-q_n/a)(x_n-bq_n)(x_n-q_n/b)}{(x_n-c)(x_n-1/c)(x_n-d)(x_n-1/d)},
\end{aligned}
$$

où $q_n=q_0q^n$ et a,b,c,d sont des canstantes.

$$\alpha^{\text{-d-P}}{}_{\text{IV}}(x_n+y_n)(x_{n+1}+y_n)=\frac{(y_n-a)(y_n-b)(y_n-c)(y_n-d)}{(y_n+\gamma-z_n)(y_n-\gamma-z_n)}$$

Notons pour finaliser qu'on peut lier les équation de Painlevé et Painleé discrète les une entre les autres à l'aide des transformations de Bäcklund [5]. On outre, les équations de Painlevé discrètes apparaissent notamment dans la théorie des polynômes orthogonaux et elle sont plus riche, contient plus de propriétés ainsi que leurs forme canonique n'est pas unique ce qui est n'est pas le cas dans les équations de Painlevé continues.

Chapitre 3

L'équations de Painlevé VI

Les équations de Painlevé sont satisfaites par les coefficients des récurrences à trois termes des polynômes orthogonaux semi-classiques. Dans ce chapitre nous présentons des exemples de constructions des polynômes semi-classiques à partir des polynômes classiques dont les coefficients de leurs récurrences satisfaisant notamment l'équation de Painlevé VI. Tous les résultat de ce chapitre sont dans la référence [6].

3.1 Polynômes de Jacobi généralisés

Dans cette partie on va utiliser l'opérateur d'échelle de descente et de montée pour trouver et démontrer le lien entre l'équation de Painlevé VI et la suite des polynômes de Jacobi généralisés notés par $J_n(x)$ orthogonaux par rapport à la fonctions poids

$$w(x) := w(x,t) = x^{\alpha}(1-x)^{\beta}(x-t)^{\gamma}, \quad \alpha,\beta > 0 \text{ et } \gamma \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

dont le support est $[0,1]$. Dans ce cas, d'après l'orthogonalité, on a doit avoir évidement que

$$\int_0^1 J_m(x) J_n(x) w(x)\, dx = \delta_{m,n} \quad , m,n = 0,1,2..., \tag{3.2}$$

Notons la réccurence à trois termes correspondante par

$$xJ_n(x) = J_{n+1}(x) + \alpha_n J_n(x) + \beta_n J_{n-1}(x) \tag{3.3}$$

avec $J_0(x) = 1$ et $J_{-1}(x) = 0$.
L'opérateur d'échelle correspondant au $J_n(x)$ est définie par

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dx} + B_n(x)\right) J_n(x) & = \beta_n A_n(x) J_{n-1}(x), \\ \left(\frac{d}{dx} - B_n(x) - v'(x)\right) J_{n-1}(x) & = -A_n(x) J_n(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

où

$$v(x) = -\ln w(x), \tag{3.5}$$

ainsi

$$v'(z) = -\frac{w'(x)}{w(x)}, \tag{3.6}$$

et A_n, B_n sont des fonctions de z donées par

$$\begin{cases} A_n(x) & = \frac{v'(x)-v'(y)}{x-y}\left[J_n(y)\right]^2 w(y)\, dy, \qquad (1.1) \\ B_n(x) & = \frac{v'(x)-v'(y)}{x-y} J_{n-1}(y) J_n(y) w(y)\, dy, \qquad (1.1) \end{cases} \tag{3.7}$$

où

$$B_{n+1}(x) + B_n(x) = (z-\alpha_n) A_n(x) - v'(x), \tag{3.8}$$

$$1 + (z-\alpha_n)\left[B_{n+1}(x) - B_n(x)\right] = \beta_{n+1} A_{n+1}(x) - \beta_n A_{n-1}. \tag{3.9}$$

L'idée principale pour atteindre nos objectif est d'introduire quelques constantes auxiliaires pour la fonction de poids.

Proposition 3.1 *Les coefficients A_n et B_n peuvent s'ecrir sous la forme*

$$A_n(x) = \frac{a_n}{x} - \frac{b_n}{x-1} + \frac{b_n - a_n}{x-t}, \tag{3.10}$$

$$B_n(x) = \frac{a_n^*}{x} - \frac{b_n^*}{x-1} + \frac{b_n^* - a_n^* - n}{x-t}. \tag{3.11}$$

où

$$\begin{aligned}
a_n &= \alpha \int_0^1 [J_n(y)]^2 w(y) \frac{dy}{y}, \\
b_n &= \beta \int_0^1 [J_n(y)]^2 w(y) \frac{dy}{1-y}, \\
a_n^* &= \alpha \int_0^1 \int_0^1 J_{n-1}(y) J_n(y) w(y) \frac{dy}{y}, \\
b_n^* &= \beta \int_0^1 J_{n-1}(y) J_n(y) w(y) \frac{dy}{1-y}.
\end{aligned}$$

Proof. On a d'une part

$$\begin{aligned}
v(x) &= -\ln\left(x^\alpha (1-x)^\beta (x-t)^\gamma\right) \\
&= -\alpha \ln(x) - \beta \ln(1-x) - \gamma \ln(x-t),
\end{aligned}$$

ce qui implique

$$v'(x) = -\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{1-x} - \frac{\gamma}{x-t}. \tag{3.12}$$

Soit en remplaçant dans l'expression de $A_n(x)$

$$
\begin{aligned}
A_n(x) &= \int_0^1 \left[-\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{1-x}-\frac{\gamma}{x-t}+\frac{\alpha}{y}+\frac{\beta}{1-y}-\frac{\gamma}{y-t}\right]\frac{1}{x-y} \\
&\quad \times [J_n(x)]^2 x^\alpha (1-x)^\beta (x-t)^\gamma\, dy, \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\alpha(x-y)}{xy}+\frac{\beta(x-y)}{(1-x)(1-y)}+\frac{\gamma(x-y)}{(x-t)(y-t)}\right]\frac{1}{x-y} \\
&\quad \times [J_n(x)]^2 x^\alpha (1-x)^\beta (x-t)^\gamma\, dy, \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\alpha}{xy}+\frac{\beta}{(1-x)(1-y)}+\frac{\gamma}{(x-t)(y-t)}\right] \\
&\quad \times [J_n(y)]^2 y^\alpha (1-y)^\beta (y-t)^\gamma\, dy, \\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 \alpha y^{\alpha-1}[J_n(y)]^2 (1-y)^\beta (y-t)^\gamma\, dy \\
&\quad +\frac{1}{1-x}\int_0^1 \beta(1-y)^{\beta-1}[J_n(y)]^2 y^\alpha (y-t)^\gamma\, dy \\
&\quad +\frac{1}{x-t}\int_0^1 \gamma(y-t)^{\gamma-1}[J_n(y)]^2 y^\alpha (1-y)^\beta\, dy \\
&= \frac{1}{x}\int_0^1 \alpha[J_n(y)]^2 w(y)\frac{dy}{y}+\frac{1}{1-x}\int_0^1 \beta[J_n(y)]^2 w(y)\frac{dy}{1-y} \\
&\quad +\frac{1}{x-t}\int_0^1 \gamma[J_n(y)]^2 y^\alpha (1-y)^\beta (y-t)^\gamma \frac{dy}{y-t},
\end{aligned} \tag{3.13}
$$

Une integration par parties nous donne

$$\int_0^1 [J_n(y)]^2 w(y)\, v'(y)\, dy = -\int_0^1 [J_n(y)]^2 w'(y)\, dy,$$

et comme

$$v'(y)\, w(y) = -dw(y)$$

alors,

$$\int_0^1 [J_n(y)]^2 w(y)\, v'(y)\, dy = \int_0^1 [J_n(y)]^{2'} w(y)\, dy = 2\int_0^1 J_n'(y)\, J_n(y)\, w(y)\, dy.$$

Il s'ensuit d'après l'orthogonalité que

$$\int_0^1 [J_n(y)]^2 w(y)\, v'(y)\, dy = 0. \tag{3.14}$$

D'autre part, l'équation (3.12) nous donne

$$\int_0^1 [J_n(y)]^2 w(y)\, v'(y)\, dy = \int_0^1 [J_n(y)]^2 w(y)\left(-\frac{\alpha}{y}+\frac{\beta}{1-y}-\frac{\gamma}{y-t}\right) dy,$$

soit encore en utilisant (3.14)

$$\gamma\int_0^1 \left[J_n\left(y\right)\right]^2 w\left(y\right)\frac{dy}{y-t}=\beta\int_0^1 \left[J_n\left(y\right)\right]^2 w\left(y\right)\frac{dy}{1-y}-\alpha\int_0^1 \left[J_n\left(y\right)\right]^2 w\left(y\right)\frac{dy}{y}. \tag{3.15}$$

En combinant les derniers résultats nous donne le résultat souhait. Pour montrer (3.11) on peut utiliser la même technique de démontration plus haut. ■

Maintenant, les coefficients de réccurence α_n et β_n vérifis se qui suit

Proposition 3.2 *On a les formules*

$$\left(2n+2+\alpha+\beta+\gamma\right)\alpha_n = 2\left(t-1\right)b_n^*-2ta_n^*+\left(1-t\right)b_n+\left(\alpha+\beta+1\right)t-\beta,$$

et

$$\begin{aligned}
&\left(2n-1+\alpha+\beta+\gamma\right)\left(2n+1+\alpha+\beta+\gamma\right)\beta_n\\
=\;&\left[ta_n^*-\left(t-1\right)b_n^*\right]^2-\left(t-1\right)\left(2nt+\gamma t+\beta\right)b_n^*\\
&+t\left[\left(t-1\right)\left(2n+\gamma\right)-\alpha\right]a_n^*+n\left(n+\gamma\right)\left(t^2-t\right).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Proof. D'abord, en combinant (3.8) avec les derniers résultats, on en déduit d'une part

$$\left(t-1\right)\left(b_{n+1}^*-b_n^*\right)-t\left(a_{n+1}^*-a_n^*\right)-t+\alpha_n=0, \tag{3.17}$$

$$a_{n+1}^*+a_n^*=\alpha-\alpha_n a_n, \tag{3.18}$$

$$b_{n+1}^*-b_n^*=\left(1-\alpha_n\right)b_n-\beta, \tag{3.19}$$

$$ta_n-\left(t-1\right)b_n=2n+1+\alpha+\beta+\gamma \tag{3.20}$$

En utilisant ensuite (3.18) et (3.19) dans (3.17), on en déduit

$$\left[1+ta_n-\left(t-1\right)b_n\right]\alpha_n=t\left(\alpha-2a_n^*\right)-\left(t-1\right)\left(b_n-\beta-2b_n^*\right)+t \tag{3.21}$$

remplaçant maintenant cette dernière dans (3.20) on obtient

$$\begin{aligned}
\left[2n+2+\alpha+\beta+\gamma\right]\alpha_n &= t\left(\alpha-2a_n^*\right)-\left(t-1\right)\left(b_n-\beta-2b_n^*\right)+t \qquad (3.22)\\
&= t\alpha-2ta_n^*+\left(1-t\right)b_n+\beta t-\beta+t-\left(1-t\right)2b_n^*\\
&= t\left(\alpha+\beta+1\right)-\beta-2ta_n^*+\left(1-t\right)b_n-\left(1-t\right)2b_n^*.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$B_n^2(x)+v'(x)B_n(x)+\sum_{j=0}^{n-1}A_j(x)=\beta_n A_n(x)A_{n-1}(x) \tag{3.23}$$

où $\sum_{j=0}^{n-1} A_j(x)$ est définie à partir de (3.8). La relation (3.23) nous donne

$$\begin{aligned}
(a_n^*)^2 - \alpha a_n^* &= \beta_n a_n a_{n-1}, &(3.24)\\
(b_n^*)^2 + \beta b_n^* &= \beta_n b_n b_{n-1}, &(3.25)\\
\beta_n (b_{n-1} a_n + b_n a_{n-1}) &= (2n+\beta+\gamma) b_n^* - (2n+\alpha+\gamma) a_n^* + 2b_n^* a_n^* - n(n+\gamma),
\end{aligned}$$

multiplions (3.24) par t^2 et utilisons (3.20) il résulte

$$\begin{aligned}
t^2 (a_n^* - \alpha) a_n^* &= \beta_n (2n+1+\alpha+\beta+\gamma+(t-1) b_n) \\
&\quad \times (2n-1+\alpha+\beta+\gamma+(t-1) b_{n-1}).
\end{aligned}$$

Si on définit la constante suivante

$$k_n = 2n+1+\alpha+\beta+\gamma,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
t^2 (a_n^* - \alpha) a_n^* &= \beta_n (k_n + (t-1) b_n)(k_{n-1} + (t-1) b_{n-1}) \\
&= \beta_n k_n k_{n-1} + k_n \beta_n (t-1) b_{n-1} + k_{n-1} \beta_n (t-1) b_n + \beta_n (t-1)^2 b_n b_{n-1}
\end{aligned}$$

d'où

$$t^2 (a_n^* - \alpha) a_n^* = \beta_n k_n k_{n-1} + \beta_n (t-1) [(t-1) b_n b_{n-1} + k_{n-1} b_n + k_n b_{n-1}]. \tag{3.26}$$

De la même manière multiplions (3.26) par t, on obtient

$$\begin{aligned}
&t [(2n+\beta+\gamma) b_n^* - (2n+\alpha+\gamma) a_n^* + 2b_n^* a_n^* - n(n+\gamma)] \\
=\ &\beta_n (b_{n-1} t a_n + b_n t a_{n-1}),
\end{aligned}$$

Pour simplifier nous utilisons de (3.20) il résulte

$$\begin{aligned}
&t [(2n+\beta+\gamma) b_n^* - (2n+\alpha+\gamma) a_n^* + 2b_n^* a_n^* - n(n+\gamma)] \\
=\ &\beta_n [2(t-1) b_n b_{n-1} + k_{n-1} b_n + k_n b_{n-1}],
\end{aligned} \tag{3.27}$$

et d'après (3.25), on trouve

$$\begin{aligned}
&t [(2n+\beta+\gamma) b_n^* - (2n+\alpha+\gamma) a_n^* + 2b_n^* a_n^* - n(n+\gamma)] - (t-1)\left((b_n^*)^2 + \beta b_n^*\right) \\
&= \beta_n [(t-1) b_n b_{n-1} + k_{n-1} b_n + k_n b_{n-1}].
\end{aligned} \tag{3.28}$$

Utilisons (3.28) dans (3.26) termine la preuve. ■

Theorem 3.1 *Le coefficient de récurrence β_n satisfait cette équation différentielle du premier ordre*

$$t\frac{d}{dt}\beta_n = (2 + b_{n-1} - b_n)\,\beta_n. \tag{3.29}$$

Définissons la fonction $w_n(t)$ par

$$w_n(t) = \frac{(t-1)\,b_n(t)}{2n+\alpha+\beta+\gamma+1} + 1. \tag{3.30}$$

Dans ce cas, la fonction $w_n(x)$ vérifit l'équation de Painlevé VI (2.54).

Proof. Tout d'abord, nous essayons d'exprimer a_n^* en termes de b_n^*, $b_n^{*\prime}$, b_n et b_n'. Pour se faire, nous substitutions (3.16) dans

$$t\frac{d}{dt}\alpha_n = \alpha_n + b_n^* - b_{n+1}^*,$$

nous obtenons une équation impliquant b_n^*, $b_n^{*\prime}$, $b_n^{*\prime}$, b_n et b_{n+1}^*.
Ensuite on utilise (3.19) et l'expression

$$t\frac{d}{dt}a_n^* = (1-\alpha_n)\,b_n - \beta,$$

pour éliminer b_{n+1}^* et$a_n^{*\prime}$ afin d'arriver aux expressitions suivantes

$$\begin{aligned}
a_n^* &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2b_n}\left((t-1)\,b_n' - 2b_n^* - (\alpha+\beta+1)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2tb_n}\left[(2n+\alpha+\beta+\gamma+2)\,(2a_n^* - b_n + \beta)\right. \\
&\quad \left. + (b_n+1)\left[2\,(t-1)\,b_n^* - (t-1)\,b_n + (\alpha+\beta+1)\,t - \beta\right]\right]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Remplaçant ensuite cette dernière (3.31) dans le système suivant

$$b_n(t) = \frac{k_n\left[l\,(b_n^*, a_n^*, t) - t\,(1-t)\,b_n^{*\prime}(t)\right]}{2g\,(b_n^*, a_n^*, t)},$$

et

$$\frac{1}{b_n(t)} = \frac{l\,(b_n^*, a_n^*, t) + t\,(1-t)\,b_n^{*\prime}(t)}{2k_n\,(\beta + b_n^*)\,b_n^*},$$

où

$$\begin{aligned}
l\,(b_n^*, a_n^*, t) &= 2\,(1-t)^2\,(b_n^*)^2 + \left[(2n-\beta-\gamma)\,t + 2\beta + 2ta_n^*\right] b_n^* \\
&\quad - (2n+\alpha+\gamma)\,ta_n^* - n\,(n+\gamma)\,t.
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
g\,(b_n^*, a_n^*, t) &= \left[ta_n^* - (t-1)\,b_n^*\right]^2 - (t-1)\,(2nt+\gamma t+\beta)\,b_n^* \\
&\quad + t\left[(t-1)\,(2n+\gamma) - \alpha\right] a_n^* + n\,(n+y)\left(t^2 - t\right).
\end{aligned}$$

ce qui nous donne un pair d'équations linéaires de b_n^* et $b_n^{*\prime}$.
La résolution de ce système linéaire nous donne

$$b_n^* = F\left(b_{n,} b_n'\right), \text{ et } b_n^{*\prime} = G\left(b_{n,} b_n'\right)$$

où F et G sont des fonctions qu'ont peut calculée explicitement.
Et d'après le fait que $\frac{d}{dt}F\left(b_{n,} b_n'\right) = b_n^{*\prime} = G\left(b_{n,} R_n'\right)$, on peut montrer que

$$\begin{aligned}
&\left[(2n+\alpha+\beta+\gamma+2)\left(2n+\alpha+\beta+\gamma+1\right)+t\left(t-1\right)R_n'\left(t\right)\right.\\
&\left((2n+\alpha+\beta+\gamma+1\right)t-2\left(2n+\alpha+\beta+\gamma\right)-1)\\
&\left.\times R_n\left(t\right)-\left(t-1\right)R_n^2\left(t\right)\right]\Phi\left(b_n, b_n', b_n''\right)=0,
\end{aligned} \tag{3.32}$$

où Φ est une fonction explicitement déterminée.
Evidement l'équation (3.32) mène au deux équations différentielles, l'une est une équation de Riccati, dont la solution est donnée par

$$\begin{aligned}
b_n(t) &= (2n+\alpha+\beta+\gamma+1)(1+\lambda(2n+\alpha+\beta+\gamma+1)(1-t)2n+\alpha+\beta+\gamma) \\
&\quad 1+\lambda(2n+\alpha+\beta+\gamma+1)(1-t)2n+\alpha+\beta+\gamma+1
\end{aligned}$$

où λ est une constante d'intégration. Cependant, lorsque $t \to -\infty$, on voit facilement que

$$b_n\left(t\right) \to \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda \neq 0 \\ 2n+\alpha+\beta+\gamma+1 & \text{si } \lambda = 0 \end{cases}$$

ce qui implique le résultat $b_0(t) \sim \alpha+\beta+1$.
Enfin, en appliquant une transformation convenable à l'échelle et une translation approprié comme indiqué en (3.30), on obtient L'équation de Painlevé VI. ■

Chapitre 4

L'équation discrète de Painlevé d-P$_I$

Le but majeur est de chercher des solutions particulières des équations de Painlevé à l'aide des fonctions spéciales. À la naissance des polynômes semi-classiques, les gens se concentrent beuacoups plus à prendre une fonction poids classique en ajoutant des nouveaux termes afin de sortir du cadre classiques et en essayant d'identifier le caractère de la famille des polynômes orthogonaux correspendante.
Les équations discrètes de Painlevé d-P$_I$ sont satisfaites notamment par les coefficients des récurrences des polynômes orthogonaux semi-classiques. En effet, le premier exemple dans la litérature était en termes de la fonction poids de Freud. Plus tard, plusieurs exemples ont été considérer en se basant notamment sur l'équation de Pearson, en essayant d'augmenter le degré de ces deux polynômes, et ceci était soit pour les polynômes orthogonaux par rapport à une measure continue, discrète ou q-analogue. Dans ce chapitre nous allons préseter l'exemple célèbre des polynômes semi-classiques de type Freud.

4.1 Les fonctions poids de Freud

Les fonctions de poids de Freud sont des fonctions exponentielles sur l'axe réel $(-\infty, \infty)$, considérés pour la première fois par Freud en 1976 [9], qui sont de la forme suivante

$$w_\rho(x) = |x|^\rho \exp(-|x|^m), \qquad \rho > -1, m > 0. \tag{4.1}$$

La première chose à remarquer ici est que ces fonctions sont paires, donc les suites de polynômes orthogonaux correspendantes sont symétriques. Ainsi, notons par $P_n(x)$ les polynômes orthogonaux par rapport à (4.1) et par a_n le coefficient de la récurrence à trois termes correspondante, i.e.

$$xP_n(x) = a_{n+1}P_{n+1}(x) + a_nP_{n-1}(x). \tag{4.2}$$

Theorem 4.1 *Lorsque $m = 4$, le coefficient a_n de la récurrence (4.2) vérifie*

$$4a_n^2(a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2) = n + \rho\Delta_n, \tag{4.3}$$

avec $\Delta_{2k} = 1$ et $\Delta_{2k+1} = 0$.
Dans ce cas, avec le changement de variable $x_n = 2a_n^2$, donc $a_0 = 0$ et $x_n > 0$ pour $n > 0$, l'équation (4.3) s'identifier avec l'équation discrete de Painlevé d-P_1

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = \frac{z_n + \gamma(-1)^n}{x_n} + \delta, \qquad z_n = \alpha n + \beta, \tag{4.4}$$

avec $\alpha = 1$, $\beta = \rho/2$, $\gamma = -\rho/2$ et $\delta = 0$, puisque on peut écrire $\Delta_n = (1-(-1)^n)/2$.

Proof. Lorsque $m = 4$ notons la fonction poids (4.1) par $w_\rho(x) = |x|^\rho w_0(x)$ dont l'équation de Pearson satisfaite par $w_0(x) = \exp(-x^4)$ est

$$[w_0(x)]'^3 w_0(x),$$

L'idée de Freud été de calculer l'intégrale suivante de deux façons

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} (P_n(x)P_{n-1}(x)|x|^\rho)'\, w_0(x)\, dx, \tag{4.5}$$

qui peut s'écrire de la façon équivalente suivante

$$\int_{-\infty}^{\infty} (p_n(x)p_{n-1}(x)|x|^\rho)'\, w_0(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_n'(x)p_{n-1}(x)|x|^\rho w_0(x)\, dx \tag{4.6}$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p_{n-1}'^{\rho} w_0(x)\, dx \tag{4.7}$$

$$+ \rho\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(x)p_{n-1}(x)}{x}|x|^\rho w_0(x)\, dx. \tag{4.8}$$

Pour l'intégrale à droite dans (4.6), nous utilisons le fait que

$p_n'(x) \quad = \quad n\gamma_n x^{n-1} +$ termes d'$ordreinfrieurs$ termes d'$ordreinfrieurs$ termes d'$ordreinfrieurs$ termes d'$ordreinfrieurs$

$=$ n $\gamma_n \frac{}{\gamma_{n-1} p_{n-1}(x)+}$il s'ensuit que

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n'(x) p_{n-1}(x) |x|^\rho w_0(x)\, dx = n\frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}}.$$

Pour l'intégrale (4.7), remarquons que $p_{n-1}'(x)$ est un polynôme de degré $n-2$ donc l'intégrale est nulle d'après l'orthogonailité.
Maintenant, pour l'intégrale dans (4.8), sachant que la fonction poids est symétrique, i.e. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$, alors $p_n(x)/x$ est un polynôme de degré $n-1$ lorsque n est impair et $p_{n-1}(x)/x$ est un polynôme de degré $n-2$ lorsque n est pair. Par conséquent, lorsque n est pair l'integral (4.8) est nulle et lorsque n est impair on a

$\frac{p_n(x)}{x} = \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} p_{n-1}(x) +$ termes d'$ordreinfrieurs$ termes d'$ordreinfrieurs$ termes d'$ordreinfrieurs$ termes d'$ordreinfrieurs$

c'est-à-dire,

$$\rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_n(x) p_{n-1}(x)}{x} |x|^\rho w_0(x)\, dx = \rho \frac{\gamma_n}{\gamma_{n-1}} \Delta_n.$$

Ce dernier résultat avec l'expression $a_n = \gamma_{n-1}/\gamma_n$ nous donne une première quantité de I

$$I = \frac{n + \rho\Delta_n}{a_n}. \tag{4.9}$$

Une deuxième méthode pour évaluer l'intégrale I dans (4.5) consiste à utiliser une intégration par partie avec l'équation de Pearson pour $w_0(x)$. En effet, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(p_n(x) p_{n-1}(x) |x|^\rho\right)' w_0(x)\, dx \quad &= \quad -\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x) p_{n-1}(x) |x|^\rho w_0'(x)\, dx \\ &= \quad 4\int_{-\infty}^{\infty} x^3 p_n(x) p_{n-1}(x) |x|^\rho w_0(x)\, dx. \end{aligned} \tag{4.10}$$

On peut calculer la dernière intégrale en utilisant la récurrence à trois termes satisfaite par $P_n(x)$ successivement pour transfomer $x^3 P_n(x)$ à une combinaison linéaire en terme de $P_i(x)$. De nouveau, sachant que la suite est symétrique, i.e. $b_n = 0$, on a alors

$$\begin{aligned} x^2 p_n(x) \quad &= \quad a_{n+1} x p_{n+1}(x) + a_n x p_{n-1}(x) \\ &= \quad a_{n+1} a_{n+2} p_{n+2}(x) + (a_{n+1}^2 + a_n^2) p_n(x) + a_n a_{n-1} p_{n-2}(x), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} x^3 p_n(x) &= a_{n+1}a_{n+2}xp_{n+2}(x) + (a_{n+1}^2 + a_n^2)xp_n(x) + a_n a_{n-1} x p_{n-2}(x) \\ &= a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3}p_{n+3}(x) + a_{n+1}(a_{n+2}^2 + a_{n+1}^2 + a_n^2)p_{n+1}(x) \\ &\quad + a_n(a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2)p_{n-1}(x) + a_n a_{n-1} a_{n-2} p_{n-3}(x). \end{aligned}$$

Ce qui montre facilement que

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^3 p_n(x) p_{n-1}(x) |x|^\rho w_0(x)\, dx = a_n(a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2). \tag{4.11}$$

Ce résultat est vrai pour tout $n \geq 1$ si on définit $a_0 = 0$. En combinant (4.9) et (4.10)–(4.11), on en déduit (4.3). Il est facile de vérifier le reste du théorème. ■
Nous allons utiliser le théorème 2.9 pour étidier les fonctions poids de Freud généralisées.

4.2 Les fonctions poids de Freud généralisée

Dans cette partie nous allons considérer une généralisation des fonctions poids de Freud données par

$$w(x;\rho,\alpha) = |x|^\rho \exp\left(-x^4 + tx^2\right), \qquad \rho > -1, t \in \mathbb{R}. \tag{4.12}$$

On peut utiliser la même technique précédente pour montrer le résultat suivant

Theorem 4.2 *Le coefficient a_n de la récurrence de la suite de polynômes orthogonaux par rapport à la fonction poids (4.12) vérifis la récurrence non-linéaire suivante*

$$4a_n^2\left(a_{n+1}^2 + a_n^2 + a_{n-1}^2 - \frac{t}{2}\right) = n + \rho\Delta_n. \tag{4.13}$$

Dans ce cas, (4.13) est l'équation de Painlevé discrète d-P$_1$ avec $x_n = a_n^2$ et les paramètres $a = 0$, $b = t/2$, $\alpha = 1/4$ et $\beta = 0$.

4.3 Painlevé IV

Nous allons combiner l'équation discrète de Painlevé d-P$_1$ (4.13) avec $\rho = 0$ et les résultats de (2.9). D'abord, notons par $x_n = a_n^2$ et écrivons $x_n' = \frac{d}{dt}x_n$, dans ce cas

$$n = 4x_n\big(x_{n+1} + x_n + x_{n-1} - t/2\big), \tag{4.14}$$

$$x_n' = x_n\big(x_{n+1} - x_{n-1}\big). \tag{4.15}$$

Dérivons (4.15) on obtient

$$x_n'' = x_n'\big(x_{n+1} - x_{n-1}\big) + x_n\big(x_{n+1}' - x_{n-1}'\big).$$

En remplaçants x_{n+1}' et x_{n-1}' en utilisant (4.15) on en déduit

$$x_n'' = x_n'\big(x_{n+1} - x_{n-1}\big) + x_n\left[x_{n+1}\big(x_{n+2} - x_n\big) - x_{n-1}\big(x_n - x_{n-2}\big)\right].$$

Les termes $x_{n+1}x_{n+2}$ et $x_{n-1}x_{n-2}$ peut être remplacer en utilisant (4.14) :

$$\begin{aligned} 4x_{n+1}x_{n+2} &= n + 1 - 4x_{n+1}\big(x_{n+1} + x_n - t/2\big), \\ 4x_{n-1}x_{n-2} &= n - 1 - 4x_{n-1}\big(x_n + x_{n-1} - t/2\big). \end{aligned}$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} x_n'' = x_n'\big(x_{n+1} - x_{n-1}\big) - x_n^2\big(x_{n+1} + x_{n-1}\big) \\ + \frac{1}{2}x_n\left[n - 2\big(x_{n+1}^2 + x_{n-1}^2\big) + (t - 2x_n)\big(x_{n+1} + x_{n-1}\big)\right]. \end{aligned}$$

Maintenant on élimine $x_{n+1} + x_{n-1}$ et $x_{n+1} - x_{n-1}$ en utilisant (4.14)-(4.15) :

$$\begin{aligned} x_{n+1} + x_{n-1} &= \frac{n}{4x_n} - x_n + \frac{t}{2}, \\ x_{n+1} - x_{n-1} &= \frac{x_n'}{x_n} - x_n + \frac{t}{2}, \end{aligned}$$

par conséquent,

$$x_n'' = \frac{(x_n'^2}{2x_n} + \frac{3x_n^3}{2} - x_n^2 t + x_n\left(\frac{n}{4} + \frac{t^2}{8}\right) - \frac{n^2}{32x_n}.$$

Enfin, le changement de variable $2x_n(t) = y(-t/2)$, montre que y vérifié l'équation de Painlevé IV.

Chapitre 5

Painlevé IV, V et discrète d-P_{II}

Les équations discrètes de Painlevé d-P_{II} sont satisfaites notamment par les coefficients des récurrences des polynômes orthogonaux sur cercle. Elles sont vérifies également par les coefficients des polynômes orthogonaux par rapport à une mesure discrète. Dans ce chapitre nous allons présenter un exemple des polynômes semi-classiques discrets constituant une généralisation des polynômes classique de Charlier.

5.1 Les polynômes de Charlier généralisés

Les polynômes de Charlier $C_n(k;a)$ [2, Chap. VI] sont orthogonaux sur $\mathbb{N}$ par rapport à la distribution de Poisson, i.e.

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n(k;a)C_m(k;a)\frac{a^k}{k!} = a^{-n}e^n n!\delta_{n,m},\ a > 0.$$

Si on définit $w(x) = a^x/\Gamma(x+1)$, alors $w_k = w(k)$. Dans ce cas, la fonction poids de Charlier $w_k = a^k/k!$ vérifit l'équation de Pearson suivante

$$\nabla w(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right) w(x).$$

En particulier, la récurrence à trois termes correspondante est donnée explicitement par

$$-xC_n(k;a) = aC_{n+1}(k;a) - (n+a)C_n(k;a) + nC_{n-1}(k;a).$$

Dans la suite nous allons considérer une généralisation de la fonction poids classique de Charlier en considérant la fonction poids suivante sur $\mathbb{N}$

$$w_k = w(k) = \frac{a^k}{(\beta)_k\, k!}, \quad a, \beta > 0. \tag{5.1}$$

On peut écrire la dernière fonction sous la forme suivante

$$w(x) = \frac{\Gamma(\beta)a^x}{\Gamma(\beta+x)\Gamma(x+1)}$$

qu'on peut voir maintenant comme une fonction de $x \in \mathbb{C}$ qui s'annulle lorsque x est un pôle de $\Gamma(x+1)$ ou pôle de $\Gamma(\beta+x)$. Dans ce cas, cette dernière fonction poids vérifit l'équation de Pearson suivante

$$\nabla w(x) := w(x) - w(x-1) = \frac{a - x(\beta-1) - x^2}{a} w(x). \tag{5.2}$$

Notons par $P_n(x;a,\beta)$ les polynômes orthogonaux normalisés correspondants, i.e.

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_n(x;a,\beta)P_m(x;a,\beta)\frac{a^k}{(\beta)_k\, k!} = 0, \quad n \neq m. \tag{5.3}$$

Nous allons chercher les coefficients de la récurrence à trois termes satisfaite par cette suite de polynômes orthogonaux normalisées qu'on note parfois par $P_n(x) := P_n(x;a,\beta)$

$$xP_n(x;a,\beta) = P_{n+1}(x;a,\beta) + b_nP_n(x;a,\beta) + a_n^2P_{n-1}(x;a,\beta),$$

avec $P_0 = 1$ et $P_{-1} = 0$. D'abord, on a les résultats suivants

Lemma 5.1 *Les polynômes orthogonaux normalisés donnés par (5.3) vérifies*

$$\Delta P_n(x) := P_n(x+1) - P_n(x) = nP_{n-1}(x) + B_n P_{n-2}(x),$$

pour certains nombres réels B_n.

Proof. Sachant que $P_n(x+1) - P_n(x)$ est un polynôme de degré $n-1$, on peut écrire

$$P_n(x+1) - P_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} A_{n,k} P_k(x), \quad \text{avec} \quad A_{n,k} = \frac{\langle \Delta P_n, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\langle P_n, P_k \rangle A_{n,k} &= \sum_{j=0}^{\infty} (\Delta P_n(j))\, P_k(j) w_j = -\sum_{j=0}^{\infty} P_n(j)\,(\nabla P_k(j) w_j) \\ &= -\sum_{j=0}^{\infty} P_n(j) w_j \nabla P_k(j) - \sum_{j=0}^{\infty} P_n(j) P_k(j-1) \nabla w_j.\end{aligned}$$

Comme $\nabla P_k(j)$ est un polynômes de degré $k-1 < n$, alors d'après l'orthogonalité la première somme est nulle. Pour la deuxième somme, en utilisant l'équation de Pearson (5.2), on en déduit

$$\langle P_k, P_k \rangle A_{n,k} = -\frac{1}{a} \sum_{j=0}^{\infty} P_n(j) P_k(j-1)(a - j(\beta - 1) - j^2) w_j.$$

D'après l'orthogonalité cette somme est nulle pour $k-2 < n$. Ainsi, ils existent seulement deux termes $A_{n,n-1}$ et $A_{n,n-2}$. Par comparaison, le terme du plus haut degré montre que $A_{n,n-1} = n$. D'où le résultat en notant $A_{n,n-2} = B_n$. ∎

Maintenant, si on définit $1 = \langle P_n, P_n \rangle \gamma_n^2$ en utilisant ensuite l'orthogonalité de P_1 et P_2 avec P_0 par rapport à w_j, on en déduit immédiatement

Lemma 5.2 *Avec les notations du lemme précédent, on a*

$$\begin{aligned} a_n^2 &= \frac{\gamma_{n-1}^2}{\gamma_n^2}, \\ 1 &= \frac{a_1^2}{a}(b_1 + b_0 + \beta - 1), && (5.4) \\ B_2 &= \frac{a_1^2 a_2^2}{a}. && (5.5) \end{aligned}$$

Maintenant nous allons extraire les récurrences satisfaites par les coefficients de la récurrence

Theorem 5.1 *Les coefficients de la récurrence des polynômes orthogonaux donnés par (5.3) satisfaisant*

$$b_n + b_{n-1} - n + \beta = \frac{an}{a_n^2}, \tag{5.6}$$

$$(a_{n+1}^2 - a)(a_n^2 - a) = a(b_n - n)(b_n - n + \beta - 1), \tag{5.7}$$

avec les conditions initals

$$a_0^2 = 0, \qquad b_0 = \frac{\sqrt{a} I_\beta(2\sqrt{a})}{I_{\beta-1}(2\sqrt{a})},$$

où I_ν est la fonction de Bessel modifiée

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z/2)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Proof. Soit en appliquant l'opérateur Δ sur (**??**)

$$(k+1)\Delta\left(P_n(k)\right) + P_n(k) = \Delta P_{n+1}(k) + b_n \Delta P_n(k) + a_n^2 \Delta P_{n-1}(k).$$

En utilisant maintenant la relation de structure (**??**), on en déduit

$$\begin{aligned}
&(k+1)\big(nP_{n-1}(k) + B_n P_{n-2}(k)\big) + P_n(k) \\
&= (n+1)P_n(k) + B_{n+1}P_{n-1}(k) + b_n\big(nP_{n-1}(k) + B_n P_{n-2}(k)\big) \\
&+ a_n^2\big((n-1)P_{n-2}(k) + B_{n-1}P_{n-3}(k)\big).
\end{aligned}$$

Finalement, on utilise la relation de trois termes pour éliminer $kP_{n-1}(k)$ et $kP_{n-2}(k)$ du membre gauche. Ceci nous donne une identité linéaire entre $P_n(k)$, $P_{n-1}(k)$, $P_{n-2}(k)$ et $P_{n-3}(k)$ et comme ces polynômes sont linéairement indépendent, alors les coefficients doivent être tous nuls. On obtient ainsi les 4 équations suivantes

$$n+1 = n+1, \tag{5.8}$$

$$n + nb_{n-1} + B_n = B_{n+1} + nb_n, \tag{5.9}$$

$$B_n + na_{n-1}^2 + B_n b_{n-2} = B_n b_n + (n-1)a_n^2, \tag{5.10}$$

$$B_n a_{n-2}^2 = a_n^2 B_{n-1}. \tag{5.11}$$

Il clair que (5.8) est toujours satisfaite. L'équation (5.11) devient

$$\frac{B_n}{a_n^2 a_{n-1}^2} = \frac{B_{n-1}}{a_{n-1}^2 a_{n-2}^2} \qquad \Longrightarrow \qquad B_n = a_n^2 a_{n-1}^2 \frac{B_2}{a_2^2 a_1^2} = \frac{a_n^2 a_{n-1}^2}{a}, \quad n \geq 2.$$

En utilisant cette dernière dans (5.9) on obtient

$$na\left(b_n - b_{n-1} - 1\right) = a_n^2(a_{n-1}^2 - a_{n+1}^2), \tag{5.12}$$

et (5.10) devient

$$\frac{1}{a}(b_n - b_{n-2} - 1) = \frac{n}{a_n^2} - \frac{n-1}{a_{n-1}^2}.$$

Prenons la somme dans la dernière égalité à partir de 2, on en déduit

$$\frac{1}{a}(b_n + b_{n-1} - n + 1) - \frac{1}{a}(b_1 + b_0) = \frac{n}{a_n^2} - \frac{1}{a_1^2}.$$

Utilisant maintenant (5.4) pour trouver (5.6).
Si on utilise (5.6) dans (5.12) en posant $b_n = n + d_n$, on obtient

$$(d_k + d_{k-1} + k + \beta - 1)(d_{k-1} - d_k) = a_{k+1}^2 - a_{k-1}^2.$$

Prenons la somme de $k = 1$ à n nous donne

$$-d_n^2 + d_0^2 + \sum_{k=0}^{n-1} d_k - nd_n - (\beta - 1)(d_n - d_0) = a_{n+1}^2 + a_n^2 - a_1^2, \tag{5.13}$$

où on a utilisé la condition intiale $a_0^2 = 0$. D'autre part, (5.12) est équivalente à

$$ak(d_{k-1} - d_k) = a_k^2 a_{k+1}^2 - a_{k-1}^2 a_k^2.$$

Ainsi, la somme de $k = 1$ à n nons donne

$$a\sum_{k=0}^{n-1} d_k - and_n = a_n^2 a_{n+1}^2. \tag{5.14}$$

Remplaçons (5.14) dans (5.13) on trouve alors

$$-d_n^2 + d_0^2 + \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a} - (\beta - 1)(d_n - d_0) = a_{n+1}^2 + a_n^2 - a_1^2. \tag{5.15}$$

Les valeurs initiales $d_0 = b_0$ et a_1^2 sont données à l'aide

$$b_0 = \frac{m_1}{m_0}, \quad a_1^2 = \frac{m_2}{m_0} - \left(\frac{m_1}{m_0}\right)^2,$$

où m_j sont les moments

$$m_j = \sum_{k=0}^{\infty} k^j w_k.$$

Un calcul simple donne

$$m_0 = \frac{\Gamma(\beta)}{(\sqrt{a})^{\beta-1}} I_{\beta-1}(2\sqrt{a}), \quad m_1 = \frac{\Gamma(\beta)}{(\sqrt{a})^{\beta-2}} I_{\beta}(2\sqrt{a}),$$

où I_β et $I_{\beta-1}$ sont les fonctions de Bessel modifiées. Ceci nous donne

$$b_0 = \sqrt{a}\frac{I_\beta(2\sqrt{a})}{I_{\beta-1}(2\sqrt{a})}. \tag{5.16}$$

De l'équation de Pearson (5.2) on a

$$m_2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 w_k = \sum_{k=0}^{\infty}[a - k(\beta-1)]w_k - a\sum_{k=0}^{\infty}[w_k - w_{k-1}],$$

ce qui montre que $m_2 = am_0 - (\beta-1)m_1$. Remarquons que ceci entraine

$$d_0^2 + (\beta-1)d_0 + a_1^2 = a$$

qui simplifie la relation de récurrence (5.15) à

$$a_{n+1}^2 + a_n^2 + d_n^2 - \frac{a_n^2 a_{n+1}^2}{a} + (\beta-1)d_n - a = 0,$$

ce qui est équivalent à (5.7). ■

Nous allons expliquer le lien avec les équations de Painlevé discrètes. Premièrement, lorsque $\beta = 1$ on a

Theorem 5.2 *Dans le cas où $\beta = 1$, le coefficient a_n de la relation de récurrence vérifit l'équation de Painlevé discrète d-P$_{II}$, i.e.*

$$c_{n+1} + c_{n-1} = \frac{nc_n}{\sqrt{a}(1 - c_n^2)}. \tag{5.17}$$

Proof. Dans le cas où $\beta = 1$, le système (5.6-5.7) se réduit à

$$b_n + b_{n-1} - n = \frac{an}{a_n^2}, \tag{5.18}$$
$$(a_{n+1}^2 - a)(a_n^2 - a) = a(b_n - n)^2. \tag{5.19}$$

Ceci montre que $a_n^2 - a$ a un signe constant pour tout $n \geq 1$. Ainis, la condition initiale $a_0 = 0$ montre que $a_n^2 - a < 0$. On peut introduire alors une nouvelle suite $(c_n)_n$ avec $c_0 = 1$ telle que $a_n^2 - a = -ac_n^2$, i.e. $a_n^2 = a(1 - c_n^2)$ donc $c_n^2 < 1$. On a encore deux choix pour le signe de c_n. Soit en remplaçant dans (5.19) et prenant la racine quarée $b_n = n + \sqrt{a}c_n c_{n+1}$ avec le choix $c_0 = 1$ en prenant recursivement le signe de c_{n+1} égale au signe de $(b_n - n)/c_n$. Finalement, On utilise ces expressions de a_n^2 et b_n dans (5.6) avec $\beta = 1$ on obtient l'équation d-P$_{II}$ cherchée avec les paramètres $\gamma = 0$, $\beta = 0$ et $\alpha = 1/\sqrt{a}$. ■

Lorsque $\beta \neq 1$ la situation est différente. En effet,

Theorem 5.3 *les équations (5.6-5.7) se sont des limites des cas particuliers de l'équation discrète de Painlevé IV*

$$x_{n+1}x_n = \frac{(y_n - z_n)^2 - A}{y_n^2 - B} \tag{5.20}$$

$$y_n + y_{n-1} = \frac{\zeta_n - C}{1 + Dx_n} + \frac{\zeta_n + C}{1 + x_n/D} \tag{5.21}$$

Proof. Posons $x_n = iX_n/\sqrt{aB}$ et $iD = \sqrt{B/a}$, alrs l'équation D_4^c dans [10, p. 297] devient

$$-\frac{X_{n+1}X_n}{aB} = \frac{(y_n - z_n)^2 - A}{y_n^2 - B}, \tag{5.22}$$

$$y_n + y_{n-1} = \frac{z_{n-1/2} - C}{1 + X_n/a} + \frac{z_{n-1/2} + C}{1 - X_n/B}. \tag{5.23}$$

Multiplions la première équation par B et faisant $b \to \infty$ on en déduit

$$X_{n+1}X_n = a\left((y_n - z_n)^2 - A\right), \tag{5.24}$$

$$y_n + y_{n-1} = \frac{z_{n-1/2} - C}{1 + X_n/a} + z_{n-1/2} + C. \tag{5.25}$$

Reste à vérifier que ceci s'identifier au le système (5.6-5.7) avec le choix $X_n = a_n^2 - a$ et $y_n = b_n$. En effet, à l'aide de

$$(b_n - n)(b_n - n + \beta - 1) = \left(b_n - n + \frac{\beta - 1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta - 1}{2}\right)^2$$

alors on remarque qu'on a

$$z_n = n - \frac{\beta - 1}{2}, \quad A = \left(\frac{\beta - 1}{2}\right)^2.$$

Si on utilise ceci dans la deuxième équation, on obtient

$$b_n + b_{n-1} = \frac{n - \beta/2 - C}{a_n^2/a} + n - \frac{\beta}{2} + C$$

et d'après (5.6) on a

$$b_n + b_{n-1} = \frac{an}{a_n^2} + n - \beta$$

on trouve alors que $C = -\frac{\beta}{2}$. ■

5.2 Conclusion

Dans ce travail, nous avons prouvé les équations de painlevé discrétes et continues en utilisant une relation de reccurence à trois terme , nous avons prouvé l'équation continue de PainlevéVI en utilisant les plynômes de Jacobi généralisés , et dans l'équation continue de PainlevéVI, V et d-P$II.$ nous avons utilisé ..les plynômes de Charlier généralisés. et en utilisant les plynômes de Freud nous avons prouvé l'équation continues de Painlevé d-PI . En raison de contraintes de temps, nous n'avons pas pu prouver l'équation continue de Painlevé III, nous la laissons donc aux générations futures

Bibliographie

[1] N. Boelen, W. van Assche, Discrete Painlevé equations for recurrence coefficients of semi-classical Laguerre polynomials, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), 1317-1331.

[2] T. S. Chihara : An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.

[3] P.A. Clarkson, Recurrence coefficients for discrete orthonormal polynomials and the Painlevé equations, J. Phys. A : Math. Theor. 46, 185205 (2013).

[4] P.A. Clarkson, K. Jordaan, The Relationship Between Semiclassical Laguerre Polynomials and the Fourth Painlevé Equation, Constr. Approx. 39 (2014), 223–254.

[5] P.A. Clarkson, E.L. Mansfield, H.N. Webster, On the relation between the continuous and discrete Painlevé equations, Theoret. and Math. Phys. 122 (2000), 1-16.

[6] D. Dai, L. Zhang, Painlevé VI and Hankel determinants for the generalized Jacobi weight, J. Phys. A : Math. Theor. 43 (2010), 055207.

[7] B.G.S. Doman, The classical orthogonal polynomials, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2006.

[8] A.S. Fokas, A.R. Its, A.V. Kitaev, Discrete Painleve Equations and their Appearance in Quantum Gravity, Commun. Math. Phys. 142 (1991), 313-344.

[9] G. Freud, On the coefficients in the recursion formulae of orthogonal polynomials, Sec. A : Mathematical and Physical Sciences, Math. Proc. R. Ir. Acad. (1976), 1-6.

[10] B. Grammaticos annd A. Ramani, Discrete Painlevé Equations : A Review, Lect. Notes Phys. 644 (2004), 245–321.

[11] V.I. Gromak, I. Laine and S. Shimomura, Painlevé Differential Equations in the Complex Plane, Vol.28, Studies in Mathematics, de Gruyter, Berlin, NewYork, 2002.

[12] M.E.H. Ismail, Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable, Encyclopedia of Mathematics and its Applications 98, Cambridge University Press, 2005.

[13] Kelil, A. (2018). Properties of a class of generalized Freud polynomials (Doctoral dissertation, University of Pretoria).

[14] H.L. Krall and O. Frink, A new class of orthogonal polynomials : The Bessel polynomials, Trans. Amer. Math. Soc. 65 (1949), 100-115.

[15] K.H. Kwon, L.L. Littlejohn, Classification of classical orthogonal polynomials, J. Korean Math. Soc. 34 (1997), 973–1008.

[16] F. Marcellán, J. Petronilho, On the solution of some distributional differential equations : Existence and characterizations of the classical moment functionals, Integral Transforms Spec. Funct. 2 (1994), 185-218.

[17] A.F. Nikiforov, S.K. Suslov, V.B. Uvarov, Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[18] A. Ramani, B. Grammaticos, T. Tamizhmani, K.M. Tamizhmani, Special function solutions of the discrete Painlevé equations, Comput. Math. Appl. 42 (2001), 603-614.

[19] B. Simon, Orthogonal Polynomials on the Unit Circle, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **54**, Part 1 and Part 2, Amer. Math. Soc., 2005.

[20] C. Smet, W. Van Assche, Orthogonal Polynomials on a Bi-lattice, Constr. Approx. 36 (2012), 215–242.

[21] G. Szegö, Orthogonal polynomials, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. Vol. 23, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1939 (4th edition 1975).

[22] K.M. Tamizhmani, T. Tamizhmani, B. Grammaticos, A. Ramani, Special Solutions for Discrete Painlevé Equations. In : Grammaticos B., Tamizhmani T., Kosmann-Schwarzbach Y. (eds) Discrete Integrable Systems. Lecture Notes in Physics, vol 644. Springer, Berlin, Heidelberg.

[23] W. Van Assche, Discrete Painlevé equations for recurrence coefficients of orthogonal polynomials. In : Difference Equations, Special Functions and Orthogonal Polynomials, pp. 687–725. World Scientific, Hackensack (2007).

[24] W. Van Assche, Orthogonal polynomials and Painlevé equations, Australian Mathematical Society Lecture Series. Cambridge University Press, Cambridge (2017).