RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

UNIVERSITE LARBI TEBESSI DE TÉBESSA

FACULTÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

DOMAINE DE FORMATION : SCIENCES ET TECHNOLOGIES (ST)

Polycopie

Ondes et Vibrations

Cours et Exercices corrigés

Module : **Ondes et vibrations**

Filière : **Electrotechnique/Electronique/Génie Mécanique/Travaux Public /Génie Civil**

Niveau : **2ème Année Licence**

Réaliser par : **Dr .Hamida Ayed**

Année universitaire : **2022/2023**

Avant-propos

e polycopié est destiné aux étudiants 2 LMD dont les spécialités suivantes : Sciences Technologiques (ST) : Electrotechnique (ETT), Electronique (EN), Génie mécanique (GM), Ctravaux public et Génie civil (GC). Il s'agit d'un module de base qui traite les oscillations des systèmes mécaniques et électriques et qui a connu ces dernières années un essor important. Il a permis de développer énormément les techniques à même de résoudre les problèmes physiques des différents domaines. Ce document est un cours détaillé avec des exercices corrigés. Il est divisé en deux grandes parties, "Vibrations et Ondes mécaniques réparties en six chapitres. Cités ci-dessous :

- Chapitre I : Généralités sur les vibrations.
- Chapitre II : Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté.
- Chapitre III : Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté.
- Chapitre IV : Oscillations libres des systèmes à deux degrés de liberté.
- Chapitre V : Oscillations forcées des systèmes à deux degrés de liberté.
- Chapitre VI : Etudes d'un système mécanique à N degrés de liberté.

La deuxième parti contient deux chapitres recommande d'introduire l'initiation des phénomènes liés à la propagation des ondes mécaniques dans différents milieux matériels. À cet effet nous avons pris le, comme le modèle de la corde vibrante.

L'objectif recherché consiste à donner aux étudiants des éléments qui leurs permettront d'enrichir leurs connaissances d'une part et d'autre part les aidés à maîtriser d'avantage les problèmes qu'ils peuvent rencontrer dans le présent module.

Dr. Hamida Ayed

Sommaire

PARTIE I : VIBRATIONS

CHAPITRE 1 : GENERALITES

CHAPITRE 2 : SYSTEMES LINEAIRES A UN DEGRE DE LIBERTE

CHAPITRE 3 : SYSTEMES LINEAIRES LIBRES AMORTIS A UN DEGRE DE LIBERTE

CHAPITRE 4 : SYSTEMES LINEAIRES FORCES A UN DEGRE DE LIBERTE

CHAPITRE 5 : OSCILLATEURS COUPLES

CHAPITRE 6 : N DEGRES DE LIBERTE

PARTIE II : ONDES

CHAPITRE 7 : PROPAGATION DES ONDES

CHAPITRE 8 : LA CORDE VIBRANTE

PARTIE I

VIBRATIONS

Chapitre 1

Généralités

I-1. Généralités sur les vibrations

I-1.1. Définition d'une oscillation

On appelle oscillation un mouvement d'un corps qui se déplace alternativement de part et d'autre d'une position d'équilibre.

Exemple : mouvement d'un pendule ou d'un poids suspendu à un ressort, cylindre flottant dans un liquide, etc.

Les Oscillations peuvent être subdivisées en :

- **Oscillations libres:** un oscillateur est libre s'il oscille sans interventions extérieures (sans frottement) pendant son retour à l'équilibre
- **Oscillations amorties:** l'oscillateur est soumis à des forces de frottements qui dissipent de l'énergie l'oscillation s'amortissent est finissent par s'arrêtes.
- **Oscillation forcées:** un oscillateur est forcé si une action extérieure lui communique de l'énergie.
- **Oscillation forcées amortis:** la force périodique extérieure (excitation) compense les pertes déneige par frottement, les oscillations ainsientretenus ne s'amortissent pas.

I-2.Vibration

Une vibration est un phénomène physique oscillatoire d'un corps en mouvement autour de sa position d'équilibre.Parmi les mouvements mécaniques les plus variés, il existe des mouvements de vibrations qu'on puisse observer comme les battements decœur,le mouvement d'une balançoire, le mouvement alternatif des pistons d'un moteur à explosion, les vibrations d'une corde de guitare.Et d'autres microscopiques comme le mouvement des atomes à l'intérieur d'un solide, etc.

I-2.1. Définition d'un mouvement périodique

* C'est un mouvement qui se répété à un intervalle de temps réguliers, cet intervalle s'appelle période **(T)** mesurée en secondes **(s).**

* Pour les mouvements rapides on utilise la fréquence ($\boldsymbol{f}$) exprimée en hertz **(HZ)** elle est reliée à la période par :

$$T = \frac{1}{f} \; et \; f = \frac{1}{T}$$

Le nombre de tours par seconde s'appelé pulsation (notée ω, mesurée en rad/s)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Remarque :

1. Un oscillateur est dit ***harmonique*** si le système évolue suivant une loi périodique de forme sinusoïdale (Figure (I.2.a)). En effet : $x(t) = A cos(\omega t + \varphi)$

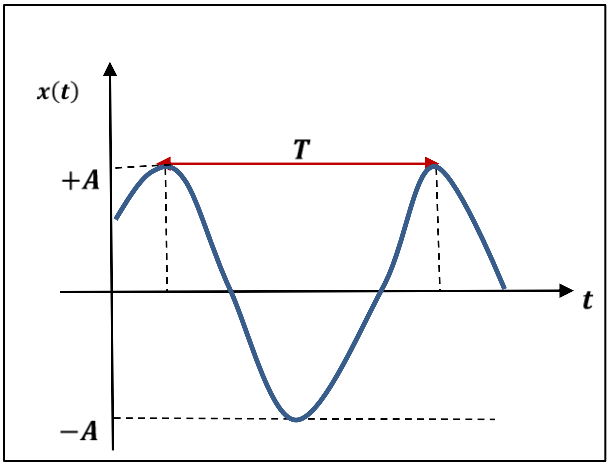


Figure 1.2.a : Représentation d'une oscillation harmonique

Avec :

x(t) : L'élongation (où la position) à l'instant t_s

A : L'élongation maximales où l'amplitude,

φ: La phase à l'origine [*rad*],

ω ($\omega = {}^{2\pi}/_{T}$) : La pulsation du mouvement [*rad/s*]

($\omega t+\varphi$) : La phase à l'instant (t).

2. L'oscillation est dit **anharmonique** si le système évolue suivant une loi périodique de forme quelconque non sinusoïdale (Fig.I. 2-b).

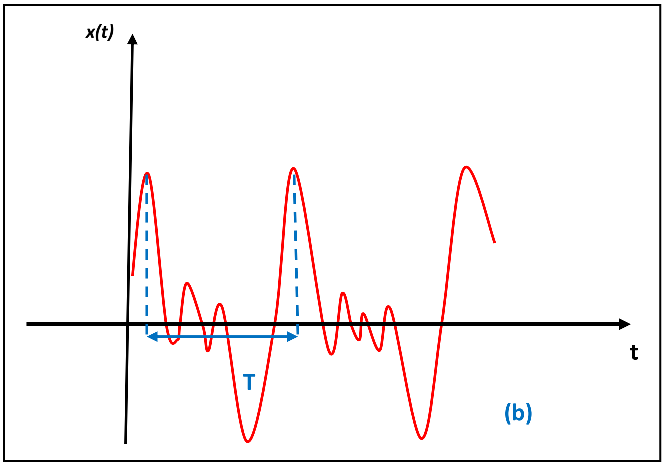


Figure 1.2.b : Représentation d'une oscillation anharmonique.

I-3. Notion d'énergie

I-3.1. Energie cinétique

L'énergie cinétique d'un masse **m** qui effectue un mouvement de :

- Translation d'une distance $\boldsymbol{x}$:

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- Rotation d'un angle θ

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

(J est le moment d'inertie par rapport le point de l'axe de rotation)

- Translation (x)et Rotation (θ) au même temps:

$$T_{tot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

I-3.1.1. Moment d'inertie

Forme	Moment d'inertie par rapport le centre de Gravité G (J/s)
Tige (Longueur $\boldsymbol{L}$, masse $\boldsymbol{M}$)	$\frac{1}{12}ML^2$
Cylindre (rayon $\boldsymbol{R}$, masse $\boldsymbol{M}$)	$\frac{1}{2}MR^2$
Sphère (rayon $\boldsymbol{R}$, masse $\boldsymbol{M}$)	$\frac{2}{5}MR^2$
Masse ponctuelle $\boldsymbol{m}$	0

Remarque

Le moment d'inertie d'une masse **M** et de forme quelconque autour d'un point **A** différent du Centre de Gravité **G** est donnée par

$$J_{/A} = J_{/G} + M(AG)^2 \qquad \text{(Théorème de Huggens- Steiner)}$$

I-3.2. Energie potentielle

- L'énergie potentielle de la pesanteur (des masses) dans un champ gravitationnel constant g est$k$:

$$U_{masse} = \begin{cases} +mg \text{ (Lors d'une ascension d'une hauteur } h) \\ -mg \text{ (Lors d'une descente d'une hauteur } h) \end{cases}$$

- L'énergie potentielle d'un ressort à boudin de raideur k lors d'une déformation x est :

$$U_{ressort} = \frac{1}{2}kx^2$$

- L'énergie potentielle d'un ressort de torsion de raideur k lors d'une déformation est :

$$U_{ressort} = \frac{1}{2}k\theta^2$$

I-3.3. Energie mécanique

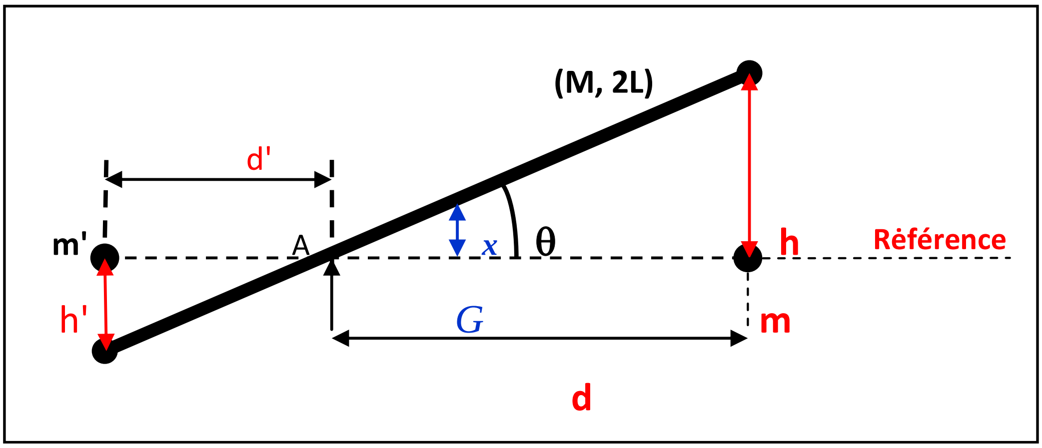
L'énergie totale $E = T + U$est conservée (Constante) durant le mouvement $\left(\frac{dE}{dt} = 0\right)$ **:** Cette équation de conservation donne l'équation du mouvement des systèmes conserves.

Exemple

Soit un système mécanique ci- dessous constitué de deux masses ponctuelles (*m* et *m'*) fixées aux extrémités libres d'une tige de masse *M* et de longueur *2L*.

Ce Système est un mouvement de rotation par rapport ou point fixe *A*.

Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système.



Réponse

Le système est constitue de 3 masses, donc il ya 3 énergies cinétiques et 3 énergies potentielles

* L'énergie cinétique T

$T_{tot} = T_M + T_m + T_{\acute{m}}$

- $T_M = \frac{1}{2} J_{M/A} \dot{\theta}^2$

$J_{M/A} = \frac{1}{12} M(2L^2) + M(AG)^2$

avec $AG = \frac{L}{2} = d$

Donc $J_{/A} = \frac{1}{12}(2L^2) + M(L/_2)^2 = \frac{7}{12} ML^2$

$$\Rightarrow T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{12} ML^2\right)\dot{\theta}^2$$

- $T_m = \frac{1}{2} J_{m/A} \dot{\theta}^2$ avec $J_{m/A} = [0 + md^2]$, $d = L + \frac{L}{2} = \frac{3L}{2}$ donc $J_{m/A} = m\left(\frac{3L}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow T_m = \frac{1}{2}\left[\frac{9}{4} m\right] L^2 \dot{\theta}^2$$

- $T_{\acute{m}} = \frac{1}{2} J_{\acute{m}/A} \dot{\theta}^2$ / $J_{\acute{m}/A} = [0 + \acute{m}\acute{d}^2]$ avec $\acute{d} = \frac{L}{2}$ donc $J_{\acute{m}/A} = \acute{m}\left(\frac{L}{2}\right)^2$

$$\Rightarrow T_{\acute{m}} = \frac{1}{2}\left[\frac{L^{\ 2}}{4} \acute{m}\right]\dot{\theta}^2$$

$$T_{tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{12} ML^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{9}{4} mL^2\right]\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left[\grave{m}\frac{L^2}{4}\right]\dot{\theta}^2$$

Donc $T_{tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{7}{12} M + \frac{9}{4} m + \frac{1}{4}\acute{m}\right]$

* L'énergie potentielle U

$$U_{tot} = U_M + U_m + U_{\acute{m}}$$

- $U_M = Mgx$ / $x = \frac{1}{2} MgLsin\theta$

$$U_M = \frac{1}{2} MgLsin\theta$$

- $U_m = mgh \quad / \quad h = dsin\theta = \frac{3}{2}Lsin\theta$

  $U_m = \frac{3}{2}mgLsin\theta$
- $U_{\acute{m}} = -mg\acute{h} \quad / \quad \acute{h} = \acute{d}sin\theta = \frac{L}{2}sin\theta$

$U_{\acute{m}} = -\frac{1}{2}mgLsin\theta$
- $U_{tot} = \frac{1}{2}MgLsin\theta + \frac{3}{2}mgLsin\theta - \frac{1}{2}mg\acute{L}sin\theta$

  $U_{tot} = \frac{1}{2}gLsin\theta(M + 3m + \acute{m})$

1-3.4. Conditions d'équilibre

La condition d'équilibre set $F = 0$ si l'équilibre
En $x = x_0$ on écrit : $F|_{x=x_0} = 0$
Pour une force dérivant d'un potentiel $\left(F = -\frac{\partial U}{\partial x}\right)$
La condition d'équilibre s'écrit:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=x_0} = 0$$

Il existe deux types d'équilibre :

Equilibre stable

Une fois écarté le système de sa position d'équilibre, il y retourne. Dans ce cas la force de rappel

$$f = -Cx \quad \text{avec} \quad C > 0$$

$$C = -\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} > 0$: Cette condition d'équilibre stable est la condition d'oscillation

Equilibre instable

Le système ne regagne pas son équilibre lors d'un écartement dans ce cas $C < 0$ la condition d'équilibre instable s'écrit donc :

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{x=x_0} < 0$$

Pour les rotations on remplace x par θ et x_0 par θ_0

- Il est possible de représenter graphiquement l'évolution de trois énergies (E_{tot}, T, U)

La figure ci-dessous illustre la variation des énergies en fonctionde déplacement.

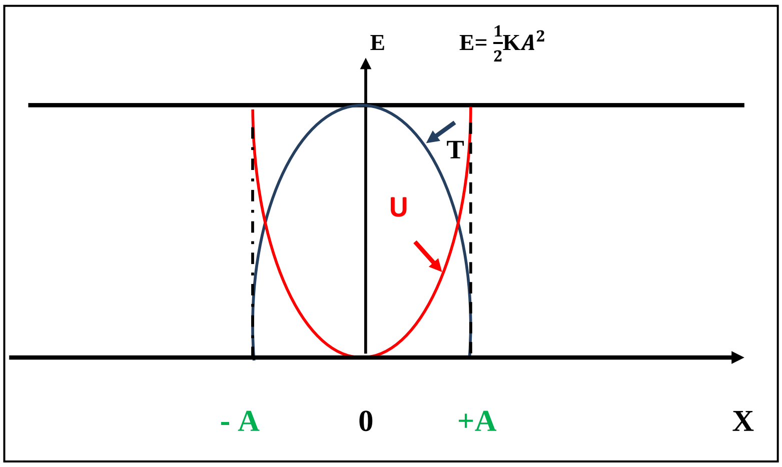


Figure I-2. Variation des énergies cinétique, potentielle est totale en fonction de x.

Au centre$(x = 0)\begin{cases} T = T_{max} \\ U = U_{max} \end{cases}$

Aux extremums $(x = \pm A)\begin{cases} T = T_{min} = 0 \\ T = U_{max} \end{cases}$

• Au cours d'une oscillation, les deux types d'énergies se transforment constamment l'un au l'autre :

- Quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie Potentielle augmente et vis versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système

I- 4. Ressorts équivalents

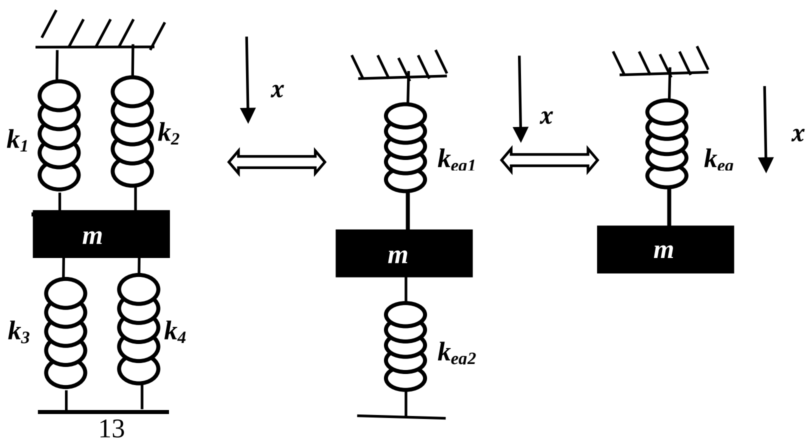
Il existe 3 cas :

1er Cas : Ressorts en parallèles:

$$\begin{cases} k_{eq_1} = k_1 + k_2 \\ k_{eq_2} = k_3 + k_4 \end{cases}$$

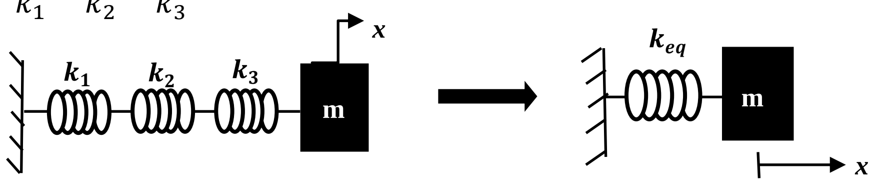
$$k_{eq} = k_{eq_1} + k_{eq_2}$$

$$\Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$



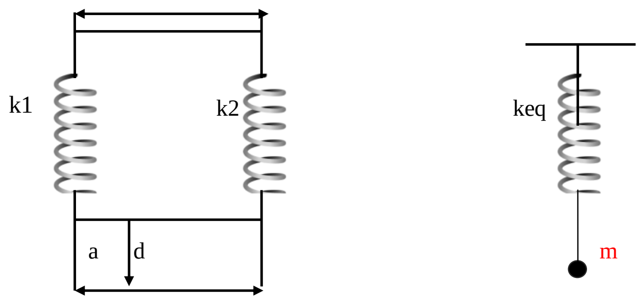
$2^{ème}$ Cas: Ressorts en série

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$$



$3^{ème}$ Cas: Barre liée à 02 ressorts (distance non négligeable)

$$k_{eq} = \frac{(a+b)^2}{\frac{a^2+b^2}{k_1+k_2}}$$



Si a = b on aura

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

I-5. L'oscillateur Harmonique

On appelle oscillateur harmonique un oscillateur qui, dès qu'il soit écarté de sa position d'équilibre, d'une distance (x) ou angle (θ) est soumis àune force de rappel opposée proportionnelle àl'écartement$x$ et θ.

$$f(x) = -Cx$$

Avec : C est une constante positive,

$$f(x) = \frac{-dU}{dx} \Rightarrow U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Exemple

- masse ressort :$f(x) = -kx$ où k: est la raideur du ressort (Loi Hookes)
- Pendule simple : $f(\theta) = -mgsin\theta = -mg\theta$ pour $\theta \ll 1$ (Harmonique)

I-6. Formalisme de Lagrange

I-6.1. Les cordonnées généralisées

Les coordonnées généralisées sont l’ensemble de viables réelles indépendantes ou liées permettant de décrie et configurer tous les élémentsd’un système à tout instant t.

Exemple

La position d’un point M dans l’espace peut être déterminée par 3 coordonnées Suivant les axes (x, y, z)

- La position d’un corps solide dans l'espace peut être définie par sixcoordonnées :
  - 03 coordonnées relatives au centre de gravité
  - 03 coordonnées liées aux angles d’Euler (θ, φ, ψ)

On désigne par

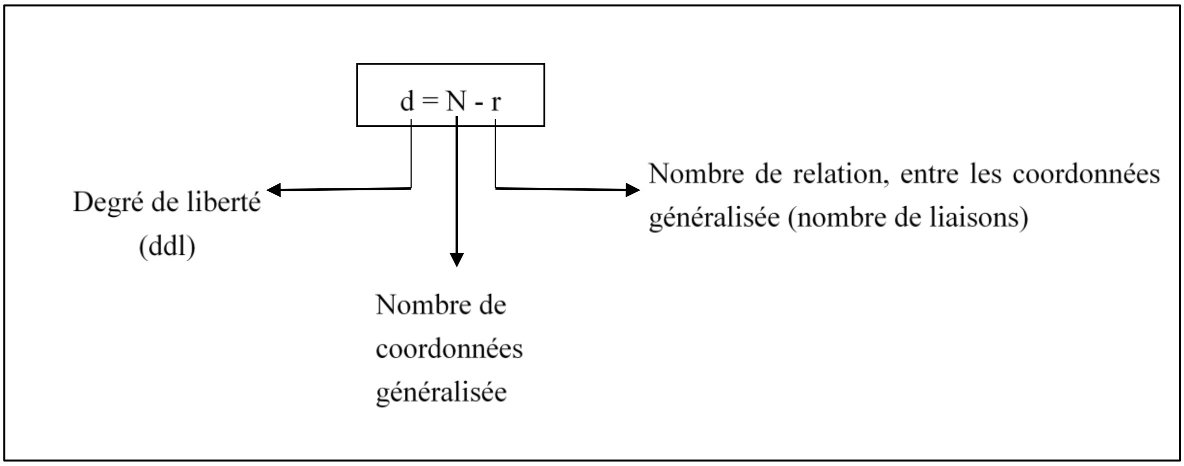
$q_1(t), q_2(t), q_3(t), \dots\dots\dots\dots\dots. q_N(t)$: Les cordonnées généralisées.

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \dot{q}_N(t)$: Les vitesses généralisées.

I-6.2. Degré de liberté

C’est le nombre de coordonnées indépendantes nécessaires pour déterminer laposition de chaque élément d’un système pendant son mouvemente a tout instant :

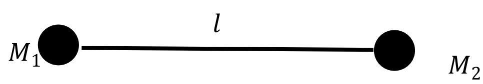
On ecrit :



Exemple

* soit un système mécanique constitué de deux points M_1 et M_2reliés par une tige de longueur L. Trouver e nombre de degré de liberté.

$$\begin{cases} M_1(x_1, y_1, z_1) \\ M_2(x_1, y_2, z_2) \end{cases} \Rightarrow N = 6$$



Equation de liaison $l = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = Cst \Rightarrow r = 1$

Donc $d = 5$ $(d = N - r = 6 - 1 = 5)$

I-6.3. Formalisme de Lagrange

Ce formalisme repose sur la fonction de Lagrange

$$L = T - U$$

L'ensemble d'équation du mouvement s'écrit

$$\sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}\right) \right\} = 0$$

- L: Fonction de Lagrange ou Lagrangien
- T: L'énergie Cinétique du Système ;
- U: L'énergie Potentille du Système ;
- q_i: La coordonnée généralisée et $\dot{q}_i$ est la vitesse généralisée du système.

- Pour un système àun degré de liberté (N=1 ou ddl=1)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\eth L}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial q}\right) = 0$$

Remarque

• Pour un système unidimensionnel l'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

• Pour un mouvement rotationnel θ:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Exercices

Exercice 1 :

Résoudre les équations différentielles du 2éme ordre suivantes :

1- $5\ddot{x}+3x=0$

2- $3\ddot{x}+5\dot{x}+4x=0$

3- $2\ddot{x}+6\dot{x}+2x=0$

Exercice 2 :

En utilisant la représentation complexe, calculer l'amplitude et la phase initiale de la somme suivante :

$$x(t) = 3.2\sin\omega t + \cos\omega t$$

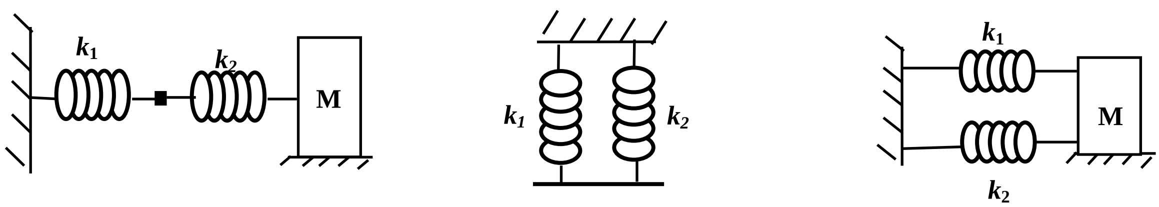
Exercice 3 :

Trouver par calcul, par la méthode des complexes l'amplitude de la vibration :

$$y(t) = a\cos(\omega t) + a\cos(\omega t+\varphi) + a\cos(\omega t + 4\pi/3)$$

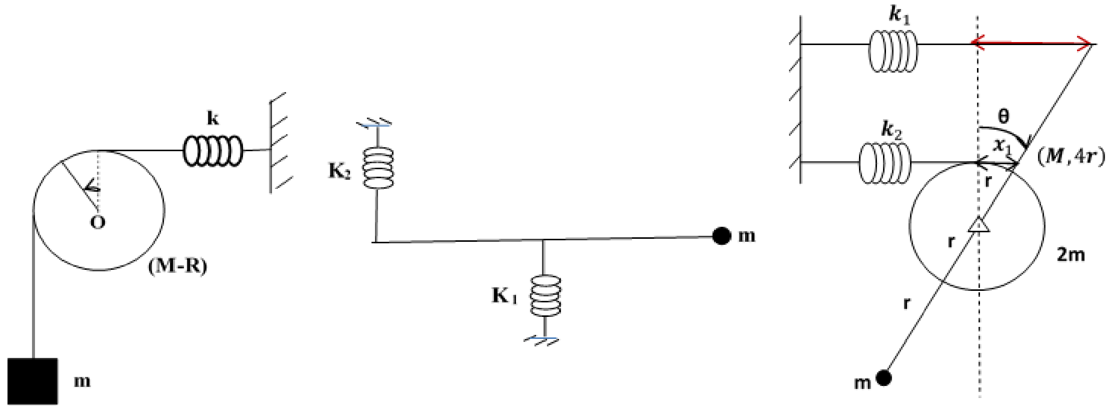
Exercice 4 :

Déterminer les constantes de raideur équivalentes des systèmes montrés sur la figure1 :



Exercice 5 :

Déterminer pour chaque système montré ci-dessous : Le nombre de degré de liberté, l'énergie cinétique et l'énergie potentielle.



Solutions

Exercice 1:

1-$5\ddot{x} + 3x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{3}{5}x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. Avec $\omega_0^2 = \frac{3}{5}$

Donc la solution générale : $x(t) = Asin\left(\sqrt{\frac{3}{5}}t + \varphi\right)$

2-$3\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{3}{5}\dot{x} + \frac{4}{5}x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\delta = \frac{5}{6}$; $\omega_0^2 = \frac{4}{3}$

$$\delta^2 - \omega_0^2 = -\frac{23}{36} < 0$$

Donc la solution : $x(t) = Ae^{-\frac{5}{6}t}cos\left(\sqrt{\frac{23}{36}}t + \varphi\right)$

3- $2\ddot{x} + 6\dot{x} + 2x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec $\delta^2 - \omega_0^2 = \frac{5}{4} > 0$

Donc la solution : $x(t) = e^{-\sqrt{\frac{5}{4}}t}\left(A_1 e^{-\sqrt{\frac{5}{4}}t} + A_2 e^{-\sqrt{\frac{5}{4}}t}\right)$

4- $2\ddot{x} + \sqrt{48}\dot{x} + 6x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + \sqrt{12}\dot{x} + 3x = 0$

$\Leftrightarrow \ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ avec : $\delta = \sqrt{3}$, ω_0^2=3 avec $\delta^2 + \omega_0^2 = 0$

$$\Rightarrow \delta^2 - \omega_0^2 = 0$$

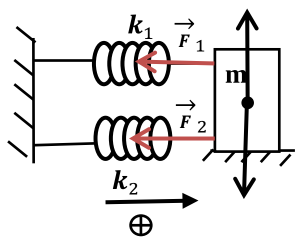
Donc la solution : $x(t) = e^{-\sqrt{3}t}(A_1 + A_2 t)$

Exercice 4:

- Nous avons deux forces de rappel de même sens :

Les résultantes de ces deux forces appliquées au ressort équivalent prend le même sens et est donnée par :

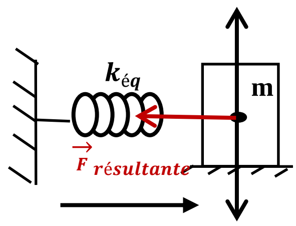
$\vec{F}_{résultante} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$



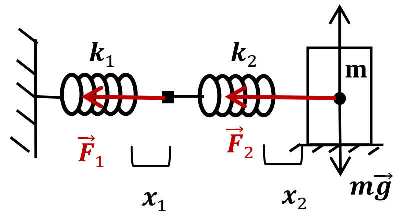
$k_{eq}x = k_1 x + k_2 x$

D'où :

$k_{éq} = k_1 + k_2$



- Dans ce cas de figure, le déplacement résultant est la somme des déplacements des deux ressorts soit :

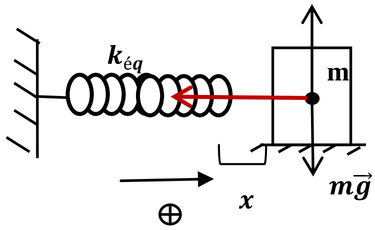


$x = x_1 + x_2$

Avec $x = \frac{F_{résultante}}{k_{eq}}$

Et

$x_1 = \frac{F_1}{k_1}$; $x_2 = \frac{F_2}{k_2}$



D'autre part ;

$F_{résultante} = F_2$ (1)

Et

$F_2 = F_1$ (2)

Au point d'application communaux deux ressort, il n'y a pas de masse

Le point commun est en équilibre et les deux forces qui lui sont appliquées sont égales (voir relation 2).

$$x = x_1 + x_2$$

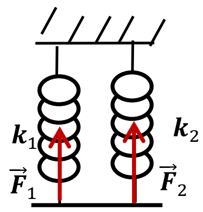
$$\frac{F_{résultante}}{k_{eq}} = \frac{F_{résultante}}{k_1} + \frac{F_{résultante}}{k_2}$$

D'où :

$$\frac{1}{k_{éq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Donc :

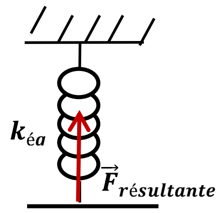
$$k_{éq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$



- Nous avons deux de rappel de même sens :

$\vec{F}_{résultante} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

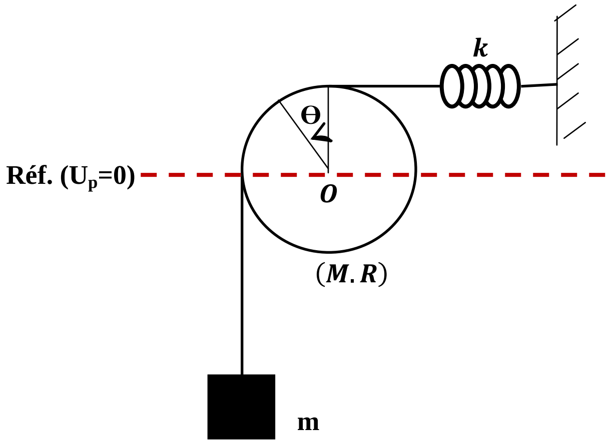
$$\vec{F}_{résultante} = -k_1 x\vec{\imath} - k_2 x\vec{\imath}$$
$$\vec{F}_{résultante} = -(k_1 + k_2)x\vec{\imath}$$



D'autre part

$$\vec{F}_{résultante} = -k_{éq} x\vec{\imath}$$

Donc $k_{éq} = k_1 + k_2$



Exercice 5 :

- Le nombre de degré de liberté :

$$d = N - r$$
$$\left.\begin{array}{r} M \to rotation(\theta) \\ m \to translation(x) \end{array}\right\} \Rightarrow N = 2$$
$$x = R\theta \Rightarrow r = 1$$

Donc $d = 1$

- l'énergie cinétique :

$T_{tot} = T_M + T_m$

- $T_M = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ où $J = \frac{1}{2}MR^2$

Donc : $T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2$

- $T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ avec $x = R\theta \Rightarrow \dot{x} = R\dot{\theta}$

$$\Rightarrow T_m = \frac{1}{2}m(R\dot{x})^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2$$

$$T_{tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}M + m\right]R^2\dot{\theta}^2$$

- l'énergie potentielle :

- $U = \frac{1}{2}kx^2$ avec $x = R\theta$

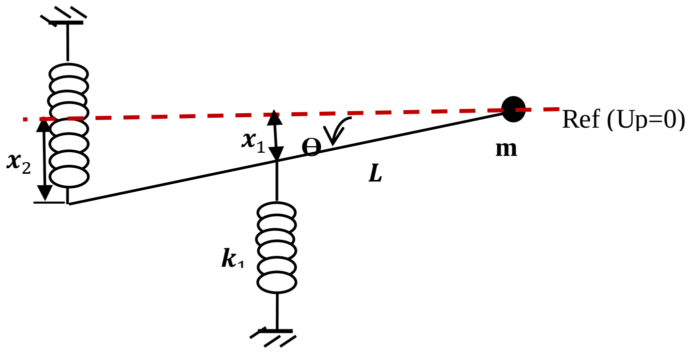
Donc : $U = \frac{1}{2}kR^2\theta^2$

- Le nombre de degré de liberté :

$m \rightarrow rotation\ (\theta) \ \Rightarrow N = 1$

$r = 0$

Donc : $d = 1$



- L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

où $J = ml^2$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle :

$U_{tot} = U_{k_1} + U_{k_2}$

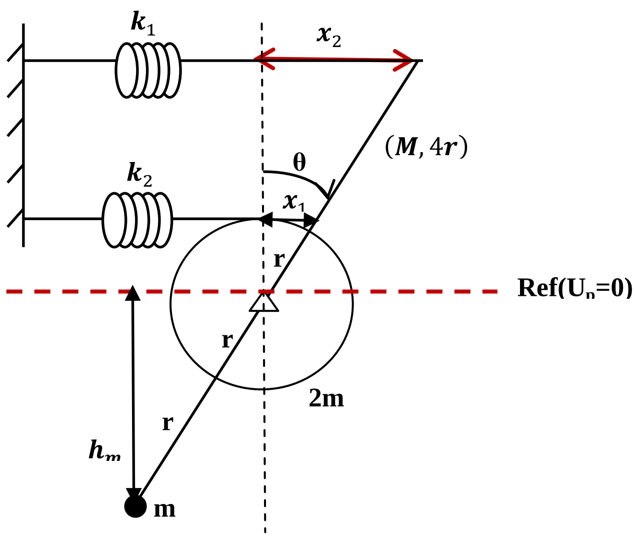
$U_{k_1} = \frac{1}{2}k_1x_1^2$ où $x_1 = \frac{l}{2}\theta$

$$\Rightarrow U_{k_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1}{4}\right)l^2\theta^2$$

$U_{k_2} = \frac{1}{2}k_2x_2^2$ où $x_2 = l\theta$

$$\Rightarrow U_{k_2} = \frac{1}{2}k_2l^2\theta^2$$

$$U_{tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}k_1 + k_2\right]l^2$$



- Le nombre de degré de liberté :

$2m \rightarrow rotation(\theta)$

$m \rightarrow rotation(\theta) \ \Rightarrow N = 1\ ,\ r = 0$

$M \rightarrow rotation(\theta)$

Donc : $d = 1$

- L'énergie cinétique :

$T_{tot} = T_m + T_M + T_{2m}$

- $T_m = \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}^2$ où $J_m = m(2r)^2 = 4mr^2$

Donc : $T_m = \frac{1}{2} m(2r)^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(4m)r^2\dot{\theta}^2$

- $T_{2m} = \frac{1}{2} J_{2m} \dot{\theta}^2$ où $J_{2m} = \frac{1}{2}(2m)r^2 = mr^2$

Donc : $T_{2m} = \frac{1}{2}(m)r^2\dot{\theta}^2$

- $T_M = \frac{1}{2} J_M \dot{\theta}^2$ où $J_M = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{1}{12}M(4r)^2 = \frac{4}{3}Mr^2$

Donc : $T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}M\right) r^2\dot{\theta}^2$

$$T_{tot} = \frac{1}{2}\left(4m + m + \frac{4}{3}M\right) r^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(5m + \frac{4}{3}M\right) r^2\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle :

$$U_{tot} = U_m + \overbrace{U_{2m}}^{0} + \overbrace{U_M}^{0} + U_{k_1} + U_{k_2}$$

- $U_m = -mgh_m$ avec $h_m = 2rcos\theta$

Donc : $U_m = -2mgrcos\theta$

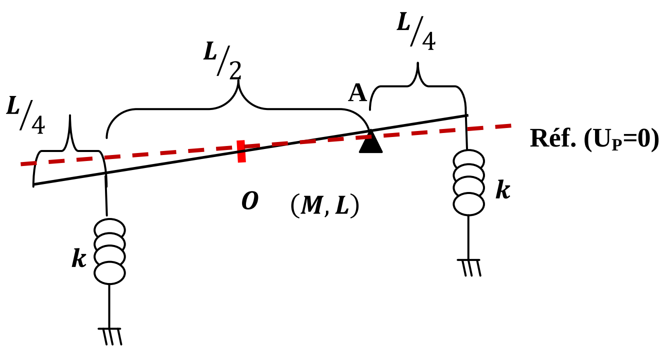
- $U_{k_1} = \frac{1}{2} k_1 x_1^2$ avec $x_1 = r\theta$

Donc : $U_{K_1} = \frac{1}{2} k_1 r^2\theta^2$

- $U_{K_2} = \frac{1}{2} k_2 x_2^2$ avec $x_2 = 2r\theta$

Donc : $U_{k_2} = \frac{1}{2}(4k_2)r^2\theta^2$

$$U_{tot} = \frac{1}{2}(k_1 + 4k_2)r^2\theta^2 - 2mgrcos\theta$$



- Le nombre de degré de liberté :

M→ rot(θ) $\Rightarrow N = 1; r = 0$

Donc d = 1ddl

- L'énergie cinétique :

$$T_M = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{36}ML^2\right)\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle :

$$U_{tot} = U_k + U_k$$

$$U_k = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2}\right)^2\theta^2$$

$$U_k = \frac{1}{2}\left(\frac{L}{4}\right)^2\theta^2$$

Donc $U_{tot} = \frac{1}{2}\left(\frac{5k}{16}\right)L^2\theta^2$

Chapitre 2

Systèmes linéaires à un degré de liberté

II-1. Etude des oscillations libres non amorties

II-1.1. Introduction

Un système oscillant en absence de toute force d'excitation est appelé oscillateur libre. se sont des systèmes conservatif.

II-1.2. Etude du systèmemécanique

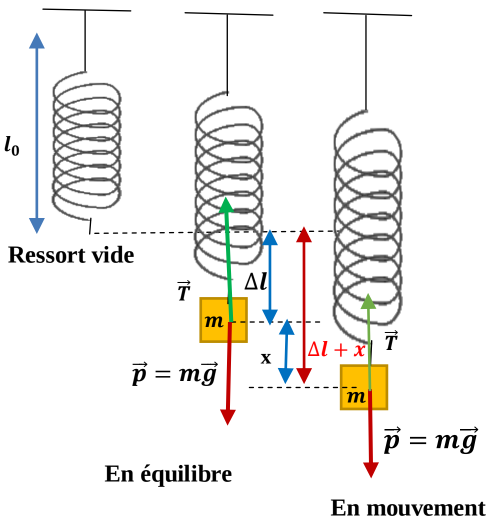
II-1.2.1. Obtention de l'équationdifférentielle

L'équation du mouvement pour un système conservatif peut être déterminée par la :

1. $2^{éme}$Loi de Newton
2. Conservation d'énergie
3. Méthode de Lagrange.

Exemple

Une masse m accrochée a extrémité libre d'un ressort et se déplaçant sans frottement suivant une direction on vertical.



a)-Principe dynamique de newton

PFD appliqué à la masse :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

Projection sur L'axe Ox:

$m\vec{g} + \vec{T} = m\vec{a}$

$m\ddot{x} = mg - T$ (II.1) $/ \ T = -kx$ (force de rappel)

$\Leftrightarrow m\ddot{x} = mg - k(x + \Delta l)$ (II.2)

$\Leftrightarrow m\ddot{x} = mg - kx - k\Delta l$ (II.3)

Or à l'équilibre :

$$\sum \vec{F} = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$
$$mg - k(\Delta l) = 0 \qquad \text{(II.4)} \quad \text{condition d'équilibre}$$

Donc L'équation (3) devient :

$$m\ddot{x} = -kx + \underbrace{mg - k\Delta l}_{=0\ (c.d)}$$

Comme

$$m\ddot{x} = -kx \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx = 0$$

⇨*Où* $m\ddot{x} + kx = 0 \quad \Leftrightarrow \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ est l'équation différentielle du mouvement

b) Conservation d'énergie

$$E_{tot} = T + U$$
$$E_{tot} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

Système libre l'énergie mécanique ou (totale) est conservée, donc :

$$\frac{dE_{tot}}{dt} = 0$$
$$m\ddot{x}\dot{x} + k\dot{x}x = 0$$

$m\ddot{x} + kx = 0$ Où $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$

c) Méthode de Lagrange

Le lagrangien du système L est:

$$L = T - U$$

Avec :

- L'énergie cinétique T

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

- L'énergie potentielle U

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

Donc :

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

. Le formalisme de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)=0 \qquad \text{(II.5)}$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)=\frac{d}{dt}(m\dot{x})=m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial X}=-kx \quad (3) \end{cases} \qquad \text{(II.6)}$$

En remplaçant (II.5) et (II.6) dans (II.1)

On obtient $m\ddot{x}+kx=0$

$$\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0$$

Où $m\ddot{x}+\frac{k}{m}x=0 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\ddot{x}+\omega_0^2 x=0}$

Cette équation différentielle de 2ème ordre, homogène, avec $\boldsymbol{\omega_0^2}=\boldsymbol{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre de l'oscillateur et elle doit être positive pour qu'il y ait une vibration.

II-2.2.2. Solution de l'équation différentielle

La solution de l'équation $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$ est sous la forme $x(t)=Ae^{rt}$ avec r un nombre réel et A une constante positive

$$\dot{x}=Ae^{rt}$$

$$\ddot{x}=Ar^2e^{rt}$$

$$\Leftrightarrow (r^2-\omega_0^2)Ae^{rt}=0$$

$$r_1=i\omega_0 \quad et\, r_2=-i\omega_0$$

On obtient deux solutions:

$x_1(t)=A_1e^{r_1}=A_1e^{i\omega_0 t}$

$x_2(t)=A_2e^{r_2}=A_2e^{-i\omega_0 t}$

La solution générale de l'équation du mouvement

$x(t)=x_1(t)+x_2(t)$

$x(t)=A\left(e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}\right)$

Selon la relation d'Euler : $e^{\pm i\omega_0 t}=cos\omega_0 t\pm isin\omega_0 t$

Donc:

$$x(t)=A_1(cos\omega_0 t+isin\omega_0 t)+A_2(cos\omega_0 t-isin\omega_0 t)$$

$$x(t)=(A_1+A_2)cos\omega_0 t+i(A_1-A_2)sin\omega_0 t$$

$$x(t)=Bcos\omega_0 t+Csin\omega_0 t$$

Supposons : $B=Dcos\theta\ et\ C=Dsin\theta$

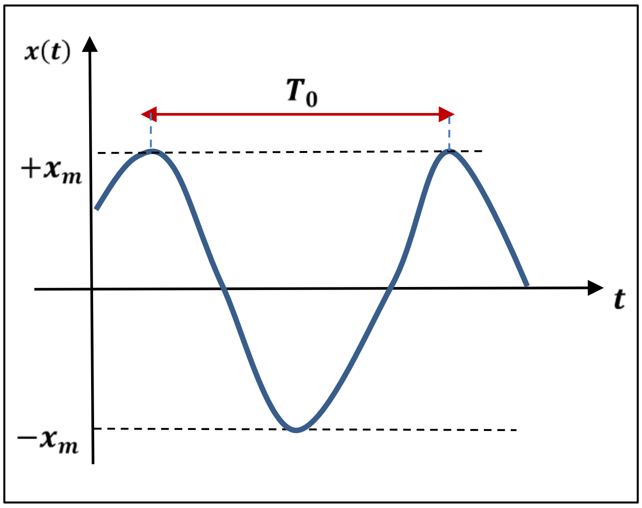
Donc : $x(t) = Dcos\theta cos\omega_0 t + Dsin\theta sin\omega_0 t$

$$x(t) = Dcos(\omega_0 t + \varphi)$$

On trouve la solution générale de l'équation (I.1)

$$x(t) = Dcos(\omega_0 t + \varphi)$$

D et φ sont des constantes déduites des conditions initiales



Les oscillations sont sinusoïdales d'amplitude x_m est de période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

II-1.3. Etude du système électrique

Considérons un circuit électrique (C L)

$\sum_i V_i = 0$

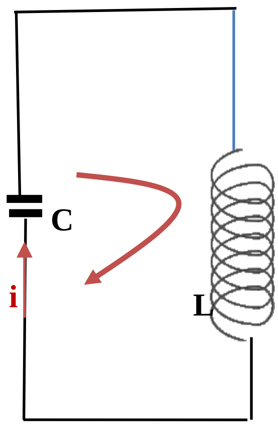
$V_C + V_L = 0$

$L\frac{di}{dt} + \frac{q}{c} = 0$

Selon : $i = \frac{dq}{dt}$

Donc on arrivera :

$$L\ddot{q} + \frac{q}{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{q} + \frac{1}{Lc}q = 0$$



Equation différentielle du second ordre sans deuxième membre elle est identique à celle obtenue par le système mécanique avec la correspondance :

$m \sim L, \quad k \sim \frac{1}{Lc} \; et \; x \sim q$

$\Rightarrow \ddot{q} + \omega_0^2 = 0$

Donc la solution de cette équation :

$q(t) = Qcos(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

II-1.4. Aspects énergétique

Du point de vue énergétique, cet oscillateur transforme l'énergie élastique en énergie cinétique et vice versa

$E_m = T + U$

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ U = \frac{1}{2}kx^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = Acos(\omega_0 t + \varphi) \\ \dot{x}(t) = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \varphi) \end{cases}$$

$E_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$E_m = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

$\Rightarrow \; E_m = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

$E_m = \frac{1}{2}kA^2$

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \longrightarrow \; k = m\omega_0^2$

$E_m = \frac{1}{2}km\omega_0^2 A^2$ Reste constante puisque les forces qui travaillent sont conservatives.

- L'énergie mécanique (E_m) d'un oscillateur est proportionnelle au carré de l'amplitude (§ Chapitre 01 : présentation de l'énergie mécanique).

II-1.5. Analogie électro mécanique

En comparant les équations différentielles du pendule élastique et du circuit électrique et du circuit électrique LC, on peut établir l'analogie électro -mécanique suivante :

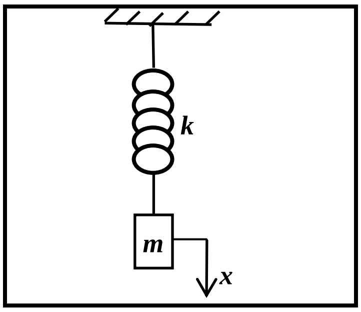
Tableau II-1. Analogie électro- mécanique (mouvement libre)

Système mécanique	**Système électrique**
$m\dfrac{d^2x}{dt^2}+kx=0$ Où $m\ddot{x}+kx=0$	$L\dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{1}{c}q=0$ Où $L\ddot{q}+\dfrac{q}{c}=0$
Elongation : x	Charge : q
Masse : m	Inductance : L
Ressort :k	Inverse de la capacité :$\frac{1}{c}$
Energie cinétique : $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$	Energie de labobine :$\frac{1}{2}L\left[\frac{dq}{dt}\right]^2$
Energie potentielle :$\frac{1}{2}kx^2$	Energie du condensateur :$\frac{1}{2}\left[\frac{q^2}{c}\right]$

Exercices

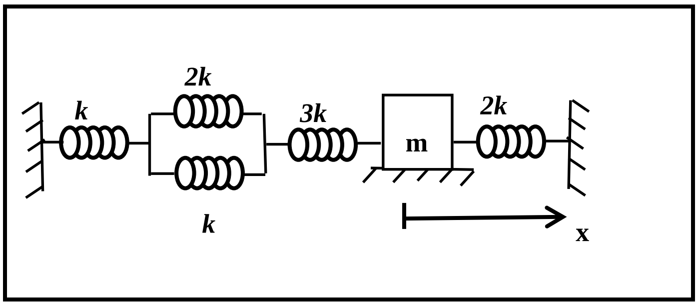
Exercice1:

Le rapport k/m d'un système masse-ressort est égal à 4. Si la masse est écartée de sa position d'équilibre de 4 cm et relâchée avec une vitesse de -4 cm/s déterminer l'expression x en fonction de t.



Exercice2 :

Soit le système mécanique de la Figure ci-contre :



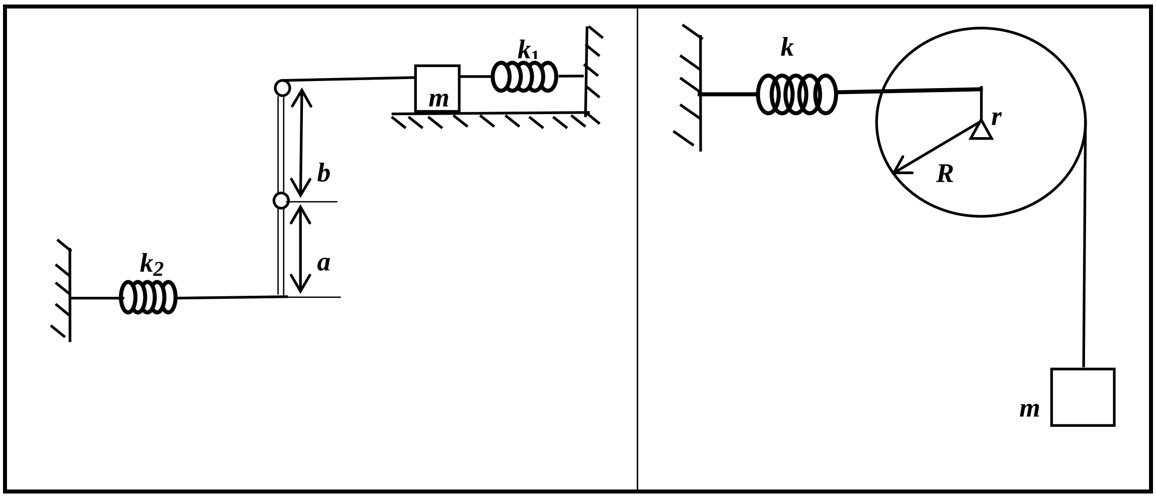
a) Déterminer la constante du ressort équivalant k_{eq} et dessiner le système mécanique équivalant.

b) ce système obéit à l'équation différentielle : $4\ddot{x} + x = 0$

1. Quelle est la pulsation propre ω_0 du mouvement et sa période T_0?
2. Déterminé $x(t)$ pour les conditions initiales suivantes : $x(0) = 2{,}0\ cm\ et\ \dot{x}(0) = -0{,}6\ cms^{-1}$. ; On présenter à la solution sous la forme $x(t) = x_0 cos(w_0 t + \varphi)$ où on cherchera numériquement l'amplitude x_0 et la phase à l'origine φ.

Exercice 3:

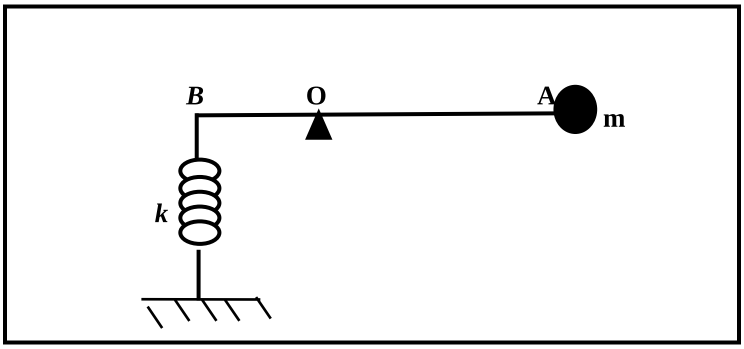
Ecrire l'équation du mouvement du système, montré sur les deux figures. Déduire la période des oscillations libres.



Exercice 4 :

Une masse m est fixée à l'extrémité d'une barre de masse négligeable qui repose en O' ($AO = \frac{2}{3}l$)) dont l'autre extrémité est fixée à un ressort de constante de raideur k $\left(OB = \frac{1}{3}l\right)$

Calculer la période des faibles oscillations de m autour de sa position d'équilibre.



Solutions

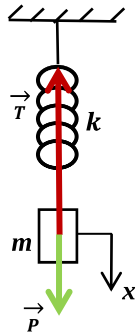
Exercice 1 :

La masse m est soumise à deux forces :

Le poids $\vec{P}$ et la force de rappel $\vec{T}$ qui s'oppose au mouvement de la masse.

L'application de la relation fondamentale de la dynamique au mouvement de la masse m, donne :

$m\ddot{x} = -kx \Rightarrow m\ddot{x} + kx = 0$



D'où : $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$, la pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Comme le rapport $\frac{k}{m} = 4$ talors $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\,{}^{rad}/_{s}$

L'équation du mouvement de la masse m est : $\ddot{x} + 4x = 0$

La solution de cette équation est de la forme : $x = A\cos(2t + \varphi)$

Conditions initiales:

à $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(0) = 4 \\ \dot{x}(0) = -4 \end{cases}$

$\dot{x} = -2A\sin(2t + \varphi)$

D'où : $\begin{matrix} x(0) = A\cos\varphi = 4 & (1) \\ \dot{x}(0) = -2A\sin\varphi = -4 & (2) \end{matrix}$

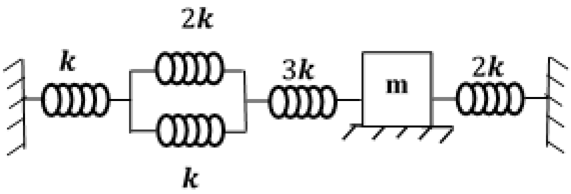
Le rapport des deux équations $\frac{(1)}{(2)}$ donne :

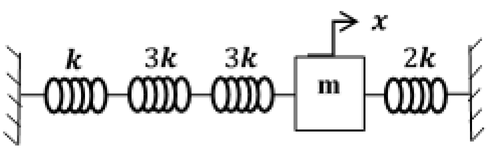
$tg\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = argtg\frac{1}{2} = 26{,}56°$

$x(0) = A\cos\varphi = 4 \Rightarrow A = 4{,}49\ cm$

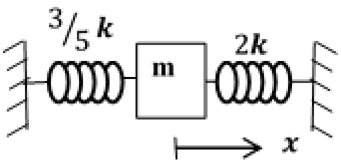
Alors : $x(t) = 4{,}49\cos(2t + 26{,}56°)$

Exercice 2 :

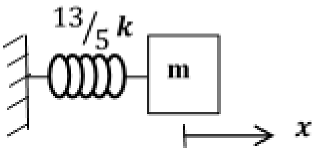




$k_{eq_1} = 2k + k = 3k$



$$\frac{1}{k_{eq_2}} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k} + \frac{1}{3k}, \quad k_{eq_2} = \frac{3}{5}k$$



$$k_{eq} = 2k + \frac{3}{5}k = \frac{13}{5}k$$

1-L'équation différentielle et de type $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ soit une pulsation propre $\omega_0 = 2\,rad/s$
On a donc la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 3{,}14s$

2- On cherche la solution sous la forme

$x(t) = x_0 cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 sin(\omega_0 t + \varphi)$

Soit en tenant compte de la valeur obtenue de la pulsation propre$\omega_0 = 2\,rad/s$

$x(t) = x_0 cos(2t + \varphi)$

$\acute{x}(t) = -2x_0 sin(2t + \varphi)$

Pour trouver $x_0 et\ \varphi$ en utilise les conditions initiales :

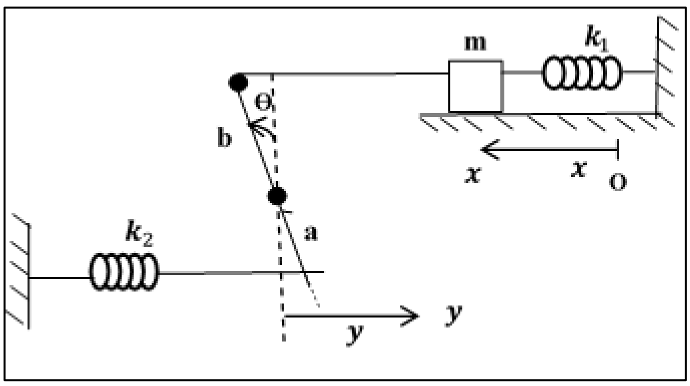
$x(0) = x_0 \cos\varphi = 2 \quad (1) \rightarrow \ x_0 \cos\varphi = 2$

$\acute{x}(0) = -2x_0 \sin\varphi = -6 \ \ (2) \rightarrow \ x_0 \sin\varphi = 3$

$(1)^2 \ + (2)^2 x_0^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = 4 + 9 \rightarrow x_0 = \sqrt{13} = 3{,}6cm$

$\frac{(1)}{(2)} = \frac{x_0 \sin\varphi}{x_0 \cos\varphi} \ = tg\varphi \ = \frac{2}{3}\ , \varphi = tg^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 0{,}98 \simeq 1rad$

Soit numériquement $x(t) = 3{,}6\cos(2t + 1{,}0)$cm



Exercice 3:

L'équation du mouvement

•L'énergie cinétique

$T = \frac{1}{2} m\dot{x}^2$

•L'énergie potentielle:

$U = \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2 y^2$

Pour les petites oscillations :

$x \simeq b\theta, \ \ y \simeq a\theta$

$\frac{y}{x} \simeq \frac{a}{b} \ \Rightarrow y = \ \frac{a}{b}x$

Donc :$U = \ \frac{1}{2}k_1 x^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{a}{b}x\right)^2 = \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\frac{a^2}{b^2}\right)x^2$

- Le lagrangien :

$L = T - U$

Donc :$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\frac{a^2}{b^2}\right)x^2$

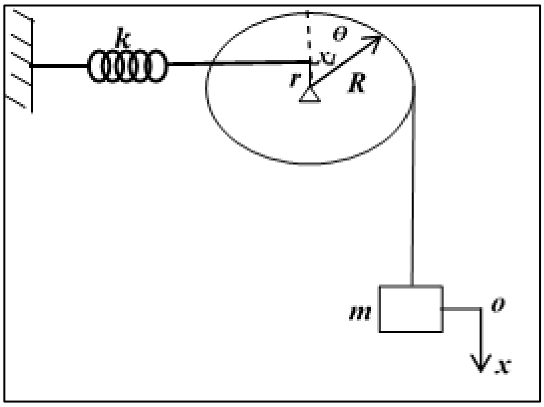
Le formalisme de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -\left(k_1 + k_2\frac{a^2}{b^2}\right)x \end{cases}$$

D'où l'équation du mouvement s'écrit : $m\ddot{x} + \left(k_1 + k_2\frac{a^2}{b^2}\right)x = 0$

$\Longrightarrow$ La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2\frac{a^2}{b^2}}{m}}$



- Le Lagrangien d'un système est donné par :

$L = T - U$

- L'énergie cinétique :

$T_{tot} = T_{poulie} + T_m$

D'où : $T_{poulie} = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$ et $T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

Avec : $x = R\theta$

$\dot{x} = R\dot{\theta}$ et J et le moment d'inertie de la poulie par rapport à O

Donc :

$$T_{tot} = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}(mR^2 + J)\dot{\theta}^2$$

•L'énergie potentielle :

$U = \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kr^2\theta^2 \quad , \quad x_1 = r\theta$

D'où $L = \frac{1}{2}(mR^2 + J)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}kr^2\theta^2$

•L'équation de Lagrange du système est :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = (mR^2 + J)\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -kr^2 x \end{cases}$$

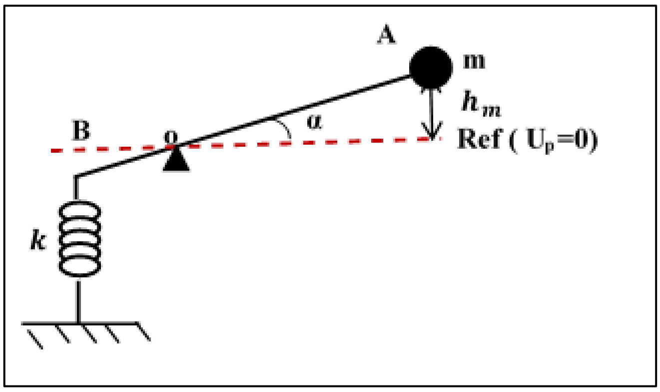
D'où

$$(mR^2 + J)\ddot{\theta} + kr^2\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{kr^2}{mR^2 + J}\theta = 0$$

La pulsation propre du système est :

$$\omega_0 = \left(\frac{kr^2}{mR^2 + J}\right)^{1/2}$$

Exercice 3:



+ L'énergie cinétique est :

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\alpha}^2$$

Le moment d'inertie de la masse m est :

$$J = m\overline{Ao}^2 = m\left(\frac{2}{3}L\right)^2$$

$$T = \frac{4}{9}mL^2\dot{\alpha}^2$$

+ L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{3}\alpha\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{1}{9}\right)L^2\alpha^2$$

On sait que :$U + T = constante(systéme conservatif)$

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{9}mL^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}kL^2\alpha^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow 8m\ddot{\alpha} + k\alpha = 0$$

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{8m}}$ est la pulsation propre des oscillations

Alors : $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{8m}{k}}$

Chapitre 3

Systèmes linéaires libres amortis à un degré de liberté

III-1. Oscillation libre amortie

Une partie de l’énergie de l’oscillateur est cédée ou milieu extérieur (dissipée par frottements ou rayonnement).L’amplitude des oscillations diminue au cours du temps et l’oscillateur finit par s’arrêter.

III-2 Types de frottements

Les équations de mouvement dépendent de la mature de frottements.La résolution de l’équation de mouvement n’est possible que dans certains types de frottements.

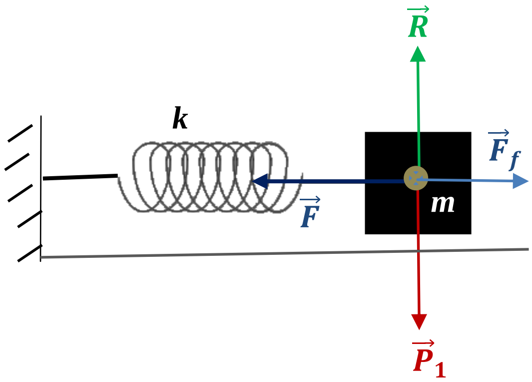
III-2.1. Frottement solide

La force de frottement est proportionnelle (~) à la réaction normale du support.

$F_f = -sgn(v)\mu R$

Avec :

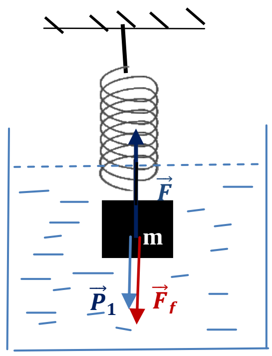
- F : Force de rappel $F = -kx$
- μ : coefficient de frictions dynamique ≠ friction statique.



III-2.2.Frottement fluide ou visqueux

La force de frottement fluide est proportionnelle (~) et opposée à la vitesse

$F_f = -\alpha v \ (\alpha > 0)$



III.2.3. Frottement des milieux très visqueux

La forme de frottement des milieux trés visqueux est ~ au carré de la vitesse.L’équation du mouvement est **non linéaire** et n'a en général pas de solution analytique.

III-2.4. Autres frottementtrès compliqués

Dans ce cours mous nous limiterons aux forces de frottement visqueux qui sont proportionnelle à la vitesse.L’expression de la force de frottement visqueux est la suivante:

$F_q = -\alpha\dot{q}$

Avec :

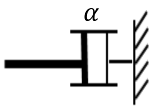
•α: Le coefficient de frottement visqueux $\boldsymbol{\alpha}$: $[N.s/m]$

• q: La cordonnée généralisée du système.

• q̇ : La vitesse généralisée du système.

Dans un mouvement unidimensionnel x la force s'écrit sou la forme :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{u}$$

En mécanique l'amortisseur est schématise par 

III-3. Equation de Lagrange dans un système amorti

S'il existe un frottement $(f = -\alpha\dot{q})$ l'équation de Lagrange devient:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = F_q$$

Sous l'action des forces de frottement, le système dissipe (perde) de l'énergie mécanique sous forme de chaleur, il y'a donc une relation entre la force $\boldsymbol{F_q}$ et la fonction de dissipation **D** d'un côté de la fonction de dissipation et le coefficient de frottement visqueux α:

$$F_q = \frac{-\partial D}{\partial \dot{q}} \; et \; D = \frac{1}{2}\alpha\dot{q}^2$$

L'équation de Lagrange dans le cas d'un système amorti devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}}$$

III-4. Equation différentielle : système masse-ressort-amortisseur

A) - <u>Principe dynamique de Newton</u>

Pour étudier le mouvement d'un tel système, on peut utiliser la relation fondamentale de la dynamique (RFD)

On écrit que:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma}$$

$$\vec{P} + \vec{F}_R + \vec{F}_\alpha = m\vec{\gamma}$$

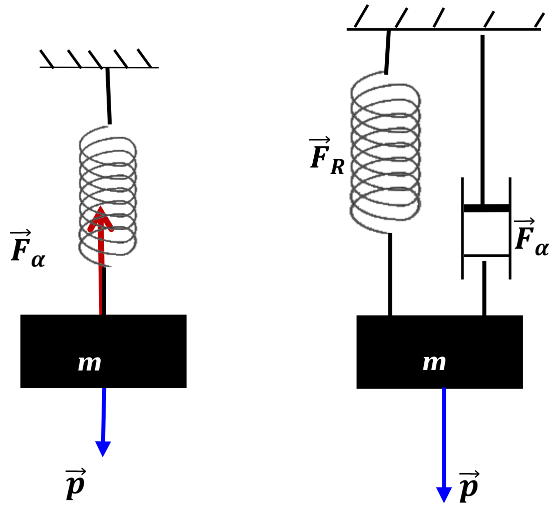
$$ox : mg - k(x + x_0) - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\underbrace{mg - kx_0}_{=0\ C.d} - kx - \alpha\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

* cette équation différentielle linéaire du deuxième degré homogène.



À l'équilibre $(mg = kx_0)$ En mouvement

B) – Méthode de Lagrange

* L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

* L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$

* La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$$

* La fonction de Lagrange :

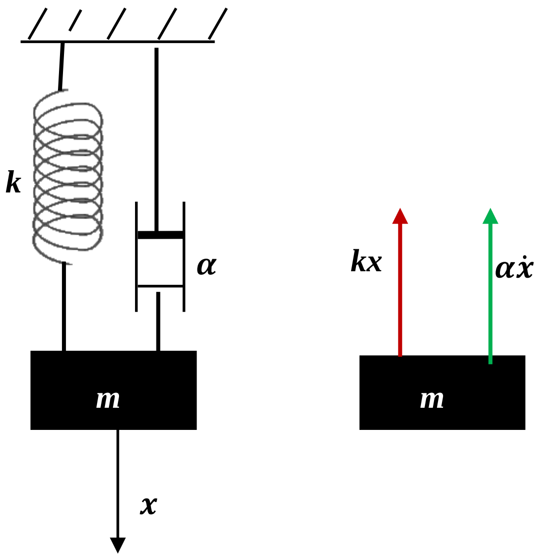
$$L = T - U$$

$$\Rightarrow L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

* Le formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = -\frac{\partial D}{\partial \dot{x}} \qquad \text{(III.1)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = -kx \\ \dfrac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x} \end{cases}$$



En remplaçons dans l'équation (III.1) on aura :

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0$$

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ ⇨C'est l'équation différentielle du mouvement dans le cas d'un système libre amortie.

Comme dans le cas de l'oscillateur harmonique non- amorti, la pulsation propre du système est $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$. Cependant, un nouveau terme associé au paramètre d'amortissement $\left(\frac{\alpha}{m}\right)$ apparait ce coefficient est égale $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ avec λ: est le facteur d'amortissement donc l'équation dumouvement s'écrit:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \text{(III.2)}$$

III-4.1. Solution de l'équation du mouvement

L'équation (III.2) est une équation différentielle du second ordre sans second membre. L'ensemble des solutions de cette équation forme un espace vectoriel de dimension 2. La solution générale de cette équation s'écrit comme une combinaison linéaire de deux solutions formant une base. On peut chercher cette base en s'intéressant aux solutions exponentielle du temps :

$x(t) = Ae^{rt}$

$\dot{x}(t) = Are^{rt}$

$\ddot{x}(t) = Ar^2e^{rt}$

On remplace les trois termes dans l'équation (III.2), soit :

$Ar^2e^{-i\omega t} + 2\lambda Are^{-i\omega t} + \omega_0^2 Ae^{rt} = 0$

Si on met Ae^{rt} en facteur, on obtient :

$Ae^{rt}(r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0)$ (III.3)

L'équation (III.3) est dite équation caractéristique. Elle est du second degré et peut admettre soit deux racines réelle distinctes, soit une racine double (appartenant à l'semble des réels) ou encore deux racines complexes. On calcule le discriminant réduit :

$\acute{\Delta} = \lambda^2 - \omega_0^2$; Trois régimes sont à étudier ;

III-4.1.1. Régime fortement amorti (apériodique)

Correspond au cas où le discriminant réduit est positif :

$$\Delta > 0 \ \Rightarrow \lambda > \omega_0$$

$r_1 = \frac{-2\lambda+\sqrt{\Delta}}{2} = -\lambda + \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2}$ et $r_2 = \frac{-2\lambda-\sqrt{\Delta}}{2} = -\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$

$x(t) = A_1e^{r_1t} + A_2e^{r_2t}$

$\Rightarrow \quad x(t) = A_1e^{\left(-\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t} + A_2e^{\left(-\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}$

$$x(t) = e^{-i\omega t}\left[A_1e^{\left(\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t} + A_2e^{\left(-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2}\right)t}\right]$$

Les coefficients Aet B sont determines par les conditions initiales sur lr déplacement et la vitesse.

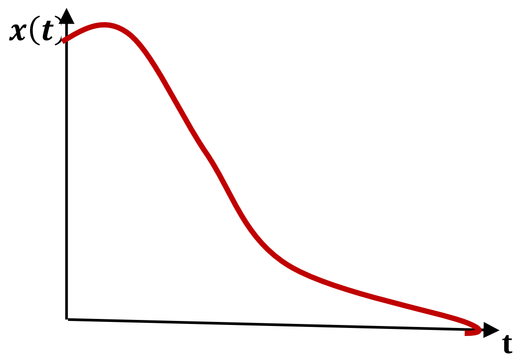


Figure III.1. Le regime aperiodique

En écartant le système de sa position d'équilibre. Il n'effectue plus aucune oscillation et s'arrête complètement au bout d'un certain temps qui dépend du coefficient d'amortissement.Plus le coefficient d'amortissement est grand et plus le temps d'arrêt est petit le régime est dit apériodique et l'amortissement est lourd.

Le terme $\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$ n'est pas considéré comme une pulsation puisque dans le cas d'un régime fortement amorti, il n'y a pas d'oscillation autour de la position d'équilibre.

III.4.1.2. Régime apériodique critique

Correspond au cas où le discriminant réduit est nul.

$\acute{\Delta} = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = \omega_0$

L'équation caractéristique admet une racine double réelle **:**

$r_1 = r_2 = -\lambda$

La fonction $e^{-\lambda t}$ est donc solution de l'équation différentielle.la seconde solution s'obtient en observant que $te^{-\lambda t}$ est aussi solution. La solution générale s'écrit alors

$x(t) = Ate^{-\lambda t} + Be^{-\lambda t}$

$x(t) = e^{-\lambda t}(At + B)$

$\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ ، $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\lambda = \omega_0 \;\Rightarrow\; \frac{\alpha}{2m} = \sqrt{\frac{k}{m}} \;\Rightarrow\; \frac{\alpha^2}{4m^2} = \frac{k}{m}$$

$\alpha_C = 2\sqrt{km}(C : critique)$

Le régime apériodique critique est tel qu'à la position d'équilibre s'efectue plus que pour n'importe quel autre regime aperiodique.

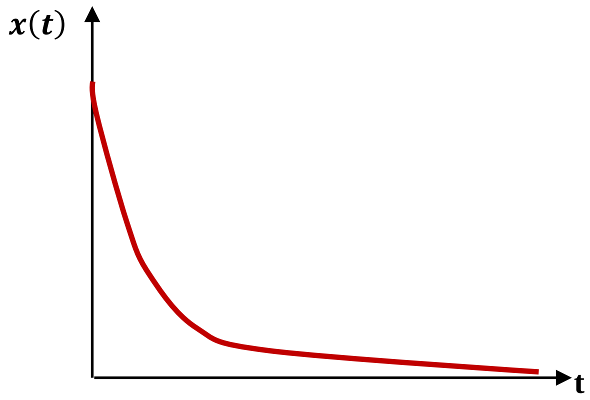


Figure.III.2. Régime apériodique critique

L'amortissement est dit amortissement critique. Le régime critique joue un rôle important dans certaines applications pratiques et la construction d'appareils de mesure car après une perturbation le système retourne le plus rapidement à sa position de repos sans la dépasser.

Remarque

Pour un fort amortissement $(\lambda \geq \omega_0)$, le système retourne à sa position d'équilibre sans osciller, un oscillateur amorti n'oscille pas toujours.

III-4.1.3. Régime pseudo- périodique

Correspond au cas où le discriminant réduit est négatif :

$\acute{\Delta} < 0 \quad \Rightarrow \quad \acute{\Delta} < \omega_0$

$\acute{\Delta} = (-1)(\omega_0^2 - \lambda^2) = i^2(\omega_0^2 - \lambda^2)$

Avec : $\boldsymbol{\omega_a}$ la pulsation d'amortissement où la pseudo-pulsation $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

$x(t) = A_1 e^{\left(-\lambda - i\sqrt{\acute{\Delta}}\right)t} + A_2 e^{\left(-\lambda + i\sqrt{\acute{\Delta}}\right)t}$

$x(t) = e^{-i\omega t}\left(A_1 e^{-i\sqrt{\acute{\Delta}}t} + A_2 e^{+i\sqrt{\acute{\Delta}}t}\right)$

La solution de l'équation:

$x(t) = Ae^{-\lambda t}cos(Acos\omega_a t + Bsin\omega_a t)$

Où bien $x(t) = Acos(\omega_a t - \varphi)$

Les constantes A et φ sont déterminées par les conditions initiales.

Le système effectue des oscillations d'amplitudes décroissantes et de $\ll pseudo-période \gg$ donnée par

$$T_a = \frac{2\pi}{\omega_a} \Rightarrow T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

$$\omega_a = \omega_0^2\sqrt{1-\xi^2}$$

$$T_a = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T_a = \frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}} \quad \Rightarrow \quad T_0 < T_a$$

Si $\lambda \ll \omega_0 \quad \Rightarrow \xi^2 = 1 \ donc T_a \simeq T_0$

La courbe $x(t)$ est envloppées par les deux exponentielles $Ae^{-\lambda t}$ et $-Ae^{-\lambda t}$, car en module $cos(\omega_a t - \varphi)$ ne peut pas dépasser l'unité. On voit que x devient nul quand t tend vers à sa position d'équilibre (voir figure 3.4). Il y a pseudo-pulsation et le mouvement est dit pseudo-périodique. L'amortissement est faible.

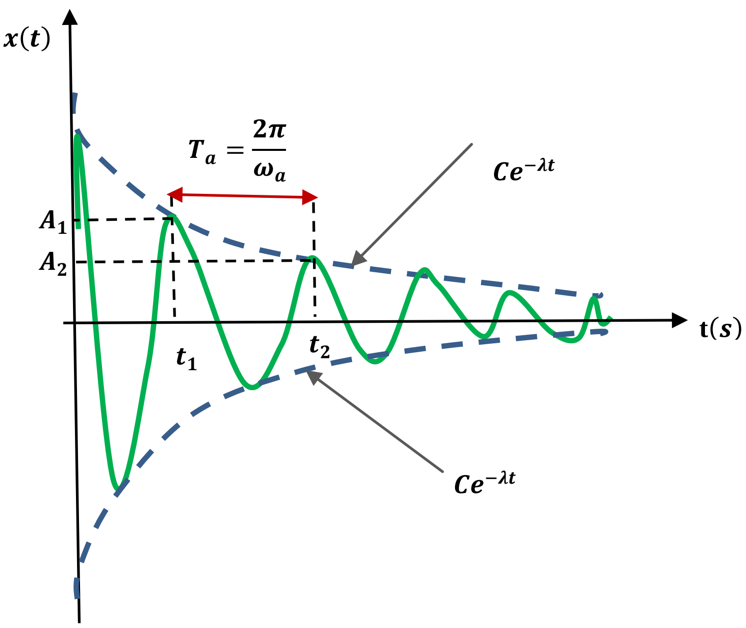


Figure III.3. Oscillations amorties (régime pseudo-périodique)

Il faut noter que la pseudo-pulsation ω_a est inférieure à la pulsation propre $\omega_0$et que la pseudo-période T_a est supérieure à la période T_0 de l'oscillateur non amorti correspondant.

III-5. Décrément logarithmique

Le décrément logarithmique δ est le logarithmique naturel du rapport des amplitudes $x(t)$et $x(t+T)$de deux élongations successives, il caractérise donc décroissance de l'amplitude pendant une période.

$$\delta = ln\left[\frac{x(t)}{x(t_1 + T_a)}\right]$$

Pour un système amorti:

$$x(t) = Ce^{-\lambda t}sin(\omega_a + \varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \delta = ln\frac{Ce^{-\lambda t}sin(\omega_a t + \varphi)}{Ce^{-\lambda(t_1+T_a)}sin(\omega_a(t_1 + T_a) + \varphi)}$$

$$\delta = ln\left(e^{\lambda T_a}\right) = \lambda T_a$$

$$\lambda T_a = \lambda\frac{T_a}{\sqrt{1-\xi^2}} = \xi\omega_0\frac{T_a}{\sqrt{1-\xi^2}} = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Donc $\delta = ln\frac{x(t_1)}{x(t_2)} = 2\pi\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} = \lambda T_a$

Remarque

Pour plusieurs périodes : $T = nT_a(t_1 = t_2 + nT_a)$

$$\delta = ln\frac{x(t_1)}{x(t_1 + nT_a)} = 2\pi\frac{n\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

La pseudo- période et le décrément logarithmique n'est de sens que si le régime est pseudo-périodique

III-6. Energie totale d'un oscillateur harmonique amorti

On considéré que:

$$x(t) = Ae^{-\lambda t}sin(\omega t + \varphi)$$

$$\dot{x}(t) = Ae^{-\lambda t}\omega cos(\omega t + \varphi) - A\lambda e^{-\lambda t}sin(\omega t + \varphi)$$

Dans le cas d'un amortissement très faible $(\lambda \longrightarrow 0)$.La pseudo- pulsation est à peu près égale à la pulsation naturelle du système soit:

$$\omega = \omega_0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

• L'énergie totale s'écrie:

$$E_T(T) = U + T$$

$$E_T(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-i\omega t}sin^2(\omega t + \varphi)\frac{1}{2}mA^2\left[e^{-2\lambda t}\omega^2cos^2(\omega t + \varphi) + e^{-2\lambda t}sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$
$$- 2\lambda\omega sin(\omega t + \varphi)cos(\omega t + \varphi)$$

Si on fait tendre vers 0 le deuxième et troisième terme de l'énergie cinétique on obtient pour l'énergie totale les trois expressions suivantes :

$$E_T(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda t}$$

Où:

$$E_T(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 e^{-2\lambda t}$$

III-7. Facteur de qualité

Dans un oscillateur harmonique amorti, il ya dissipation de l'énergie mécanique. On caractérise cette dissipation par le coefficient où facteur de qualité **Q** qui rend compte du rendement d'oscillateur où de sa qualité.

Il est donné par le rapport suivant:

$$Q = 2\pi\frac{E_m}{\Delta E}$$

$$Q = 2\pi\frac{E_T(t)}{[E_T(t) - E_T(t+T)]}$$

$$Q = 2\pi\frac{\frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda t}}{\left[\frac{1}{2}kA^2e^{-i\omega t} - \frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda(t+T)}\right]}$$

$$\Leftrightarrow Q = 2\pi\frac{1}{[1 - e^{-2\lambda t}]}$$

• On suppose que l'amortissement est très faible.

$$\lambda \longrightarrow 0 \qquad e^{-2\lambda t} = 1 - 2\lambda T$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda T}$$

Soit **:**

$$Q = \frac{\omega}{2\lambda} \quad \text{Où} \quad Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$$

$$\Delta \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq \omega_0$$

Soit **:**$Q \leq \frac{1}{2}$

Il n'ya pas d'oscillations, le régime est apériodique, la pseudo périodique s'écrit :

$$T = \frac{2\lambda}{\omega_0\sqrt{1 - {}^{1}/_{4}\,Q^2}}$$

$$T_0 = \frac{T_0}{\sqrt{1 - {}^{1}/_{4}Q^2}}, \ T = \frac{T_a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

III-8. Oscillateur harmonique électrique

Le circuit oscillant en plus de l'inductance L et de la capacité C. comprend une résistance ohmique R.

Selon la loi de Kirchhoff :

$U_R + U_C + U_L = 0$

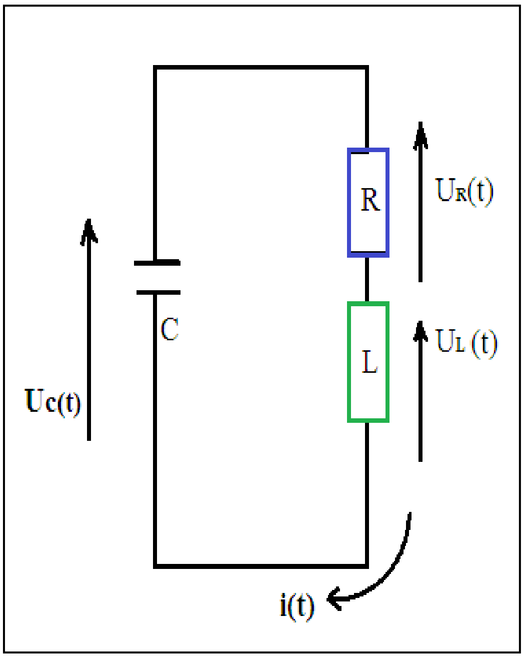
$Ri(t) + {}^{1}/_{C}\, q + L\dfrac{di}{dt} = 0$

$R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q + L\dfrac{d^2q}{dt^2} = 0 \Longrightarrow$

$R\dot{q} + \dfrac{1}{c}q + L\ddot{q} = 0$

$\ddot{q} + \dfrac{R}{L}\dot{q} + \dfrac{1}{LC}q = 0 \Longrightarrow$

$\ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0$



Avec : $\begin{cases} \lambda = \frac{R}{2L} \\ \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \end{cases}$ donc $\quad \ddot{q} + 2\lambda\dot{q} + \omega_0^2 q = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{R}{2L} \\ \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \end{cases}$

<u>Remarque</u>

Pour un amortissement critique $\lambda = \omega_0 \Rightarrow \frac{R}{2L} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ donc : $R = R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Tableau III-1. Analogie entre oscillations mécaniques et éclectiques

Caractéristique	Oscillations mécaniques	Oscillations électriques
Equation du mvt	$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$	$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
Pulsation propre	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}(\text{rd.s}^{-1})$	$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{Lc}}$
Coefficient de frottement visqueux	λ (N .s.m^{-1})	R(Ω)
Coefficient d'amortissement	$\alpha = \frac{\lambda}{2m}\,(s^{-1})$	$\alpha = \frac{R}{2L}$

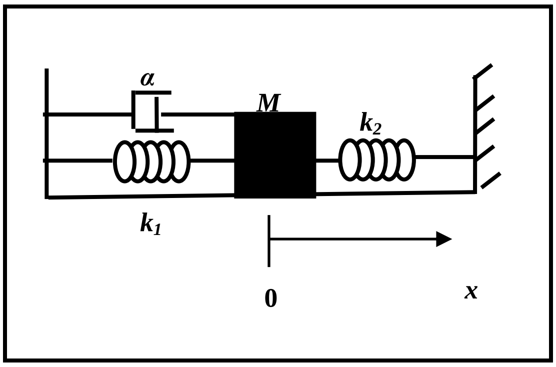
Pulsation amorti	$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda 2}{4m^2}}$ (rd.s^{-1})	$\omega_a = \sqrt{\frac{1}{Lc} - \frac{R^2}{4L^2}}$
Facteur de qualité	$Q = \sqrt{\frac{mk}{\lambda}}$ (sans unité)	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{c}}$
Energie cinétique	$T = E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ (J)	$E_{B0} = \frac{1}{2}Li^2$
Energie potentielle	$U = E_p = \frac{1}{2}kx^2$(J)	$E_{co} = \frac{q^2}{C}$
Fonction de dissipation	$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$	$E_D = \frac{1}{2}Ri^2$

Exercices

Exercice 1:

L'analyse d'un système vibratoire amorti donne, pour deux oscillations successives, les amplitudes suivantes : $x_1 = 3mm$ et$x_2 = 0.5mm$. Calculer le taux d'amortissement ξ.

Exercice2:



Soit le système mécanique ci-contre :

a)-Ecrire l'équation du mouvement de la masse M suivant l'axe des x.

b)-Pour quelles valeurs de α le mouvement du système est oscillatoire amorti,

c)-Déterminer l'expression générale de $x(t)$ pour $\alpha = 0.1Nm^{-1}s$, le décrément logarithmique $\boldsymbol{\delta}$ ainsi que le facteur de qualité $\boldsymbol{Q}$ système.

M = $1kg,\ k_1 = 20\,{}^{N}/_{m}, k_2 = 5\,{}^{N}/_{m}$.

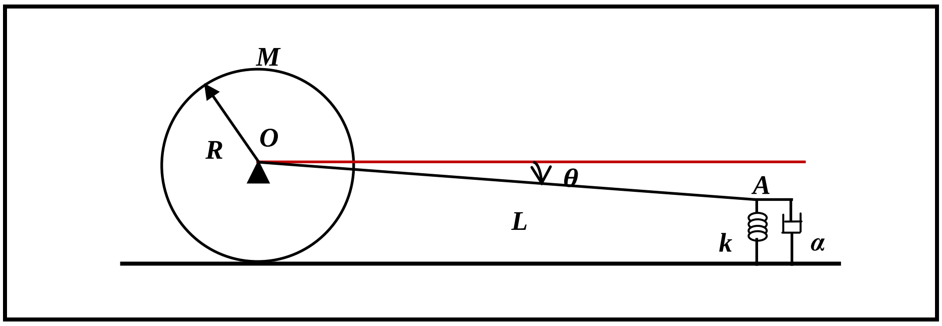
Un corps de masse $m = 1Kg$ suspendu à un point fixe par un ressort de constante de raideur $\boldsymbol{k}$ est plongé dans un liquide. Le liquide exerce sur le corps une force de frottement égale à $-\boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{u}}$ où $\vec{\boldsymbol{u}}$ est la vitesse du corps et α une constante égale à $0.4Nm^{-1}s$.

a)- Déterminer les valeurs de k pour lesquelles le mouvement du corps dans le liquide sera oscillatoire amorti.

b)- si le mouvement du corps est oscillatoire amorti de décrément logarithmique $\boldsymbol{\delta} = \mathbf{10^{-2}}$, déterminer la pseudo période et la constante de raideur du ressort.

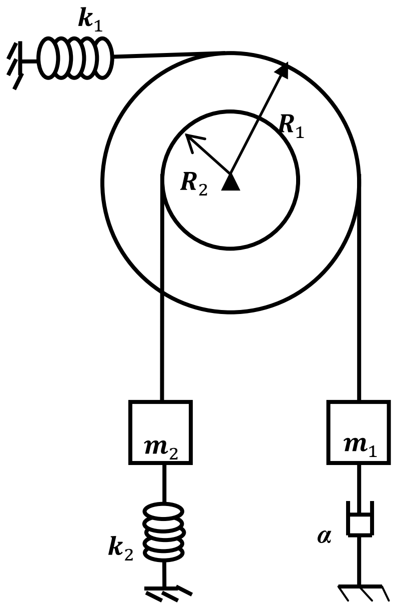
Exercice 3 :

Un disque plein de masse ***M*** et de rayon ***R*** tourne sur u plan horizontal. Une barre de longueur L et de masse négligeable est fixée par une extrémité à l'axe de rotation (Δ) du disque passant par **O**. A l'autre extrémité **A** est fixé un ressort de constante ***k*** et un amortissement de coefficient de frottement ***α*** Comme indiqué sur la figure qui suit



1. Etablir l'équation différentielle du mouvement en utilisant la méthode de Lagrange.
2. Donner le coefficient d'amortissement, la pulsation propre et la pseudo-pulsation ; dans le cas d'un amortissement faible, donner la solution de l'équation différentielle.
3. On considère que l'énergie que l'énergie totale du système a diminué de 50 % après 5pseudo-périodes (la pseudo- période ***T= 1s***).
4. Calculer le décrément logarithmique, le coefficient, le coefficient d'amortissement.

Exercice 4 :



Soit le système mécanique amorti à un degré de liberté montré sur la figure. Soit **θ** le déplacement angulaire du disque dans le sens des aiguilles d'une montre.

1-Calculer l'énergie cinétique ***T*** et l'énergie potentielle **U** du système.

2- En utilisant l'équation de Lagrange, trouver l'équation différentielle du mouvement.

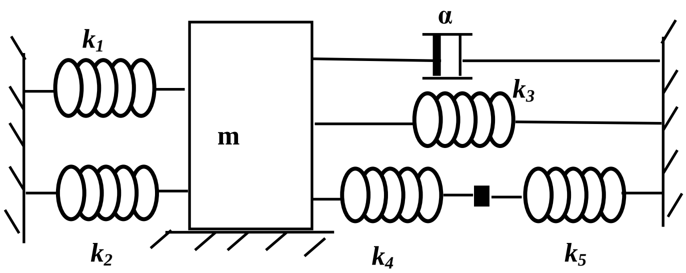
3- Trouver la pulsation propre des oscillations libres du système $\boldsymbol{\omega_0}$.

4- Quelle est la valeur de α si le taux d'amortissement ζ du système est égale à 1.25 ?

Application numérique :$R_1 = 10cm,\ R_2 = 30cm, J = 1.1kg, m_1 = 10kg, m_2 = 25kg\ , k_1 = 1.104\, {}^{N}/_{m}, k_2 = 1.105\, {}^{N}/_{m}$

5-Ecrire la solution générale de $x(t)$.

Exercice 5 :



Soit le système mécanique de la figure ci-contre :

1)- Donner l'équation différentielle du mouvement en $\boldsymbol{x}$ de la masse m en appliquant la relation fondamentale de la dynamique.

2)- Quelle est la nature du mouvement. Donner l'expression de $\boldsymbol{x(t)}$.
Donner : $k_1 = 10\,N/m,\ k_2 = 1\,N/m,\ k_3 = \ 4\,N/m,\ k_4 = 2\,N/m,\ k_5 = 3\ N/m,$ m=10Kg, $\alpha = 1Nm^{-1}$, $F_0 = 100N$, $\Omega = 10\,rad/s$.

Solutions

Exercice 1 :

Le décrément logarithmique : $\delta = \lambda T_a$

T_a: la pseudo-période, $T_a = \frac{2\pi}{\omega_0}, \lambda = \zeta\omega_0$

$\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$, avec n=1 pour deux oscillations successives

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{3}{0.5}\right) = \ln 6 = 1.792$$

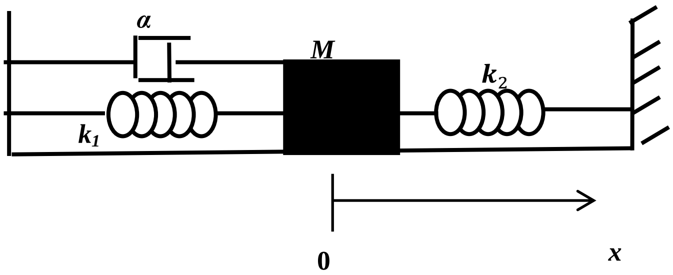
ω_a la pseudo-pulsation, $\omega_a = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$,

$$\delta = \lambda T_a = \zeta\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_a} = \zeta\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}} 1.792 = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$3.21(1-\zeta^2) = 39.478\zeta^2 \quad 13.298\zeta^2 = 1 \Rightarrow \zeta^2 = \frac{1}{13.298} = 0.075$$

$$\zeta = \sqrt{0.075} = 0.274$$

Exercice 2



a- $m\ddot{x} = k_1 x - k_2 x - \alpha\dot{x}$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + (k_1 + k_2)x = 0$$

$$\ddot{x} + \alpha\dot{x} + 25x = 0$$

b- L'équation caractéristique de l'équation du mouvement est :

$$r^2 + \alpha r + 25 = 0$$

c- Pour que le mouvement soit oscillatoire amorti il faut que $\Delta = \alpha^2 - 4 \times 25$ $soit < 0$ donc les valeurs de α sont : $\alpha < 10\ Nsm^{-1}$

d- $\alpha = 0.1Nsm^{-1} < 10 \Rightarrow x(t) = Ae^{-\frac{\alpha}{2m}t}(\omega_a t + \varphi)$

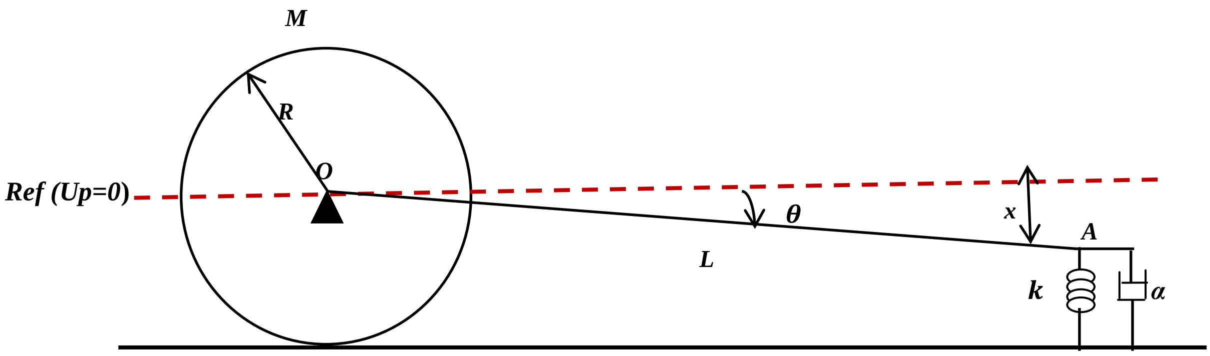
$$x(t) = Ae^{-5.10^{-2}t}\cos(\omega_a + \varphi)\ (\omega_a = \Omega)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\alpha}{2m}\right)^2} = \sqrt{25 - (5 \times 10^{-2})^2} \cong 5\ rad/s$$

$$\delta = \frac{\alpha}{2m}T_a = 5 \times 10^{-2},\ \omega_a = 5 \times 10^{-2}\frac{2\pi}{5} = 2\pi 10^{-2}$$

Facteur de qualité $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{5}{\frac{\alpha}{m}} = \frac{5}{0.1} = 50$

Exercice 3



1-Ecriture de l'équation du mouvement du système

En utilisant la méthode de Lagrange :

- L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2\right]\dot{\theta}^2$
- L'énergie potentielle : $U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}[kL^2]\theta^2$ avec $x = L\theta$
- Le Lagrangien : $L = T - U = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}MR^2\right]\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}[kL^2]\theta^2$
- Le formalisme de Lagrange : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$
- La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}[\alpha L^2]\dot{\theta}^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -kL^2\theta \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta} + kL^2\theta = -\alpha L^2\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\alpha L^2}{\frac{1}{2}MR^2}\dot{\theta} + \frac{kL^2}{\frac{1}{2}MR^2}\theta = 0 \quad \rightarrow (1)$$

2- Déduction du coefficient d'amortissement, la pulsation propre et la pseudo-période :

On identifie l'équation (1) avec l'équation (2) :

On obtient :

- Le coefficient d'amortissement : $\lambda = \frac{\alpha L^2}{MR^2}$
- La pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{2kL^2}{MR^2}}$
- Et la pseudo-pulsation : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

La solution dans le cas d'un amortissement faible est donnée par :

$\theta(t) = Ae^{-\lambda t}\sin(\omega t + \phi)$

A et ϕ sont des constantes déterminée par les conditions initiales.

3- Le calcul du coefficient et le décrément logarithmique :

A l'instant initial t : $T(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-\lambda t}$

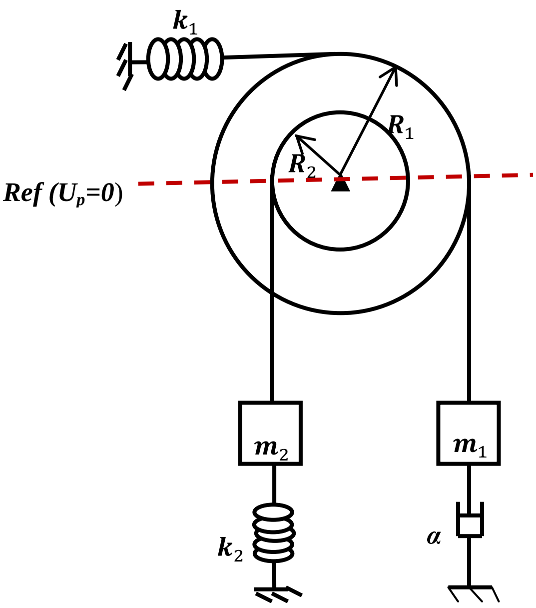
A l'instant t+5t : $T(t+5t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\lambda t(t+5t)} = 0.5\,T(t)$

$$\frac{1}{2}e^{-\lambda t}e^{-10\lambda t} = \frac{0.5}{2}kA^2e^{-2\lambda t}\ e^{-10\lambda T} = 0.5$$

Le décrément logarithmique:

$\delta = \lambda T \Rightarrow \qquad \delta = \frac{\ln 0.5}{-10} = 0.069s^{-1}$

Exercice 4 :



❖ L'énergie cinétique T :

$T_{tot} = T_{m_1} + T_{m_2} + T_c$

$T_{tot} = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$

avec $\dot{x_1} = R_1\dot{\theta}$, $\dot{x_2} = R_2\dot{\theta}$

$$T_{tot} = \frac{1}{2}m_1\left(R_1\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(R_2\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$$

$$T_{tot} = \frac{1}{2}[m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + J_\Delta]\dot{\theta}^2$$

❖ L'énergie potentielle U :

$U_{k_1} = U_{k_1} + U_{K_2}$

$$U_{tot} = \frac{1}{2}k_1(R_1\theta)^2 + \frac{1}{2}k_2(R_2\theta)^2$$

$U_{tot} = \frac{1}{2}[k_2R_2^2 + k_1R_1^2]\theta^2$

2- L'équation différentielle du mouvement:

- L'équation de Lagrange :

$L = T - U$

- La fonction de dissipation :

$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}(R_1)^2\dot{\theta}^2$

Le formalisme de Lagrange:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial\theta} = -\frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}}$$

$$L = \frac{1}{2}(m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + J_\Delta)\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}(k_1R_1^2 + k_2R_2^2)\theta^2 \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right) = (m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + J_\Delta)\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial\theta} = -(k_1R_1^2 + k_2R_2^2)\theta \\ \frac{\partial D}{\partial\dot{\theta}} = \alpha R_1^2\dot{\theta} \end{cases}$$

$(m_1r_2^2 + m_2r_1^2 + J_\Delta) + (k_1r_2^2 + k_2r_2^2)\theta = -\alpha r_2^2\dot{\theta}$

$(m_1r_2^2 + m_2r_1^2 + J_\Delta)\ddot{\theta} + \alpha r_2^2\dot{\theta} + (k_1r_2^2 + k_2r_1^2)\theta = 0 \rightarrow \quad (1)$

3- Pulsation propre du système ω_0:

On divise l'équation différentielle par $m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + J_\Delta$

$$\omega_0^2 = \frac{k_1r_2^2 + k_1r_1^2}{m_1r_2^2 + m_2r_1^2 + J_\Delta}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1r_2^2 + k_2r_1^2}{m_1r_2^2 + m_2r_1^2 + J_\Delta}}$$

4- la valeur de α si le taux d'amortissement ζ= 1.25

<u>AN :</u> on injecte toutes les valeurs dans l'équation (1)

$2.25\ddot{\theta} + 0.09\dot{\theta} + 1900\theta = 0$ → (2)

On divise par 2.25 l'équation (2) :

$\ddot{\theta} + 0.04\alpha\dot{\theta} + 844.44 = 0$

Equivalente à l'équation :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2\lambda = 0.04\alpha \\ \lambda = \omega_0\zeta \end{cases}$$

Avec $\omega_0^2 = 844.44 \rightarrow \omega_0 = 29.059 \ {rad}/{s}$

$$2\omega_0\zeta = 0.04\alpha\,, \ \alpha = \frac{2\omega_0\zeta}{0.04}$$

AN : $\alpha = \frac{2\times 29.059\times 1.25}{0.04} = 1816.19 \frac{N.s}{m}$

5- le taux d'amortissement $\zeta = 1.25 > 1$, système sans amorti ou apériodique 2 racine réelles $r_{1,2} = -\zeta\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}$

La solution générale est $\theta = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$

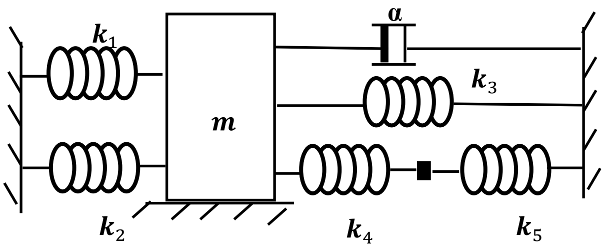
$$\theta(t) = Ae^{\left(-\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + Be^{\left(-\zeta\omega_0 - \omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}$$

$$\theta(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\left(Ae^{\left(\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t} + Be^{\left(-\omega_0\sqrt{\zeta^2-1}\right)t}\right)$$

$$\theta(t) = e^{-25.07t}(Ae^{15.04t} + Be^{-15.04t}) \begin{pmatrix} x = r_1\theta \\ x = r_2\theta \end{pmatrix}$$

<u>Exercice 7:</u>

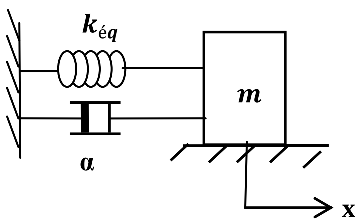
1- La raideur équivalente est



$$k_{eq} = \left[k_3 + \left(\frac{k_4.k_5}{k_4 + k_5}\right)\right] + (k_1 + k_2)$$

$$k_{eq} = 16.42\ N/m$$

- Le système mécanique équivalent et :



2- On applique la relation fondamentale de la dynamique : ($m\vec{\gamma} = \sum \vec{F_i}$)

$$m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_i} + \vec{F_R}$$

L'équation différentielle du mouvement:

$$m\ddot{x} = -kx + \alpha\dot{x}$$

$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + k_{eq}x = 0$ /m

$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k_{eq}}{m} = 0$ on pose $\begin{cases} 2\lambda = \frac{\alpha}{m} \\ \omega_0^2 = \frac{k_{eq}}{m} \end{cases}$

$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

3- Solution d'essai $\overline{x} = Be^{\lambda t}$

L'équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$

avec $\begin{cases} 2\lambda = \frac{1}{10} = 0.1\,,\ \ \omega_0^2 = \frac{k_{eq}}{m} = \frac{16.42}{10} = 1.64 \\ \lambda = \frac{1}{20} = 0.05,\ \ \omega_0 = 1.28\, rad/s \end{cases}$

$r^2 + 0.15r + 1.64 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \Rightarrow \Delta = (0.1)^2 - 1.64 = -1.63$

$\Delta' = \frac{\Delta}{4} = \lambda^2 - \omega_0^2 \ \rightarrow \Delta' = -0.4$

$\zeta = \frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{0.05}{1.28} = 0.039$

$\Delta < 0$ ou bien $\zeta < 1$, le mouvement est oscillatoire amorti.

Expression de $x(t)$:

$x(t) = e^{-0.05t}\cos(0.699t - \varphi)$

La pseudo-pulsation:

$\omega_a^2 = \omega_0^2 - \lambda^2$

AN : $1.64 - 0.025 = 1.615$

$\omega_a = 1.27\, rad/s$

$x(t) = Ae^{-0.05t}\cos(1.27t - \varphi)$

Chapitre 4

Système linéaire forcés

à un degré de liberté

IV-1. Définition d'uneoscillation forcée

Si on veut que le mouvement persiste, il faut fournir régulièrement de l'énergie à l'oscillateur et le forcer à osciller grâce à une force excitatrice extérieure. Après une période transitoire, le système oscille à la même période que la force excitatrice.

IV-2. Equation de Lagrange des systèmes forces

Il existe une force d'excitation externe $F(t)$, l'équation de Lagrange s'écrit :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}+F(t)$ (En translation).

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \theta}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}+\mu(t)$ (En rotation, μ est le moment de la force$F$).

Tel que :$\mu(F_{ext})=F_{ext}.L=\frac{\partial r}{\partial \theta}|F_{ext}|$

$\mu(F_{ext})$: Le moment de la force appliquée$[N.m]$.

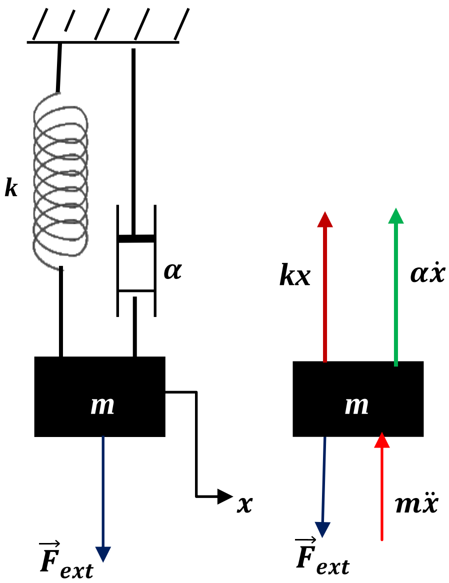
L: Le bras de levier : est la distance droite d'action de la force.

r : La distance parcourue par la masse dans la direction de l'action de la force.

IV.2.1. Exemple : masse ressort- amortissent

Le cas d'un penduleélastique (vertical), voir figure ci-contre :

Il est formé d'un ressort de constante de raideur k et d'un corps de mase m. il est soumis entre autre, à une force de frottement $\vec{F}_F=-\alpha\vec{\dot{x}}$ et à une force excitatrice $\vec{F}_{EXT}=F_0 sin\Omega t\vec{\imath}$



L'équation de Lagrange s'écrit :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=-\frac{\partial D}{\partial \dot{x}}+F_{ext}t$ (IV-1)

- L'énergie cinétique du système : $T=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$
- L'énergie potentielle du système: $U=\frac{1}{2}kx^2$
- La fonction de dissipation du système : $D=\frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2$
- La fonction de Lagrange : $L=T-U=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-\frac{1}{2}kx^2$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} \\ \frac{\partial L}{\partial x} = -kx \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = \alpha\dot{x} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (IV.1) on aura

$$m\ddot{x} + kx = -\alpha\dot{x} + F_0 sin\Omega t$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}sin\Omega t$$

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}sin\Omega t$$

Equation différentielle du $2^{éme}$ ordre avec second nombre.

IV-3. Solution de l'équation différentielle

La solution de cette équation différentielle est égale à la somme de la solution sans second membre (où solution homogène) x_H (t)est d'une solution particulière de l'équation avec second nombre x_H (t), tel que :

$$x_G(t) = x_H(t) + x_p(t)$$

- x_H(t) :Le régime transitoire.
- x_p(t) : Le régime permanant.

IV-3.1. Régimetransitoire

C'est la solution de l'équation différentielle :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

On suppose que$\lambda < \omega_0$: cas des oscillations faiblement amorties :

$$x_H(t) = Ce^{-i\omega t}sin(\omega_a + \theta)$$

Avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

IV-3.2. Régime permanant

Cette solution à une forme similaire à l'excitation est valable pour résoudre l'équation complète du mouvement ainsi :

$$x_p = Asin(\Omega t + \varphi)$$

IV-4. Etude du régime permanant

Au cours de ce régime, il n'existe que la solution particulière et donc :

$$x(t) \approx x_p = Asin(\Omega t + \varphi)$$

Par conséquent:

$$\ddot{x}_p + 2\lambda\dot{x}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{F(t)}{m}$$

En utilisant les représentations complexes :

$$\ddot{\bar{x}}_p + 2\lambda\dot{\bar{x}}_p + \omega_0^2 x_p = \frac{\overline{F(t)}}{m} \qquad \textbf{(IV.2)}$$

Ainsi :

$\bar{x}_p = Ae^{-i(\Omega t+\varphi)} = \bar{A}e^{-i\Omega t}$

avec : $\bar{A} = Ae^{-i\varphi}$est l'amplitude complexe.

$\dot{\bar{x}}_p = i\Omega\bar{A}e^{-i\Omega t}$

$\ddot{\bar{x}}_p = -\Omega^2\bar{A}e^{-i\Omega t}$

$\overline{F_0} = F_0 e^{-i\Omega t}$

En utilisant ces résultats dans l'équation (IV.2), cela donne :

$$-\Omega^2\bar{A}e^{-i\Omega t} + 2\lambda i\Omega\bar{A}e^{-i\Omega t} + \omega_0^2\bar{A}e^{-i\Omega t} = \frac{F_0}{m}e^{-i\Omega t}$$

*L'amplitude complexe est alors:

$$\bar{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda i\Omega)}$$

$$\bar{A} = \frac{\frac{F_0}{m}}{(\omega_0^2 - \Omega^2 + 2\lambda i\Omega)}\left(\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\lambda i\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2 - 2\lambda i\Omega}\right)$$

$$\bar{A} = \frac{\frac{F_0}{m}(w_0^2 - \Omega^2)}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2} - \mathrm{i}\frac{2\frac{F_0}{m}\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \lambda^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}$$

La solution de cet oscillateur forcé en régime permanant peut s'écrit :

$$x(t) = Asin(\Omega t + \varphi)$$

Où l'amplitude de l'élongation A vaut : $A = |\bar{A}|\sqrt{\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}^2}$

$$\boxed{A = |\bar{A}| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}}$$

Et la phase ϕdu mouvement, qui représente le déphasage entre $x(t)$et$F(t)$, est donné par :

$$tan\varphi = \frac{I_m(\bar{A})}{Re(A)} = \frac{y}{x} = \frac{\frac{2\frac{F_0}{m}\lambda\Omega}{(\omega_0^2+\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}{\frac{\frac{F_0}{m}(\omega_0^2-\Omega^2)}{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$$

$$\boxed{tan\varphi = -\frac{2\lambda\Omega}{(\omega_0^2 - \Omega^2)}}$$

La solution particulière s'écrit enfin :

$$\boxed{x_p(t) = \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{(\omega_\circ^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}} \sin\left(\Omega\mathrm{t} + \mathrm{Arctg}\left(\frac{2\lambda\Omega}{\omega_\circ^2 - \Omega^2}\right)\right)}$$

Remarques importantes

1. La solution générale est la somme de deux solutions :

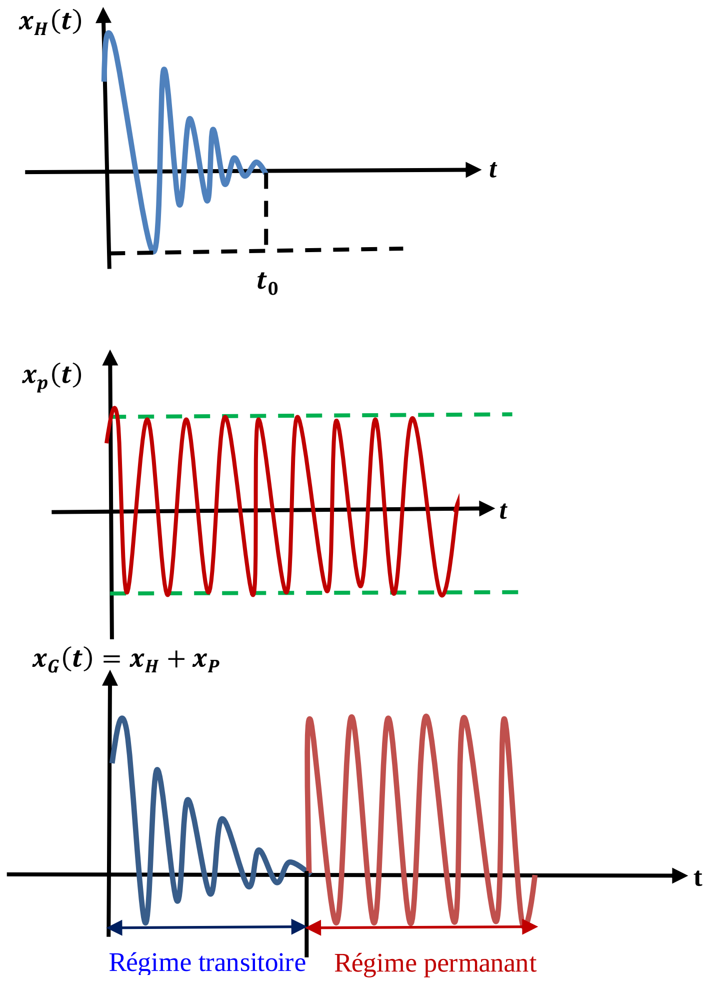
- Une solution homogène dont l'amplitude et l'énergie diminue avec le temps ce qu'elles deviennent nulles. C'est une solution transitoire.
- Une solution particulière de pulsation **ω** et d'amplitude **A** égale à :

$$\boxed{\mathrm{A} = \frac{\mathrm{B}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\lambda\Omega)^2}}}$$

C'est une solution permanente ou stationnaire

2. Après un certain temps, le régime transitoire disparait et le mouvement oscillatoire n'est dû qu'au mouvement permanent $x_p(t)$

- Pour $t < t_{0,} x(t) = x_p(t) + x_H(t)$
- Pour $t \geq t_0, \quad x(t) = x_p(t)$



IV-5. Phénomène de résonnance

IV-5.1. Résonnance en amplitude

Nous allons étudier la variation de l'amplitude **A** en fonction de la pulsation de l'excitation :

$$A(\Omega) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

Lorsque:

$$\Omega = 0 : A(0) = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{({\omega_0}^2)^2}} = \frac{\frac{F_0}{m}}{{\omega_0}^2} = \frac{\frac{F_0}{m}}{\frac{k}{m}} = \frac{F_0}{k}$$

- $\pi \to \infty : A(\infty) = 0$

Le maximum de L'amplitude est obtenu pour : $\frac{dA}{d\Omega} = 0$

$$\frac{dA}{d\Omega} = \frac{[2(-2\Omega)({\omega_0}^2 - \Omega^2) + 8\lambda^2\Omega]\frac{F_0}{m}}{2(({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow \; (-\omega_0{}^2 + \Omega^2) + 2\lambda = 0$$

$$\boxed{\Rightarrow \; \Omega^2 = \omega_0{}^2 - 2\lambda^2}$$

Cette pulsation est appelée la pulsation de résonance et est notée

$$\boxed{\Omega_R = \sqrt{\omega_0{}^2 + 2\lambda^2}}$$

A cette pulsation, le maximum de l'amplitude existe seulement si

$$\lambda < \frac{\omega_0}{2} \; ; \; (\Omega_R > 0)$$

L'amplitude maximale est alors:

$$\boxed{A_{max} = \frac{\frac{F_0}{m}}{2\lambda\sqrt{\omega_0{}^2 - \lambda^2}}}$$

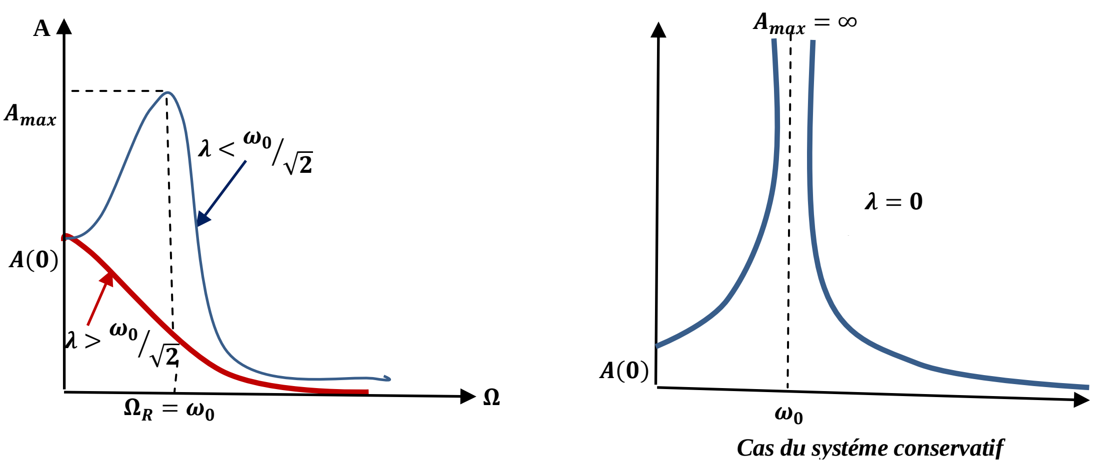


Figure IV-3. Variation de l'amplitude a en fonction de ω.

IV.5.2. Variation de la phase en fonction de Ω

On a trouvé :

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = \cos^2\varphi \frac{d(tan\varphi)}{d\Omega} \quad \text{et} \quad cos\varphi = \frac{1 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + 4\frac{\lambda^2\Omega^2}{\omega_0{}^2}}}$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = \frac{-(1-\Omega^2)^2}{({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+4\frac{\lambda^2\Omega^2}{{\omega_0}^2}}\left(-2\frac{\lambda}{\omega_0}\right)\frac{1+\frac{\Omega^2}{{\omega_0}^2}}{\left(1-\frac{\Omega^2}{{\omega_0}^2}\right)}$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = \frac{-2\frac{\lambda}{\omega_0}\left(1+\frac{\Omega^2}{{\omega_0}^2}\right)}{\left(1+\frac{\Omega^2}{{\omega_0}^2}\right)+4\frac{\lambda^2}{{\omega_0}^2}\frac{\Omega^2}{{\omega_0}^2}}$$

$$\boxed{\frac{d\varphi}{d\Omega} = \frac{-2\lambda\omega_0({\omega_0}^2+\Omega^2)}{({\omega_0}^2-\Omega^2)+4\lambda^2\Omega^2}}$$

- Si $\Omega \to 0$

$\Rightarrow \tan\varphi \to 0$ et $\frac{d\varphi}{d\Omega} \simeq -2\frac{\omega_0}{\lambda}$

- Si $\Omega \to \omega_0$

$$\Rightarrow \tan\varphi \to \infty \text{ et } \frac{d\varphi}{d\Omega} \simeq \frac{\omega_0}{\lambda}$$

- $\varphi = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow$ le déplacement est en avance de $\frac{\pi}{2}$ sur l'excitation.
- Lorsque $\Omega \to \infty$

$\tan\varphi$ et $\frac{d\varphi}{d\Omega}$ Tendent vers 0

Puisque $\frac{d\varphi}{d\Omega}$est toujours < 0, le déplacement est de $-\pi$

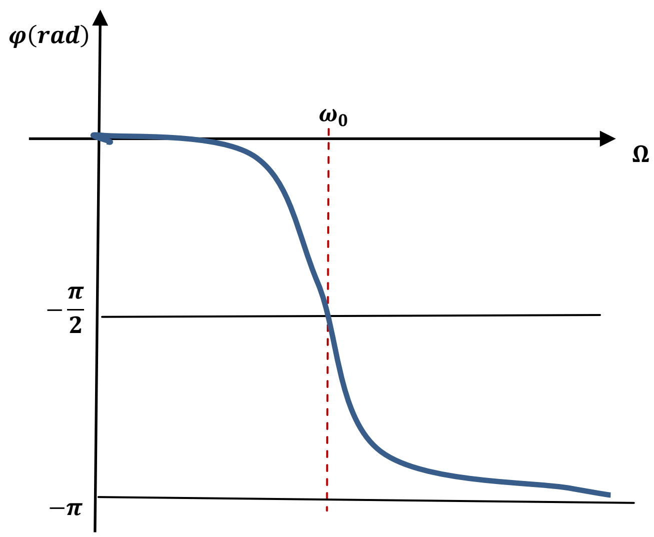


Figure VI-4 : Variation de la phase en fonction de Ω

IV-5.3. Phénomene de resonnance et facteur de qualite

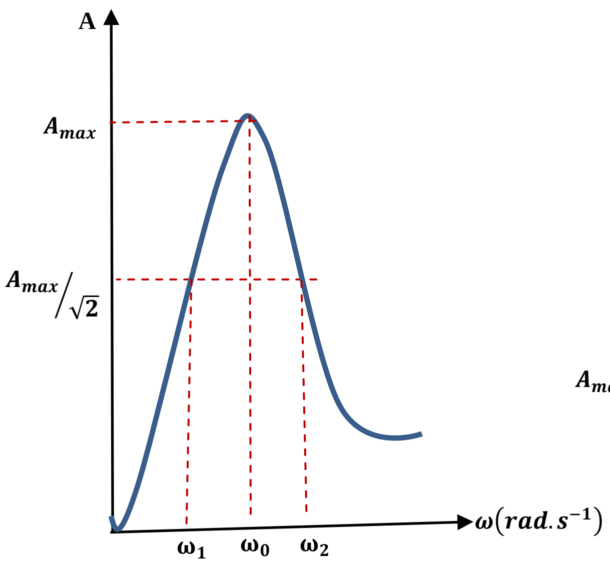
Le phénomene de resonnance apparait quand la pulsation de l'excitation se rapproche de pulsation propre de système.

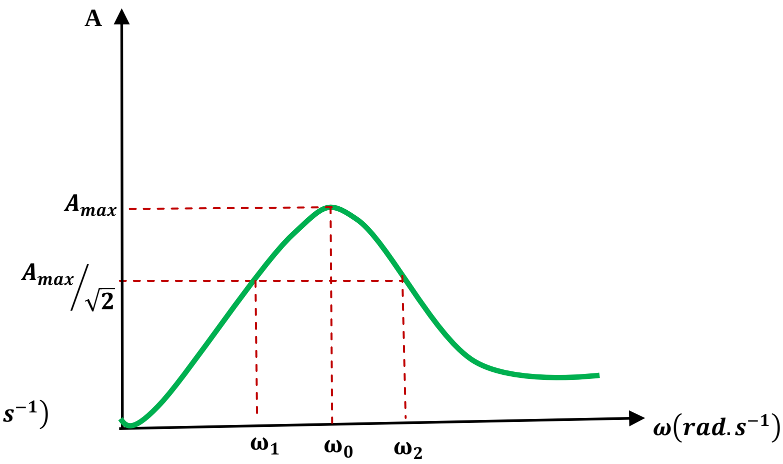
Dans les systèmes électriques ce phénoméne permet de calculer le facteur de qualité Q qui augmente : $Q = \frac{A_{max}}{A_0} = \frac{1}{2\varrho}$

Une autre méthode pratique permettant de déterminer le facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

$\omega_2 - \omega_1$: la bande passante





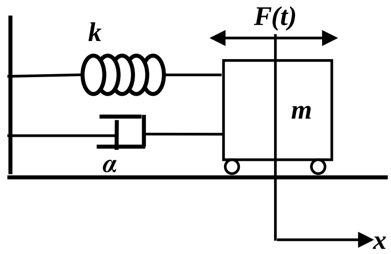
Conclusion

- Quand Q diminue ⇒ $\omega_2 - \omega_1$ augmente ⇒ la courbe de résonance est plus large ⇒ l’amplitude de résonance et la qualité diminuent.
- Les extrémités de la bande passante correspondent à une amplitude de vitesse $\sqrt{2}$ fois plus petite qu’à la resonance.

Exercices

Exercice 1 :

Le système mécanique sur la Figure ci-contre consiste en une masse m qui peut se déplacer horizontalement sans frottement. La masse m reliée à un appui par l'intermédiaire d'un ressort de raideur ***k*** et d'un amortisseur de coefficient d'amortissement α est soumise à une force excitatrice $\vec{F}_{exc} = F_0 sinwt.\vec{i}$

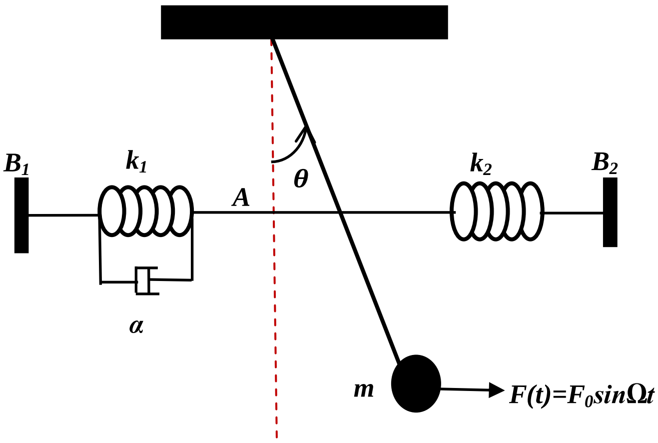


1- Déterminer l'équation différentielle du mouvement du système en appliquant la relation fondamentale de la dynamique.

2- Calculer l'amplitude F_0 de la force excitatrice et la phase ϴ de la relation particulière (permanant) x_p d'amplitudes *A*= 0.03cm. Donnée *m* = 5kg *; k* = 6N/m ; *w* = 7rad/s et *α*= 9Ns/m.

Exercice 2 :

La masse m est soudée à l'extrémité de la tige de longueur L de masse négligeable. Cette masse est soumise à une force perpendiculaire, sinusoïdale de pulsation **Ω** l'autre extrémité articulée au point **O** la tige est reliée au point **A** au bâti fixe B_1 par un ressort de coefficient de raideur $\boldsymbol{k_1}$ et un amortisseur dont le coefficient de frottement vaut **α**. Elle est, en outre reliée au bâti fixe $\mathbf{B_2}$ par un ressort de raideur $\boldsymbol{k_2}$. La distance **OA** est égale à ½ (Voir Figure ci-contre)



1- utiliser la méthode des moments ou le Lagrangien du système libre pour trouver l'équation du mouvement de la masse m, déduire la pulsation propre du système $\boldsymbol{\omega_0}$ et écrire la solution de l'équation du mouvement.

2-Réécrire l'équation du mouvement de ce système amortie ce mode de vibration.

3-Déterminer les expressions de l'amplitude et le déphasage des oscillations forcées en fonction de la pulsation **Ω**. Déduire le circuit électrique équivalent.

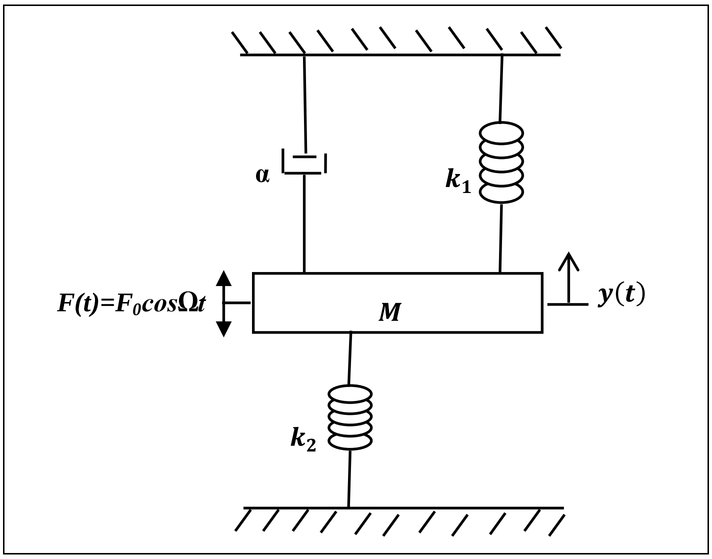
Exercice 3:

Soit le modèle d'un système mécanique forcé et amortie représenté sur la figureci-dessous.

1. Donner l'énergie cinétique **T**, l'énergie **U** et la fonction de dissipation (force générale) D du système.

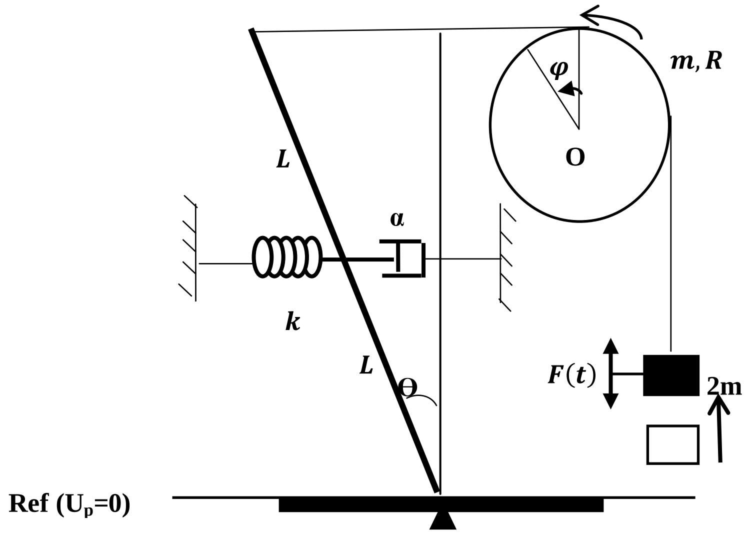
2. Trouver l'équation du mouvement en utilisant :

a- L'équation de Lagrange.
b- Le principe fondamental de la dynamique.



Exercice 4 :

Dans le système ci-contre un fil inextensible, roule son glisser autour d'un disque de masse $(\boldsymbol{m})$et de rayon $(\boldsymbol{R})$; qui tourne librement autour de son axe fixe. Il porte à son extrémité une masse $(\boldsymbol{2m})$; une tige de masse$(\boldsymbol{m})$et de longueur $(\boldsymbol{2L})$et un ressort de raideur $(\boldsymbol{k})$à une extrémité fixe et de l'autre reliée au milieu de la tige avec un amortisseur de coefficient **(α).** A l'équilibre (représenté en pointille) la tige était verticale et le ressort subit une déformation initiale.



1-Trouver l'équation différentielle du mouvement.

2-Si $\boldsymbol{m = 1kg, L = 1m, N = 20\,N/m}$, trouver la valeur que le coefficient **α** ne doit pas atteindre pour que le système oscille.

3-Trouver la nature du mouvement si **α=22N.s/m** ; ainsi que la solution de l'équation.

Le système est soumis à une force extérieure $\boldsymbol{F(t) = F_0 sin\Omega t}$ appliquée à la masse $\boldsymbol{2m}$.

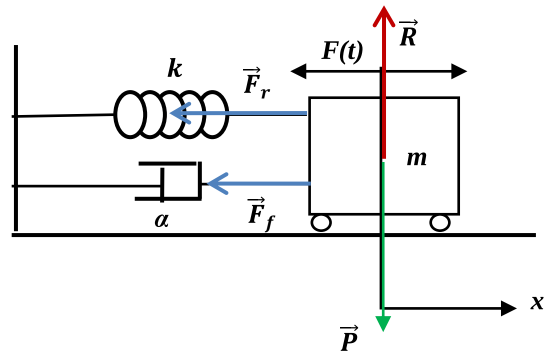
1-Etablir l'équation différentielle du mouvement forcé amorti et donnez l'expression de la solution correspondant au régime permanent.

2- Ecrire l'expression de l'amplitude **A** et du déphasage $\boldsymbol{\varphi}$.

3-donner la solution générale correspondante et tracer **θ(t)** (les deux régimes).

Solutions

Exercice 1 :



La relation fondamentale appliquée à m à l'instant **t** s'écrit :

$m\vec{\gamma} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_r} + \vec{F_f} + \vec{F}_{exc}$ (1)

$\vec{P} = -mg\vec{j}, \vec{R} = R\vec{j}, \vec{F_r} = -kx\vec{\imath}, \quad \vec{F_f} = -\alpha\dot{x}\vec{\imath} \quad et \quad \vec{F}_{exc} = F_0 \sin\omega t\,\vec{\imath}$

Le mouvement est horizontal : $\vec{\gamma} = \ddot{x}\vec{\imath}$

- Projection de (1) sur oy :

  $-mg + R = 0$

- Projection de (1) sur ox :

  $m\ddot{x} = -kx - c\alpha + F_0 \sin\omega t$

  Donc : $m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$ (2)

  Où : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x + \frac{F_0}{m}\sin\omega t$ avec $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

  2- On cherche la solution particulière sous la forme $x_p = \mathrm{A}\sin(\omega t + \theta)$

  En notation complexe : $\bar{x}_p = Ae^{j(\omega t+\theta)} = \bar{A}e^{j\omega t}$

  Avec $\bar{A} = Ae^{j\theta}$, l'amplitude complexe.

  $\dot{\bar{x}}_p = j\omega\bar{A}e^{j\omega t}, \qquad \ddot{\bar{x}}_p = -\omega^2\bar{A}e^{j\omega t}, \qquad F_{exc} = I_m\left(F_0e^{-j\omega t}\right)$

En remplaçant $\bar{x}_p, \dot{\bar{x}}_p et \ddot{\bar{x}}_p$ dans l'équation (2)

$-m\omega^2\bar{A}e^{i\omega t} + \alpha j\omega\bar{A}e^{j\omega t} + k\bar{A}e^{j\omega t} = F_0e^{j\omega t}$

$\bar{A}[(k - m\omega^2) + j\alpha\omega]e^{j\omega t} = F_0e^{j\omega t}$

$\bar{A} = \frac{F_0}{(k-m\omega^2)+j\alpha\omega}, \quad A = |\bar{A}| = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2+(\alpha\omega)^2}}$

$F_0 = A\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}$ où $F_0 = mA\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (\alpha\omega)^2}$

$F_0 = 0{,}03\sqrt{(6 - 5 \times 49)^2 + (7 \times 9)^2}$

$F_0 = 7{,}41N$

$\tan\theta = \frac{\alpha\omega}{k - m\omega^2}$,

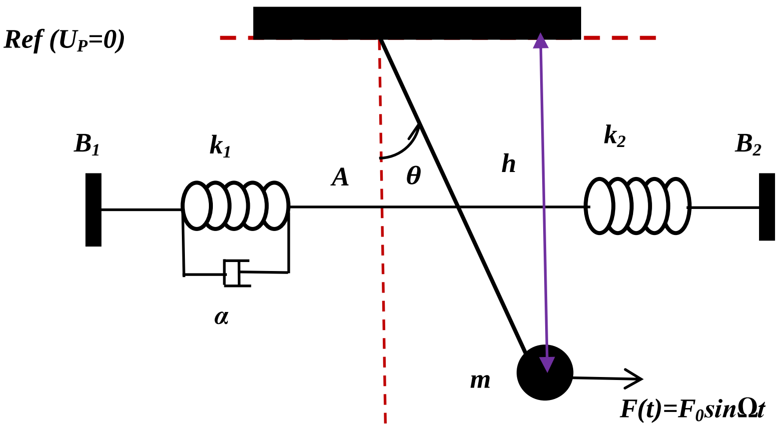
$\tan\theta = \frac{9\times 7}{-239}$ $0{,}2636\, rad$ donc $\theta = (\tan\theta)^{-1}\left(\frac{\alpha\omega}{k-m\omega^2}\right) = 0.2577\, rad$.

Exercice2:

1- Système libre ($F(t) = 0, \alpha = 0$)

- Equation du mouvement de la masse :

- Lagrangien du système : $L = T - U$



-L'énergie cinétique : $T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$

avec $J = ml^2$

$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$

- L'énergie potentielle:

$U = U_{k_1} + U_{k_2} + U_m$

$U_{k_1} = \frac{1}{2}k_1x_1^2$, $U_{k_2} = \frac{1}{2}k_2x_2^2$, $U = -mgh$,

$x_1 = \frac{l}{2}\theta,\quad x_2 = \frac{l}{2}\theta, h = l\cos\theta$

$\Rightarrow U = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{l}{2}\theta\right)^2 + \frac{1}{2}k_2\left(\frac{l}{2}\theta\right)^2 - mgl\cos\theta$

$\Leftrightarrow U = -mgl\cos\theta + \frac{1}{2}[k_1 + k_2]\left(\frac{l}{2}\right)^2\theta^2$

Donc : $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta - \frac{1}{2}[k_1 + k_2]\left(\frac{l}{2}\right)^2\theta^2$

- Le formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl\sin\theta - [k_1 + k_2]\frac{1}{4}l^2\theta \end{cases} \quad \text{avec} \quad \theta \ll \rightarrow \sin\theta \simeq \theta$$

$$\Leftrightarrow ml^2\ddot{\theta} + \left[\frac{1}{4}l^2(k_1 + k_2) + mgl\right]\theta = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{\left[\frac{1}{4}l^2(k_1+k_2)+mgl\right]}{ml^2}\theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\left[\frac{1}{4}l(k_1+k_1)+mg\right]}{ml}\theta = 0 \quad (1)$$

Cette équation caractérise u mouvement oscillatoire de pulsation propre :

$$\omega_0^2 = \left[\frac{\frac{1}{4}l(k_1 + k_2) + mg}{ml}\right]$$

L'équation (1) se réduite : $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$

La solution de cette équation : $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$

2- Système amorti : $\alpha \neq 0$

Nouvelle équation du mouvement:

L'équation de Lagrange prendre la forme : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$

La fonction de dissipation : $D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 = \frac{1}{2}\alpha\frac{l^2}{4}\dot{\theta}^2$

Donc : $ml^2\ddot{\theta} + \left[\frac{1}{4}l^2(k_1 + k_2) + mgl\right]\theta = -\alpha\frac{l^2}{4}\dot{\theta}$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \left[\frac{\frac{1}{4}l(k_1+k_2)+mg}{ml}\right] = 0 \quad \rightarrow (2)$$

$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ avec : $2\lambda = \frac{\alpha}{4m}$

La solution de cette équation : $\theta(t) = \theta_{01}e^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \phi)$

Avec $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ (la pseudo-pulsation) .

3- Système amorti forcé $\alpha \neq 0, F(t) \neq 0$

Equation de mouvement : $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + \underbrace{F(t)}_{forceexterieur} . \underbrace{l}_{lebras}$

$$ml^2\ddot{\theta} + \left[\frac{1}{4}l^2(k_1 + k_2)\right]\theta = \frac{1}{4}\alpha l^2\dot{\theta} + F(t).l$$

D'où l'équation : $\ddot{\theta} + \frac{\alpha}{4m}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = \frac{F(t)}{ml^2} \quad \rightarrow (3)$

La solution de cette équation différentielle est :

$$\theta_G(t) = \underbrace{\theta_{\mathrm{H}}}_{solution\ homogaine}(t) + \underbrace{\theta_{\mathrm{P}}}_{solution\ particulére}(t)$$

à $t > 0, \theta_H \rightarrow 0$ et $\theta_G(t) = \theta_P(t)$

$\theta_P = A\sin(\Omega t + \psi)$ qui est la solution particulière sous forme complexe :

$\theta_G(t) = Ae^{-i(\Omega t+\varphi)} = \bar{A}e^{-i\Omega t}, \qquad \bar{A} = Ae^{-i\varphi}$

Détermination de A et ψ du régime permanant :

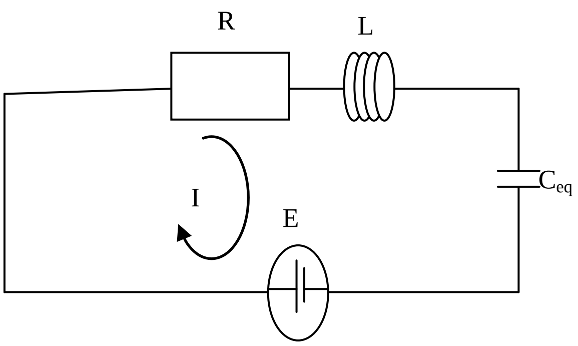
Reportons $\theta(t), \dot{\theta}(t), \ddot{\theta}(t)$ dans l'équation (3)

$$[(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2i\lambda\Omega]\bar{A} = \frac{F_0}{ml}$$

D'où l'amplitude complexe :

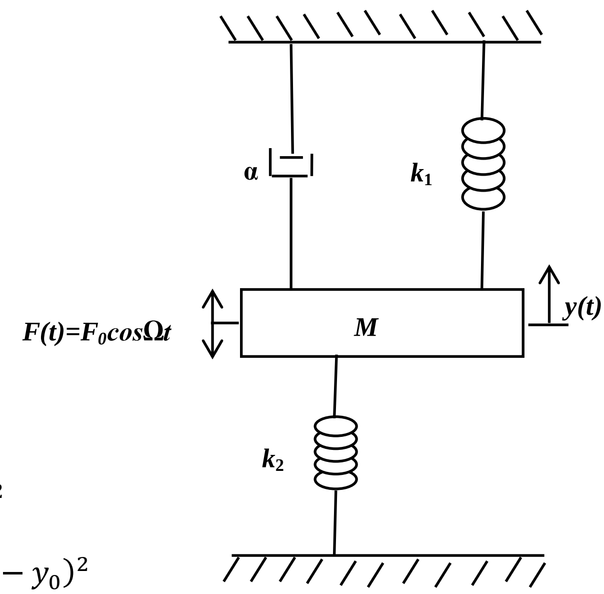
$$\bar{A} = \frac{\frac{F_0}{ml}}{[(\omega_0^2-\Omega^2)+2i\lambda\Omega]} \quad \text{donc} \quad A = |\bar{A}| = \frac{\frac{F_0}{ml}}{\sqrt{(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\lambda^2\Omega^2}}$$

et le déphasage : $\psi = arc\tan\left(\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2-\lambda^2}\right)$



- Circuit électrique équivalent :
- Masse m → inductance L
- Ressort k → inverse 1/C
- R → amortisseur

Exercice 3 :



1- L'équation du mouvement

a- En utilisant l'équation de Lagrange :

- L'énergie cinétique :
- $T_{tot} = T_M = \frac{1}{2}M\dot{y}^2$
- L'énergie potentielle :
- $U_{tot} = U_M + U_{k_1} + U_{k_2}$
  - $U_M = Mgh = Mgy$
  - $U_{k_1} = \frac{1}{2}k_1(y-y_0)^2\ , \quad U_{k_2} = \frac{1}{2}(y-y_0)^2$

Donc : $U_{tot} = Mgh + \frac{1}{2}k_1(y-y_0)^2 + \frac{1}{2}k_2(y-y_0)^2$

A l'équilibre on a $Mg = k_1y_0 + k_2y_0$

$$U_{tot} = \frac{1}{2}k_1y^2 + \frac{1}{2}k_2y^2 \Leftrightarrow U_{tot} = \frac{1}{2}[k_1+k_2]y^2$$

- La fonction de dissipation :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{y}^2$$

- Le Lagrangien :

- $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}M\dot{y}^2 - \frac{1}{2}[k_1 + k_2]y^2$$

- Le formalisme de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F(t)$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = M\ddot{y} \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} = -[k_1 + k_2]y \\ \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha\dot{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\ddot{y} + [k_1 + k_2]y = -\alpha\dot{y} + F(t)$$

$$\Rightarrow \ddot{y} + \frac{\alpha}{M}\dot{y} + \frac{k_1 + k_2}{M}y = \frac{F_0}{M}\cos\Omega t$$

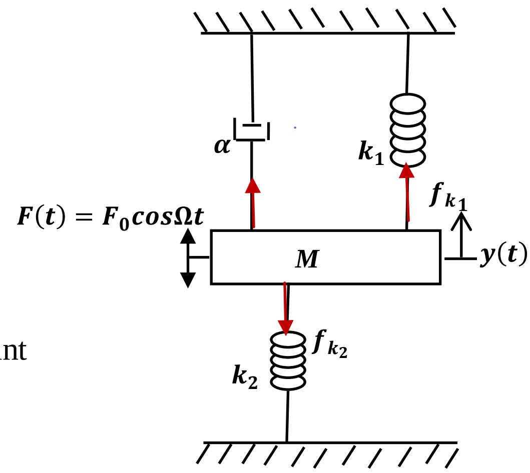
b- En utilisant le principe fondamental de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{f}_{k_1} + \vec{f}_{k_2} + \alpha\overline{\dot{y}} + \overline{F(t)} = M\overline{\ddot{y}}$$

après projection sur l'axe des y on obtient :

$-k_1y - k_2y - \alpha\dot{y} + F(t) = M\ddot{y}$ ce qui donne :

$$\ddot{y} + \frac{\alpha}{M}\dot{y} + \frac{k_1 + k_2}{M}y = \frac{F_0}{M}\cos\Omega t$$



- L'équation du mouvement est de la forme :

$$\ddot{y} + 2\lambda\dot{y} + \omega_0^2 y = \frac{F_0}{M}\cos\Omega t$$

avec : $\lambda = \frac{f}{2M}$ et $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{M}$

La solution permanente est $y = A\cos(\Omega t + \varphi)$ et en utilisant la représentation complexe pour trouver A et φ :

$$\frac{F_0}{M}\cos\Omega t \to \frac{F_0}{M}e^{-j\Omega t}$$

Et $y = A\cos(\Omega t + \varphi) \to \bar{Y} = \bar{A}e^{-j\Omega t}$ avec $\bar{A} = Ae^{-i\varphi}$

On obtient à partir de l'équation du mouvement,

$$\Omega^2\bar{A}e^{-j\Omega t} + 2\lambda j\Omega\bar{A}e^{-j\Omega t} + \omega_0^2\bar{A}e^{-j\Omega t} = \frac{F_0}{M}e^{-j\Omega t}$$

$$\bar{A} = \frac{\frac{F_0}{M}}{(\omega_0^2 - \Omega^2) + 2\lambda j\Omega} \Rightarrow A = |\bar{A}| = \frac{\frac{F_0}{M}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + \lambda^2\Omega^2}}$$

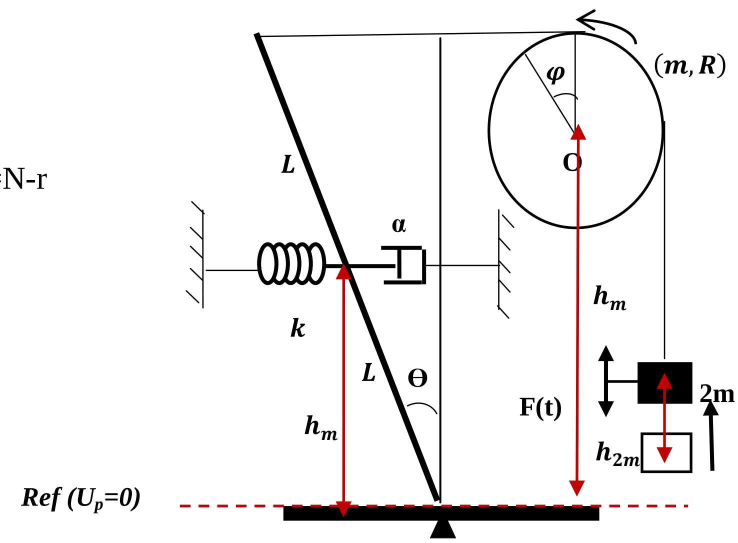
- la phase est donnée par :

$$\tan\varphi = \frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

- La pulsation de résonance Ω_R est telle que :

$$\frac{\partial A}{\partial \Omega} = 0 \Rightarrow \Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}\,.$$

Exercice 5 :



1- L'équation différentielle :

- Le nombre de degré de liberté : d =N-r

- $\left.\begin{array}{r} Rotation\,m \rightarrow \varphi \\ Rotation\,m \rightarrow \theta \\ Translation\,2m \rightarrow x \end{array}\right\} N = 3$
- $x = R\varphi\,,\ R\varphi = 2L\theta\ \Rightarrow r = 2$

Donc $d = N - r = 3 - 2 = 1DDL$

$$T_{tot} = T_{2m} + T_{m/b} + T_{m/c}$$

$$T_{2m} = \frac{1}{2}[8mL^2]\dot{\theta}^2$$

$$T_{m/t} = \frac{1}{2}J_{m/o}\dot{\theta}^2$$

avec $J = \frac{1}{12}m(2L)^2 + mL^2 = \frac{3}{4}mL^2$

$$\Rightarrow T_{m/b} = \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}mL^2\right]\dot{\theta}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}J\dot{\varphi}^2$$

$$T_{m/c} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mR^2\right]\dot{\varphi}^2 \ / \quad R\varphi = 2L\theta,\ \varphi = \frac{2L\theta}{R}$$

$$\Rightarrow T_{m/c} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}mR^2\left[\frac{4L^2}{R^2}\right]\right]\dot{\theta}^2$$

$$\Rightarrow \quad T_{m/c} = \frac{1}{2}[2mL^2]\dot{\theta}^2$$

donc : $T_{tot} = \frac{1}{2}\left[8m + \frac{4}{3}m + 2m\right]L^2\dot{\theta}^2$

$$\Rightarrow T_{tot} = \frac{1}{2}\left[\frac{34}{3}mL^2\right]\dot{\theta}^2$$

- L'énergie potentielle :

$$U_{tot} = U_p + U_e$$

$U_{tot} = U_k + U_{2m} + U_{m/T} + U_{m/C}$

$U_k = \frac{1}{2}(x - x_0)^2 \quad / \quad x = L\theta$

$\Rightarrow U_k = \frac{1}{2}(L\theta - x_0)^2$

➢ $U_{2m} = 2mgh_{2m} \quad / \quad h_{2m} = x + h = 2L\theta + h$

$\Rightarrow U_{2m} = 4mgL\theta + 2mgh$

➢ $U_m = mgh_{m/b} \quad / \quad h_{m/b} = L\cos\theta$

$\Rightarrow U_m = mgL\cos\theta$

➢ $U_m = mgh$

Donc :

➢ $U_{tot} = \frac{1}{2}(L\theta - x_0)^2 + 4mgL\theta + 2mgh + mgL\cos\theta + mgh \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0$

$\frac{\partial U}{\partial \theta} = kL(L\theta - x_0) + 4mgL - mgL\sin\theta$

$\theta = 0 \Rightarrow kLx_0 + 4mgL = 0$ Condition d'équilibre.

- Le Lagrangien : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}\left[\frac{34m}{3}\right]L^2\dot{\theta}^2 - \left[\frac{1}{2}(L\theta - x_0)^2 + mgh + 4mgL\theta + mgL\cos\theta\right]$$

- Le formalisme de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}}$$

avec la fonction de dissipation D :

$$D = \frac{1}{2}\alpha\dot{x}^2 \Rightarrow D = \frac{1}{2}\alpha[L^2]\dot{\theta}^2$$

➢ $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{\theta}}\right) = \frac{34}{3}mL^2\ddot{\theta}$

➢ $\frac{\partial L}{\partial \theta} = -kL(L\theta - x_0) - 4mgL + mgL\sin\theta$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = kL^2\theta + \underbrace{Lkx_0 - 4mgL}_{C.C.d} + mgL\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \theta} = -[kL^2 - mgL]\theta$$

➢ $\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = \alpha L^2\dot{\theta}$

Donc : $\frac{34}{3}mgL^2\ddot{\theta} + [kL^2 - mgL]\theta = -\alpha L^2\dot{\theta}$ / on divise par $\frac{34}{3}mgL^2$

on trouve :

$\ddot{\theta} + \frac{3[\alpha L^2]}{34mL^2}\dot{\theta} + \frac{3[kL^2 - mgL]}{34mL^2}\theta = 0$ (1)

(1)équation différentielle du 2éme ordre de la forme :

$$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0 \quad \text{avec :} \begin{cases} 2\lambda = \frac{3[\alpha L^2]}{34mL^2} = \frac{3\alpha}{34m} \Rightarrow \lambda = \frac{3\alpha}{68m} \\ \omega_0^2 = \frac{3[kL-mg]}{34mL} \Rightarrow \lambda = \sqrt{\frac{3(kL-mg)}{34mL}} \end{cases}$$

1- Pour qu'un système amortie oscille il faut que $\Delta < 0$:

$m = 1Kg, L = 1m, N = 20\,N/m$

$\Delta < 0$, $\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2 \Rightarrow \lambda^2 < \omega_0^2 \Rightarrow \lambda < \sqrt{0.88}$

$$\lambda = \frac{3\alpha}{68}, \omega_0^2 = \frac{3(20.1 - 1.10)}{34.1.1} = \frac{30}{34} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{0.88}\,rad/s$$

$\frac{3\alpha}{68} < \sqrt{0.88} \Rightarrow \alpha < \frac{\sqrt{0.88}.68}{3} \Leftrightarrow \alpha < 21\,N.s/m$ (Régime pseudo-périodique)

la solution de cette équation pour un amortissement faible :

$\theta(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$ avec : $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$

2- la nature du mouvement si $\alpha = 22\ N.s/m$:

$\Delta = \lambda^2 - \omega_0^2$ / $\lambda = \frac{3\alpha}{68} = \frac{3.22}{68} = 0.94$,

$$\omega_0^2 = \frac{30}{34} = 0.88$$

$$\lambda^2 - \omega_0^2 = 0.06 > 0$$

$\Delta > 0$ le mouvement est apériodique son équation :

$$\theta(t) = A_1 e^{\left(-\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

$\theta(t) = A_1 e^{-1.2t} + A_2 e^{-0.7t}$

3- L'équation différentielle du mouvement forcé amorti :

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} + F_{ext}$ / $F_{ext} = F_0 \sin\Omega t$

$\ddot{\theta} + \frac{3\alpha}{34m} + \frac{3}{34}\left[\frac{kL - mg}{mL}\right]\theta = \frac{3F_0}{34mL}\sin\Omega t$ (2)

(1) Équation différentielle du 2éme ordre de la forme :

$\ddot{\theta} + 2\lambda\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = B\sin\Omega t$

$$2\lambda = \frac{3\alpha}{34m}$$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\left[\frac{3F_0}{34mL}\right]}$

$$B = \frac{3F_0}{34mL^2}$$

la solution de cette équation : $\theta_G(t) = \underbrace{\theta_H(t)}_{régimetransitoire} + \underbrace{\theta_P(t)}_{régimepermanant}$

- La solution du régime permanant :

$\theta_P(t) = A\sin(\Omega t + \psi)$ avec

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}$$

$$\psi = \arctan\left(\frac{-2\lambda\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$$

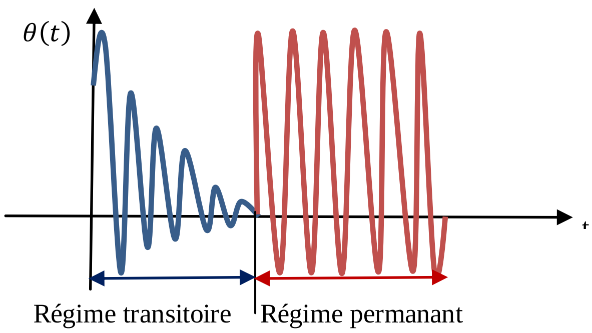
$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$$

- La solution du régime transitoire :

$$\theta_H(t) = Ce^{-\lambda t}\cos(\omega_a t + \varphi)$$

Donc la solution générale : $\theta_G(t)$

$$\theta_G(t) = Ce^{-i\omega t}\cos(\omega_a t + \varphi) + \frac{B}{\sqrt{(\Omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\Omega^2}}\sin\left(\sqrt{(\omega_0^2 - 2\lambda^2)}t + \psi\right)$$



Chapitre 5

Oscillateurs couplés

V-1. Introduction

• Les oscillateurs couplés sont donc constitués de deux ou plusieurs oscillateurs s'influençant mutuellement par l'intermédiaire d'une origine de couplage.

• Les divers oscillateurs échangent leur énergie. Les oscillateurs mécaniques libres seront représentés à l'aide de pendules échangent leur énergie.

• Les oscillateurs mécaniques libres seront représentés à l'aide de pendules élastiques placés horizontalement où verticalement (couplage par élasticité) où de pendules placés verticalement (couplage par inertie). Quant aux oscillateurs électriques libres, ils ne comporteront que des bobines et condensateurs.

V-2. Exemple d'oscillateurs libres couples

V-2.1. En mécanique

1) Oscillateurs mécaniques libres couplés par élasticité : La liaison se fait par un ressort :

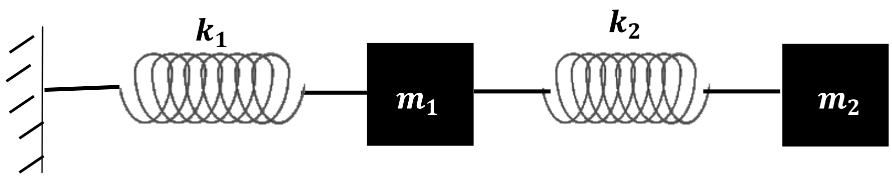


Figure V-1. Oscillateurs mécaniques libres couplés par Élasticité.

2) Oscillateurs mécaniques libres couplés par inertie :La liaison se fait à l'aide d'une masse :

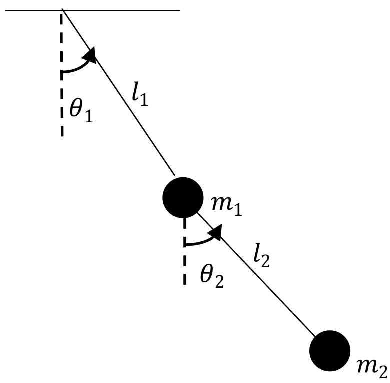


Figure V-2. Oscillateurs mécaniques libres couplés par inertie.

3) On peut aussi avoir le couplage par viscosité : la liaison est due à un frottement visqueux mécanique :

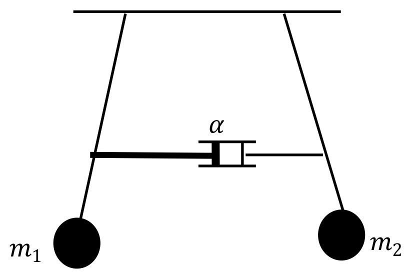


Figure V-3. Oscillateurs mécaniques couplés par viscosité.

4) Oscillateurs électriques libres couplés par inertie : Liaison se fait par une inductance.

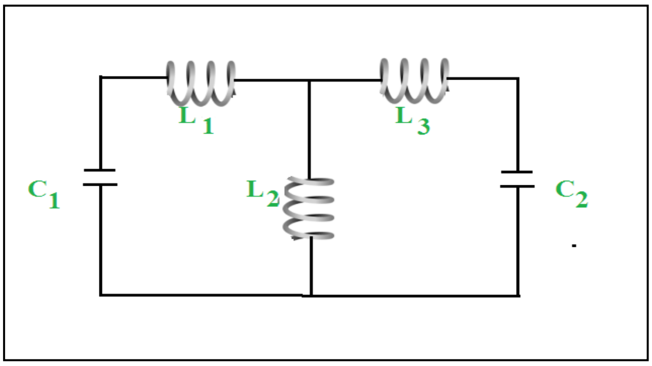


Figure V-4. Oscillateurs électriques libres couplés par inertie.

5) Oscillateurs électriques couplés par viscosité : la liaison est due à une résistance.

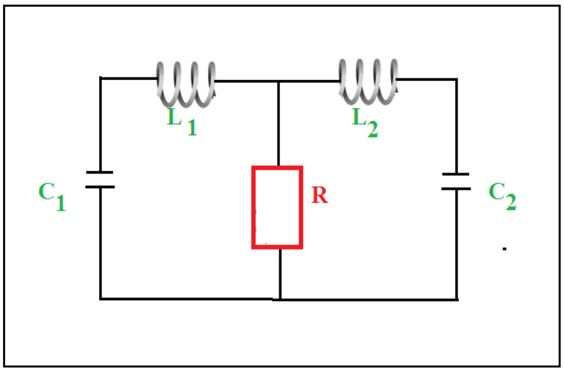


Figure V-5. Oscillateurs couplés par viscosité.

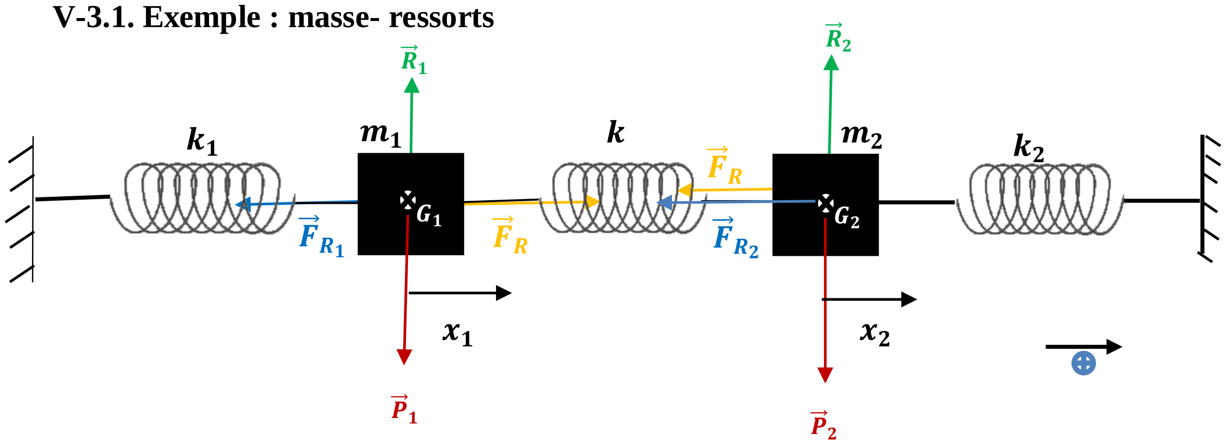
V-3. Système à 2 degrés de liberté

Pour l'étude des systèmes à deux degrés de liberté, il est nécessaire d'écrire deux équations différentielles du mouvement que l'on peut obtenir à partir des équations de LaGrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q_2} = 0 \end{cases}$$

Un système à 2 degrés possède 02 coordonnés généralisées 02 équations différentielles est 02 pulsations propres(ω_1, ω_2) .

V-3.1. Exemple : masse- ressorts



• On appliquant directement le PFD :

$$\begin{cases} \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m_1 \overrightarrow{\ddot{x}_1} \\ \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m_2 \vec{\ddot{x}}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{F}_{k_1} + \vec{F}_R = m_1 \vec{\ddot{x}}_1 \\ \vec{F}_{k_2} + \vec{F}_R = m_2 \vec{\ddot{x}}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k_1 x_1 + k x_2 - k x_1 = m_1 \ddot{x}_1 \\ -k_2 x_2 + k x_2 + k x_1 = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(k + k_1) x_1 + k x_2 = m_1 \ddot{x}_1 \\ -(k + k_2) x_2 + k x_1 = m_2 \ddot{x}_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k + k_1) x_1 - k x_2 = 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k + k_2) x_2 - k x_1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \frac{k+k_1}{m_1}x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_1\ddot{x}_2 + \frac{k+k_2}{m_2}x_2 - \frac{k}{m_1}x_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-1)}$$

On utilise la notion d'oscillateurs découplés pour cela : On fixe en premier lieu m_2

On obtient la pulsation de l'oscillateur découplé :

$$\omega_{0_1} = \sqrt{\frac{k+k_1}{m_1}}$$

- On fixe en suitem_1 : On obtient la pulsation de l'oscillateur découplé :

$$\omega_{0_2} = \sqrt{\frac{k+k_2}{m_2}}$$

En utilise les expressions propres des oscillateurs découplés définies par :

$$\omega_{01}^2 = \frac{k+k_2}{m_1}$$

Et

$$\omega_{02}^2 = \frac{k+k_2}{m_2}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \frac{k}{x_1}x_1 \end{cases}$$

V-4. Recherche des équations du mouvementpar la méthode de Lagrange

On calcule l'énergie cinétique et potentielle du système formé par les deux masses :

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}m_1\ddot{x}_1 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2{}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \end{cases}$$

Avec :$L = T - U$

On retrouve les mêmes équations différentielles du mouvement (voir système d'équation (V-1)).

V-5. Recherche des pulsations propres par la méthode matérielle

On reprendre les équations (V.1). On cherche des solutions de la forme :

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \text{ ; avec } A_1 > 0$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2); \text{ avec } A_2 > 0$$

On notion complexe, on a:

$$\overline{x_1} = A_1 e^{i\varphi_1} e^{-i\omega t}$$

Et:

$$\bar{x}_2 = A_2 e^{-i\varphi_2} e^{-i\omega t}$$

Le système (V-1) s'écrit:

$$\begin{cases} (\omega_{01}^2 - \omega^2)\bar{x}_1 - \frac{k}{m_1}\bar{x}_2 = 0 \\ -\frac{k}{m_2}\bar{x}_1 + (\omega_{02}^2 - \omega^2)\bar{x}_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-2)}$$

Ce système homogène admet des solutions non nulles si, et seulement si le déterminant donné par la relation (V.3) est nul :

$$\begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \omega^2 & \frac{-k}{m_1} \\ \frac{-k}{m_2} & \omega_{02}^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(V-3)}$$

C'est-à-dire : $\left({\omega_{0_1}}^2 - \omega^2\right)\left({\omega_{0_2}}^2 - \omega^2\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0$

Où :$\left(\frac{k+k_1}{m_1} - \omega^2\right)\left(\frac{k+k_2}{m_2} - \omega^2\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0$

Si on développe la relation ci – dessous on détient :

$$\omega^4 - \left({\omega_{0_1}}^2 + {\omega_{0_2}}^2\right)\omega^2 + {\omega_{0_1}}^2 {\omega_{0_2}}^2 - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0$$

$$\omega^4 - \left(\frac{k+k_1}{m_1} + \frac{k+k_2}{m_2}\right)\omega^2 + \left(\frac{k+k_1}{m_1}\right)\left(\frac{k+k_2}{m_2}\right) - \frac{k^2}{m_1 m_2} = 0 \qquad \text{(V-4)}$$

Le déterminant Δ de l'équation bicarrée (V.3) s'écrit :

$$\Delta = \left(\omega_{0_1}{}^2 + \omega_{0_2}{}^2\right) - 4(\omega_{0_1}{}^2\omega_{0_2}{}^2 - \frac{k^2}{m_1 m_2})$$

$$\Delta = \left(\omega_{0_1}{}^2 - \omega_{0_2}{}^2\right) + 4\frac{k^2}{m_1 m_2}$$

$$\Delta = \left(\frac{k+k_1}{m_1} - \frac{k+k_2}{m_2}\right) + 4\frac{k^2}{m_1 m_2}$$

On remarque que le déterminant Δ est positif. Les deux solutions bicarrées sont réelles et positives, la quantité $(\omega_{0_1}{}^2 + \omega_{0_2}{}^2 - \frac{k^2}{m_1 m_2})$ est supérieure à zéro, elles s'écrivent :

$$\omega^2{}_1 = \frac{\omega_{0_1}{}^2 + \omega^2{}_0 + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\omega^2{}_1 = \frac{\frac{k+k_1}{m_1} + \frac{k+k_2}{m_2} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$\omega^2{}_2 = \frac{\omega_{0_1}{}^2 + \omega^2{}_0 - \sqrt{\Delta}^2}{2}$$

$$\omega^2{}_2 = \frac{\frac{k+k_1}{m_1} + \frac{k+k_2}{m_2} + \sqrt{\Delta}}{2}$$

Les deux valeurs $\omega^2{}_1$ et $\omega^2{}_2$ sont les racines du polynôme.

$$f(x) = x^4 - (\omega_{01}{}^2 + \omega_{02}{}^2)x^2 + \omega^2{}_1\omega^2{}_2 - \frac{k^2}{m_1 m_2}$$

Le polynômef(x) peut s'écrit : $f(x) = (x^2 - \omega_1{}^2)(x^2 - \omega_2{}^2)$

On remarque que : $f(\omega_{01}{}^2) = f(\omega_{02}{}^2) = -\frac{k^2}{m_1 m_2} < 0$

On déduit alors : $\omega_2 < \omega_{01} < \omega_{02} < \omega_1$

En supposant que : $\omega_{01} < \omega_{02}$

V-6. Recherche des modes propres x_1 et x_2

En remplaçant x_1 et x_2 par leurs expressions complexes

$\overline{x_1} = A_1 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t}$ *et* $\overline{x_2} = A_2 e^{i\varphi_1} e^{i\omega t}$

Dans le système (V-2), on obtient pour la première équation du système :

$$(\omega_{01}{}^2 - \omega^2)x_1 e^{i\varphi_1} - \frac{k}{m_1}x_2 e^{i\varphi_2} = 0$$

Soit : $e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{k x_2}{m_1(\omega_{01}{}^2 - \omega^2)x_1}$

Cette dernière quantité étant réelle, on en déduit :

$sin(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$

Où encore$cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \pm 1$, deux cas sont à traiter

• Si$\omega = \omega_1$, on a alors : ${\omega_{01}}^2 - {\omega_1}^2 < 0$et $cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$

On en déduit alors : $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$

De même : $\frac{x_2(\omega_1)}{x_1(\omega_1)} = \frac{m_1({\omega_1}^2 - {\omega_{01}}^2)}{k}$

Les deux solides vibrent en opposition de phase.

• Si$\omega = \omega_2$, on a alors : ${\omega_{01}}^2 - {\omega_2}^2 < 0$et $cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 1$

On a alors : $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$

$\frac{x_2(\omega_2)}{x_1(\omega_2)} = \frac{m_1({\omega_{01}}^2 - {\omega_2}^2)}{k}$

Les deux solides vibrent en phase

Pour le mode ω_1 , on a $x_1 et x_2$ on opposition de phase soit :

$$\begin{cases} x_1 = A_1(\omega_1)cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ et \\ x_2 = -A_2(\omega_1)cos(\omega_1 t + \varphi_1) \\ \quad = -\lambda_1 A_1(\omega_1)cos(\omega_1 t + \varphi_1) \end{cases}$$

Où :

$$\lambda_1 = \frac{m_1({\omega_1}^2 - {\omega_{01}}^2)}{k}$$

Pour le mode ω_2 , on a $x_1 et x_2$ en phase soit :

$$\begin{cases} x_1 = A_1(\omega_2)cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ et \\ x_2 = A_2(\omega_2)cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ \quad = \lambda_2 A_2 cos(\omega_2 t + \varphi_2) \end{cases}$$

Où :

$$\lambda_2 = \frac{m_1({\omega_{01}}^2 - {\omega_2}^2)}{k}$$

Enfin la solution réelle s'écrit par$x_1 et x_2$.

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \alpha_1 \underbrace{\begin{bmatrix} x_1(\omega_1, t) \\ x_2(\omega_1, t) \end{bmatrix}}_{mode\ 1} + \alpha_2 \underbrace{\begin{bmatrix} x_2(\omega_2, t) \\ x_2(\omega_2, t) \end{bmatrix}}_{modes\ 2}$$

Les coefficients $x_1 et x_2$ sont reel. On obtient alors les modes$x_1 et x_2$.

$$\begin{cases} x_1(t) = \alpha_1 A_1(\omega_1)cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 A_1(\omega_2)cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ et \\ x_2(t) = -\alpha_1 A_2(\omega_1)cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \alpha_2 A_2(\omega_2)cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ avec \\ A_2(\omega_1) = \lambda_1 A_2(\omega_1) \\ et \\ A_2(\omega_2) = \lambda_2 A_2(\omega_2) \end{cases}$$

On obtient pour les deux modes le système donné en(V.4)

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 cos(\omega_1 t + \varphi_1) + a_2 cos(\omega_2 t + \varphi_2) \\ et \\ x_2(t) = -\lambda_1 a_1 cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \lambda_1 a_2 cos(\omega_2 + \varphi_2) \\ avec \\ \alpha_1 A_1(\omega_2) = a_1 \\ et \\ \alpha_2 A_1(\omega_1) = a_2 \end{cases}$$

Les quatre valeurs $a_1, a_2, \varphi_1, \varphi_2$ sont déterminées par quatre conditions initiales sur $x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2$

On prend par exemple comme conditions :

$x_1(t=0) = 0, x_2(t=0) = 0, \dot{x}_1(t=0) = 0, \dot{x}_2(t=2) = 0$

$$\begin{cases} a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 = 0 \\ -\lambda_1 a_1 \cos\varphi_1 + \lambda_2 a_2 \cos\varphi_2 = 0 \\ \lambda_2 a_1 \omega_1 \sin\varphi_1 - \lambda_2 a_2 \omega_2 \sin\varphi_2 = 0 \\ Soit\ \varphi_1 = \varphi_2 = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$a_1 + a_2 = 0$

Et :

$$-\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0$$

$$a_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} a$$

$$a_1 = \frac{{\omega_{01}}^2 - {\omega_2}^2}{{\omega_1}^2 - {\omega_2}^2} a$$

Et :

$$a_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} a$$

$$a_2 = \frac{{\omega_1}^2 - {\omega_{01}}^2}{{\omega_1}^2 - {\omega_2}^2} a$$

V-7. Recherche des pulsations propres et des modes propres par la méthode des Coordonnées normales

V-7.1 Recherche des pulsations des modes propres

On reprend le système de deux masses et trois ressorts. Pour utiliser la méthode des coordonnées normales, on pose que : $m_1 = m_2 = m\ et\ \ k_1 = k_2$

On réécrit les équations différentielles du mouvement obtenues précédemment :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -k_1x_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -k_2x_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 = (k_2 + k)x_2 - kx_2 = 0 \end{cases}$$

Par soustraction et adition des deux équations ci-dessus on obtient :

$$\begin{cases} m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) + (k_1 + 2k)(x_1 - x_2) = 0 \\ \quad m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) + k_1(x_1 + x_2) = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-4)}$$

On pose :

$$\begin{cases} X_1 = x_1 - x_2 \\ \ddot{X}_1 = \ddot{x}_1 - \ddot{x}_2 \\ X_2 = x_1 + x_2 \\ \ddot{X}_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 \end{cases}$$

$X_1 et X_2$ sont appelées coordonnées normales du système, on les remplace dans les équations du système (V-3)

On obtient le système (V-4)

$$\begin{cases} m\ddot{X}_1 + (k_1 + 2k)X_1 = 0 \\ \quad m\ddot{X}_2 + k_1X_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-5)}$$

Les équations du système (V-5) sont découplées. Ce sont les équations de deux mouvements harmoniques simples.

Soit les solutions du système (V-5)

$$\begin{cases} X_1(t) = A_1\,sin(\omega_1 t + \varphi_1) \quad avec\ \omega_1 = \sqrt{\frac{k_2+2k}{m}} \\ \\ X_2(t) = A_2\,sin(\omega_2 t + \varphi_2) \quad avec\ \omega_2 = \sqrt{\frac{k_1}{m}} \end{cases}$$

Alors :

$$x_1 = \frac{X_1 + X_2}{2}$$

Et :

$$x_2 = \frac{X_1 - X_2}{2}$$

Soit :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{A_1 sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2 sin(\omega_2 t+\varphi_2)}{2} \\ et \\ x_2(t) = \frac{-A_1 sin(\omega_1 t+\varphi_1)+A_2 sin(\omega_2 t+\varphi_2)}{2} \end{cases} \quad \text{(V-6)}$$

Concernant l'ordre des pulsations propres, on peut aussi le ranger par ordre croissant ou décroissant (pour des systèmes à *2DDL* libres).

V-7.2. Superposition de vibrations de pulsations différentes

Les équations du mouvement des oscillateurs harmoniques sont des équations linéaires : de ce fait, des oscillations harmoniques peuvent se superposer sans s'influencer mutuellement. Si un système est soumis simultanément à plusieurs oscillations différentes. On peut résoudre séparément les équations correspondant à chacune des oscillations.

L'élongation de l'oscillateur est alors obtenue en additionnant les élongations solution de chaque équation. On a alors superposition de vibrations de même pulsation ou de pulsation différentes mais voisines. Dans le cas de pulsation différentes mais voisines comme dans le cas traité en (V-6) on a le phénomène de battement.

- **Battement**

Un battement apparait lorsque les pulsations de deux vibrations que se superposent sont voisines. Le résultat peut s'interpréter comme une vibration de pulsation $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ don l'amplitude varie périodiquement avec la pulsation$(\frac{\omega_1+\omega_2}{2})$.

On considère le déplacement x_1 donné par le système (V-6)

Les quatre valeurs $A_1, A_2, \varphi_1, \varphi_2$sont déterminées par quatre conditions initiales. On suppose pour la suite des calculs que$A_1 = A_2 = A$ et $\varphi_1, = \varphi_2 = 0$.

On obtient :

$$x_1 = \frac{A}{2}(sin\,\omega_1 t + sin\,\omega_2 t)$$

$$x_1 = \frac{A}{2} \sin \omega_1 t + \frac{A}{2} \sin \omega_2 t$$

$$x_1 = x_1(t) + x_2(t)$$

En appliquant la formule trigonométrique :

$$\sin a + \sin b = 2 \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \sin\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

On obtient :

$$x_1(t) = A \cos\left(\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) t \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right) t\right)$$

Période moyenne et période de battement

On définitles paramètres suivants :

* La pulsation moyenne

$$\omega_{\text{moyenne}} = \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)$$

* La période moyenne

$$T_{moyenne} = \frac{2\pi}{\omega_{moyenne}} = \frac{2\pi}{\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}}$$

Soit : $\mathrm{T}_{\text{moyenne}} = \frac{2\mathrm{T}_1\mathrm{T}_1}{\mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_2}$

Avec : $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$

Et : $T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$

* La pulsation de modulation

$$\omega_{modulation} = \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)$$

* La période de battement

Intervalle de temps qui sépare deux passages consécutifs par zéro de l'amplitude des battements (T_b est le symbole utilisé pour la période de battements). Elle est donnée par :

$$T_b = \left(\frac{2\pi}{\omega_{modulation}}\right)$$

$$T_b = \frac{T_1 T_1}{|T_1 + T_2|}$$

La Figure(V-6) représente la superposition de deux mouvements vibratoire de pulsations voisines.

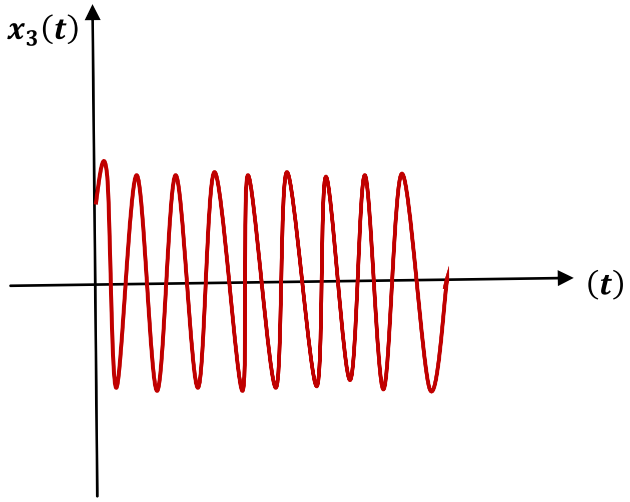
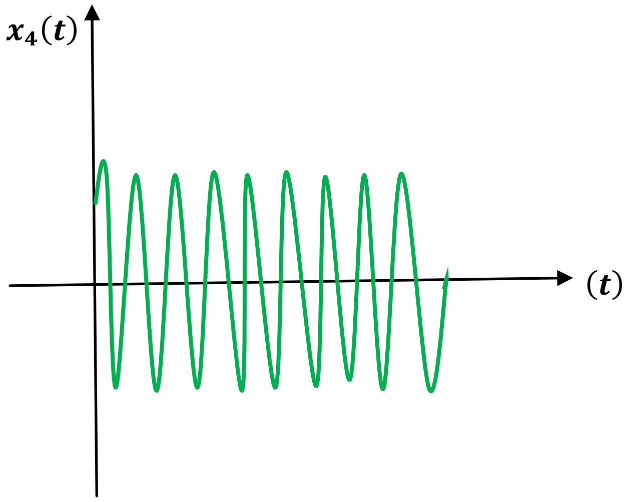


Figure V-6.a. Représentation du mouvement vibratoire



FigureV-6.b. Représentation du mouvement vibratoire

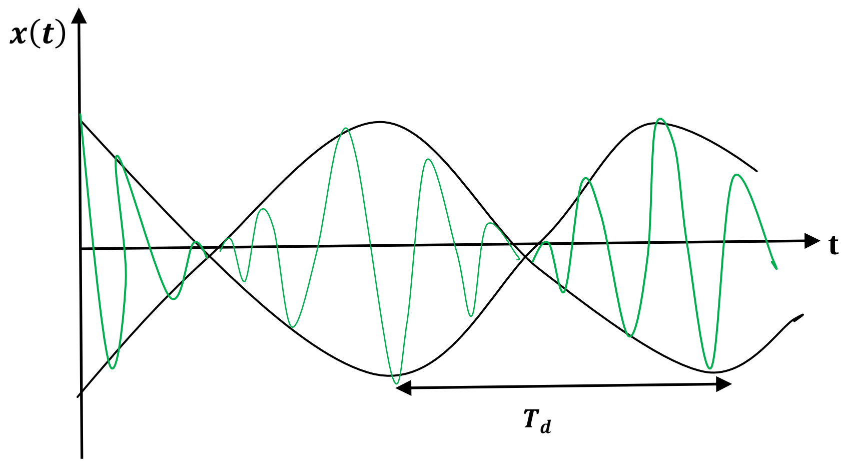


Figure V-6.c. Battement des deux oscillations $x_3(t)$et $x_4(\mathrm{t})$

V.8. Oscillations forcées à degrés de liberté

V.8.1. Oscillation forcées sans amortissement

On considère le système (deux masses, trois ressorts) de la Figure (V.7)

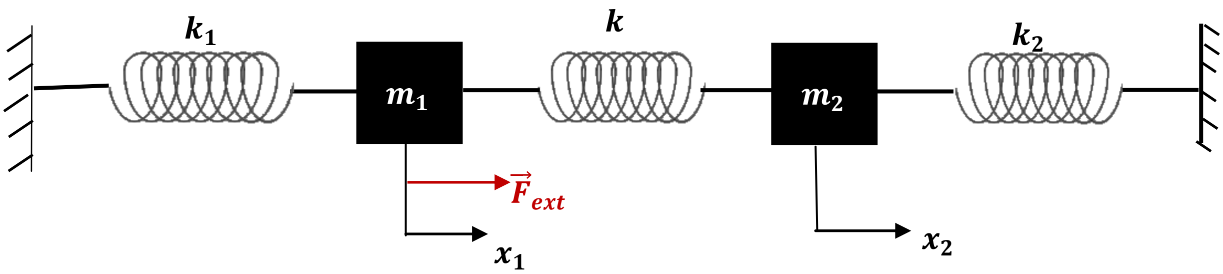


Figure V.7. Oscillateurs mécanique couplés par élasticité est soumis à une force extérieure

• Les équationsdifférentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 - kx_2 = F_0 cos\Omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 + kx_1 = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse au régime permanant c'est-à-dire celui qui est régi la solution particulière du système d'équations différentielles. On cherche lessolutions sinusoïdales de pulsation Ω. En utilisant les expressions des pulsations propres des oscillateurs découplés définis par :

$$\omega_{01}^2 = \frac{k + k_1}{m_1}$$

Et :

$$\omega_{02}^2 = \frac{k + k_2}{m_2}$$

On obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + \omega_{01}^2 x_1 - \dfrac{k}{m_1} x_2 = \dfrac{F_0}{m_1} cos\Omega t \\ \ddot{x}_2 + \omega_{02}^2 x_2 - \dfrac{k}{m_2} x_1 = 0 \end{cases}$$

Si on utilise la notion complexe, on remplace $x_1$etx_2 et la force extérieure par leurs expressions complexes.

$$\bar{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1} e^{i\Omega t} = \overline{A_1} e^{i\Omega t}$$

Avec : $\bar{A}_1 = A_1 e^{i\varphi_1}$

$$\bar{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2} e^{i\Omega t} = \overline{A_2} e^{i\Omega t}$$

Avec :

$$\bar{A}_2 = A_2 e^{i\varphi_2}$$

$$\bar{F}_0 = F_0 e^{i\Omega t}$$

On obtient le système :

$$\begin{cases} (\omega_{01}^2 - \Omega^2)\bar{A}_1 - \frac{k}{m_1}\bar{A}_2 = \frac{F_0}{m} \\ \frac{-k}{m_2}\bar{A}_1 + (\omega_{02}^2 - \Omega^2)\bar{A}_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-7)}$$

Pour que le système (V-7) admette des solutions, il faut que le déterminant principal soit différent de zéro.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \Omega^2 & \frac{-k}{m_1} \\ \frac{-k}{m_2} & \omega_{02}^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} \neq \mathbf{0} \qquad \text{(V-8)}$$

Les solutions du système (V-8) sont :

$$\bar{A}_1 = \begin{vmatrix} \frac{F_0}{m_1} & \frac{-k}{m_1} \\ 0 & \omega_{02}^2 - \Omega^2 \end{vmatrix} = A_1 cos + iA_1 sin\boldsymbol{\varphi_1} \qquad \text{(V-9)}$$

$$\bar{A}_2 = \begin{vmatrix} \omega_{01}^2 - \Omega^2 & \frac{F_0}{m_1} \\ -\frac{k}{m_2} & 0 \end{vmatrix} = A_2 cos\varphi_2 + iA_2 sin\varphi_2 \qquad \text{(V-10)}$$

• Dans le cas de notre exemple, les expressions trouvées pour $\bar{A}_1$ et $\bar{A}_2$ sont des quantités purement réelles.

Les parties imaginaires des expressions (V.9) et (V.10) doivent être nulles. Comme $\bar{A}_1$et $\bar{A}_2$ sont nécessairement différents de 0 (zéro).

$$sin\,\varphi_1 = 0$$

Et :

$$sin\,\varphi_1 = 0$$
$$\varphi_1 = 0\ ou\ \pi$$

Et

$$\varphi_2 = 0\ ou\ \pi$$

• Le mouvement de la masse considérée est soit en phase soit en opposition de phase avec la force extérieure.

• Si on prend les deux déphasages égaux à 0. Les déplacements prennent les formes suivantes :

$$x_1(t) = \frac{F_0({\omega_{02}}^2 - \Omega^2)}{m_1 \Delta} cos\,\Omega t = A_1\,cos\,\Omega t$$

Et :

$$x_2(t) = \frac{-F_0 k}{m_1 m_2 \Delta} cos\,\Omega t = A_2\,cos\,\Omega t$$

Le discriminant principal $\boldsymbol{\Delta}$ est nul pour les valeurs de la pulsation donnée par la racine carrée des expressions (V-9) et (V-10).Les amplitudes $\boldsymbol{A_1}$ et $\boldsymbol{A_2}$tendent vers l'infini. C'est la résonance pour une pulsation extérieure égalea $\boldsymbol{\omega_{02}}$, l'oscillateur $\boldsymbol{m_1}$est immobile et $\boldsymbol{A_1} = \frac{\boldsymbol{F_0}}{\boldsymbol{k}}$ c'est le phénomène d'antirésonance. L'oscillateurs 2 (droite) vibre sinusoïdalement à la pulsation propre et exerce sur l'oscillateur 1 (gauche) par l'intermédiaire du ressort de couplage une force qui est à chaque instant égale et opposée à la force extérieure surlie par l'oscillateur I.On trace les variations des amplitudes $\boldsymbol{A_1 et A_2}$ en fonction de la pulsation de la force excitatrice.

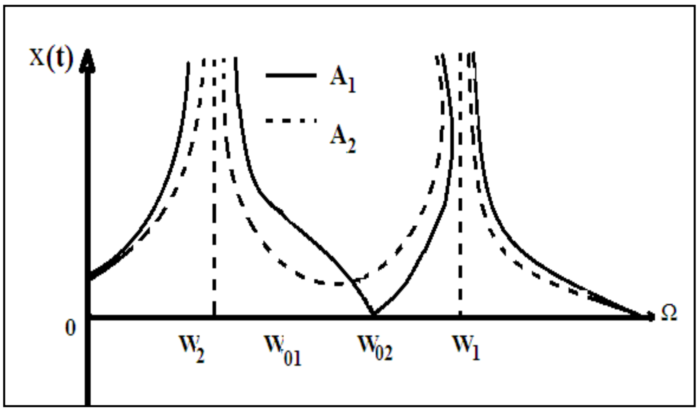


Figure V.8. Variation des amplitudes A_1 et A_2 en fonction de la pulsation

V.8.2. Oscillation force amorti

Soit le système ci-contre :

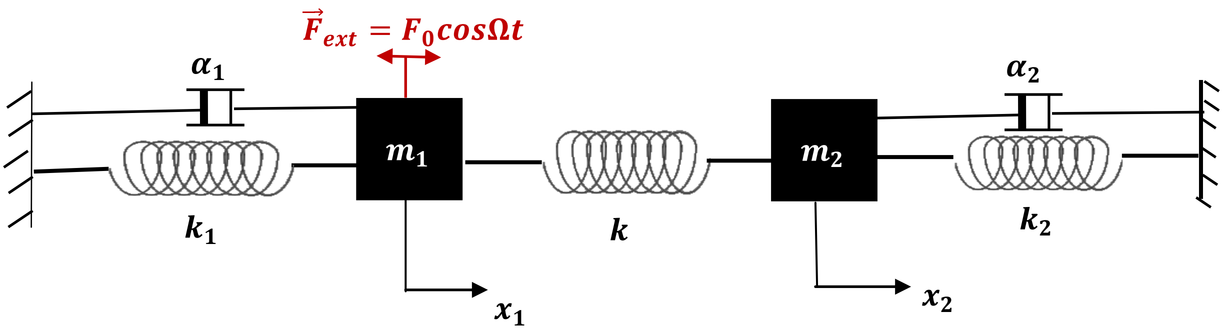


Figure.9. Oscillateurs mécaniques par élasticité et soumis à une force extérieure et un amortisseur

Les équations différentielles du mouvement sont :

$$\begin{cases} m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k)x_1 + \alpha_1\dot{x}_1 - kx_2 = F_0 cos\Omega t \\ m_2\ddot{x}_2 + (k_2 + k)x_2 + \alpha_2\dot{x}_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-11)}$$

V-8.2.1. Résonnance et antirésonance

(avec D = 0 et F ≠ 0 : système forcé mais non amorti)

La solution permanente (V-10) est :

$$\begin{cases} x_1 = A_1 cos(\Omega t + \varphi_1) \\ x_2 = A_2 cos(\Omega t + \varphi_2) \end{cases}$$

Où : $\boldsymbol{A_1, A_2, \varphi_1\ et\ \varphi_2}$dépend de la pulsation $\boldsymbol{\Omega}$ et de $\boldsymbol{F_0}$ pour trouver $\boldsymbol{A_1\ et\ A_2}$utilisons la représentation complexe.

$$\begin{cases} F(t) = F_0 cos\Omega t \longrightarrow \bar{F}(t) = F_0 e^{-i\Omega t} \\ x_1(t) = A_1 cos(\Omega t + \varphi_1) \longrightarrow \bar{x}_1(t) = \bar{A}_1 e^{-i\Omega t} + \\ x_2(t) = A_2 cos(\Omega t + \varphi_2) \longrightarrow \bar{x}_2(t) = \bar{A}_2 e^{-i\Omega t} \end{cases}$$

Alors (V-10) devient lorsque $\Delta = 0$:

$$\begin{cases} m_1\ddot{\bar{x}}_1 + (k_1 + k)\bar{x}_1 + \alpha_1\dot{\bar{x}}_1 - kx_2 = F_0 e^{-i\Omega t} \\ m_2\ddot{\bar{x}}_2 + (k_2 + k)\bar{x}_2 + \alpha_2\ddot{\bar{x}}_2 - kx_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \left(-\Omega^2 + \frac{k_1+k}{m_1}\right)\bar{A}_1 - \frac{k}{m_1}\bar{A}_2 = \frac{F_0}{m_1} \\ \left(-\Omega^2 + \frac{k+k_2}{m_2}\right) - \frac{k}{m_2}\bar{A}_1 = 0 \end{cases} \qquad \text{(V-12)}$$

Cas ou : $m_1 = m_2 = m et k_1 = k_2 = k$

En posant $\boldsymbol{\omega_0}^{\boldsymbol{2}} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}$ (V-12) devient

$$\begin{cases} (-\Omega^2 + 2\omega_0^2) - \omega_0^2\bar{A}_2 = \frac{F_0}{m} \\ (-\Omega^2 + 2\omega_0^2) - \omega_0^2\bar{A}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{|2\omega_0^2-\Omega^2|}{\left|(2\omega_0^2-\Omega^2)^2-\omega_0^4\right|} \\ A_2 = \frac{F_0}{m}\cdot\frac{|\omega_0^2|}{\left|(2\omega_0^2-\Omega^2)^2-\omega_0^4\right|} \end{cases} \qquad \text{(V-13)}$$

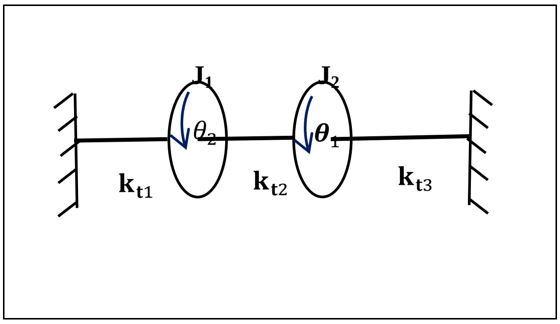
D'après (V-13)

- $A_1 = A_2 = \infty, lorsque \Omega = \omega_0 = \Omega_{R1}$(appeléepremièrepulsation de résonance)
- $\Omega = \sqrt{3\omega_0 = }\ \Omega_{R2}$(appelée deuxième pulsation de résonance).
- $A_1 = 0$, *lorsque* $\Omega = \sqrt{2}\omega_0 = \Omega_{R1}$(appelée pulsation d'antirésonance).

Exercices

Exercice 1 :

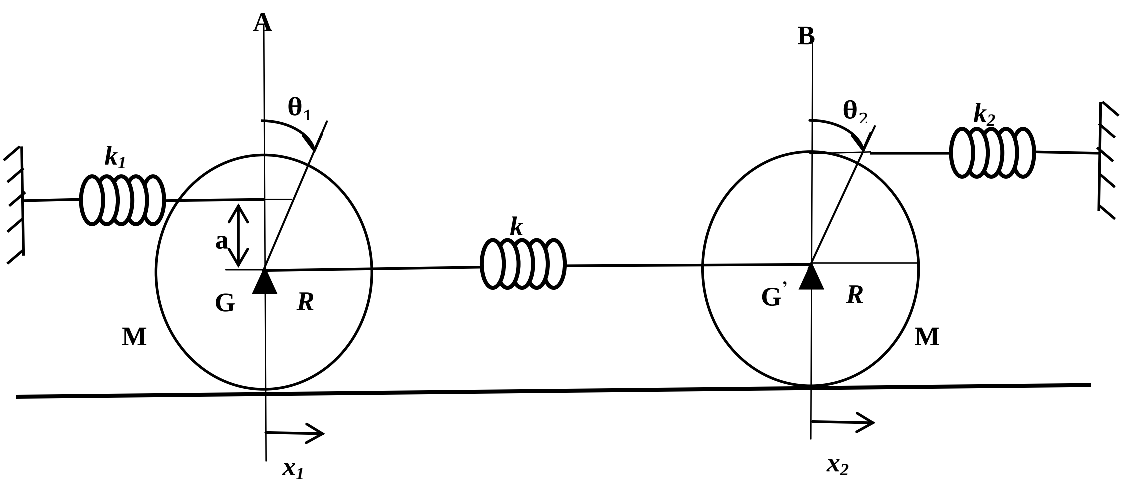
1- Trouver les équations différentielles du mouvement mécanique montré à la Figure ci-contre, en appliquant le Lagrangien ; K_{t1}, K_{t2} et K_{t3} sont les constantes de torsion et J_1et J_2 sont les moments d'inertie des 2 disques.



2- On se place dans le cas où $K_{t1}=K_{t2}=K_{t3}$ et $J_1=J_2=J$. Déduire les deux pulsations propres possibles et écrire la solution générale du mouvement des deux masses.

Exercice2 :

Deux cylindres A et B homogènes de rayons ***R*** et ***R*** et de masses M et m présentent des faibles oscillations autour de leurs axes ***G et G*** sous l'action des ressorts ***k₁, k₂*** comme le montre la figure comme le montre la Figure ci-dessous.



On se propose d'étudié le mouvement vibratoire de ces cylindres dans le cas d'un roulement sans glissement, c'est-à-dire que lorsqu'ils tournent respectivement de θ_1 etθ_2, leurs centres de gravité se déplacent respectivement de $x_1 = R\theta_1 et x_2 = R\theta_2$

1- Combien le système a-t-il de degré de liberté ? Quelles coordonnée(s) généralisée(s) choisir ?

2- Déterminer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle du système pour $a = \frac{R}{2}$

Etablir le Lagrangien en déduire le système d'équations qui régit le mouvement des deux cylindres.

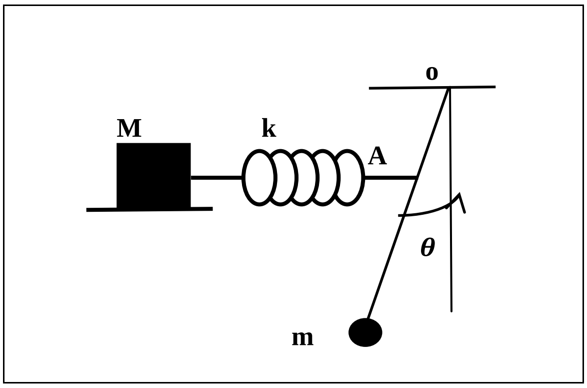
3- Trouvé les pulsations propres correspondantes aux modes de vibrations possibles.

Exercice3 :

On considère le système mécanique suivant :

Au repos $\boldsymbol{x=0}$ et $\boldsymbol{\theta=0}$ (pendule verticale) et le ressort est non déformé.

En mouvement la masse **M** glisse de x sans frottement sur un plan horizontal autour de sa position de repos et entraine par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k le pendule (de longueur L et de masse ponctuelle **m**) dans son mouvement. Le ressort horizontal soudé à M et en A et relie les deux oscillateurs.



1-Etablir les énergies cinétique et potentielle du système en fonction de $\boldsymbol{x}$ et $\boldsymbol{\theta}$.

2-En utilisant le lagrangien trouvé les équations du mouvement dans le cas des petites oscillations.

On prend $M=m, a=L/4 \;, mg=(15/16)kL$ et $L=1m$

3-Trouver l'équation aux pulsations propres.

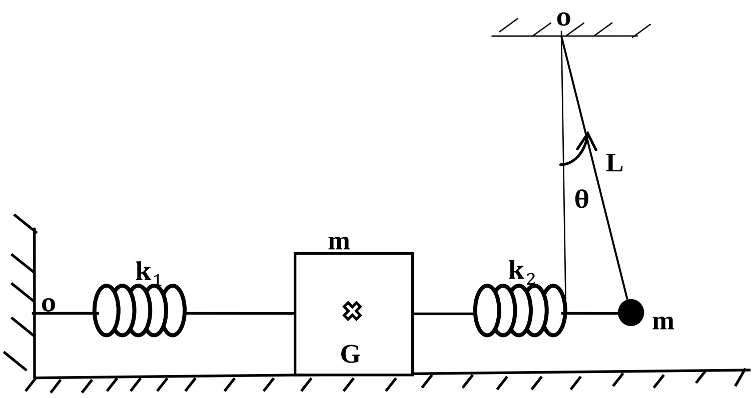
4-Calculer les pulsations propres des deux modes de vibrations.

5-Déterminer le rapport des amplitudes de chacun deux modes.

6-Ecrire les solutions générales de $x(t)$ et $\theta(t)$.

Exercice 4 :

Dans le montage représenté dans la figure qui suit, le pendule simple de longueur L et de masse ponctuelle **m** est couplé par l'intermédiaire d'un ressort horizontal, de constante raideur $\boldsymbol{k_2}$, au système oscillant constitué d'un chariot de masse m et du ressort de constante de raideur $\boldsymbol{k_1}$, dont l'extrémité $\mathbf{O_1}$est fixée. L'extrémité O du pendule est fixée.



1-Ecrire les équations différentielles régissant les mouvements du pendule et du chariot en utilisant la méthode de Lagrange.

2-Calculer les pulsations propres à l'aide de la méthode matricielle (prendre $K_1 = K_2 = {}^{mg}/_{L} = K$).

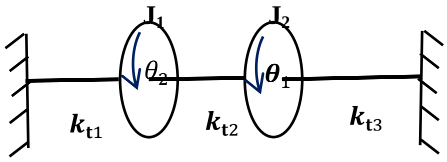
Solutions

Exercice 1 :

1- Les équations différentielles en appliquant le Lagrangien :

- L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2$$



- L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 + \frac{1}{2}k_{t3}\theta_2^2 + \frac{1}{2}k_{t2}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

- Le Lagrangien du système : $L = T - U$

$$L = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^2 - \frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2 - \frac{1}{2}k_{t3}\theta_2^2 - \frac{1}{2}k_{t2}(\theta_1 - \theta_2)^2$$

- Le formalisme de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} J_1\ddot{\theta}_1 - [-k_{t1}\theta_1 - k_{t2}(\theta_1 - \theta_2)] = 0 \\ J_2\ddot{\theta}_2 - [\ k_{t3}\theta_2 - k_{t2}(\theta_1 - \theta_2)] \ = 0 \end{cases}$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 + (k_{t1} + k_{t2})\theta_1 - k_{t2}\theta_2 = 0$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 + (k_{t3} + k_{t2})\theta_2 - k_{t2}\theta_1 = 0$$

2- Pulsations propres dans le cas : $k_{t1} = k_{t2} = k_{t3} = k_t, J_1 = J_2 = J$

$$\begin{cases} J\ddot{\theta}_1 + 2k_t\theta_1 - k_t\theta_2 = 0 \ (1) \\ J\ddot{\theta}_2 + 2k_t\theta_2 - k_t\theta_1 = 0 \ (2) \end{cases}$$

On calcule les solutions sous la forme : $\theta_1 = \cos(\omega t + \varphi)\,, \theta_2 = \ \cos(\omega t + \varphi)$

Les solutions $x_1(t) et x_2(t)$ s'écrivent en représentation complexe :

$\overline{\theta_1} = \ \overline{A}e^{j\omega t}$ et $\overline{\theta_2} = \overline{B}e^{j\omega t}$

En injectons ces solutions dans les équations différentielles, on obtient :

$$-J\omega^2\overline{A}e^{j\omega t} + 2k_t\overline{A}e^{j\omega t} - k_t\overline{B}e^{-j\omega t} = 0$$

$$-J\omega^2\overline{B}e^{j\omega t} + 2k_t\overline{B}e^{-j\omega t} - k_t\overline{B}e^{-j\omega t} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases}(2k_t - J\omega^2)\overline{A} - k_t\overline{B} = 0\\ -k_t\overline{A} + (2k_t - J\omega^2) = 0\end{cases}$$

Le système admet des solutions si le déterminant est nul :

$$D = \begin{vmatrix}(2k_t - J\omega^2) & 2k_t\\ -k_t & (2k_t - \omega^2)\end{vmatrix} = 0$$

$$(2k_t - \omega^2)(2k_t - \omega^2) - k_t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$(k_t - \omega^2 + k_t)(k_t - \omega^2 - k_t) = 0 \rightarrow$$

$$(k_t - \omega^2)(k_t - \omega^2) = 0$$

Donc les pulsations propres sont : $\omega_1 = \sqrt{\frac{3k_t}{J}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_t}{J}}$

La solution générale est la combinaison linéaire des deux modes :

$$\theta_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 + \varphi_2)$$

$$\theta_2 = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

De l'équation (1) on trouve le rapport : $\frac{A}{B} = \frac{k_t}{2k_t - \omega^2}$

On substitue ω par $\omega_1$et l'on obtient le rapport :

$\frac{A_1}{B_1} = \frac{k_t}{k_t - J\omega_1^2} = -1, \quad A_1 = B_1$

On substitue ω par ω_2 et l'on obtient le rapport :

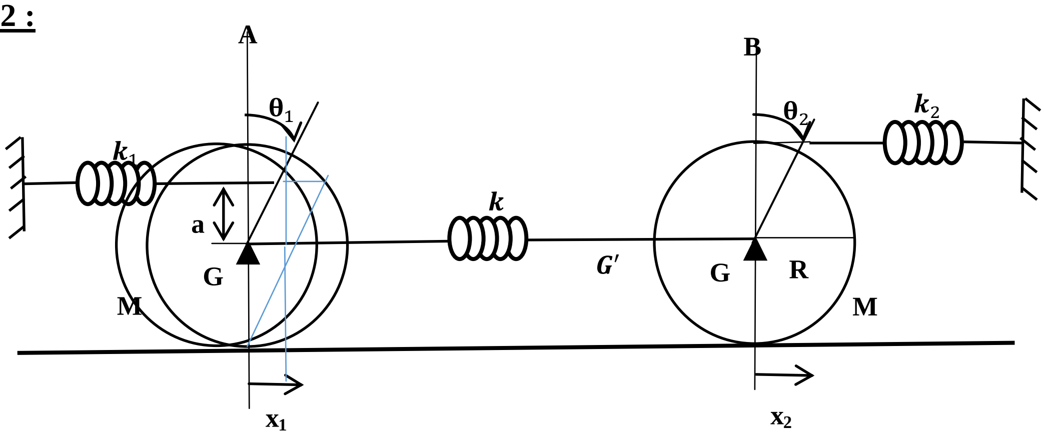
$\frac{A_2}{B_2} = \frac{k_t}{k_t - \omega_1^2} = 1 , \quad A_2 = B_2$

La solution devient :

$$\theta_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

$\theta_2 = -A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ $A_1, A_2, \varphi_1 et \varphi_2$ sont déterminées à partir des conditions initiales.

Exercice 2 :



1. nombre de degré de liberté :

Le mouvement des deux cylindres est défini par les paramètres :

- $x_1(t) et x_2(t)$: Translation des centres de gravité G' .
- $\theta_1(t) et \theta_2(t)$: Rotation des points autour de G' .

Les deux cylindres roulent sans glisser ⇔ $x_1 = R\theta_1$ et $x_2 = \theta_2$.

L'évolution du système dans le temps est défini par deux paramètre inconnus et indépendants $\theta_1(t) et \theta_2(t)$ ⇒ le système à deux degré de liberté (2DDL)

2. L'énergie cinétique et l'énergie potentielle :

- L'énergie cinétique :

T $= \frac{1}{2}M\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}_1^2$

$$T = \frac{1}{2}M\left(R\dot{\theta}_1\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}M\left(R\dot{\theta}^2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}_1^2$$

$$T = \frac{3}{4}MR^2\left(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2\right)$$

- L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}k_1x_1^2 + \frac{1}{2}k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k_2x_2^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(x_1 + R\theta_1)^2 + \frac{1}{2}k(R\theta_1 - R\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k_1(x_2 + R\theta_2)^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(R\theta_1 + a\theta_1)^2 + \frac{1}{2}(R\theta_1 + R\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k(2R\theta_2)^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{3R}{2}\theta_1\right)^2 + \frac{1}{2}k_2(2R\theta_2)^2 + \frac{1}{2}k\big(R(\theta_2 - \theta_1)\big)^2$$

$$U = \frac{9}{8}k_1R^2\theta_1^2 + 2k_2R^2\theta_2^2 + \frac{1}{2}kR^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

- Le Lagrangien du système : $L = T - U$

$$L = \frac{3}{4}MR^2\left(\dot{\theta}_1^2 - \dot{\theta}_2^2\right) - \frac{9}{8}k_1R^2\theta_1^2 - 2k_2R^2\theta_2^2 - \frac{1}{2}kR^2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

- Les équations de Lagrange d'écrivent :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}_1 + \left(\dfrac{3k_1}{2M} + \dfrac{2k}{3M}\right)\theta_1 - \dfrac{2}{3}\dfrac{k}{M}\theta_2 = 0 \quad (1) \\ \ddot{\theta}_2 + \left(\dfrac{8k_2}{3M} + \dfrac{2k}{3M}\right)\theta_2 - \dfrac{2k}{3M}\theta_1 = 0 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow (*)$$

- Les pulsations des modes propres de vibration :

Les équations du mouvement (*) → le mouvement le plus générale est une superposition de deux mouvements harmoniques simples.

Les solutions générales $\theta_1(t) et \theta_2(t)$ est la combinaison linéaire des solutions sinusoïdales (modes sinusoïdaux). On calcul des solutions de la forme :

$\theta_1(t) = \theta_{01}\cos(\omega t + \varphi_1)$ avec $\theta_{01} > 0$. ω: la solution d'un mode donné

$\theta_2(t) = \theta_{02}\cos(\omega t + \varphi_2)$ avec $\theta_{02} > 0$.

Pour rechercher les modes propres, on fait appel à la représentation complexe $\overline{\theta}_1 = \bar{\theta}_{01}e^{j\omega t} avec \bar{\theta}_{01} = \theta_{01}e^{i\varphi_1}$

$$\bar{\theta}_2 = \bar{\theta}_{02}e^{j\omega t} \qquad avec \qquad \bar{\theta}_{02} = \theta_{02}e^{i\varphi_2}$$

Les parties mobiles dans un mode oscillent harmoniquement avec la même pulsation

On injecte ces représentations dans le système d'équations (1) et (2) :

On obtient alors le système d'équations linéaires :

$$\left[-\omega^2 + \left(\frac{3k_1}{2M} + \frac{2k}{3M}\right)\right] k\bar{\theta}_{01} - \frac{2k}{3M}\bar{\theta}_{02} = 0$$

$$\left[-\omega^2 + \left(\frac{8k_2}{3M} + \frac{2k}{3M}\right)\right] \bar{\theta}_{02} - \frac{2k}{3M}\bar{\theta}_{02} = 0$$

On pose : $\omega_1^2 = \frac{3k_1}{2M} + \frac{2k}{3M}$ et $\omega_2^2 = \frac{8k_2}{3M} + \frac{2k}{3M}$

En fait $\omega_1 et \omega_2$ représente respectivement les pulsations propres des oscillateurs découplés $(M + k_1)$ et $(M + k_2)$. Elles sont calculées lorsque l'un des oscillateurs est mobiles et l'autre est fixé → le système sous la forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} -\omega^2 + \omega_1^2 & -\frac{2k}{3M} \\ -\frac{2k}{3M} & -\omega^2 + \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{01} \\ \theta_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le système admet des oscillations no triviales (qui ne sont pas toutes nulles $\begin{pmatrix} \bar{\theta}_{01} \\ \bar{\theta}_{02} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et seulement si :

det $\begin{vmatrix} -\omega^2 + \omega_1^2 & -\frac{2k}{3M} \\ -\frac{2k}{3M} & -\omega^2 + \omega_2^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-\omega^2 + \omega_1^2)(\omega^2 + \omega_2^2) - \frac{4k}{9M} = 0$

on développe la relation ci-dessous on obtient l'équation bicarrée suivante :

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2 - \frac{4k}{9M} = 0$$

$$\omega^4 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2\left(1 - \frac{16\ \ k^2/M^2}{\omega_1^2\omega_2^2}\right) = 0$$

$\omega^2 - (\omega_1^2 + \omega_2^2)\omega^2 + \omega_1^2\omega_2^2(1 - C^2) = 0$ (*) équation caractéristique de ω

Avec : $C^2 = \frac{4}{9}\frac{k^2/M^2}{\omega_1^2\omega_2^2}$

$$C^2 = \frac{4\,k^2/M^2}{\left(\frac{3k_1}{M} + \frac{2k}{3M}\right)\left(\frac{8k_2}{3M} + \frac{2k}{3M}\right)}$$

$$C^2 = \frac{k^2}{\left(\frac{9}{4}k_2 + k\right)(4k_2 + k)}$$

C : coefficient de couplage est compris entre 0 et 1 $\begin{cases} \nearrow k=0 \rightarrow C=0 & \text{oscillateur indépendants} \\ \searrow k \rightarrow \infty \rightarrow C=1 & \text{oscillateur rigidement liés} \end{cases}$

L'équation (*) dite aussi équation compatible signifie que le régime oscillatoire envisagé n'est réalisable que si les pulsations ω satisfait l'équation (*)

Le discriminant Δ de l'équation bicarré (*) s'écrit :

$$\Delta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 - \omega_1^2\omega_2^2(1 - C^2) > 0$$

Les racine de cet équation en ω^2 sont réelles :

$\omega_1^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 - \sqrt{\Delta}\right)$, $\omega_2^2 = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \sqrt{\Delta}\right)\omega_1^2 et \omega_2^2$ sont les deux pulsations propres ou fondamentales du système d'oscillateur couplés.

Chapitre 6

N degrés de liberté

VI-1. Introduction

Le Chapitre VI consiste en l'étude de système mécanique conservatifs ayant un nombre quelconque N degrés de liberté et dont les diverses parties oscillent autour de leurs positions d'équilibre en régissant les unes sur les autres. La configuration du système est définie à chaque instant par des coordonnées généralisées en nombre égal à celui des degrés de liberté. On obtient également N relations entre les différents facteurs d'amplitude.

VI-2. Etudes d'un système mécanique à N degrés de liberté avec extrémités fixées

On s'intéresse au comportement d'une chaine de N oscillateurs montrés en série entre deux bâtis fixes (figure ci-dessous). Tous les oscillateurs sont supposés identiques et constitués chacun d'une masselotte de masse m et d'un ressort de raideur k.

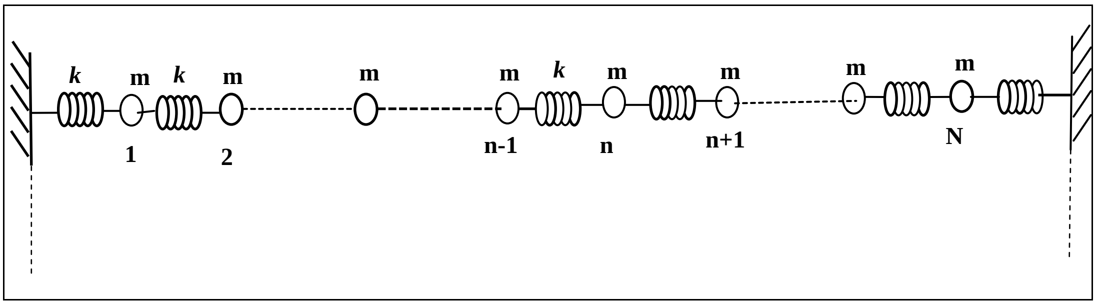


Figure VI-1. Etudes d'un système mécanique à N degrés de liberté avec extrémités

VI.2.1 Recherche de l'équation différentielle du mouvement de la masse n:

On étude le mouvement de la masse n en utilisant leprincipe fondamentale de la dynamique (PFD).

$$\sum \vec{F} = m\vec{\gamma}_n$$

Le poids de la masse n est négligeable.

On écrit que:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = m\vec{\gamma}_n$$

Par protection suivant l'axe OZ, on a :

$$T_{1Z} - T_{2Z} = 0$$

Soit :

$$T_2 cos\alpha_2 - T_1 cos\alpha_1 = 0$$

Les angles α_1 et α_2 étant inférieurs à 10 degrés (petites amplitudes). On peut considérer que:

$$cos\alpha_1 = 1$$

Et

$$cos\alpha_2 = 1$$

Soit:

$$T_1 = T_2 = T_0 \qquad \text{(VI-1)}$$

Si on projette suivant l'axeOx, on obtient:

$$T_{2x} - T_{1x} = m\ddot{x}_n$$

Soit :

$$T_2 sin\alpha_2 - T_1 sin\alpha_1 = m\ddot{x}_n$$

$$T_2 tan\alpha_2 - T_1 tan\alpha_1 = m\ddot{x}_n \qquad \text{(VI-2)}$$

$$tan\alpha_2 = \frac{x_{n+1} - x_n}{d} \qquad \text{(VI-3)}$$

Et :

$$tan\alpha_1 = \frac{x_n - x_{n-1}}{d} \qquad \text{(VI-4)}$$

En remplaçant les relations (VI.1), (VI.3) et (VI.4) dans l'expression (VI-2), on obtient:

$$T_0 \frac{x_{n+1} - x_n}{d} - T_0 \frac{x_n - x_{n-1}}{d} = m\ddot{x}_n$$

L'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse n est donnée donc par :

$$\frac{T_0}{d}(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n) = m\ddot{x}_n \qquad \text{(VI-5)}$$

VI.2.1.1 Calcul de la relation de dispersion

Les extrémités de la masselotte sont fixées. La solution $x_n$de l'équation différentielle (VI-5) est donnée par :

$$x_n(t) = Asin(nkd)sin(\omega t + \varphi)$$

Où k représente le module du vecteur d'onde

Il sera de même pour le déplacement x_{n+1} et x_n

$$x_{n+1}(t) = Asin\big((n+1)kd\big)sin(\omega t + \varphi)$$

Et

$$x_{n+1}(t) = Asin\big((n-1)kd\big)sin(\omega t + \varphi)$$

On somme les deux déplacements x_{n+1} et x_{n-1}

$$x_{n+1} + x_{n-1} = Asin\big((n+1)kd\big)sin(\omega t + \varphi) + A\, sin\big((n-1)kd\big)sin(\omega t + \varphi)$$

$$x_{n+1} + x_{n-1} = Asin(\omega t + \varphi)\big[sin\big((n+1)\big)kd + sin\big((n-1)kd\big)\big]$$

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2Asin(kd)sin(nkd)sin(\omega t + \varphi)$$

Soit :

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2cos(kd)x_n \qquad \text{(VI-6)}$$

Et :

$$\ddot{x}_n = \omega^2 x_n \qquad \text{(VI-7)}$$

On remplace (VI.6) et (VI.7) dans l'expression (VI.5), on obtient :

$$\omega^2 = \frac{2T_0}{md}(1 - coskd)$$

On sait que :

$$1 - coskd = 2sin^2\frac{kd}{2}$$

On obtient donc :

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{md}sin^2\frac{kd}{2} \qquad \text{(VI-8)}$$

L'amplitude de l'élongation en ces deux points est nulle

$$Asin(kL) = 0$$

Soit :

$$sin(kL) = sin(p\pi)$$

Soit :

$$k_p = p\frac{\pi}{L} \qquad \text{avec } p \in N^*$$

Pour chaque mode, on a une pulsation propre et la formule (VI-8) prend la formule généralisée:

$$\omega_p^2 = \frac{4T_0}{md}sin^2\frac{k_p d}{2}$$

$$\omega_P = 2\sqrt{\frac{T_0}{md}}\left|sin\frac{k_p d}{2}\right|$$

Avec

$$\omega_p = \sqrt{\frac{T_0}{md}}$$

VI.3. Etude d'un système mécanique à N degrés de liberté avec extrémités libres

Un tel milieu est schématisé par une succession indéfinie de masse m, distantes au repos de d, reliées par des ressorts de constantes de raideur *k* (Voir Figure VI-2)

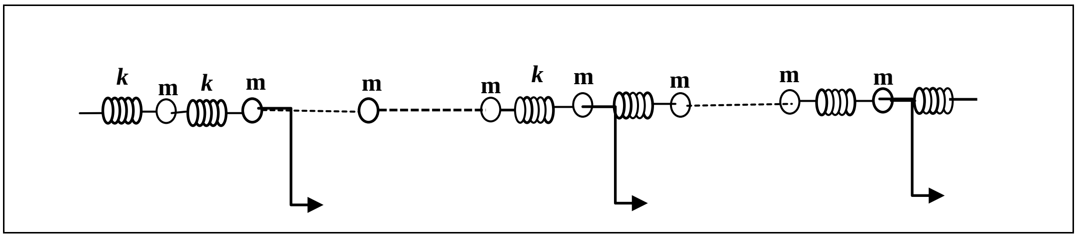


Figure VI-2. Etude d'un système mécanique à N degrés de liberté avec extrémités libres

VI.3 .1. Recherche de l'équation différentielle du mouvement de la masse n

Soit les boules de rang n-1, n, n+1. Au temps*t*, leurs élongationssont, avec les notations de la Figure VI-2, x_{n-1} ,$x_n et x_{n+1}$ par rapport à leurs positions d'équilibre respectives.

A l'équilibre, les boules sont distantes de d, la boule n est soumise à deux forces opposées de module $k(d - I_0)$, si I_0 est la longueur à vide d'un ressort.

Hors équilibre, le ressort entre les boules n et n+1 a pour longueur $+x_{n+1} - x_n$, Il exerce sur la boule n la force :

$$\vec{F_i} = k(d + x_{n+1} - x_n - I_0)\vec{\imath}$$

De même, le ressort entre les boules n et n-1 a pour longueur $d + x_n - x_{n-1}$il exerce sur la boule n la force :

$$m\ddot{x}_n\vec{\imath} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

$$m\ddot{x}_n\vec{\imath} = k\vec{\imath}(d + x_{n+1} - x_n - I_0 - d - x_n + x_{n+1} + I_0)$$

Soit :

$$m\ddot{x}_n = k(x_{n+1} + x_{n-1} - 2x_n)$$

Soit :

$$\ddot{x}_n + \frac{2k}{m}x_n = \frac{k}{m}(x_{n+1} + x_{n-1})$$

VI.3.2. Recherche de la relation de dispersion

On cherche des solutions de la forme :

$$x_n(t) = Asin(\omega t - nkd)$$

Il en est de même pour les déplacements $x_{n+1} et x_n$

$$x_{n+1}(t) = Asin(\omega t - (n-1)kd)$$

$$\ddot{x}_{n+1}(t) = -A\omega^2 sin(\omega t - nkd)$$

On calcule $x_{n+1} + x_{n-1}$

$$x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) = Asin(\omega t - (n+1)kd) + Asin(\omega t - (n-1)kd)$$

En transformant en produit la somme des sinus, on obtient:

$$x_{n+1}(t) + x_{n-1}(t) = 2Asin(\omega t - nkd)cos(kd)$$

Soit la relation de dispersion :

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}(1 - coskd)$$

Où :

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}\left(1 - cos\frac{\omega d}{v}\right) \qquad \text{(VI-9)}$$

Avec

$$k = \frac{\omega}{v}$$

On remplace la pulsation par sa valeur en fonction de la fréquence, on a

$$4\pi^2 v^2 m = 4ksin^2\frac{\pi d}{\lambda}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

On pose :

$$v_0^2 = \frac{k}{\pi^2 m}$$

v_0 est dite fréquence de résonance

$$v = v_0 sin\frac{\pi d}{\lambda}$$

Les vibrations ne se propagent que si $v < v_0$. Cette partie de cours sera reprise en détail dans un prochain livre sur les ondes.

Dans la formule (VI-9), le terme *cos(kd)*dépond de *k*le cosinus variant entre les limites -1 et 1, les valeurs permises pour ω sont :

$$\omega_{min} = 0$$

Et :

$$\omega_{max} = 2\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dans le cas où *kd* est petit, on peut faire un calcul approché de la relation de dispersion.

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}(1 - coskd) = \frac{2k}{m}\frac{k^2 d^2}{2}$$

Soit :

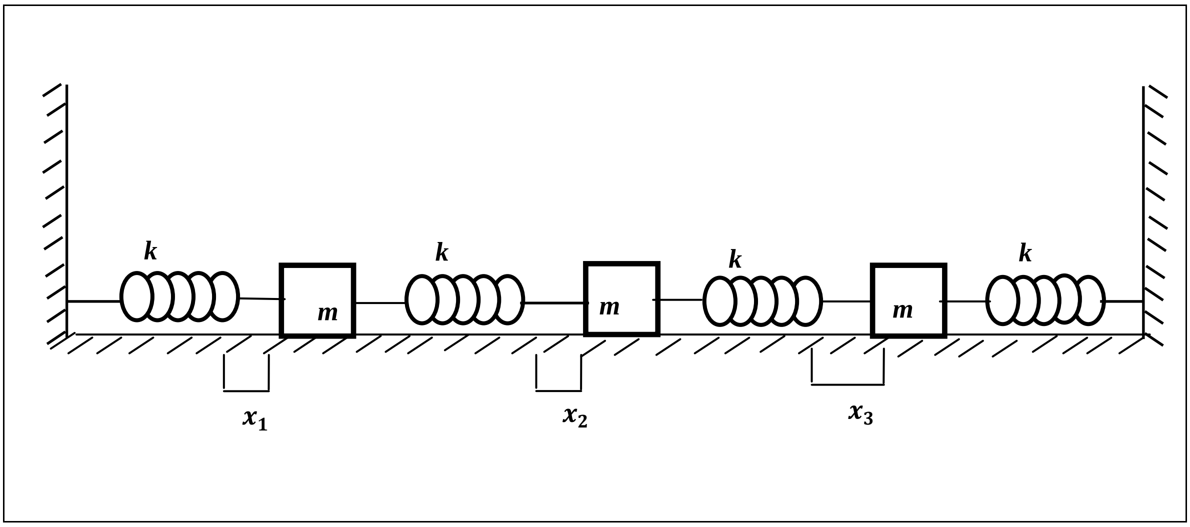
$$\omega = kd\sqrt{\frac{k}{m}}$$

La vitesse de propagation v prend la forme : $v = d\sqrt{\frac{k}{m}}$

Exercices

Exercice 1 :

On considère le système donné par la figure suivante où trois masses m, sont reliées par quatre ressorts de constante de raideur k.



1- Etablir les équations différentielles régissant le mouvement du système.

2- Déterminer les pulsations des modes propres de vibration du système.

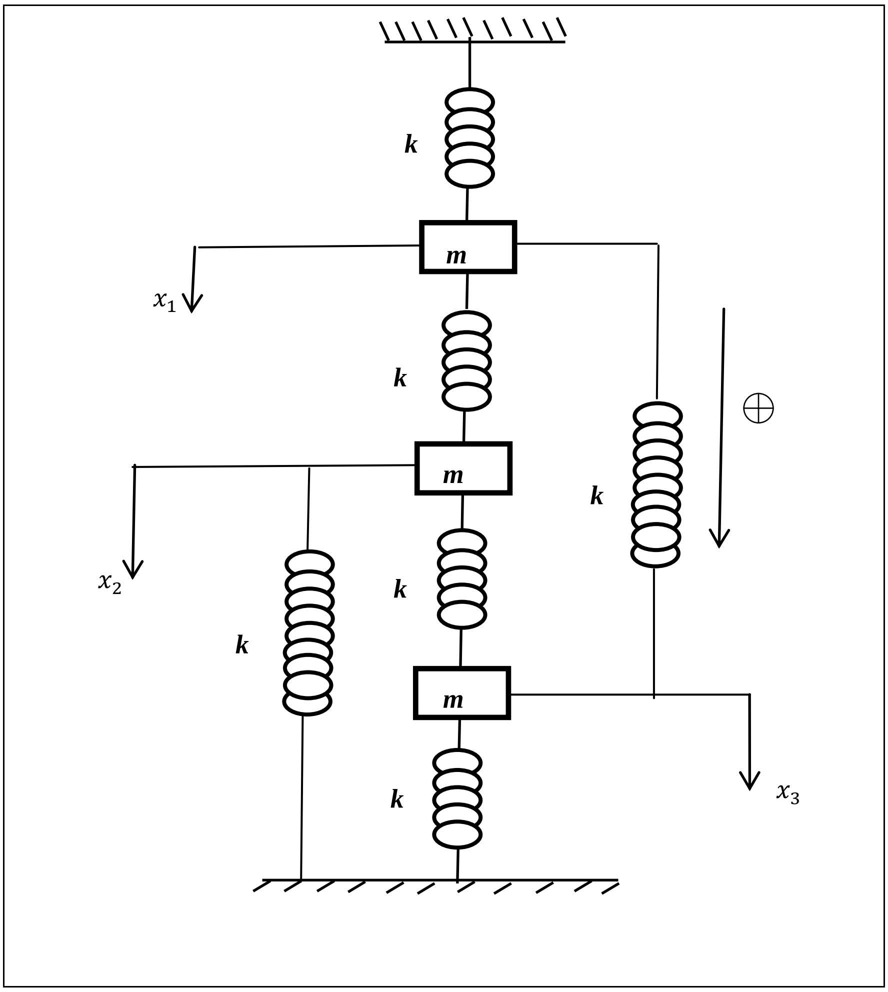
3- Ecrire l'expression générale de $x_1, x_2, et\ x_3$.

Exercice 2 :

On considère le système ou trois masses identiques m reliée par des ressorts de constante de raideur indiqué sur la Figure qui suit :

1-Etablir les équations différentielles régissant le mouvement du système en utilisant la méthode de Newton.

2-Calculer les trois pulsations propres en utilisant la méthode matricielle.

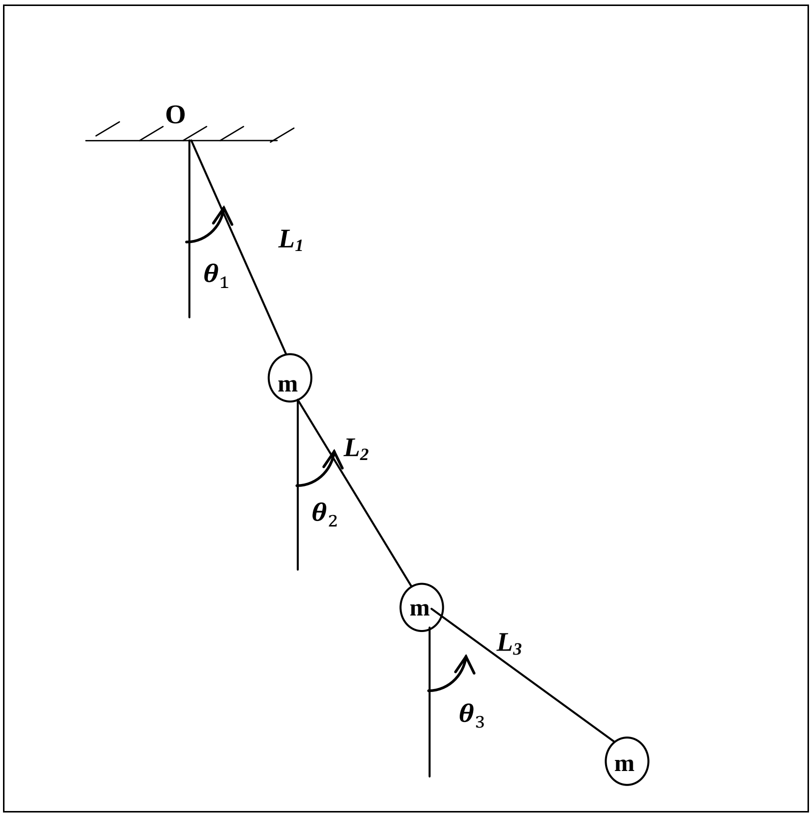


Exercice 3 :

On considère les trois pendules couplés par inertie de la figure suivante

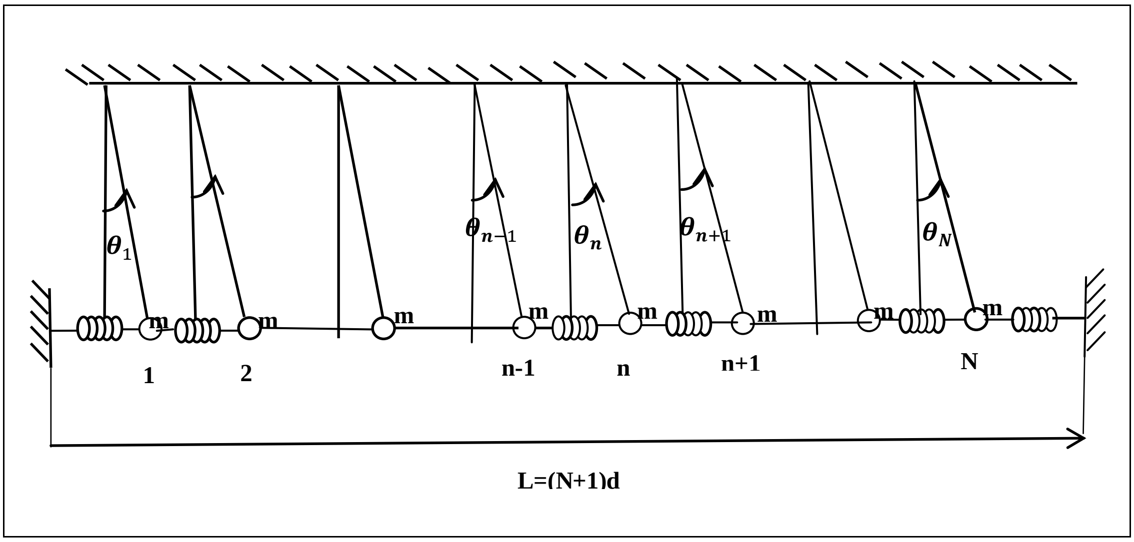
1- En utilisant la méthode de Lagrange, écrire les trois équations différentielles du mouvement régissant le système des trois masses pour simplifier les calculs, on prend $L_1=L_2=L_3=L$ et $m_1 = m_2 = m_3 = m$;

2- Déterminer par la méthode matricielle les équations propres des trois modes.



Exercice 4 :

Soit le système suivant à N degré de liberté.Le système est constitué de N pendules simple de longueur L reliés entre eux par N+1 ressorts de raideur K. Les masses m sont considérées ponctuelles et séparées entre elle par la même distance d.

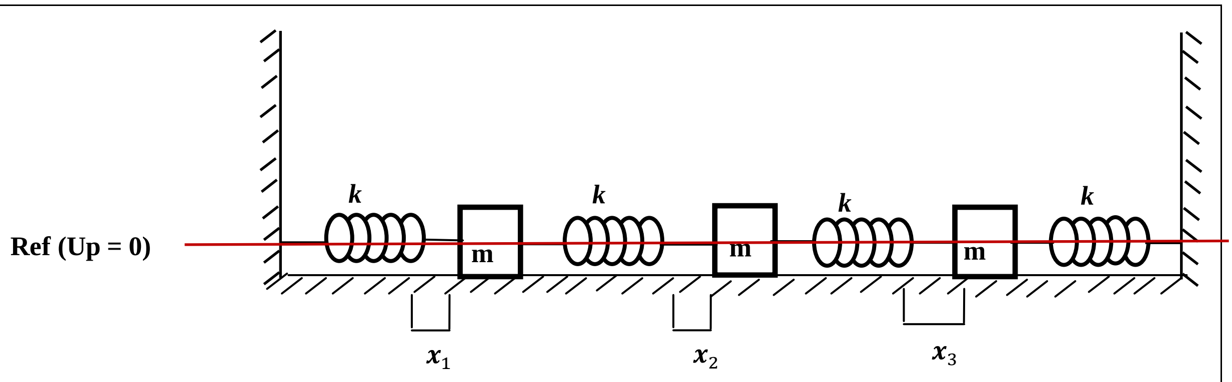


1. Déterminer l’énergie cinétique et potentielle du système.
2. Ecrire l’équation différentielle de la masse n.

3. Déterminer la relation de dispersion, pour cela utiliser : $\theta_n = Ae^{-i(\omega t - nkd)}$.
4. Dans le cas où N= 2, donner les pulsations modes correspondant
5. Ecrire les équations différentielles du mouvement dans le cas N=2,
6. Calculer le rapport des amplitudes dans le premier et le deuxième mode.

Solutions

Exercice 1 :



1- Equations différentielles du mouvement :

- Le Lagrangien : $L = T - U$
- L'énergie cinétique :

$$T = T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3} \Leftrightarrow T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3\dot{x}_3^2$$

- L'énergie potentielle :

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_3)^2 + \frac{1}{2}kx_3^2$$

Le Lagrangien s'écrit alors :

$$L = \frac{1}{2}[m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2] - \left[\frac{1}{2}kx_1^2 + k(x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_1)^2 + \frac{1}{2}kx_3^2\right]$$

Les équations de Lagrange s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \rightarrow & \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) = m\ddot{x}_1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \end{cases} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \rightarrow & \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \end{cases} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_3} = 0 \rightarrow & \begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}\right) = m\ddot{x}_3 \\ \frac{\partial L}{\partial x_3} = -kx_3 - k(x_3 - x_2) \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_2) \\ m\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) \\ m\ddot{x}_3 = -kx_3 - k(x_3 - x_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 2kx_2 - kx_1 - kx_3 = 0 \\ m\ddot{x}_3 + 2kx_3 - kx_2 = 0 \end{cases}$$

Dans un mode de pulsation ω les solutions de la forme :

$x_1 = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi)$, $x_2 = B\cos(\omega t + \varphi)$, $x_3 = \mathrm{C}\cos(\omega t + \varphi)$

En notation complexe, on a :

$$x_1(t) = Ae^{j(\omega t + \varphi_1)}$$

$$x_2(t) = Be^{j(\omega t + \varphi_2)} \Leftrightarrow$$

$$x_3(t) = C\, e^{j(\omega t + \varphi_3)}$$

$$\begin{gathered} (2k - m\omega^2)A - B + 0C = 0 \\ -kA + (2k - m\omega^2) - kC = 0 \\ 0A - kB + (2k - m\omega^2)C = 0 \end{gathered}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} (2k - m\omega^2) & -k & 0 \\ -k & (2k - m\omega^2) & -k \\ 0 & -k & (2k - m\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

$$(2k - m\omega^2)[(2k - m\omega^2)(2k - m\omega^2) - k^2] + k[k(k - m\omega^2)] = 0$$

$$(2k - m\omega^2)[(2k - m\omega^2)^2 - 2k^2] = 0$$

$$(2k - m\omega^2)[(2k - m\omega^2)^2 - 2k^2] = 0$$

$$(2k - m\omega^2)\left[\left(2k - m\omega^2 + \sqrt{2}k\right)\left(2k - m\omega^2 - \sqrt{2}k\right)\right] = 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left(2 + \sqrt{2}\right)\frac{k}{m}}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\left(2 - \sqrt{2}\right)\frac{k}{m}}$$

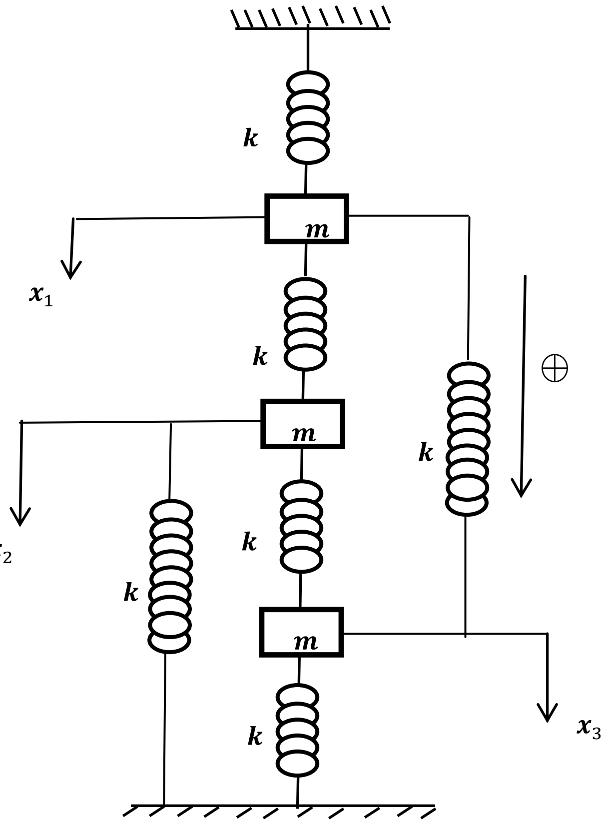
2-Les expressions générales de x_1, x_2 , etx_3 sont :

$$x_1 = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + A_3\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

$$x_2 = B_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + B_3\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

$$x_3 = C_3\cos(\omega_1 t + \varphi_1) + C_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2) + C_3\cos(\omega_3 t + \varphi_3)$$

<u>Exercice 2 :</u>



1- Les équations différentielles du mouvement du système enutilisant la méthode de Newton :

En appliquant le principe fondamental de la dynamiquede translation : $\sum \vec{F}_{ext} = m\ddot{x}$

En projetant suivant le sens positif on obtient :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 - k(x_1 - x_3) - k(x_1 - x_2) & (1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3) & (2) \\ m\ddot{x}_3 = -kx_3 - k(x_3 - x_1) - k(x_3 - x_2) & (3) \end{cases}$$

2- Calcule des trois pulsations propres en utilisant la méthode matricielle :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + 3kx_1 - kx_2 - kx_1 = 0 \\ m\ddot{x}_2 + 3kx_2 - kx_3 - kx_1 = 0 \\ m\ddot{x}_3 + 3kx_3 - kx_1 - kx_2 = 0 \end{cases}$$

On cherche des solutions de la forme :

$$x_1(t) = \mathrm{A}\cos(\omega t + \varphi_1) \ \text{ avec A} > 0$$

$$x_2(t) = \mathrm{B}\cos(\omega t + \varphi_2) \text{ avec B} > 0$$

$$x_3(t) = \mathrm{C}\cos(\omega t + \varphi_3) \ \text{ avec C} > 0$$

En notation complexe, on a :

$$\begin{cases} x_1(t) = Ae^{j(\omega t+\varphi_1)} = \\ x_2(t) = Be^{j(\omega t+\varphi_2)} \\ x_3(t) = Ce^{j(\omega t+\varphi_3)} \end{cases}$$

Le système d'équation ci-dessous s'écrit :

$$\begin{cases} (3k - m\omega^2)A - kB - kC = 0 \\ -kA + (3k - m\omega^2) - kC = 0 \\ -kA - kB + (3k - m\omega^2) = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène admet des solutions non nulles si et, seulement le déterminant est nulle :

$$\begin{vmatrix} 3k - m\omega^2 & -k & -k \\ -k & (3k - m\omega^2) & -k \\ -k & -k & (3k - m\omega^2) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où :

$$(3k - m\omega^2)[(3k - m\omega^2)(3k - m\omega^2) - k^2] + k[-k(3k - m\omega^2) - k^2] + k[k^2 + k(3k - m\omega^2)] = 0$$

Soit : $m^3\omega^6 - 9km^2\omega^4 + 24k^2m\omega^2 - 16k^3 = 0 \rightarrow \begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = \sqrt{4\frac{k}{m}} \\ \omega_3 = \sqrt{4\frac{k}{m}} \end{cases}$

Si on pose : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, on obtient :

$$\omega_1 = \omega_0, \qquad \omega_2 = 2\omega_0, \qquad \omega_3 = 2\omega_0$$

Exercice 3 :

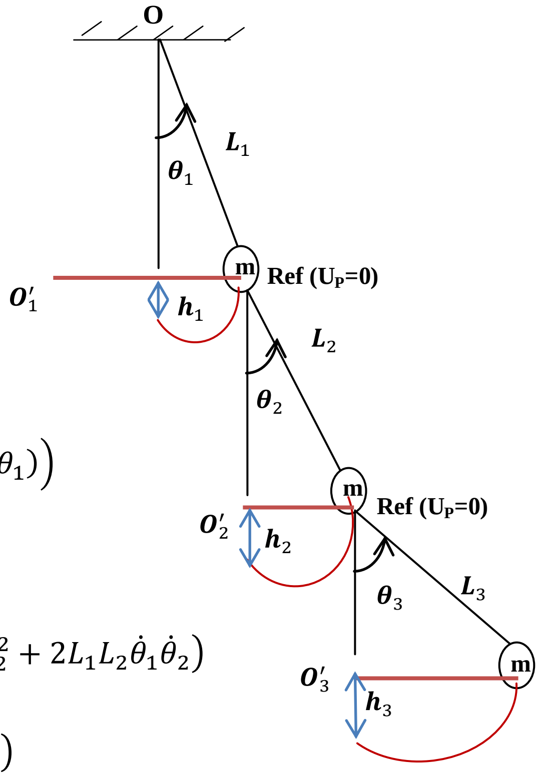
1- En utilisant la méthode de Lagrange, écrire les trois équations différentielles du mouvement des trois masses :

On écrit les énergies cinétiques de translation des trois masses (dans les systèmes couplés, on utilise l'énergie cinétique de translation uniquement) et on somme les trios résultats pour avoir l'énergie cinétique totale.

- L'énergie cinétique :

$T_{m_1} = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2$ avec $\dot{x}_1 = L_1\dot{\theta}_1 = L\dot{\theta}_1$ et $m_1 = m$

Donc



$$T_{m_1} = \frac{1}{2} \mathrm{m} L\dot{\theta}_1^2$$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^2$$

Avec:

$\dot{x}_2 = L_2\dot{\theta}_2 = L\dot{\theta}_2$ et $m_2 = m$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 \left(L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 cos(\theta_2 - \theta_1)\right)$$

Où $cos(\theta_2 - \theta_1) = 1$

$$T_{m_2} = \frac{1}{2} m_2 (L_1^2\dot{\theta}_1^2 + L_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$$

$$= \frac{1}{2} m_2 L (L^2\dot{\theta}_1^2 + L^2\dot{\theta}_2^2 + 2L_1L_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2)$$

Donc $T_{m_2} = \frac{1}{2} mL(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2$

- $T_{m_3} = \frac{1}{2} m_3 \dot{x}_3^2$

$T_{m_3} = \frac{1}{2} m_3 (\dot{x}_3 + \dot{x}')^2$ avec $\dot{x}_3 = L_3\dot{\theta}_3 et L_3 = L,\ m_3 = m$

$$T_{m_3} = \frac{1}{2} m_3 \left(\dot{x}^2 + L_3^2\dot{\theta}_3^2 + 2\dot{x}L_3\dot{\theta}_3 cos(\theta_3 - \theta_2 + \theta_1)\right)$$

où $\cos(\theta_3 - \theta_2 + \theta_1) = 1$ avec $\dot{x}' = \dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2$

Donc $T_{m_3} = \frac{1}{2} mL^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3)$

- $T_{tot} = T_{m_1} + T_{m_2} + T_{m_3}$

$$T_{tot} = \frac{1}{2} mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} mL^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2} mL^2(3\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3)$$

Donc $T_{tot} = \frac{1}{2} mL^2\left(3\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_3^2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_3 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right)$

- L'énergie potentielle

On calcule l'énergie potentielle du système soit la somme de l'énergie potentielle des trois masses (m_1, m_2, m_3).

- $U_{tot} = U_{m_1} + U_{m_2} + U_{m_3}$
- $U_{m_1} = m_1 g h_1$ Avec $h_1 = L_1(1 - cos\theta_1)$

Donc $U_{m_1} = m_1 g L_1(1 - cos\theta_1)$

- $U_{m_2} = m_2 g h_2$ Avec $h_2 = L_1(1 - cos\theta_1) + L_2(1 - cos\theta_2)$

Donc $U_{m_2} = m_2 g\left(L_1(1 - cos\theta_1) + L_2(1 - cos\theta_2)\right)$

- $U_{m_3} = m_3 g h_3$

Avec :

$$h_3 = L_1(1 - cos\theta_1) + L_2(1 - cos\theta_1) + L_3(1 - cos\theta_3)$$

Donc :

$$U_{m_3} = m_1 g L_1(1 - cos\theta_1) + m_2 g\left(L_1(1 - cos\theta_1) + L_2(1 - cos\theta_2)\right) + \qquad + m_3 g\left(L_1(1 - cos\theta_1) + L_2(1 - cos\theta_2) + L_3(1 - cos\theta_3)\right)$$

- $U_{tot} =$

$$m_1 g L_1 \frac{\theta_1^2}{2} + m_2 g L_2 \frac{\theta_1^2}{2} + m_2 g L_2 \frac{\theta_2^2}{2} + m_3 g L_1 \frac{\theta_1^2}{2} + m_3 g L_2 \frac{\theta_2^2}{2} + \qquad + m_3 g L_3 \frac{\theta_3^2}{2}$$

$L_1 = L_2 = L_3 = L$ Donc $U_{tot} = 3mgL\frac{\theta_1^2}{2} + 2mgL\frac{\theta_2^2}{2} + mgL\frac{\theta_3^2}{2}$

- Le Lagrangien du système :

$$L = \frac{1}{2} mL^2\left(3\dot{\theta}_1^2 + 2\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 + 4\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + 2\dot{\theta}_2\dot{\theta}_3\right) - 3mgL\frac{\theta_1^2}{2} + mgL\theta_1^2 + mgL\frac{\theta_3^2}{2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_3}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \theta_3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3mL^2\ddot{\theta}_1 + 2mL^2\ddot{\theta}_2 + mL^2\ddot{\theta}_3 + 3mgL\theta_1 = 0 \\ 2mL^2\ddot{\theta}_1 + 2mL^2\ddot{\theta}_2 + mL^2\ddot{\theta}_2 + 2mgL\theta_2 = 0 \\ mL^2\ddot{\theta}_1 + mL^2\ddot{\theta}_2 + mL^2\ddot{\theta}_3 + mgL\theta_3 = 0 \end{cases}$$

On divise les trois équations par mL, on obtient :

$$\begin{cases} 3L\ddot{\theta}_1 + 3g\theta_1 + 2L\ddot{\theta}_2 + L\ddot{\theta}_3 = 0 \quad (1) \\ 2L\ddot{\theta}_1 + 2L\ddot{\theta}_2 + 2g\theta_2 + L\ddot{\theta}_3 = 0 \quad (2) \\ L\ddot{\theta}_1 + L\ddot{\theta}_2 + L\ddot{\theta}_3 + g\theta_3 = 0 \quad (3) \end{cases}$$

Déterminer par la méthode matricielle les pulsations des trois modes propres :

On reprend le système ci-dessus et on cherche des solutions de la forme :

- $\theta_1 = \theta_{01}cos(\omega t + \varphi_1)$ Avec $\theta_1 > 0$
- $\theta_2 = \theta_{02}cos(\omega t + \varphi_2)$ Avec $\theta_2 > 0$
- $\theta_3 = \theta_{03}\cos(\omega t + \varphi_3)$ Avec $\theta_3 > 0$

En notation complexe, on a

- $\bar{\theta}_1 = \theta_{01}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi_1)}$
- $\bar{\theta}_2 = \theta_{02}e^{i(\omega t+\varphi_2)}$
- $\bar{\theta}_3 = \theta_{03}e^{i(\omega t+\varphi_3)}$

Le système d'équations (1), (2), (3) s'écrit :

$$\begin{cases} (3g - 3L\omega^2)\bar{\theta}_1 - 2L\omega^2\bar{\theta}_1 - L\omega^2\bar{\theta}_1 = 0 \\ -2L\omega^2\bar{\theta}_1 + (2g - 2L\omega^2)\bar{\theta}_2 - L\omega^2\bar{\theta}_2 = 0 \\ -L\omega^2\bar{\theta}_1 - L\omega^2\bar{\theta}_2 + (g - L\omega^2)\bar{\theta}_3 = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène admet des solutions non nulles si, et seulement le déterminant donné ci-après est nul :

$$\begin{vmatrix} 3g - 3L\omega^2 & -2L\omega^2 & -L\omega^2 \\ -2L\omega^2 & 2g - 2L\omega^2 & -L\omega^2 \\ -L\omega^2 & -L\omega^2 & g - L\omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

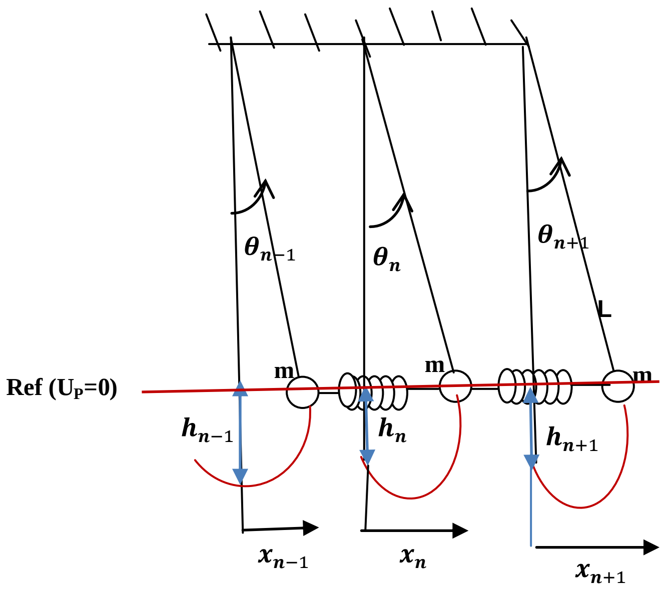
$$\Delta = L^2\omega^2 - 9gL^2\omega^4 + 18g^2\omega^4 + 18g^2L\omega^2 - 6g^2 = 0$$

Si on pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$, on trouve :

$\omega_1 = 0.65\omega_0,\ \omega_2 = 1.52\omega_0,\ \omega_3 = 2.5\omega_0$

Exercice 4 :

1- L'énergie cinétique et potentielle :



- L'énergie cinétique :

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \cdots + \frac{1}{2}m\dot{x}_{n-1}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_n^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_{n+1}^2 + \cdots + \frac{1}{2}m\dot{x}_N^2$$

Avec :

$$x_n \approx L\theta_n,\ x_{n+1} \approx L\theta_{n+1},\ x_{n-1} \approx L\theta_{n-1}$$

$$T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_2^2 + \cdots \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_{n-1}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_n^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_{n+1}^2 + \cdots \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_N^2$$

Donc :

$$T = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_n^2$$

- L'énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}kx_1^2 + mgh_1 + \cdots \frac{1}{2}k(x_{n-1} - x_n)^2 + mgh_n + \frac{1}{2}k(x_n - x_{n+1})^2 + \cdots \frac{1}{2}kx_N^2 + mgh_N$$

Avec :

$$h_n = L(1 - cos\theta_n) = L\frac{\theta_n^2}{2}$$

$$h_1 = L(1 - cos\theta_n) = L\frac{\theta_1^2}{2}$$

$$h_N = L(1 - cos\theta_N) = L\frac{\theta_N^2}{2}$$

$$U = mgL\frac{\theta_n^2}{2} + \frac{1}{2}kL^2(\theta_{n+1} - \theta_n)^2 - \frac{1}{2}kL^2(\theta_n - \theta_{n-1})^2$$

- Le Lagrangien du système :

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}_n^2 - mgL\frac{\theta_n^2}{2} - \frac{1}{2}kL^2(\theta_{n+1} - \theta_n)^2 + \frac{1}{2}kL^2(\theta_n - \theta_{n-1})^2$$

2-L'équation différentielle pour la masse n :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_n} = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_n}\right) = mL^2\ddot{\theta}_n \\ \dfrac{\partial L}{\partial \theta_n} = -mgL\theta_n - kL^2(\theta_n - \theta_{n+1}) + kL^2(\theta_{n-1} - \theta_n) \end{cases}$$

$$mL^2\ddot{\theta}_n - kL^2(\theta_{n-1} - \theta_n) + kL^2(\theta_n - \theta_{n+1}) + mgL\theta_n = 0 \quad (1)$$

$$mL^2\ddot{\theta}_n - 2kL\theta_n + kL(\theta_{n-1} + \theta_{n+1}) = 0$$

$$\ddot{\theta}_n + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)\theta_n - \frac{k}{m}(\theta_{n-1} + \theta_{n+1}) = 0$$

3-La relation de dissipation :

On pose :

$$\theta_n = Ae^{i(\omega t - nkd)}$$

$$\theta_{n+1} = Ae^{i(\omega t - (n+1)kd)}$$

$$\theta_{n-1} = Ae^{i(\omega t - (n-1)kd)}$$

$$\theta_{n+1} + \theta_{n-1} = Ae^{i\omega t}\left[e^{-i(n+1)kd} + e^{-i(n-1)kd}\right]$$

$$\alpha = (n+1)kd$$

$$\beta = (n-1)kd$$

$$e^{-i\alpha} + e^{-i\beta} = cos\alpha - isin\beta + cos\beta - isin\alpha$$

$$e^{-i\alpha} + e^{-i\beta} = (cos\alpha + cos\beta) - i(sin\alpha + sin\beta)$$

$$e^{-i\alpha}+e^{-i\beta}=2cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-2icos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$=2cos(kd)cos(nkd)-2icos(kd)sin(nkd)$$

$$=2\cos kd[cos(nkd)-sin(nkd)]$$

$$e^{-i\alpha}+e^{-i\beta}=2cos(kd)e^{-inkd}$$

$$\theta_n+\theta_n=2Ae^{-i\omega t}cos(kd)e^{-inkd}$$

$$=2cos(kd)Ae^{i(\omega t-nkd)}$$

$\theta_{n+1}+\theta_{n-1}=2cos(kd)\theta_n$

Et $\ddot{\theta}_n=-\omega^2\theta_n$

$$-mL^2\omega^2\theta_n-kL^2(2cos(kd)\theta_n-2\theta_n)+mgL\theta_n=0$$

$$\theta_n[-2kL^2(cos(kd)-1)-mL^2\omega^2+mgL]=0$$

$$mL^2\omega^2=2kL^2\big(1-cos(kd)\big)+mgL$$

$$\omega^2=\frac{2k}{m}\big(1-cos(kd)\big)+\frac{g}{L}$$

$$1-cos(kd)=2sin^2\left(\frac{kd}{2}\right)$$

D’où :

$$\omega^2=\frac{k}{m}sin^2\left(\frac{kd}{2}\right)+\frac{g}{L}$$

Les deux extrémités de la corde sont fixées.

$$Asin(kL)=sin(p\pi)kp=\frac{p\pi}{L}\qquad p\epsilon N^*$$

4-$N=2$; les pulsations propres des modes correspondants :

- Mode 1 :

$$p=1,k_1=\frac{\pi}{L},L=(N+1)d,k_1=\frac{\pi}{3d}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{4k}{m} sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{3d}d}{2}\right) + \frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{k}{m} + \frac{g}{L}}$$

- Mode 2 :

$p = 2\,,\, k_2 = \frac{2\pi}{3d}$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m} sin^2\left(\frac{\frac{2\pi}{3d}d}{2}\right) + \frac{g}{L}} = \sqrt{\frac{3k}{m} + \frac{g}{L}}$$

5- $N = 2$; écrire les équations différentielle du mouvement :

On prend $n = 1$ dans l'équation (1) :

$$mL^2\ddot{\theta}_1 - kL^2(\theta_0 + \theta_2 + \theta_3) + mgL\theta_1 = 0$$

$mL^2\ddot{\theta}_1 + (2kL^2 + mgL)\theta_1 - kL^2\theta_2 = 0$ (2)

On prend $n = 2$ dans l'équation (1) :

$$mL^2\ddot{\theta}_2 - kL^2(\theta_1 + \theta_3 - 2\theta_2) + mgL\theta_2 = 0$$

$mL^2\ddot{\theta}_2 + (2kL^2 + mgL)\theta_2 - kL^2\theta_1 = 0$ (3)

6- le rapport des amplitudes des modes 1 et 2 :

On remplace ω par ω_1 dans l'équation (2) ou (3) :

$$-mL^2\left(\frac{k}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_1 + (2kL^2 + mgL)\theta_1 - kL^2\theta_2 = 0$$

$$+kL^2\theta_1 - kL^2\theta_2 = 0$$

$\frac{\theta_1}{\theta_2} = 1$: les deux pendules oscillent en phase.

On remplace ω par ω_2 dans l'équation (2) ou (3) :

$$-mL^2\left(\frac{3k}{m} + \frac{g}{L}\right)\theta_1 + (2kL^2 + mgL)\theta_1 - kL^2\theta_2 = 0$$

$$-kL^2\theta_1 - kL^2\theta_2 = 0$$

$\frac{\theta_1}{\theta_2} = -1$: les deux pendules oscillent en opposition de phase.

PARTIE 2

ONDES

Chapitre 7

Propagation des ondes

VII-1. Nature des ondes

VII-1.1. Types d'ondes

Une onde correspond à un déplacement d'énergie qui se manifeste par des oscillations corrélées entre elles, dans l'espace traversé. Une première classification permet de distinguer des ondes mécaniques et des ondes électromagnétiques.

✓ **Les ondes mécaniques** sont celles pour lesquelles l'énergie se manifeste dans les mouvements de matière (énergie cinétique liée à la vitesse du mouvement et énergie potentielle liée aux déformations subies par le milieu matériel). C'est le cas des ondes sur une corde élastique, ou dans un milieu étendu, dans un solide ou un fluide.

✓ **Les ondes électromagnétiques (ém)** se manifestent sous la forme de variations des champs (électriques et magnétiques) générés par des charges électriques en mouvement. La propagation des signaux électriques dans les circuits et les câbles sont un cas particulier d'ondes ém qu'on qualifiera d'ondes électriques.

VII.1.2. Caractéristiques d'un phénomène ondulatoire :

Une onde correspond à un flux d'énergie. On y observe éventuellement un mouvement, cela se traduit par un déplacement d'impulsion ou de signal, mais pas de matière. Pour la décrire il fautdonner des informations sur la quantité d'énergie ainsi que son évolution spatiale et temporelle.

✓ ***L'énergie.***

Une onde étant un transport d'énergie, il convient d'identifier la source de cette énergie. La sourcetransforme de l'énergie d'une forme particulière (mécanique, électrique, atomique, moléculaire, ...) enune vibration qui se déplace dans le milieu environnant. Une première caractéristique est l'énergie émise par la source (joules), ou si le phénomène dure, l'énergie fournie par unité de temps, c.-à-d. lapuissance (watts).

✓ ***La célérité.***

La caractéristique suivante à considérer, est la vitesse à laquelle l'énergie va se déplacer dans lemilieu ; on parle aussi de célérité de l'onde. Cette vitesse dépend de la nature de la vibration dans lemilieu et peut dépendre de la fréquence de la vibration crée.

✓ ***La dimension***

L'énergie émise, en se déplaçant peut rester confinée autour d'un seul axe ; c'est le cas pour uneperturbation sur une corde tendue ou un signal électrique dans un câble. L'onde est dite à unedimension. Une seule coordonnée spatiale suffit à la décrire. Si l'énergie ou la perturbation se répandsur une surface, on a une onde à 2 dimensions (les vagues sur un plan d'eau). Dans le cas général l'onde est tridimensionnelle, c'est le cas pour le son dans un espace libre ou la lumière.

✓ ***Types d'ondes (longitudinales ou transverses).***

Une onde est dite *longitudinale* si l'ébranlement est parallèle à la direction de propagation, comme le montre la figure (V.1.A). Mais, l'ondeest dite *transversale* sil'ébranlement est perpendiculaire à la direction de propagation (Fig.VII-1.B).

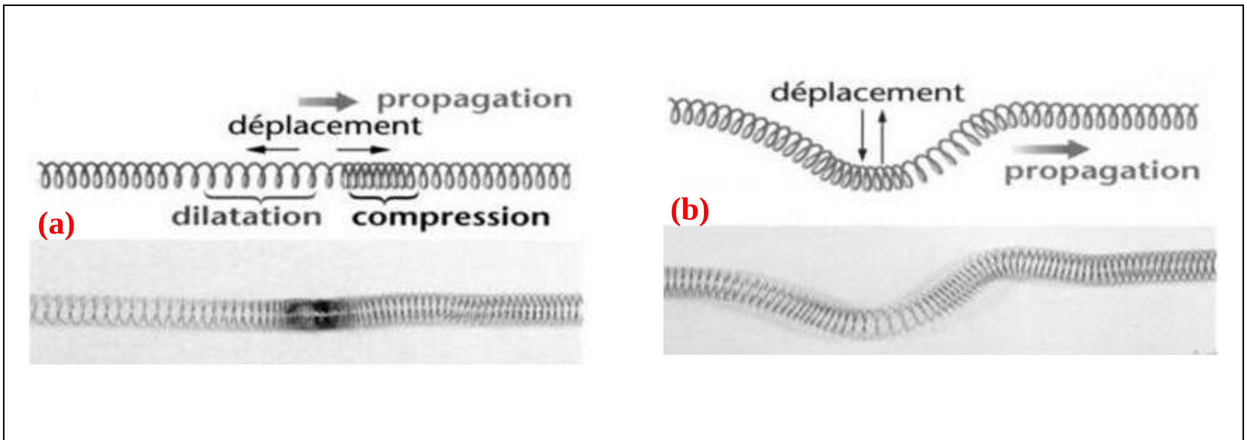


Figure VII-1. (a) Onde longitudinale, (b) Onde transversale.

VII-2. Propagation à une dimension

VII-2.1. Equation de propagation

Dans les phénomènes vibratoires traités dans les chapitres précédents, nous nous sommesintéressés à des phénomènes ou des grandeurs physiques qui dépendaient d'une seule variable, (le temps). Nous allons maintenant examiner toute une série de phénomènes qui sont décrits prune fonction qui dépend à la fois du temps t et d'une variable d'espace, x par exemple.

On considère une onde progressive se propageant dans la direction de l'axe des$x$, telle quele point d'abscisse $x = 0$ est soumis à une vibration sinusoïdale de la forme :

$$S(x_0 = 0, t) = S_0 \sin(\omega t).$$

Le point se trouvant à l'abscisse $x > 0$ aura la même vibration que celle du point $x = 0$maisavec un retard égal à$\frac{x}{V}$:

$$S(x,t) = S_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right]$$

Dans laquelle V est une grandeur physique qui a les dimensions d'une vitesse et sera appeléedans la suite vitesse de propagation.Les dérivées partielles par rapport à x donnent :

$$\Rightarrow \frac{\partial s}{\partial x} = \left(-\frac{\omega}{V}\right) S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right].$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \left(-\frac{\omega^2}{V^2}\right) S_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right].$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = -\frac{\omega^2}{V^2} S(x,t) \qquad \text{(VII-1)}$$

Les dérivées partielles par rapport à t donnent :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \omega S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right].$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 S_0 \sin\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right].$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\omega^2 S(x,t).$$

$$\Rightarrow \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{V^2} S(x,t).) \qquad \text{(VII-2)}$$

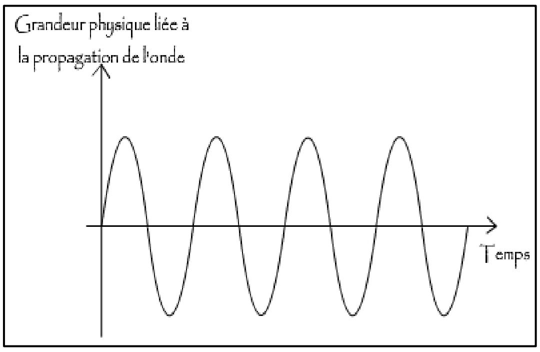
D'après (VII.1) et (VII.2) :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0 \qquad \text{(VII-3)}$$

Cette équation est appelée ***équation de d'Alembert*** ou ***équation d'onde*** ou encore ***équation de propagation à une dimension***.

VII-2.2. Onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive est dite sinusoïdale si les variations de la perturbation se font en suivant la fonction mathématique sinus. On peut identifier ce type de fonction à partir du graphe comportant une alternance de "vagues" positives et négatives de mêmes amplitudes comme le montre la Figure ci-contre.



Une onde progressive sinusoïdale possède, en plus d'une périodicité temporelle, une périodicité spatiale (répétition de la déformation). Si la périodicité temporelle est, nous l'avons vu, définie par la fréquence, la périodicité spatiale est, quant à elle définie, par la longueur d'onde.

Comme nous avons vu précédemment, pour une onde progressive sinusoïdale se propageant selon l'axe $x$et correspondant à une perturbation s'exerçant selon l'axe y (onde transversale), l'expression de la déformation $S(x,t)$s'écrit sous la forme :

$$S(x,t) = S_0 \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)\right] \Longrightarrow S(x,t) = S_0 \cos(\omega t - \emptyset(x)).$$

Où : $\emptyset(x) = \frac{\omega}{V}x$, représente le déphasage lié au temps de propagation $\frac{x}{V}$.On dit que$\emptyset(x)$ représentele déphasage dû à la propagation. L’onde progressive sinusoïdale s’écrit sous la forme suivantequi permet de mettre en évidence la double périodicité (dans le temps et dans l’espace) :

$$S(x,t) = S_0 \cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right].$$

La quantité $\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$ est la période temporelle tandis que la quantité$\lambda = V.T$est la longueurd’onde qui constitue la période spatiale.On peut vérifier aisément que :

$$S(x, t + nT) = S(x,t).$$
$$S(x + n\lambda, t) = S(x,t).$$

Où : n est un nombre entier.

L'onde progressive s'écrit souvent :

$$S(x,t) = S_0 \cos(\omega t - kx).$$

Où : S_0 : est l'amplitude qui s'exprime en m.

ω : est la pulsation du mouvement qui s'exprime en rad/s.

$k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$: est appelé le module du vecteur d'onde qui s'exprime en m^{-1}.

VII-2.3. Ondes proressives périodiques

Quand la source impose une perturbation périodique, l'onde progressive ainsi générée est elle-même périodique. Cette onde est caractérisée par une double périodicité : *temporelle* et *spatiale*.

A. *Période temporelle*

Considérons la déformation du milieu provoquée par une onde périodique, au niveau de la source et en un point quelconque M de ce milieu, en fonction du temps.

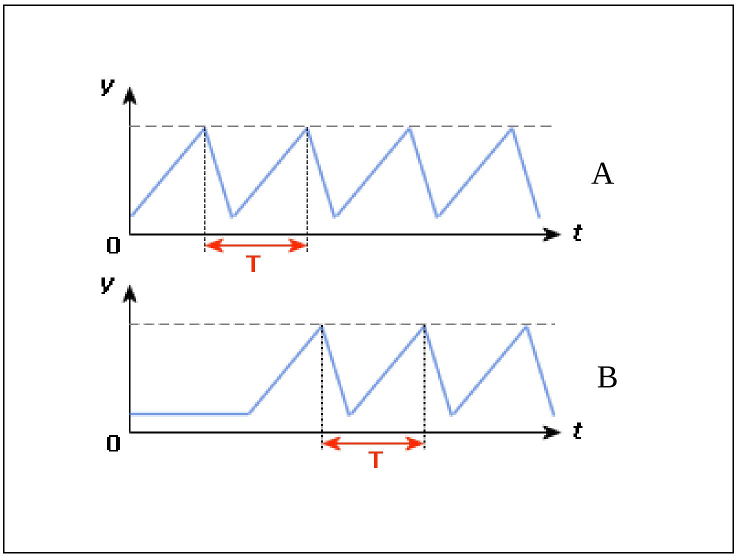


Figure VII-2. Mouvement périodique de : (A) la source, (B) d'un point M quelconque du milieu avec un retard τ sur celui de la source.

À la source ou en un point donné, on constate que le mouvement observé est périodique. Il est caractérisé par une période T(exprimée en seconde (s)).

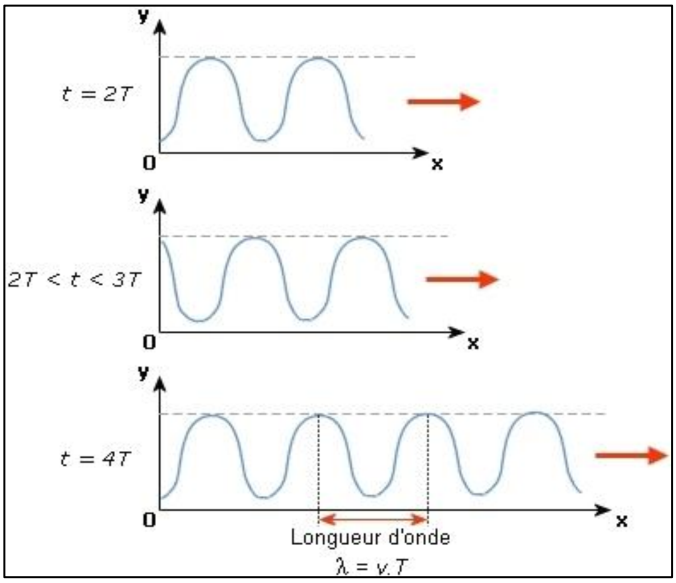
Pour un point donné, la période correspond à la plus petite durée non nulle entre deux états vibratoires identiques. Autrement dit, sur le graphe, la période T est par exemple le temps entre deux maximums consécutifs.

La valeur de T n'est pas modifiée lors de la propagation de l'onde. La valeur de cette période caractérise la source.

Si le point M est distant de la source d'une longueur d (en m), leretard (en s) est donnépar la relation $\tau = \frac{d}{c}$, où c : est la célérité de l'onde.

B. <u>Période spatiale</u>

On considère maintenant le milieu de propagation pour des instants différents donnés.Autrement dit, c'est comme si on prenait l'onde représenté sur la figure ci-contre : on « fige le temps ».



On observe que l'onde possède une périodicité dans l'espace, caractérisée par sa période spatiale, que l'on nomme longueur d'onde, notée λ. Cette grandeur caractérise l'onde. Sa valeur s'exprime en mètres.

Alors, la longueur d'onde est la plus petite distance non nulle séparant deux points du milieu présentant le même état vibratoire. La longueur d'onde est ainsi par exemple la distance séparant deux maximums consécutifs

La longueur d'onde λ (en m) est reliée à la célérité V (en m/s^{-1}) et à la période T(en s) de l'onde par la relation: $\lambda = V.T$

C. <u>Fréquence</u>

La fréquence de vibration f d'une onde est égale à l'inverse de sa période temporelle T :$f = \frac{1}{T}$, où f s'exprime en Hertz (Hz) etT en secondes. Autrement, en peut dit que, la fréquence représente le nombre d'oscillations (le nombre de périodes) par seconde.

Exercices

Exercice 01 :

1. Vérifier que les fonctions suivantes :

   A. $u(x,t) = A\sin\left(\omega(t - \frac{x}{V})\right)$.

   B. $u(x,t) = A\cos(k(x - Vt))$.

   C. $u(x,t) = \alpha(x + Vt)^2$.

   D. $u(x,t) = A\exp\left(i\omega(t - \frac{x}{V})\right)$.

   E. $u(x,t) = A\exp\left(i\omega(t + \frac{x}{V})\right)$.

   F. $u(x,t) = A\exp\left(i\omega(t - \frac{x}{V})\right) + B\exp\left(i\omega(t + \frac{x}{V})\right)$.

sont solutions de l'équation : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

où x, t et V représentent respectivement la position, le temps et la vitesse de propagation.

Exercice 02 : Soit l'équation suivante :

$$y(x,t) = 10\sin 2\pi(t - 0.005x).$$

1. Calculer : $\lambda,\ V,\ f\ et\ k$.
2. Sachant que $x = 2cm et t = 0.05s$, trouver $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial y}{\partial x}$.

Exercice 3 (Superposition des ondes) :

Une onde (1) sinusoïdale plane se déplace le long d'un axe $x'Ox$ suivant les x croissants à la célérité c.

Pour $x = 0$, on a $u_1(0,t) = u_0 sin\omega t$

Une onde (2) de même pulsation se propage suivant les x décroissants à la même célérité c avec : $u_2(0,t) = u_0 sin\omega t$

1- Donner les expressions $u_1(x,t)$ et $u_2(x,t)$.

2- Dans une région où les ondes se superposent, on obtient une onde résultante :

$$u(x,t) = u_0\, cos\frac{\pi}{6}x\ sin\frac{\pi}{4}t$$

Avec x exprimé en mètres et t en secondes.

a) Comment appelle-t-on une telle onde ?

b) Calculer sa pulsation et sa période.

c) Calculer sa longueur d'onde et sa vitesse de phase.

Solutions

Exercice 01:

A. $u(x,t) = A\sin\left(\omega(t - \frac{x}{V})\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -A\frac{\omega}{V}\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{V^2}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\frac{\omega^2}{V^2}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right) \text{..................(1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\omega\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right) \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right) \Longrightarrow$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -A\omega^2\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right) \text{..................(2)}$$

Alors $(1) - \frac{1}{V^2}(2) \Longrightarrow -A\frac{\omega^2}{V^2}\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right) - \frac{1}{V^2}\left[-A\omega^2\sin\left(\omega\left(t-\frac{x}{V}\right)\right) = 0\right]$

Donc la fonction $u(x,t) = A\sin\left(\omega(t-\frac{x}{V})\right)$ est une solution de l'équation : $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$

Remarque : Les autres équations pour les étudiants.

Exercice 02:

1. On a: $y(x,t) = A\sin\left(\omega(t-\frac{x}{V})\right) = A\sin(\omega t - kx)$.........................(1)

Et d'autre part, on a :

$y(x,t) = 10\sin 2\pi(t - 0.005x) = 10\sin(2\pi t - 2\pi.0.005x)$..................(2)

La comparaison de (1) et (2) donne :

$A = 10\ cm,\ \omega = 2\pi\, rad/s = 6.28\ rad/s,\ \omega = 2\pi f \Longrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = 01Hz.$

$\frac{1}{V} = 0.005 \Longrightarrow V = 200\, cm/s.$

$k = 2C.0.005 = 0.01\pi\, rad/cm,\quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.01\pi} = 200cm$

2. $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{x=2cmett=0.05s} = 2\pi.10\cos 2\pi(t-0.005x)|_{x=2cmett=0.05s} = 60.82\ cm/s.$

$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right|_{x=2cmett=0.05s} = -4\pi^2.10\sin 2\pi(t-0.005x)|_{x=2cmett=0.05s} = -98.03\ cm/s.$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=2cm\ et\ t=0.05s} = 0.005.2\pi.10\cos 2\pi(t-0.005x)|_{x=2cm\ et\ t=0.05s} =$$

Exercice 3 :

$$u(x,t) = u_0\, cos\frac{\pi}{6}x\, sin\frac{\pi}{4}t$$

1- $u(x,t)$ est une fonction d'onde à variables séparables $u(x,t) = f(x)\; g(t) \Rightarrow$ c'est une onde stationnaire (rappeler sa définition).

2- La fonction d'onde dans ce cas est de la forme : $u(x,t) = u_0 \cos kx \sin \omega t$

Par identification : la pulsation $\omega = \frac{\pi}{4} rad/s \Rightarrow$ la période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 8s$

3- Par identification : le module de vecteur d'onde $k = \frac{\pi}{6} rad/m \Rightarrow$ La longueur d'onde : $\lambda = \frac{2\pi}{k} = 12m$

La vitesse de phase (la célérité) : $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{1{,}5m}{s}$

Chapitre 8

La corde vibrante

VIII-1. Equation des ondes des cordes vibrantes

Considérons une corde tendue, rectiligne selon la coordonnéex, et de longueur infinie. Nousallons étudier la propagation d'un faible ébranlement le long de la corde. Supposons que cetébranlement se produise suivant l'axeoy, et Prenons une portion de la corde dont les extrémités sont définit par x et x + dx et où sontappliquées respectivement deux tensions (Voir Figure IIIV-1).

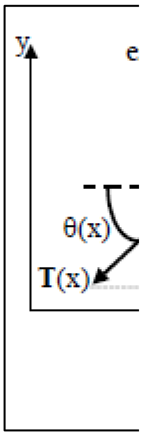


Figure VIII-1. Corde vibrant transversalement.

Etudions l'équation du mouvement de cette corde. Nous dénoterons par Tla tension àlaquelle est soumise la corde. On considère en un point d'abscisse $x$un segment très court decette corde, de longueur Δx. La masse Δmdu segment est donnée par :

$$\Delta m = \mu \Delta x.$$

où μ est la densité linéique de masse de la corde, c'est-à-dire la masse par unité de longueurqui s'exprime en kg/m.

La deuxième loi de Newtonnous permet d'écrire :

$$\mu . dx . \vec{a} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} dx.$$

N.B : On néglige la force de pésanteur devant la tension de la corde

donc :$\mu . \vec{a} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x}$.

Comme il n'y a pas de déplacement selon x, alors, par projection sur l'axe des x on trouve :$\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \iff T_x = T\cos\theta = cte.$

θétant très petit donc $\cos\theta \approx 1$, d'où : $T = cte = T_0$.

Donc la tension en module reste constante pour de faibles vibrations.

Projetons sur l'axe des y :

θest très petit donc : $sin\,\theta \approx tan\,\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$, d'où : $T_y = T_0 \sin\theta = T_0 \frac{\partial u}{\partial x}$.

La projection donne :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Si on définit V=$\sqrt{\frac{T}{\mu}}$, qui a la dimension d'une vitesse, on constate que :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

qui est l'équation d'onde de la corde. Vest la vitesse de propagation de cette onde.

La vitesse de particules s'écrit : $\dot{u}$

VIII-2. Ondes progressives harmoniques

Une onde progressive harmonique se propageant selon Ox est définie par :

$$u(x,t) = U_0 \cos(\omega t - kx).$$

Où: $k = \frac{\omega}{V} = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le module du vecteur d'onde, λ étant la longueur d'onde.

VIII-2.1. Force en un point

On appelle force en un point, la projection selon Oy de la force exercée, en ce point, par lapartie gauche de la corde sur la partie droite :

$$F = -T\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad \text{(VIII-1)}$$

Dans le cas d'une onde progressive sinusoïdale, la relation (VIII-1) devient :

$$F = ikTU_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

La vitesse de particules s'écrit :

$$\dot{u}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega U_0 e^{i(\omega t - kx)}$$

On constate que pour une onde progressive la vitesse de particules $\dot{u}$ est en phase avec la force F.

VIII.2.2. Impédance

On appelle impédance en un point le rapport de l'amplitude complexe de la force à l'amplitudecomplexe de la vitesse de particule :

$$Z(x) = \frac{F_y}{\dot{u}_y}$$

Dans le cas d'une onde progressive, on obtient :

$$Z(x) = \mu V = \sqrt{\mu T}$$

La quantité $\sqrt{\mu T}$définit l'impédance caractéristique de la corde.

$$Z_c = \mu V = \sqrt{\mu T}$$

On obtient une propriété de l'onde progressive plane :$Z(x) = Z_c \forall x$

VIII-3. Réflexion et transmission

VIII-3.1. Réflexion et transmission entre deux cordes semi-infinies

Soit deux cordes de longueur semi-infinie, reliées en $x = 0$. Leurs masses linéiques sontrespectivement $\mu_1$etμ_2. Lorsqu'une onde venant de $-\infty$ se propage vers $x = 0$dans la premièrecorde, elle donne naissance au point de jonction, $x = 0$, à une onde réfléchie et une onde transmise. L'écriture de la continuité du déplacement et de la force en $x = 0$permet d'obtenirle coefficient de réflexion $R_U$et le coefficient de transmission T_U définis respectivement par :$R_U = \frac{U_R}{U_i}$, et $T_U = \frac{U_T}{U_i}$.

Où U_i, $U_R$et$U_T$sont les amplitudes des déplacements associés respectivement à l'ondeincidente, l'onde réfléchie et l'onde transmise. On en déduit :

$$R_U = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

$$T_U = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

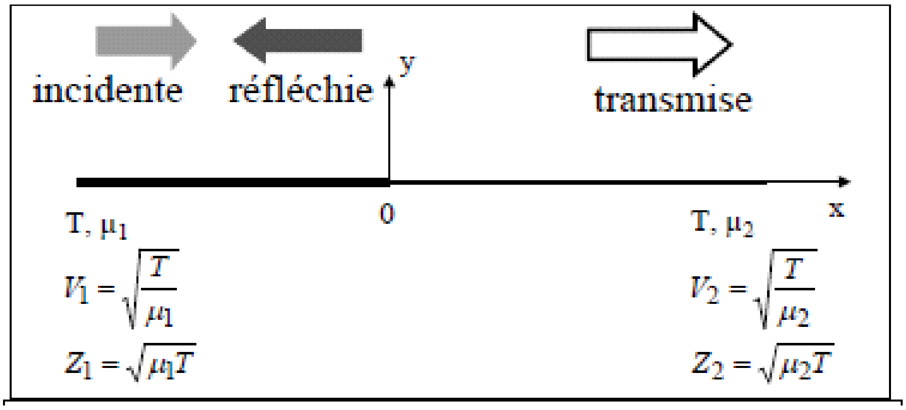


Figure VIII-2. Réflexion transmission dans deux cordes semi-infinies.

VIII-3.2. Réflexion sur une impédance quelconque

Soit une corde de longueur semi-infinie, de masse linéique μ, tendue horizontalement avec unetension T et terminée en $x = 0$ par une impédance mécanique Z_T . Lorsqu'une onde harmoniquese propage dans la corde de $-\infty$ vers $x = 0$, elle subit une réflexion en ce point. Sachant que ledéplacement de particules s'écrit :

$$u(x,t) = U_i e^{i(\omega t - kx)} + U_R e^{i(\omega t + kx)}.$$

On en déduit la vitesse de particules et la force en un point d'abscisse x

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = i\omega\left[U_i e^{i(\omega t - kx)} + U_R e^{i(\omega t + kx)}\right].$$

$$F = -t\frac{\partial u}{\partial x} = -ikT\left[U_i e^{i(\omega t - kx)} + U_R e^{i(\omega t + kx)}\right].$$

En $x = 0$, les conditions aux limites s'écrivent :$Z_T = \frac{F(0,t)}{\dot{u}(0,t)}$.

On en déduit le coefficient de réflexion R_u en fonction de l'impédance caractéristique Z_C etde l'impédance Z_T placée à l'extrémité de la corde :

$$R_u = \frac{U_R}{U_i} = \frac{Z_C - Z_T}{Z_C + Z_T}.$$

VIII-4. Oscillations libres d'une corde de longueur finie

Considérons une corde de longueur L fixe aux points $x = 0$ et $x = L$ (voir la figure VIII-3). Recherchons unesolution de l'équation d'onde sous la forme : $u(x,t) = g(x)f(t)$.

En remplaçant dans l'équation de propagation, on obtient :

$$\frac{1}{g}\frac{d^2 g}{dx^2} = \frac{1}{V^2}\frac{1}{f}\frac{d^2 f}{dt^2}.$$

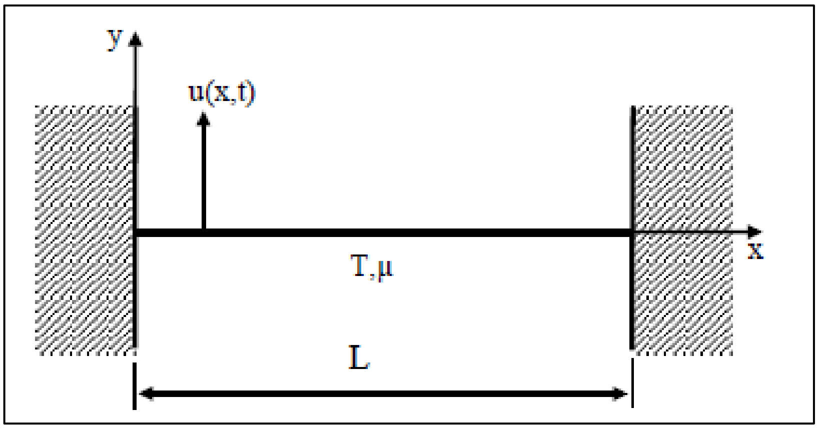


Figure VIII-3. Corde de longueur L fixée aux extrémités

Le membre de gauche de cette équation ne dépend que de x, tandis que le membre de droitene dépend que de t. Ces deux expressions sont donc égales à une constante qui doit être unnombre réel négatif que nous posons égal à $-k^2$ car la solution ne doit pas tendre vers l'infinilorsque t tend vers l'infini. Posons $= kV$. On en déduit que :

$$\frac{d^2g}{dx^2} = -k^2 g$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = -\omega^2 f$$

Les solutions de ces deux équations différentielles sont de la forme :

$$f = A\cos(\omega t) + Bsin(\omega t).$$

$$g = C\cos(kx) + Dsin(kx).$$

La solution de l'équation d'onde peut alors s'écrire sous la forme :

$u(x,t) = [A\cos(\omega t) + Bsin(\omega t)][C\cos(kx) + Dsin(kx)].$

Tenant compte des conditions aux limites : $u(0,t) = 0.$et $u(L,t) = 0.$

On obtient : $\begin{cases} C = 0 \\ k = n\frac{\pi}{L} \text{où } n = 0,1,2,\dots.. \end{cases}$

La solution de l'équation d'onde qui satisfait ces conditions aux limites est donc la sommed'une infinité de termes :

$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}[a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)] \sin(k_n x)$.

Avec : $k_n = n\frac{\pi}{L}$ et $\omega_n = k_n V = n\frac{\pi V}{L}$.

Les ω_n sont les pulsations propres. Les coefficients a_n et b_n sont déterminés par les conditionsinitiales du mouvement. Supposons qu'à $t = 0$ nous imposions à la corde une certaine formeinitiale $u(x,0) = u_0(x)$ et une vitesse initiale$\dot{u}(x,0) = v_0(x)$.

Dans ce cas nous aurons les conditions initiales suivantes :

$$u_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sin(k_n x).$$

$$v_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} -\omega_n b_n \sin(k_n x).$$

On doit inverser ces équations pour obtenir les coefficients $a_n$et b_n. La méthode de Fourierconsiste à les multiplier par $\sin(k_m x)$ et les intégrer entre 0et L. Si on utilise les intégrales :

$$\int_0^L \sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0 & sim \neq n \\ \frac{L}{2} sim = n \end{cases}.$$

on obtient :

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx.$$

$$b_n = -\frac{2}{\omega_n L}\int_0^L v_0(x) \sin\left(n\frac{\pi x}{L}\right) dx.$$

Exercices

Exercice 1:

Soit une corde vibrant transversalement dans le planOxy. L'équation de mouvement est de forme$y = f(x,t)$. Soient Tet μ la tension et la masse linéique de la corde à l'équilibre.

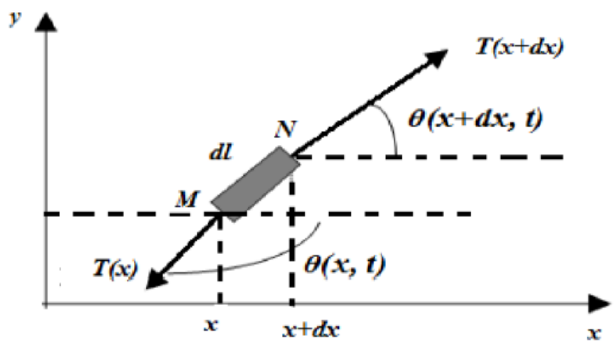
1. Ecrire l'équation de propagation de l'onde.
2. En déduire la célérité V des oscillations.
3. On considère que l'ébranlement original est sinusoïdal, déterminer les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode des séparations des variables.
4. Maintenant la corde est fixée par les deux extrémités de distance$a$, lâchée sans vitesse initiale.
   A. Déterminer la forme de la solution générale.
   B. Montrer que les fréquences de vibration de la corde sont multiples entier d'une fréquence fondamentale f_1.

A.N : Pour la troisième corde de la guitare de longueur $a = 63cm$ en nylon de masse volumique $\rho = 1200\ kg/m^3$ et de section $S = 0.42mm^2$. Calculer la tension de cette corde pour qu'elle puisse émettre le son fondamental $f_1 = 147Hz$.

Exercice 2:

Partie A : Equation de la corde vibrante:

Une corde Homogène et inextensible, de masse linéique μ, est tendue horizontalement suivant l'axe Ox avec une tension F constante, voir la figure ci-contre.



La corde, déplace de sa position d'équilibre, acquiert un mouvement décrit à l'instant $t$par le déplacement quasi vertical$y(x,t)$, compté à partir de sa position d'équilibre, d'un point M d'abscisse x au repos.

A l'instant t, la tension $T(x,t)$exercée par la partie de la corde à droite de Msur la partie de la corde à gauche de M, fait un petit angle $\theta(x,t)$avec l'horizontale.

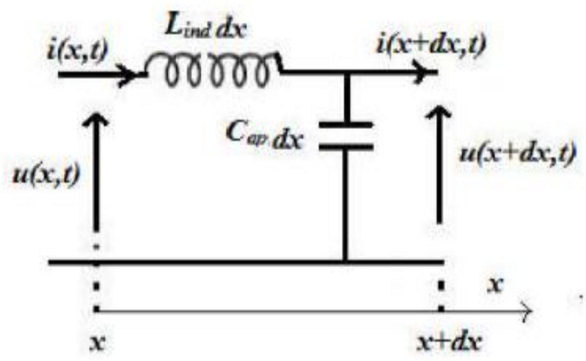
On admettra θpetit, faible courbure de la corde, et on négligera les forces de pesanteur.

On considère le tronçon de la corde compris entre l'abscisse $x\ et\ x + dx$.

1. Etablir l'équation de propagation de l'onde de la corde vibrante.
2. En déduire la célérité Vde l'onde en fonction deμet F.

Partie B : Analogie électrique :

Soit une tranche d'une cellule électrique sans perte représentée dans la figure comme suit :



1. Montrer que la cellule électrique représentée ci-dessus un circuit analogique d'un élément de corde vibrante de longueur dx.
2. Exprimer les correspondants mécaniques de l'inductance linéiqueL_{ind}, de la capacité linéiqueC_{ap}, de l'intensité du courant $i(x,t)$et de la tension électrique $u(x,t)$.

Exercice 3 : Onde Stationnaire

1) On considère une corde de longueur $L = 63cm$ et de masse linéique $\mu = 2\,.\,10^{-2}\ kg/m$. La corde est fixée en ses extrémités (les points $x = 0$ et $x = L$ de l'axe Ox) et tendue avec la tension T_0. La célérité des ondes transverses de la corde est $C = 500\ m\,s^{-1}$.

- **a)** Calculer la valeur numérique de la tension T_0.
- **b)** Ecrire l'équation d'onde de d'Alembert vérifiée par le déplacement $s(x,t)$.

2. On considère l'onde stationnaire :

$$s_1(x,t) = A\sin(\frac{\pi x}{L})\ \ cos\,(\omega_1 t)$$

- **a)** Montrer que la fonction d'onde $s_1(x,t)$ est solution de l'équation de d'Alembert de la question 1.b) pour une valeur de $\omega_1$que l'on déterminera littéralement en fonction de L et C puis numériquement.
- **b)** Déterminer littéralement et numériquement la fréquence f_1 et la période T_1 de cette onde.
- **c)** Dessiner l'aspect de la corde vibrante.

3. On considère l'onde stationnaire : $s_2(x,t) = A\sin(\frac{2\pi x}{L})\ \ sin\,(\omega_2 t)$

a) Montrer que la fonction d'onde $s_2(x,t)$ est également solution de l'équation de d'Alembert de la question 1.b) pour une valeur de w_2 que l'on déterminera littéralement et numériquement.

b) Déterminer littéralement et numériquement la fréquence f_2 et la période T_2 de cette onde.

4. On considère l'onde : $s(x,t) = A\left[\sin(\frac{\pi x}{L})\ \ cos\,(\omega_1 t) + \sin(\frac{2\pi x}{L})\ \ sin\,(\omega_2 t)\right]$

Où ω_1 et ω_2 sont les valeurs déterminées ci-dessus.

a) Montrer que le signal $s(x,t)$ est solution de l'équation d'onde de la question 1.b)

Solutions

Exercice 01:

1. L'équation de propagation de l'onde :$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$.

2. La célérité des oscillations est : V = $\sqrt{\frac{T}{\mu}}$.

3. Les solutions de l'équation de propagation en utilisant la méthode des séparations des variables.

$$y = A(x)T(t) \Longrightarrow \frac{\ddot{A}(x)}{A(x)} = V^2\frac{\ddot{B}(x)}{B(x)} \Longrightarrow \begin{cases} A(x) = A_1\cos\left(\frac{\omega}{V}x\right) + A_2\sin\left(\frac{\omega}{V}x\right) \\ B(t) = B_1\cos(\omega t) + B_2\sin(\omega t) \end{cases}.$$

4. A. La corde est fixée par les deux extrémités de distance a, alors les conditions aux limites nous donnent :

5.

$$\begin{cases} y(x=0) = y(x=a) = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ B_2 = 0 \end{cases} et k_x^{(n)} = \left(\frac{\omega}{V}\right)x\frac{n\pi}{a} \Longrightarrow \begin{cases} A(x) = A_2\sin k_x^{(n)}x \\ B(t) = B_1\cos(\omega_n t) \end{cases}.$$

Ainsi la solution finale :

$$y_T(x,t) = \sum_n C\sin k_x^{(n)}x\,.\cos(\omega_n t)\;avec C = A_2B_1.$$

1. Les fréquences de vibration de la corde :

$$k_x^{(n)} = \frac{\omega_n}{V} = \frac{2\pi f_n}{V} = \frac{n\pi}{a} \Longrightarrow f_n = nf_1 avec f_1 = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

<u>A.N</u> :$f_1 = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{T}{\mu}} \Longrightarrow T = 4a^2\rho S f_1^2 \Longrightarrow T = 17.3\ N.$

Exercice 2:

<u>Partie A :</u>

1. L'équation de propagation de l'onde de la corde vibrante :

$$\sum\vec{F} = dm\,\vec{a} \Longrightarrow T(x,t) = T(x+dx,) = F \Longrightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0.$$

2. La célérité des oscillations est : V = $\sqrt{\frac{F}{\mu}}$.

Partie B :

1. L'équation de propagation de l'onde dans la cellule électrique :

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C_{ap}^{*}\frac{\partial u}{\partial t}\, et\, \frac{\partial u}{\partial x} = -L_{ind}^{*}\frac{\partial u}{\partial t}.$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ind}^{*}C_{ap}^{*}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2}.$$

2. L'équivalence mécanique-électricité :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_{ind}^{*}C_{ap}^{*}\frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{F}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}.$$

Avec : $L_{ind}^{*} \Leftrightarrow \mu$,$C_{ap}^{*} \Leftrightarrow \frac{1}{F}$ et $i(x,t) \Leftrightarrow \frac{\partial y}{\partial t}$.

Exercice 3 : Onde Stationnaire

1.a) La tension $T_0 = \mu V^2 \Rightarrow T_0 = 5000N$

1.b) L'équation de D'Alembert : $\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$

2.a) On calcule $\frac{\partial^2 s_1}{\partial t^2} = -{w_1}^2 s_1$ et $\frac{\partial^2 s_1}{\partial x^2} = -(\frac{\pi}{L})^2 s_1$

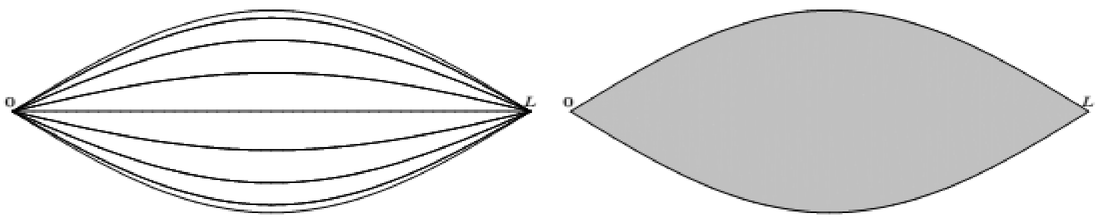
L'équation d'onde 1.b) donne $\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{w_1}{V^2}\right)^2\right] s_1 = 0$

La pulsation est $w_1 = \frac{\pi V}{L} \Rightarrow w_1 = 2493\, rad\; s^{-1}$

2.b) La fréquence est $f_1 = \frac{w_1}{2\pi} = \frac{V}{2L} \Rightarrow f_1 = 397Hz$

La période est $\mathrm{T}_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{2L}{V} \Rightarrow \mathrm{T}_1 = 2{,}52ms$

2.c) Aspect de la corde vibrante



La période $\mathrm{T}_1 = 2{,}52ms$ est très petite devant le temps de persistance des images rétiniennes, la corde apparait sur la figure de droite.

3.a) On calcule $\frac{\partial^2 s_2}{\partial t^2} = -{w_2}^2 s_2$ et $\frac{\partial^2 s_2}{\partial x^2} = -(\frac{2\pi}{L})^2 s_2$

L'équation d'onde 1.b) donne $\left[\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 - \left(\frac{w_2}{V^2}\right)^2\right] s_2 = 0$

La pulsation est $w_2 = \frac{2\pi V}{L} = 2w_1 \Rightarrow w_2 = 4886\, rad\; s^{-1}$

3.b) La fréquence est $f_2 = \frac{w_2}{2\pi} = \frac{V}{L} = 2f_1 \Rightarrow f_2 = 794 Hz$

La période est $\mathrm{T}_2 = \frac{\mathrm{T}_1}{2} = \frac{L}{V} \Rightarrow T_2 = 1.26 ms$

4.a) $s = s_1 + s_2$est la somme (superposition) de deux solutions de l'équation d'onde. L'´equation d'onde étant linéaire, $s(x, t)$ c'est aussi une solution.

4.c) L'onde s n'est pas stationnaire.

L'onde s est périodique de période temporelle T_1 : $s(x, t + \mathrm{T}_1) = s(x, t)$

Références

[0 1] H. DJELOUAH, Vibrations et ondes, Cours et exercices corrigés, (2017).

[0 2] N. AKLOUCHE, Exercices sur les vibrations, Faculté des Sciences de l'Ingénieur, Université Ferhat Abbas – Sétif, (2011).

[0 3] F. HAMMAD, Vibrations et Ondes, Faculté de Technologie, Université A. Mira – Bejaïa (2012).

[0 4] M. KHECHBA, Vibrations et ondes mécaniques Cours et Exercices corrigésfaculté des sciences exactes, sciences de la nature et de la vie Université Larbi Tebessi – Tébessa, (2020).

[0 5] F .BOUKLI HACENE, Vibrations et Ondes Mécaniques, Faculté des Sciences,UniversitéHassiba BENBOUALI de CHLEF (2013).

[0 6] S.AZZAZA, G.Bounamous, les Vibrations université de Skikda, (2014).

[0 7] H. J. Pain,The physics of vibrations and waves,Formerly of Department of Physics, Imperial College of Science and Technology, London, UK (2005).

[0 8] M. Nicolas. Waves & vibrations. Engineering school. France,(2016).

[0 9] Jean-Marc Richard, Ondes et Vibrations, Laboratoire de Physique Subatomique et Cosmologie (2009).