République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département : Mathématiques et Informatique

Mesure et intégration

Cours destiné aux étudiants de troisième année mathématiques

Présenté Par :
Dr. MESLOUB Fatiha

Table des matières

Introduction

Les mesures ont été introduites par Borel, quelques années avant les travaux de Lebesgue, afin de quantifier les tailles de certains ensembles, et de construire des fonctions vérifiant certaines propriétés.

A la fin du dix-neuvième siècle, les limitations de la théorie d'intégration de Riemann deviennent apparentes et plusieurs mathématiciens célébres (Jordan, Borel, Young, ...) se mettent en devoir de la généraliser. C'est finalement la théorie de Lebesgue, exposée dans une note fondatrice de 1901, puis développée dans le Cours

Peccot, qui sera adoptée par l'ensemble de la communauté mathématique. Elle se développe à partir du concept de mesure, introduit par Borel vers 1895.

La théorie de la mesure et l'intégration de Lebesgue seront ensuite perfectionnées et généralisées par de nombreux mathématiciens au cours du vingtième siècle, en particulier (par ordre chronologique approximatif) Carathéodory, Vitali, Radon, Riesz, Hausdorff, Kolmogorov et Besicovich. L'histoire de la théorie de la mesure est associée au développement de la théorie des probabilités, à celui de l'analyse harmonique moderne et meme à celui de la logique axiomatique.

La théorie de l'intégration de Lebesgue est une généralisation de la théorie de l'intégration de Riemann. Elle est basée sur le concept de mesure d'un ensemble qui est une extension à la fois de la notion de longueur d'un intervalle réel et de celle de probabilité d'un événement aléatoire.

Cette mémoire constitue une introduction élémentaire rigoureuse et relativement complète à la théorie de la mesure et à l'intégation, outil théorique essentiel de l'analyse mathématique.

Chapitre 1

Théorie de la mesure

1.1 Algèbre d'ensembles

1.1.1 Algèbres

Définition 1.1 *Soit Σ une collection non vide de sous ensemble de X. Σ est dite algèbre d'ensemble si :*

T_1 : $A \in \Sigma \Longrightarrow A^C \in \Sigma$,

T_2 : $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cup B \in \Sigma$.

Si Σ est une algebre d'ensemble sur X :

a) $X \in \Sigma \Longrightarrow \phi \in \Sigma$ (car $A \in \Sigma \Longrightarrow A^C \in \Sigma$)

b) $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cap B \in \Sigma$ (car $A \cap B = (A^C \cup B^C)^C = A \cup B \setminus [(A \setminus B) \setminus (B \setminus A)]$

c) $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \setminus B = A.B \in \Sigma$ (car $A \setminus B = A \cap B^C$)

d) $A_1, A_{2,\dots,}A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma$ et $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \Sigma$

Stabilite par rennion et intersection finie : Si Σ est un algèbre d'ensembles sur X :

a- $X \in \Sigma \Longrightarrow \phi \in \Sigma$,($A \in \Sigma \Longrightarrow A^C \in \Sigma \Rightarrow A \cup A^C \in \Sigma \Longrightarrow X \in \Sigma \Rightarrow X^C \in \Sigma \Longrightarrow \phi \in \Sigma$).

b- $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \cap B \in \Sigma$ ($A \cap B = A \cup B - ((A \setminus B) - (A \setminus B))$.

c- $A, B \in \Sigma \Longrightarrow A \setminus B \in \Sigma$ ($A \setminus B = A \cap B^C \in \Sigma$).

d- $\langle A_n \rangle_n \in \Sigma$ une suite d'élèments d'un algèbre Σ sur X alors : $\cup_{n=1}^{k} A_n \in \Sigma$, et $\cap_{n=1}^{k} A_n \in \Sigma$.

Exemple 1.1 $\Sigma = \{\phi, X\}$ *est une Algèbre (le plus faible (petite) algèbre)*

Exemple 1.2 $\Sigma = P(x)$ *(l'ensemble de toutes les pareties densemble) (la plus forte (grosse) Algèbre)*

Exemple 1.3 *La plus petite alg contenant* A *est* $\left\{\phi, A, A^C, X\right\}$.

Exemple 1.4 $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ *est ce que* Σ *Algèbre ?*

a) $\Sigma = \{\{2, 4\}, X, \phi\}$ *n'est pas Algèbre*

b) $\Sigma = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, X\}$ *n'est pas Algèbre*

c) $\Sigma = \{\{2, 4, 6, 8\}, \{10\}, X\}$ *Algèbre*

d) $\Sigma = \{\{2\}, \{4, 6\}, \{4, 6, 8, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 8, 10\}, X, \phi\}$ *... ?*

Théorème 1.1 *Soit* $\langle A_n \rangle_n \in \Sigma$ *une suite d'elements d'un alg* Σ *sur* X *alors il'existe une suite d'élèments* $\langle B_n \rangle \in \Sigma$ *tel que :*

a) $B_n \subseteq A_n,$

b) $\cap_{n=1}^{k} B_n = \cup_{n=1}^{k} A_n, \qquad k = 1.2....$

c)$\cap_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n,$

d) $B_n \cap B_m = \phi,\ m \neq m.$

Preuve Posons

$B_1 = A_1$

$$B_2 = A_2 \cap A_1^C$$

$$B_3 =, A_3 \cap A_2^C \cap A_1^C$$

.

.

.

$$B_n = A_n \cap A_1^C ... \cap A_{n-1}^C,\ B_n \in \Sigma$$

a) Par la construction :

$$\bigcup^{k} B_n \subseteq \bigcup^{k} A_n$$

($B_n \in \Sigma$ parce que : $B_1, B_2, ..., B_n$ dans Σ) $B_n \subseteq A_n$

b) On a :

$$\bigcup_{n=1}^{k} B_n \subset \bigcup_{n=1}^{k} A_n$$

démontrons

$$\bigcup_{1}^{k} A_n \subset \bigcup_{1}^{k} B_n$$

Soit

$$x \in \bigcup_{1} A_n, \exists i : x \in A_i$$

Posons $n_0 = \min \{i : x \in A_i\}, n_0 \leq k$ signifie que $x \notin A_n$ si $n < n_0$ *et* $x \in A_{n_0} \Leftrightarrow x \in A_n^C$ pour $n \leq n_0$ et $x \in A_{n_0}$

$$\begin{aligned} x &\in A_{n_0} \cap A_1^C \cap A_2^C \cap ..... \cap A_{n_0-1}^C \\ &\Rightarrow x \in \bigcup_{1}^{k} B_n. \end{aligned}$$

c) $B_n \cap B_m = \phi, n \neq m$ soit $n \leq m$

$$B_n \cap B_m = \phi \Longleftrightarrow x \in B_n$$

et

$$x \notin B_m, \forall x \in B_n$$

$$\begin{aligned} x &\in B_n \Rightarrow x \in A_n \cap A_1^C \cap ... \cap A_{n-1}^C \\ &\Leftrightarrow x \notin A_n^c \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} B_m &= A_m \cap A_1^C \cap ..... \cap A_n^C \cap ... \cap A_{m-1}^C \\ &\Rightarrow x \notin B_m \end{aligned}$$

■

1.1.2 Tribus

La théorie de Lebesgue n'est pas construite sur la base des algèbres, mais sur celle des $\sigma-$algèbres, ou tribus. Le préfixe σ indique une propriété de stabilité vis-à-vis des opérations dénombrables.

Définition 1.2 *Une Algèbre Σ sur X est dite σ-Algèbre si elle possède la propriété d'addivité dénombrable c'est à dire :*

$T_4 : A_1...A_n \in \Sigma \Rightarrow \bigcup\limits_{I=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$

Si $A_1, ..., A_n, ... \in \Sigma \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ car $(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i)^c = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^c$ Si $A_1...A_n \in \Sigma$ tribu alors

$$\cap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma.(C\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \cup_{n=1}^{\infty} C A_n$$

Exemple 1.5 *Les Algèbres de exemple 01 et exemple 02 ,sont des σ-Algèbre*

Remarque 1.1 *σ-Algebre $\equiv$ Tribu.*

Remarque 1.2 *Un élément de la tribui Σ s'appelle ensemble mesurable.*

Remarque 1.3 *Si ne veut preciser la tribu ,on dit que l'ensemble est Σ -mesurable ou mesurable par rapport a Σ.*

Remarque 1.4 *Le couple (x, Σ) constitue d'une ensemble X et Tribu s'appelle espace mesurable .*

Remarque 1.5 *L'ensemble des propriétés (T_1),(T_2),(T_3) (resp T_1, T_2, T_4) construie ce que 'on appelle le systeme d'axiome des algébre (resp des tribu) il ya d'autres systemes equivalentes :*

Si on pose :$(T_1)'$: $\phi \in \Sigma$

$(T_2)'$:$A, B \in \Sigma \Rightarrow A \cap B \in \Sigma$

$(T_3)'$: $A_1, A_2, \ldots\ldots.. \in \Sigma \Rightarrow \cap A_n \in \Sigma$

On a les equivalences :

-

$$\begin{aligned} & T_1 + T_2 + T_3 \\ \Longleftrightarrow\;& T_2 + T_2 + T_3' \\ \Leftrightarrow\;& T_1' + T_2' + T_3' \\ \Leftrightarrow\;& T_1' + T_2 + T_3' \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} & T_1 + T_2 + T_3 \\ \Leftrightarrow\;& T_1 + T_2 + T_3 \\ \Leftrightarrow\;& T_1' + T_2 + T_3 \\ \Leftrightarrow\;& T_1' + T_2 + T_3' \end{aligned}$$

pour les algèbre et les Tribus respectivement :

Remarque 1.6 *L'intersection d'une famille quelqonque des Tribus est encore une Tribu*

Définition 1.3 *On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$, est une ouvert ,si pour tout $x \in A$,il $\exists$ une $\varepsilon > 0$ tel qu'on ait l'inclusion $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A$*

Le complementaire d'un ouvert est ce qu'on appelle fermé plus généralement une partie A de E est une ouvert si toutes fois qu'elle contient un point $x \in E$,elle contient an moins, une boule ouvert (de rayon $r > 0$) ayant pour centre ce pointe :

$$\forall x \in A, \exists \rho > 0, B_0(x : \rho) \subset A$$

Remarque 1.7 *01) Les intervalles ouvert (fermes) sont des ouverts (ferme).*

02) $\phi, \mathbb{R}$ *sont des ouverts et fermes.*

03) Les intervalle semi ouvert ne sont ni ouvert ni ferme.

04) Une rennion qlq d'overts est une ouvert.

05) Une intersection finie d'ouverts est une ouvert.

Définition 1.4 *On appelle espace topologique E,la donnée d'un ensemble E est d'une famille de parties* τ *verifiant les proprietes(02),(04) et (05) (i,e)*

Définition 1.5 *a)* $\phi, E \in \tau$.

b)$V_i \in \tau, \bigcup_{i=1}^{\infty} V_i \in \tau$.

c) $\bigcap_{i=1}^{k} V_i \in \tau$.

Remarque 1.8 *En générale une topologie n'est pas une* δ*-algèrbre.*

Définition 1.6 *Soit* (X, τ) *espace topolosique, le Tribu engendré par* τ *est dit tribu borelien et le note* $B(x)$, $\tau \in B(x)$

Proposition 1.1 *Si* Σ *est* δ*-alg engendreé par les fermés d'un espace topologique alore* $\Sigma = B(x)$

1.1.3 Classes monotones

Définition 1.7 *Les ensemble de type* G_δ, F_σ*.Soit* (X, τ) *, espace topologique* $A \subset X$ *est dit de type* G_δ *: s'il* $\exists$ *des ouverts* $V_n \ / A = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$ *et de type* F_δ *: s'il* $\exists$ *des ferme* $F_n : A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$.

Remarque 1.9 *01) Toute ensemble de* G_δ*,*F_σ *est un élément de B(x) .*

02) Toute ouvert est un G_δ *et toutes fermés est un* F_σ

Tout $[a, b]$ *est un* F_σ *, et* $[a, b]$ *est un* G_δ *aussi car :* $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\right[$.

Remarque 1.10 $]a, b[$ *est un* F_σ *et* G_δ *aussi car :*

Remarque 1.11 $]a, b[= \bigcup^{\infty} \left[a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}\right] \quad n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.12 $[a, b[= \bigcup \left[a, b - \frac{1}{n}\right[$ *ou bien* $\quad [a, b[= \bigcap \left]a - \frac{1}{n}, b\right[$.

Remarque 1.13 *ϕ est un F_σ et n'est pas G_δ .*

Définition 1.8 ***Les classes monotones***

Soit $X \neq \phi$, ondit que collection de parties Σ de X est classe monotone si :

1) pour tout suite croissante $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ on a : $\bigcap\limits_{n\geq 1} A_n \in \Sigma$.

2) pour tout suite décroissante $\{A_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ on a : $\bigcup\limits_{n\geq 1} A_n \in \Sigma$.

08 : Soit Σ ensemble des parties de X et k ensemble de toutes le $C.M$ (classe monotones) sur X qui contient Σ on appelle $\bigcap\limits_{i\in k} C_K$ la classe monotones engedrée par Σ et on le note $M_x(\Sigma)$ ou $M(\Sigma)$.

Chapitre 2

Espace mesurable,ensemble et fonction meusrable

2.1 Espace mesurable

Définition 2.1 *On appelle espace mesurable le couple* (x, Σ) *oû* Σ *est un tribu , les elementes de* Σ *sont dit ensemble mesurable .*

2.1.1 Applications mesurables

Définition 2.2 *Soit* (x, Σ) *espace mesurable et* (Y, τ) *espace topologique ,une application* $f : X \rightarrow Y$ *dite mesurable sur* X *si :*

$$\forall V \in \tau : f^{-1}(V) \in \Sigma.$$

Si $E \in \Sigma$ *,un ensemble mesurable de*(x, Σ) *et* $f : x \rightarrow y$ *est dite mesurable sur* E *si :*

$$\forall V \in \tau : f^{-1}(V) \cap E \in \Sigma.$$

Exemple 2.1 *Une fontion constante est mesurable* pour tout $x \in X : f(x) = y_0 \in Y$ soit

$$V \in \tau,\ f^{-1}(v) = \begin{cases} X, \quad \text{si } y_0 \in V, X \in \Sigma \\ \phi,\ \text{si } y_0 \notin V, \phi \in \Sigma \end{cases}$$

implique

$$f^{-1}(v) \in \Sigma \Rightarrow f$$

est une fontion mesurable telle que V ouvert.

Remarque 2.1 *Pour qu'une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ soit mesurable ssi : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ on ait $f^{-1}([-\infty, \alpha[) \in \Sigma$.*

Preuve Necessité : $[-\infty, \alpha[$ est une ouvert de $\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow f^{-1}([-\infty, \alpha[) \in \Sigma$ implique que f mesurable.

Suffaisante : démontrons que

$$f^{-1}([-\infty, \alpha[) \in \Sigma \Rightarrow f^{-1}(V) \in \Sigma,$$

Soit V ouvert de $\overline{\mathbb{R}}$

$$V \subset \overline{\mathbb{R}} : V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \text{ ou } V_n = \begin{cases} [-\infty, \alpha[\,, \\ ]\alpha, \beta[\,, \\ ]\beta, +\infty]\,., \end{cases}$$

On a

$$\begin{aligned}]\beta, +\infty] &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\beta + \frac{1}{n}, +\infty\right] \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \subset \left[-\infty, \beta + \frac{1}{n}\right[\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} f^{-1}(]\beta,+\infty]) &= f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} \subset (\left[-\infty,\beta+\frac{1}{n}\right[) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} \subset f^{-1}(\left[-\infty,\beta+\frac{1}{n}\right[) \in \Sigma. \end{aligned}$$

on a $]\alpha,\beta[= [-\infty,\beta[\cap]\alpha,+\infty]$ ouvert de$\overline{\mathbb{R}} \Rightarrow f^{-1}(]\alpha,\beta[\in \Sigma.$ ■

Remarque 2.2 *01) On note que*

$$f^{-1}([-\infty,\alpha[= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}, f(n) \prec \alpha\right\}.$$

02) Une fonction f mesurable sur X mesurable sur toute sa parties mesurable .

Définition 2.3 *Une fonction mesurable par raport à $B(x)$ est dite boreliènne ou fonction mesurable de borel .*

Remarque 2.3 *:Toute fonction continue sur X est fonction mesurable de borel .*

$f : X \to Y$,(y,τ) espace topologique,

$$V \in \tau : f^{-1}(V) \in B(x),\ f^{-1}(V) \in \tau_x \subset B(x).$$

Théorème 2.1 *(Caracterisation des fonctions mesurable) : Soit (x,Σ) espace mesurable $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.*

f est mesurable sur X si et seulment si l'un des quatres énancés suivant satisfait :

1) $\forall\alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}([-\infty,\alpha[)$ est mesurable ou bien :$\{x : f(x) < \alpha\} \in \Sigma.$

2) $\forall\alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}(]-\infty,\alpha])$ est mesurable ou bien :$\{x : f(x) \leq \alpha\} \in \Sigma.$

3) $\forall\alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}(]\alpha,+\infty])$ est mesurable ou bein :$\{x : f(x) > \alpha\} \in \Sigma.$

4) $\forall\alpha \in \mathbb{R} : f^{-1}([\alpha,+\infty])$ est mesurable ou bien :$\{x : f(x) \geq \alpha\} \in \Sigma.$

Preuve 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) :

$$\begin{aligned} f^{-1}([-\infty,\alpha]) &= f^{-1}(\bigcap_{n\geq 1}\left[-\infty,\alpha+\frac{1}{n}\right[) \\ &= \bigcap_{n\geq 1} f^{-1}(\left[-\infty,\alpha+\frac{1}{n}\right[) \in \Sigma. \end{aligned}$$

2) $\Rightarrow$ 3) :

$$\begin{aligned} f^{-1}(]\alpha,+\infty]) &= f^{-1}(C\,[-\infty,\alpha] \\ &= Cf^{-1}([-\infty,\alpha]) \in \Sigma. \end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 4) :

$$\begin{aligned} f^{-1}([\alpha,+\infty]) &= f^{-1}(\bigcap_{n\geq 1}\left]\alpha-\frac{1}{n},+\infty\right]) \\ &= \bigcap_{n\geq 1} f^{-1}(\left]\alpha-\frac{1}{n},+\infty\right] \in \Sigma. \end{aligned}$$

4) $\Rightarrow$ 1) :

$$f^{-1}([-\infty,\alpha[) = f^{-1}(C\,[\alpha,+\infty]) \in \Sigma.$$

$\blacksquare$

Corollaire 2.1 *Si* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *(f mesurable) alors :* $\forall\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$: $\{n : f(x) = \alpha\} \in \Sigma$.*(mesurable).*

Théorème 2.2 *Soit* (x,Σ) *espace mesurable* f, g *deux fonctions mesurables de* $X \to \overline{\mathbb{R}}$ *et* c *une fonction constante alors les fonctions :* $f \pm c$, cf, $f+g$, $f-g$, $g.f$, $f \diagup g$ *sont mesurables .*

Preuve *) $f{+}c = \{x : f + c < \alpha\} \in \Sigma, \forall\alpha \in \mathbb{R}$ mais $f{+}c = \{x : f + c < \alpha\} = \{x : f < \alpha - c\} \in \Sigma,\ \alpha - c \in \mathbb{R}$

*) $c.f$ (evident) $(\frac{\alpha}{c} \in \mathbb{R})$.

*) $f + c = \{x : f(x) + g(x) < \alpha\} \in \Sigma$,

$$\forall\alpha \in \mathbb{R} : \{x : f(x) < \alpha - g(x)\} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} f(x_0) &< \alpha - g(x_0) \\ &\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : f(x_0) < r < \alpha - g(x_0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{x : f(x) < \alpha - g(x)\} &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} \{x : f(x) < r < \alpha - g(x)\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{x : f(x) < r\} \cap \{\alpha - g(x)\}] \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} [\{x : f(x) < r\} \cap \{x : g(x) < \alpha - r\}] \end{aligned}$$

*)$f - g = f + (-g) \in \Sigma$

*)comme $\phi \in \Sigma$

$$\begin{aligned} f^2 &= \left\{x : f^2(x) < \alpha\right\} \\ &= \begin{cases} \phi, \quad \alpha < 0 \\ x :\mid f(x) \mid < \sqrt{\alpha}, \ \alpha > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\{x :\mid f(x) \mid < \sqrt{\alpha}\right\} \\ = & \left\{x : -\sqrt{\alpha} < f(x) < \sqrt{\alpha}\right\} \\ = & \left\{x : f(x) > -\sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{x : f(x) < \sqrt{\alpha}\right\} \end{aligned}$$

*) $f.g = \frac{1}{4}\left\{(f+g)^2 - (f-g)^2\right\} \in \Sigma$ ■

Corollaire 2.2 *Si une suite de fonctions (f_n) mesurable de $X \to \overline{\mathbb{R}}$ converge vers f , alors f est mesurable*

Définition 2.4 *Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ on pose*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases},$$

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0 : x \in X\} = \frac{\mid f(x) \mid + f(x)}{2}$$

et soit

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ -f(x), & x < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f^-(x) &= \sup\{0, -f(x)\} = \frac{\mid f(x) \mid - f(x)}{2} \\ &\Rightarrow \begin{cases} f(x) = f^+(x) - f^-(x), \\ \mid f(x) \mid = f^+(x) + f^-(x), \end{cases} \end{aligned}$$

donnent f *mesurable* $\Rightarrow f^+$ *et* f^- *sont mesurable.*

f *mesurable* $\Rightarrow \mid f \mid$ *mesurable pas en génerale vrai*

Définition 2.5 $\theta(x)$ *est dit fonction simple si elle prend qu'un nombre fini de valeurs* θ *: si* $\alpha_1, ..\alpha_n$ *le valeurs distincts de* $\theta : X \to \mathbb{R}$ *alors on pose*

$$E_i = \{x : \theta(x) = \alpha_i\} \Rightarrow \theta(x) = \sum \alpha_i \chi_{\mathrm{Ei}}(x),$$

si

$$x \in E_j \Rightarrow \chi_{Ej}(x) = \begin{cases} 0.i \neq j \\ 1.i = j \end{cases}$$

Théorème 2.3 *Soit* $f : X \to [0, +\infty]$ *mesurable* $\Rightarrow \exists$ *une suit* $\langle \theta(x) \rangle$ *des fonction mesurable étagée tel que :*

1) $0 \leq \theta_1(x) \leq \theta_2(x) \leq ... \leq \theta_n(x) \leq ... \leq f(x)$.

2) $f(x) = \lim_{n\to\infty} \theta_n(x), x \in X$.

3)Si $f(x)$ *est borné la convergence est uniforme.*

Preuve I- *On prend* $y_{n,k} = \frac{k}{2^n}, \quad k = 0, 1, ..., n2^n$.

Donc

$$y_{n,0} = 0,\ y_{n,n2^n} = n,\ y_{n,k+1} - y_{n,k} = \frac{1}{2^n}.$$

On pose

$$E_{n,k} = \begin{cases} \{x :\ y_{n,k} \leq f(x) < y_{n,k+1}\}, & k = 0, 1, ..., n2^n - 1. \\ \{x :\ \ f(x) \geq n\}, & si\ k = n2^n. \end{cases}$$

1- $E_{n,k}$ *est mesurable pour tout* k.

2- $E_{n,k}$ *sont disjoints.*

3- $\bigcup\limits_{k\geq 0} E_{n,k} = X.$

II- *On construire la suite étagée a partir de* $E_{n,k}$

$\theta_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n2^n} y_{n,k}\chi_{E_{n,k}}(x)$ *verifier les 3 conditions précedante.* ∎

Théorème 2.4 *Soit* (X, Σ) *espace.mesurable ,*$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *mesurable alors il* $\exists \langle f_n \rangle$ *(suit de fcts mes) tq :*

a) $0 \leq\mid f_1 \mid\leq ... \leq\mid f_n \mid\leq ... \leq\mid f \mid$.

b) $f(n) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

2.1.2 Mesures positives. Espace mesuré

Définition 2.6 *Soit* (X, Σ) *espace topologique tout application* $\mu : \sum \to [0, +\infty]$, $(\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ *qui possède la propriété d'additivitè denombrable (c,à,d)*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)\ \ et\ E_i \cap E_j = \phi, \quad pour\ i \neq j$$

est dite mesure positive sur (X, Σ) *ou* Σ *est un Algèbre* $\Sigma \subset P(X)$.

Définition 2.7 *On appelle mesure dégénérée toute mesure positive*

$$\mu : \sum \to \mathbb{R}^+ tq : \mu(x) = 0 et \mu(A) = +\infty, \forall A \neq \phi \in \Sigma.$$

Exemple 2.2 *Soit* $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = P(\mathbb{N})$ *et soit*

$$\mu(X) =: \begin{cases} \textit{le nombre des éléments de } X, \textit{si } X \textit{ fini} \\ \infty, \quad \textit{si } X \textit{ est infini} \end{cases}$$

cette mesure est dite mesure denombrante .

Exemple 2.3 $X = \mathbb{N}, \sum = p(\mathbb{N})$,

$$\mu(E) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}, & si\ E\ fini \\ \infty, & si\ non \end{cases}$$

μ n'est pas mesure car elle ne possède pas la propriété d'addivité denombrable :si on prend :

$$E = \mathbb{N} = \bigcup_{1}^{\infty} \{n\}, \mu(\mathbb{N}) = \mu(\bigcup_{n=0}^{\infty} \{n\}) = +\infty,$$

alors

$$\sum \mu(\{n\}) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1.$$

donc

$$\mu(x) \neq \sum_{1}^{\infty} \mu(E_i)$$

Conséquence :

01) Si $\exists E \subset \sum$ et $\mu(E) < \infty \Rightarrow \mu(\phi) = 0$,

posons $E = E_1$, et $E_i = \phi, i = 2, ...$

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) &= \mu(E_1) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(E_i) \\ &= \mu(E) + \sum_{i=2}^{\infty} \mu(\phi) \\ &\Rightarrow \mu(\phi) = 0. \end{aligned}$$

02) Si

$$\begin{aligned} E_1, ..., E_n &\subset \sum, \\ E_i \cap E_j &= \phi \Rightarrow \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1,n} \mu(E_i) \end{aligned}$$

03) Si

$$E \subset F \Rightarrow \mu(E) \leq \mu(F)$$

de plus

$$\mu(E) \prec \infty \Rightarrow F = \mu(F - E) = \mu(E) - \mu(F).$$

Preuve

$$\begin{aligned} F &= E \cup (F - E), E \cap (F - E) = \phi \\ &\Rightarrow \mu(F) = \mu(E) + \mu(F - E) \geq \mu(E). \end{aligned}$$

■

04) Propriété 01 de la convegence :

Si $E \in \Sigma, E_1 \subset E_2 ...(\{E_i\}$ suite croissante de $\Sigma)$ alors

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n \to \infty} \mu(E_n).$$

Preuve D'apres "$*$" il $\exists\ B_i \subset \Sigma$: ■

a) $B_i \subset E_i$

b)$\bigcup_{i=1}^{k} B_i = \bigcup_{i=1}^{k} E_i$

c)$B_i \cap B_j = \phi \qquad i \neq j,$

donc

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) &= \mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mu(B_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} (\mu(\bigcup_{i=1}^{n} B_i)) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \\
&= \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)
\end{aligned}$$

05)Propriété 02 de la convergence :

Si $E_i \in \Sigma$, tq $E_1 \supset E_2$.......(suit décroissante) et $\mu(E_1) < \infty$ alors

$$\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n)$$

Preuve : Il suffit de poser $A_i = E_1 - E_i$.

06) Sous additivité denembrable :

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i),\ \forall \{E_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma.$$

Définition 2.8 *Soit (X, Σ, μ) espace mesuré alors :*

1) On dit que A est négligéable si $\mu(A) = 0$ (de mesure nul) toutes sous ensemble d'une ensemble négligéable est dit μ négligéable

2) On dit que (X, Σ, μ) (ou μ) est complète si toute ensemble μ négligéable est une ensemble mesurable .

3) On dit que (X, Σ, μ) (ou μ) fini si $\mu(x) < \infty$ et δ finie si il $\exists \{E_n\}_{n\geq 1} \subset \Sigma$ tq :$\mu(E_n) < \infty$ $\forall n$ et $X = \bigcup_{n\geq 1} E_i$

Théorème 2.5 ***de completion :*** *Soit* (X, Σ, μ) *espace mesuré arbitraire alors il existe mesure complete* $(x, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{\mu})$ *tq :*$\widetilde{\Sigma} \subset \Sigma$ *et* $\widetilde{\mu}_{\varepsilon} = \mu$ *(*$\widetilde{\mu}$ *et la complementaire de* μ*).*

Théorème 2.6 ***de Hann :*** *Toute mesure positive* μ *sur algèbre* $\Sigma \subset P(x)$ *accèpte une prolongement* $\widetilde{\mu}$ *à* $\delta_x(\Sigma)$*, de plus cette prolongement est unique et* δ *finie si* μ *est mesure* δ *fini .*

2.1.3 Mesure extérieure

Définition 2.9 *Une application* $\mu^* : p(x) \rightarrow [0, +\infty]$ *est dite mesure extérieure si :*

1)$\mu^*(\phi) = 0$.

2)Si $E \subset F \Rightarrow \mu^*(E) \leq \mu^*(F)$.

3)$\mu^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i)$ *une mesure.extérieure n'est pas en générale une mesure positive ,et une mesure positive si* $\Sigma = p(x)$.

2.2 Mesure de Lebesgue

Mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ est la mesure de référence naturelle dans un cadre euclidien. Elle correspond aux notions habituelles de longueur

$(n = 1)$, surface $(n = 2)$ ou volume $(n = 3)$. On peut la définir en spécifiant le volume des pavés, ou celui des boules, selon les formules dont nous avons

l'habitude.

Définition 2.10 *Soit* E *espace topologique, on appelle* $R(E)$ *reconvrement de une ensemble de partie de* E *tel que toute point de* E *appartiennet au mois à l'une d'entre elles.*

Exemple 2.4 *L'ensemble des intervalles* $]n-1, n+1[$ *lorsque* n *parcourt* $\mathbb{Z}$ *est un recouv de* $\mathbb{R}$.

Notation 2.1 Π *ensemble de tout les intervalles de* $\mathbb{R}(\phi =]a, a[)$.

Π *:ensemble de tout les intervalles de* $\mathbb{R}$.

$E \subset \mathbb{R}$ *et* $R(E)$ *ensemble de tout les recouverment de denble de* E *par les éléments de* Π.

$$\{J_n\}_{n=1}^{\infty} \in R(E), J_n \in \Pi, E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \in J_n$$

$l(J)$: longueur de l'intervalle J.

2.2.1 Mesure interieur de Lebesgue :

Théorème 2.7 *L'application :$m^* : P(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ est définit par :*

$$m^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(j), \{J_n\}_{n=1}^{\infty} \subset J(E) \right\} \diagup E \subset \mathbb{R}.$$

L'application m^* est un mesure extérieure

Preuve Vérifiant (1), (2) et (3)

1) $m^*(\phi) = 0$,car $\phi \in (0, \varepsilon), \forall \varepsilon$.

2)Si $E \subset F \Rightarrow J(E) \subset J(E) \Rightarrow m^*(E) \leq m^*(f)$.

3)$m^*(\bigcup_1^{\infty} m^*(E_i) \leq \sum_1^{\infty} m^*(E_i)$.

*Si $\exists_{i_0} \diagup m^*(E_{i_0}) = \infty \Rightarrow$l'inégalité est vrai.

*Si $\forall i \ m^*(E_i) < \infty \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ un recouverment $\{J_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$, tel que

$$: m^*(E_i) + \varepsilon > \sum_{n=1}^{\infty} l(J_{n,i}).$$

$\{J_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$recouverment de E_i implique $E_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{n,i}$.

$\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} J_{n,i} \sim \{J_{n,i}\}_{n=1}^{\infty}$recouverment de $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_i$.

$$
\begin{aligned}
m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_i) &\leq \sum_{n,i=1}^{\infty} l(J_{n,i}) \\
&= \sum_{n} \sum_{i} l(J_{n,i}) \\
&\leq \sum_{i=1}^{\infty} (m^*(E_i) + \frac{\varepsilon}{2i}) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) + \varepsilon.1, \forall \varepsilon,
\end{aligned}
$$

donc

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$$

■

2.2.2 Propriétés du mesure de Lebesgue

1) $m^*(\{p\}) = 0, p \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon) \Rightarrow m^*(\{p\}) \leq 2\varepsilon$.

2)Si $J \in J \Longrightarrow m^*(J) = l(J)$.

3) m^* est une invairante par translation (c à d) $m^*(E + a) = m^*(E)$

$\{J_n\}$ est recouverement de $E \Leftrightarrow \{J_n + a\}$ rec de $E + a \Leftrightarrow l(J_n + a) = l(J_n)$.

Posons

$$L + \{E \subset \mathbb{R} : m^*(a) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).\forall A \subset \mathbb{R}\}$$

On note que :

$$A = (A \cap E) \cup (A \cap E^c)$$

d'aprés le sous addivité de m^* on peut ecrire :

$$m^*(A) \leq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c),$$

et on a:

$$E \in L \Leftrightarrow m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c).$$

Si $E \in L \Rightarrow E^c \in L$.

Théorème 2.8 *L est une tribu que contient $B(\mathbb{R})$*

Preuve " utiliser le lemme suivante"

a) d'aprés "1" il suffit de demontrer que si $E_1, E_2 \in L \Longrightarrow\ E_1 \cup E_2 \in L$.

Soit $A \subset \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}
& m^*[A \cap (E_1 \cup E_2)]\ + [A \cap (E_1 \cup E_2)^c] \\
\leq\ & m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*((A \cap E_1^c) \cap E_2^c) \\
=\ & m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\
=\ & m^*(A),
\end{aligned}$$

donc L est un Algebre. ■

Lemme 2.1 *Si $E_i \in L, E_i \cap E_j = \phi, i \neq j, \forall A \in \mathbb{R}$ alors*

$$m^* \left[A \cap (\bigcup_{i=1}^{n}) E_i \right] = \sum_{i=1}^{n} m^*(E_i \cap A) \qquad (*)$$

Preuve Si $n = 1$, $(*)$ est vrai.

Admetons le resultat pour $n-1$: $E_n \in L \Longrightarrow$

$$\begin{aligned} m^*\left[A \cap (\bigcup_{i=1}^{n}) E_i\right] &= m^*\left[(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1}) E_i) \cap E_n\right] \\ &\quad + m^*\left[(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n}) E_i) \cap E_n^c\right] \\ &= m^*(A \cap E_n) + m^*\left[(A \cap (\bigcup_{i=1}^{n-1}) E_i)\right] \\ &= m^*(A \cap E_n) + \sum_{i=1}^{n-1} m^*(A \cap E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) \end{aligned}$$

c1) Si E_i sont disjoint et $E_\infty \in L$ alors $E = \underset{i \geq 1}{\cup} E_i$ et

$$m^*(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) \tag{2}$$

On pose : $F_n = \overset{n}{\underset{i=1}{\cup}} E_i$, $F_n \in L$ pour tout n

$$A \subset \mathbb{R} \Longrightarrow m^*(A \cap F_n) = \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i)$$

d'aprés (b) puisque

$$\begin{aligned} F_n &\in L \Longrightarrow m^*(A) = m^*(A \cap F_n) + m^*(A \cap F_n^c) \\ &= \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap F_n^c). \end{aligned}$$

Mais

$$F_n \subset E \Longrightarrow E^c \subset F_n^c$$

$$\Longrightarrow m^*(A \cap F_n^c) > m^*(A \cap E^c)$$

donc

$$m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) \ + m^*(A \cap E^c),$$

pour tout $n \in N$

$$n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad m^*(A) \geq \sum_{i=1}^{n} m^*(A \cap E_i) + m^*(A \cap E^c) \tag{3}$$

D'aprés la sous addivité de m^* on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m^*(A) &\geq m^*\left[\bigcup_{i=1}^{n}(A \cap E_i)\right] \\ &= m^*(A \cap E) \end{aligned}$$

de (3) on obtient

$$m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c)$$

donc $E \in L$

Si on pose dans (3) $A = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i$ on obtient

$$m^*(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i) + m^*(\phi)$$

d'autre part

$$m^*(\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(E_i)$$

c2) Si $E_i \in L$ alors $\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i \in L$ on xonstruit la suite

$$B_i \in L, \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} B_i = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}} E_i, B_i \cap B_j = \phi, i \neq j$$

$$\overset{\infty}{\underset{i\ =1}{\cup}} B_i \in L \Longrightarrow s \overset{\infty}{\underset{i\ =1}{\cup}} E_i \in L$$

■

2.2.3 Mesure de Lebesgue

Les éléments de L sont dit ensemble de Lebesgue $(\mathbb{R}, L)$ espace mesurable de Lebesgue .

$(\mathbb{R}, L, m^*) = (\mathbb{R}, L, m)$ ou , m, m^* est la mesure de Lebesgue .

Remarque 2.4 *La restriction de m^* à L est une mesure positive dite mesure de lebesgue ,on le note par m,aussi $m(E) = m^*(E)$*

$I \subset J \subset B(\mathbb{R}) \subset L \subset P(\mathbb{R})$.

Définition 2.11 *Ainsi la mesure de Lebesgue est definit par :**

Remarque 2.5

$$m(E) = m^*(E) = \inf\left\{\sum_{1}^{\infty} l\left(J_n\right), \{J_n\} \subset J\left(E\right)\right\},$$

$$L = \{E \subset \mathbb{R} : m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c), \forall A \subset \mathbb{R}\},$$

et comme toutes mesure positive m on a les propriétés suivantes :

1) $m(\phi) = 0$.

2) $E \subset F \Rightarrow m(E) \leq m(F)$.

si $m(E) < \infty \Rightarrow m(F - E) = m(F) - m(E)$.

3) Les deux propriétés de la cge sont vérifiées.

4) $m(\bigcup_{i\geq 1} E_i) \leq \sum_{i\geq 1} m(E_i), E_I \subset L$.

et possède encore quelques propriétés speciales .

5) $m(\{P\}) = 0 \qquad (\{P\} \in L) \Rightarrow m(E) = 0$, si E est dénombrable.

6) $m(J) + l(J), J \in L$.

7) m prolonge L.

8) m est invariante par translation .

9) si $m(c) = 0$,et $B \subset C$ alors $B \in L$ et $m(B) = 0$.

2.2.4 Les ensembles mesurables de Lebesgue :

Ces ensembles sont les eléments de l.

Proposition 2.1 *Si* $m^*(B) = 0 \Rightarrow B \subset L$.

Théorème 2.9 *Les condition suivantes sont équivalentes :*

1) $E \in L$

2)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathbb{R} : E \subset V \quad et\ m^*(V - E) < \varepsilon.$$

3)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists F \in \mathbb{R} : F \subset E \quad etm^*(E - F) < \varepsilon.$$

4)

$$\exists G \ de\ type\ G_\delta : E \subset G \quad etm^*(G - E) = 0.$$

5)

$$\exists F \ de\ type\ F_\delta : F \subset E \quad et\ m^*(E - F) = 0.$$

Donc

$$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1, 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 1.$$

Preuve $1 \Rightarrow 2$ si $E \in L \Rightarrow m^*(V - E) = m(V - E) < \varepsilon$.

a) si $m(E) < \infty$. alors

$$m(V - E) = m(V - E) = m(V) - m(E) < \varepsilon.$$

$$\exists V \subset \mathbb{R} : E \subset V etm(V) < m(E) + \varepsilon$$

mais

$$m(E) = m^*(E) = \inf \left\{ \sum_1^\infty l(J_n), \{J_n\} \in J(E) \right\},$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists$ une recouverment J_n :

$$E \subset \bigcup_1^\infty J_n,\ m(E) + \varepsilon > \sum_1^\infty l(J_n).$$

On pose $V = \bigcup\limits_1^\infty J_n \subset \mathbb{R}, E \subset V.$

$$m(V) \leq \sum_1^\infty m(J_n) = \sum_1^\infty l(J_n) < m(E) + \varepsilon.$$

b) si $m(E) = \infty$. on pose

$$E + \bigcup_1^\infty E_n = \bigcup_1^\infty ([-n, n] \cap E),$$

$$m(E_n) \leq 2n \leq \infty,$$

d'aprés

$$a/\exists V_n \supset E_n : m(V_n - E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

On prend $V = \bigcup\limits_1^\infty V_n, E \subset V.$

$$\begin{aligned}
m(V - E) &= m^*(\bigcup_1^\infty V_n - \bigcup_1^\infty E_n) \\
&\leq m\left[\bigcup_1^\infty (V_n - E_n)\right] \\
&\leq \sum_1^\infty m\left(V_n - E_n\right) \\
&< \sum_1^\infty \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&= \varepsilon - 1.
\end{aligned}$$

$2 \Rightarrow 4$: prenons $\Sigma_n = \frac{1}{n}, \exists V_n$ et $m^*(V_n - E)$

On pose $G = \bigcap_1^\infty V_n, E \subset G$:

$$\begin{aligned} m^*(G - E) &= m^*(\bigcap_1^\infty V_n - E) \\ &\leq m^*(V_n - E) \\ &\leq \frac{1}{n}, \forall n. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow m(G - E) = 0, n \to \infty.$$

$4 \Rightarrow 1$ prenons $1 \Rightarrow G - E \in L, G \subset B(\mathbb{R}) \subset L$:

$$E + G - (G - E) \in L,$$

$1 \Rightarrow 3$:

$$E \subset L \Rightarrow E^c \in L,$$

d'aprés 2/

$$\exists V \subset \mathbb{R} E^c \in V \ et \ m(V - E^c) < \Sigma.$$

et

$$E^c \subset V \Rightarrow E \supset V^c \subset \mathbb{R},$$

Posons $F = V^c$

$$\begin{aligned} V - E^c &= V^c - E \\ &= F - E \Rightarrow m(F - E) < \Sigma. \end{aligned}$$

Conséquence 01 :

$$E \subset L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists V \subset \mathbb{R}, F \subset \mathbb{R},$$

donne

$$F \subset E \subset V : m(V - F) < \varepsilon.$$

2)$E \in L \Longleftrightarrow \exists G$ de type G_δ et F de type F_σ :

$$F \subset E \subset G.$$

$$m(G - F) = 0.$$

D'aprés (2) et (3) on à $\exists V$ et F :

$$m(V - E) \leq \frac{\Sigma}{2},$$
$$m(F - E) \leq \frac{\Sigma}{2}.$$

Il suffit de noter que $(V - F) \subset (V - E) \cup (E - F$

$$F \subset E \subset V \Rightarrow V - E \subset V - F,$$

donc

$$m(V - E) \leq m(V - F) < \varepsilon.$$

On demontre 2) de méme façon analogue . ■

Proposition 2.2 *Si*

$$m(E) < \infty, \forall \varepsilon > 0, \exists k \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} \subset E$$

et

$$\begin{aligned} m(K) &\leq m(E) \\ &\leq m(K) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Preuve $E \subset L \Rightarrow$ d'apres (3) $\Rightarrow \exists F \subset E$:

$$m(E - F) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Mais

$$F = \cup\left([-n, n] \cap F\right) = \cup F_n \,(\text{borné})$$

implique $F_n \subset \mathbb{R}, \forall n \;\; F_n$:

$$F_n \subset F_n \subset .... \subset F_i,$$

et

$$F \subset E \Rightarrow F_n \subset E,$$

$$E - F_n \supset E - F_{n+1} \supset ....,$$

donc

$$m(E - F_1) \leq m(E) + \infty.$$

■

Proposition 2.3 *De la propriété (02) de la convergence on à*

$$m\left(\bigcap_1^\infty (E - F_n)\right) = \lim_{n\to\infty} m(E - F),$$

mais

$$\bigcap_1^\infty (E - F_n) = E - \bigcup_1^\infty F_n = E - F,$$

$$m(E - F) = \lim_{n\to\infty} m(E - F) \Rightarrow \exists n_0 : m(E - F_{n0}) - m(E - F) < \frac{\varepsilon}{2},$$

posons

$$m(K) \leq m(E) < m(K) + \varepsilon.$$

2.2.5 Mesure interieure :

Définition 2.12 *On vérifiés que*

$$m^* = \inf \{m(V), E \subset \mathbb{R}\}$$

On pose

$$m_* = \sup \{m(F), F \subset E \text{ et } F \subset \mathbb{R}\},$$

m_* *est dite mesure intérieure.*

$$E \in L \Rightarrow m^*(E) = m_*(E).$$

2.3 Fonctions mesurables de Lebesgue :

Définition 2.13 *On dit qu'une propriétés a lieu presque par tout si l'ensemble des points oû cette propriété n'a pas lieu est de mesure nulle*

Exemple 2.5 *Ainsi on dit que :*$f = g$ *pp si*

$$\mu(\{x : f(x) \neq g(x)\}) = 0.$$

Exemple 2.6 $f_n \to f$ *pp si*

$$\mu(\{x : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}) = 0.$$

Exemple 2.7 *Si* (X, Σ, μ) *espace mesuré complet* $f : X \to \mathbb{R}$ *mesurable et* $f = g$, *pp alors* g *est ainsi mesurable .*

On pose

$$\begin{aligned} A &= \{x : f(x) \neq g(x)\} \\ &\Rightarrow \mu(A) = 0 \end{aligned}$$

f mesurable sa implique que :

$$\{x : g(x) < \alpha\} = \{x \in A : g(x) < \alpha\} \cup \{x \in A^c.g(x) < \alpha\}$$

donc g mesurable .

Proposition 2.4 *Si $\{f_n\}$ une suit de fonctions mesurable converge presque partout vers une fonction f et l'espace (X, Σ, μ) est une espace mesuré complet alors $f(x)$ est mesurable .*

Preuve On pose

$$A = \{x : f_n \nrightarrow f\} \Rightarrow \mu(A) = 0.$$

$\mu(A) = 0$ implique toute fonction mesurable sur A imlique que f mesurable sur A

$$\{x \in A : f(x) < \alpha\} \subset A \Rightarrow \{x \in A : f(x) < \alpha\} \in \Sigma$$

et on a $f_n \overset{A^C}{\to} f$ donc f mes sur $A^C \Rightarrow f$ mes sur

$$X = A \cup A^C.$$

■

Théorème 2.10 ***de Eggorof :***

Soit (X, Σ, μ) espace mesuré complet $E \subset \Sigma, \mu(E) < \infty$

Si la suite $\langle f_n \rangle$ converge presque partout sur E vers une fonction f alors

$\forall \eta > 0, \exists A \subset E$ tel que

(1) $\mu(A) < \eta$

(2) *sur $E \setminus A : f_n \to f.$*

Preuve 1) Au conditions de la théorème :

$\forall \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists A \subset E$ et $\exists q_0 \in \mathbb{N}$ tel que :$\forall q \geq q_0$

On ait :

$$|f_q(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E - A,$$

et

$$\mu(A) < \eta.$$

Posons

$$G_n = \{x \in E \diagup |f_n(x) - f(x)| \geq \Sigma\},$$

$$Eq = \bigcup_{n=q}^{\infty} G_n,$$

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{a)}\mu(Eq) \leq \mu(E) < \infty \\ \text{b)E}_1 \supset \text{E}_2.......... \end{array} \right\},$$

implique

$$\mu(\bigcap_{q=1}^{\infty} Eq) = \lim_{q\to\infty} \mu\left(Eq\right).$$

Mais

$$\bigcap_{q=1}^{\infty} Eq \subset \{n \in E : f_n(x) \nrightarrow f(x)\},$$

implique

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \Sigma \Leftrightarrow f_n(x).$$

Et d'aprés les conditions

$$\mu(\bigcap_{q=1}^{\infty} Eq) = 0$$

(car $\bigcap_{1}^{\infty} E \subset \{x \in E : f_n(x) \nrightarrow f(x)\}$)

$$\lim_{q\to\infty} \mu(Eq) = 0.$$

Donc

$$\text{pour } \eta > 0.\exists q_0 : \mu(Eq_0) < \eta,$$

on pose

$$A = Eq_0 \diagup \mu\left(A\right) < \eta.$$

Soit

$$x \in E - A \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in Eq_0 \Rightarrow x \notin Gq, \forall q \geq q_0,$$

donc

$$|f_q(x) - f(x)| < \Sigma.$$

2)On prend $\Sigma = \frac{1}{\eta}, \Sigma = \frac{\delta}{2^{n+1}}$ d'apreé 1).

$\exists A_n$ et $q_n \in \mathbb{N}$ tq :

$$\mu(A_n) < \frac{\delta}{2^{n+1}},$$

et $\forall q \geq q_n$

$$|f_q(x) - f(x)| < \frac{1}{\eta},\ \forall n \in E - A_n.$$

On pose

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

donc

$$\mu(A) < \Sigma\mu\left(A_n\right) \leq \eta.$$

Ou

$$x \in E - A \Leftrightarrow x \in E - \bigcup_{1}^{\infty} A_n \Leftrightarrow x \in \bigcap_{1}^{\infty} (E - A_n) \Leftrightarrow n \in E - A_n, \forall n,$$

donc

$$\forall q \geq q_n : f_q(x) - f(x) < \frac{1}{\eta}, \forall n,$$

si $\varepsilon \succ 0$, donné

$$\exists n_0, \frac{1}{n_0} < \Sigma,$$

alors $\forall q \geq q_{n_0}$, on a

$$|f_q(x) - f(x)| < \frac{1}{n_0} < \Sigma,\ \forall x \in E.A$$

1)On demontre que la convergence presque partout est un convergence presque uniforme

2)Consequence : si aux conditions de théorem $(x, \Sigma.\mu) = (\mathbb{R}.L.m)$

$\forall \eta > 0 : \exists K \subset E : \mathbb{N}$

1) sur K $f_n \to f$. convergence uniforme

$\forall \eta > 0. \exists A \subset E$

1) $m(A) < \frac{\eta}{2}$.

2) sur $E - A \quad f_n \to f$

$$m(E - A) < \infty,$$

implique $\exists K \subset E - A$:

$$A(E - A - K) < \frac{\eta}{2},$$

$K \subset E - A \Rightarrow K \subset E$ et sur $K \qquad f_n \rightrightarrows f$

On a

$$E - K \subset A \cup [E - A - K],$$

et

$$m(E - K) < m(A) + m(E - A - K),$$

$= \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2} = \eta \Rightarrow$

$$m(E - K) < \eta,$$

■

Proposition 2.5 *Si $E \in L : m(E) < \infty$. et θ un fonction étagée mesurable de Lebesgue alors*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \subset E : m(E - K) < \varepsilon,$$

et θ continue sur k .

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_{E_i}(n) E_i$$

sont mes (car θ est mesurable) $m(E_i) < \infty$ et $E_i \cap E_i = \phi . i \neq j$.

$m(E_i) < \infty \Rightarrow \exists K_i \subset E_i$:

$$m(E_i - K_i)\,\frac{\Sigma}{\eta}.$$

On pose

$$k = \bigcup_{i=1}^{n} K_i, \theta(n) = \alpha_i,$$

si $x \in K_i$.

$k_i \cap k_j = \phi, i = j \Rightarrow O$ *continue sur* (K) (*car* θ *une constant sur* K_i *compact disjont*)

$$\begin{aligned}(E - K) &= m(\bigcup_1^n E_i - \bigcup_1^n K_i) \\ &\leq \left[\bigcup_1^n (E_i - K_i)\right] \\ &\leq \sum_1^n m(E_i - K_i).\end{aligned}$$

Proposition 2.6 *Si* $E \subset L : m(E) < \infty. f$ *est foncion mes de lebesgue :*$f : E \rightarrow \mathbb{R}.alors$ $\forall \varepsilon \succ 0, \exists K \subset E$ *tel que :*

$$m(E - K) < \Sigma,$$

et f *est continue sur* k *.*

1) d'apres (le théorème d'approximation) $\exists$ (f_n) *suit de fonctions étagée mesurable tel que :*

$$f_n(x) \rightarrow f(x).$$

2) Consequence du théor d'Eggoraf $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists K_0 \subset E$ *tel que*

$$m(E - K_0) < \frac{\varepsilon}{2},$$

et sur

$$K_0 \;\; f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f.$$

3)(Proposition01) implique $\forall n : \exists K_n \subset E$ *tq*

$$m(E - K_n) < \frac{\Sigma}{2^{n+1}}$$

et $f_n\,(n)$ *est continue sur k.*

On pose

$$K = \bigcap_{n=0}^{\infty} K_n,$$

alors

$$K \subset K_n, \forall n$$

donc $2^0/$ *et* $3^0/$ *sont vrai sur k (c à d) les fonction* f_n *sont continues sur k et la suite*

$f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f \Rightarrow f,$ *continue sur k .*

$$\begin{aligned} m\,(E - K) &= m\left(E - \bigcap_0^{\infty} K_n\right) \\ &= m\left(\bigcup_0^{\infty} (E - K_n)\right) \\ &\leq \sum_0^{\infty} m\,(E - K_n) \\ &\leq \sum_0^{\infty} \frac{\Sigma}{2^{n+1}} \\ &< \Sigma. \end{aligned}$$

Théorème 2.11 ***de Lesin :***

Si E∈L, m(E)<∞.

$f : E \to \mathbb{R}$ *(mesurable) alors* $.\forall \varepsilon > 0.\exists g$ *continue sur E tel que*

$$m\,(\{x \in E.f\,(x) \neq g\,(x)\}) < \varepsilon.$$

Définition 2.14 $\langle f_n \rangle$ *est dite suite mesurable convege en mesure vers une fonction f :*

Si $\forall\varepsilon > 0$,*on a :*

$$\lim u\left(\{n : |f_n(n) - f(n)| \geq 0\}\right) = 0.$$

Ou bien

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0, u\left(\{x : |f_n - f| \geq \varepsilon\}\right) < \varepsilon.$$

Tel que (X, Σ, μ) *espace mesuré complet .*

Théorème 2.12 *1)Si* $f_n \Rightarrow f$ *et* $f = g$ *p.p alors* $f_n \Rightarrow g$ *aussi.*

2)Si $f_n \Rightarrow f$ *et* $f_n \Rightarrow g$ *alors* $f = g$ *presque partout*

Preuve 1)Si

$$E = \{f(x) \neq g(x)\}, \ \mu(E) = 0,$$

$$\begin{aligned} & \{n : |f(x) - g(x)| \geq \Sigma\} \\ \neq\ & \{x \in E : |f_n - g| \geq \Sigma\} \cup \{x \in E^c : |f_n - g| \geq \Sigma\} \\ \subset\ & E \cup \{x : f_n(x) - f(x) \geq \Sigma\}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \mu\{x : |f_n(x) - g(x)| \geq \Sigma\} &< \mu(E) + \mu\left(\{x : |f_n(x) - f| \geq \Sigma\}\right) \\ &< \Sigma + 0. \end{aligned}$$

2) Poson

$$E = \{x : f(x) \neq g(x)\},$$

donc

$$fn \to g$$

$$\mu(E) = 0, \ E = \bigcup_{n \geq 1} \left\{n : |f - g| \geq \frac{1}{n}\right\},$$

donc il suffit démontrer que

$$\mu\left(\left\{n \subset |f-g| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0.$$

Mais

$$\begin{aligned} \left\{x : |f-g| \geq \frac{1}{n}\right\} &\subset \left\{x : |f-f_k| \geq \frac{1}{m}\right\} \\ &\subset \left\{x \subset |f_k - g| \geq \frac{1}{m}\right\} \quad m \geq n : \forall k.. \end{aligned}$$

On a

$$\mu(E_1) \leq \mu(A_m) + \mu(B_m)$$

or

$$\mu(A_m) = \mu(B_m) = 0.$$

Donc

$$\mu(E_1) = 0.$$

■

Théorème 2.13 ***de Lebesgue :***

Si

$$\mu(x) < \infty$$

et

$$f_n \to f,$$

alors

$$f_n \to f.$$

Théorème 2.14 ***de Riesz :***

Si $f_n \Rightarrow f$ *alors* $\exists$ *une sous suite* $f_{nk} \Rightarrow f$

Si $\langle f_n \rangle$ *.suite de Cauchy converge en mesure alors il exist sous suite de Cauchy* $\langle f_{nk} \rangle$ *convege presque partout.*

Remarque 2.6 *Suite de Cauchy converge en mesure :*

$$f_n \to f$$

équivalent

$$\forall \eta, \Sigma > 0, \exists n_0, \forall n, m \geq n_0 :$$

$$\mu \{n \in E : |f_n(x) - f_m(x)| \geq \eta\} \leq \Sigma.$$

Remarque 2.7 *1)La convergence simple*

$$f_n \to f$$

équivalent

$$\forall x \in E : \forall \Sigma > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N} :$$

$$\forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

2)La convergence uniforme

$$f_n \to f$$

équivalent

$$\forall x \in E : \forall \varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N} :$$

$$\forall n \geq n_0 : |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon.$$

3)La convergence presque partout

$$f_n \to f$$

équivalent

$$\mu(\{x : f_n \nrightarrow f\}) = 0.$$

4)La convergence presque uniforme

$$f_n \to f$$

équivalent

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \geq n_0 : |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in E.$$

5)La convergence en mesure

$$f_n \to f$$

équivalent

$$\forall \eta > 0. \lim_{n \to \infty} \mu(\{x : |f_n - f| \geq \eta\}) = 0.$$

Chapitre 3

Intégrale de Lebesgue

3.1 Introduction

3.1.1 Intégrale de Riemann

Soit $p = (x_0, x_1, ..., x_n)$ est une partition de $[a, b]$ si $a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$.

Désignons $P = P[a, b]$ ensemble de toute les partitions de l'interval [a,b].

Soit $f : [a, b] \to R$ une fonction borné

$$Tp = \sum M_i(x_i - x_{i-1}), M_i = \underset{[x_{i-1},x_i]}{sup} f(x),$$

$$Sp = \sum m_i(x_i - x_{i-1}), m_i = \underset{[x_{i-1},x_i]}{inf} f(x),$$

($Tp,\ Sp$ somme sup et inf de Darbou $Sp \leq Tp$)

Proposition 3.1 *Si $p \subset q : p, q \in \rho$ alors;*

$$Sp \leq Sq \leq Tq \leq Tp.$$

Il suffit de considére le cas

$$p = (x_0, x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_n),$$

$$q = (x_0, x_1, ..., x_i, x', x_{i+1}; ..., x_n).$$

et

$$Tp = M_{i+1}(x_{i+1} - x_i).$$

alors

$$\begin{aligned} Tq &= M_{I+1}(x_{i+1} - x') + M_{i+1}(x' - x_i) \\ &\leq M_{i+1}(x' - xi) + M_{i+1}(x_{i+1} - x') \\ &= M_{i+1}(x_{i+1} - x_i) \\ &= Tp. \end{aligned}$$

Conséquence

$$\forall p, q : Sq \ \leq Tp(x)$$

implique

$$\sup Sq \leq \inf Tq \ , p \in \rho, q \in P.$$

Définition 3.1 sup Sq *est appelé intégrale inferieur de* f *sur [a,b] on note par*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-a}^{b} f(x)$$

inf Tp *est l'intégrale superieur de* f *sur [a,b] et on note*

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{-b} f(x)dx$$

Définition 3.2 *Une fonction bornée sur* $[a, b]$ *est dit integrable de Riemann sur* $[a, b]$:

si

$$\int_{-a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{-b} f(x)dx \Leftrightarrow \sup Sq = \inf Tp$$

Critère de Cauchy d'intègrabilité

Une fonction f bornée sur $[a, b]$ est intégrable de Riemann ssi $\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in \rho : Tp - Sp < \varepsilon$ en utilisons le critére :

1− Tout fonction continue est intégrable de Riemann.

2− Tout fonction monotone est int"grable de Riemann.

3− Tout fonction qui admet une nombre finie de point de discontinuté est intégrable de Riemann.

Exemple 3.1

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & si \ x \ \notin Q, \\ 1, & si \ x \ \in Q. \end{cases}$$

N'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

$\forall p = (x_0, x_1, ..., x_n)$;

$$Sp = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = 0,$$

$$\begin{aligned} Tp &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= 1. \end{aligned}$$

$\forall p \ Tp - Sp = 1 \not< \varepsilon$ *mais*

$$\int_{-1}^{0} \lambda(x) = 0, \qquad \int_{0}^{1} \lambda(x) = 1.$$

Fonction a variations bornée :

On dit que$f : [a, b] \to R$ est une fonction a variation bornée ($f \in V_a^b$) :

Si

$$\begin{aligned} V_a^b[f] &= \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \, (x_0, x_1, ..., x_n) \in \rho \right\} \\ &< \infty \end{aligned}$$

$V_a^b[f\ ]$ est appelé variation total de f sur $[a,b]$ en peut demontrer la propriété suivant :

1− Si f un monotone alors

$$\begin{aligned} V_a^b[f] &= |\ f(b)-f(a)| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

2− Si $a<c<b$,alors

$$V_a^b[f]=V_a^b[f]+V_c^b[f].$$

3− Si f et $g\in V_a^b$ alors $f\pm g,\ \lambda f;\ f-g,\in V_a^b$ de plus

$$V_a^b[f+g]\leq V_a^b[f]+V_a^{b|}[g].$$

4−

$$V_a^b[\lambda f]=|\lambda|\,V_a^b[f].$$

5− Si $f\in V_a^b$ alors

$$\Phi(x)=V_a^x[f]\uparrow,$$

Φ continue si f continue.

6−

$$\Psi(x)=V_a^x[f]-f(x)\uparrow.$$

7− La proprietés(1,4,5) implique $f\in V_a^b\Leftrightarrow\Phi\uparrow$ tel que :

$$f(x)=\Phi(x)-\Psi(x)$$

$8-f\in V_a^b\Rightarrow f$ bornée sur $[a,b]$

9− Si $f\in Lip\Rightarrow f=V_a^b\ \ \diagup[f\in Lip\Leftrightarrow$

$$|f(x)-g(x)\ |\leq kx-y|].$$

L'intègrale de Riemann-Striltjes

Soi f une fonction bornée $f : [a, b] \to R$, $g \in V_a^b$,

$$Tp = \sum_{i=1}^{n} M_i[g(x_i) - g(x_{i-1})],$$

$$Sp = \sum_{i=1}^{n} m_i[g(x_i) - g(x_{i-1})]$$

On dit que f est intégrable sur $[a, b]$ par rapport à g si :

$$\sup Sp = \inf Tp = \int_a^b f(x)d(g(x))$$

La valeur commune alors est dite integrale de Riemann Sstriltjes de f sur $[a, b]$ par apport g si $g(x) = x$, on obtient l'intégrale de Riemann

3.2 Intégrale de Lebesgue

3.2.1 Approche analytique

Soit (X, Σ, μ) espace mesuré, $E \subset \Sigma : \mu(x) < \infty$, $f : E \to IR$, fonction bornée et soit

$$m \leq f(x) \leq M.$$

1$-$On prend $[A, B]$ qui contient $[m, M]$, $A < m$ et $B \rangle M$.

2$-$Soit $p = (y_0, y_1, ..., y_n)$ une partition de $[A, B]$.

3$-$ On pose

$$E_k = \{x \in E = y_{k-1} < f(x) < y_k \ ,k = 1...n\},$$

E_K mesurable $E_i \cap E_j = \phi,\ i \neq j$, donc $\bigcup\limits_{k=0}^{n} E_k = E \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \mu(\bigcup_{k=0}^{n} E_k) &= \sum \mu(E_k) \\ &= \mu(E). \end{aligned}$$

4−On pose

$$Tp = \sum y_k.\mu(E_K),$$

$$Sp = \sum y_{k-1}.\mu(E_k),$$

donc

$$Sp < Tp.$$

Proposition 3.2 $\sup Sp = \inf Tp$,

$$\begin{aligned} & Tp - Sp \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k-1}).\mu(E_K) \\ \leq \ & \max(y_k - y_{k-1}). \sum_{k=1}^{n} \mu(E_k), \end{aligned}$$

$$\max(y_k - y_{k-1}).\mu(E) \to 0,$$

si

$$\max(y_k - y_{k-1}) \to 0.$$

Définition 3.3 $\sup Sp = \inf Tp$ *est dite intégrale de Lebergue sur* E *, on le note par :*

$$\int_E f(x)dx,\ \int_E f dx,\ \int_E f d\mu,\ \int_E f.$$

Exemple 3.2 $\lambda(x)$ *est une fonction intégrable de Lebesgue :*

$$\lambda(x) = \begin{cases} 0, & si\ x\ \notin Q \\ 1, & si\ x\ \in Q \end{cases} \quad E = [0,1]$$

3.2.2 Présentation modérne

L'intégrale de Lebesgue d'une fonction étagées bornée sur un ensemble de mesure finie

Définition 3.4 *(X, Σ, μ) espace mesuré , $\mu(X) < \infty$, $E \subset \Sigma$, $\theta : X \to R$ fonction mesurable etagées :*

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i.\chi_{Ai}(x)$$

-$\int\limits_X \theta(x)d\mu = \sum \alpha_i.\mu(A_i)$,
-$\int\limits_E \theta(x)d\mu = \int_X \theta(x)\chi_E(x)d\mu = \sum \alpha_i.\mu(A \cap E_i)$.

Propréitiés de l'intégrale

1-$\int(\theta + \Psi)d\mu = \int \theta d\mu + \int\limits_x \Psi d\mu$.
2-$\int \lambda.\theta\ d\mu = \lambda \int \theta d\mu, \quad \lambda \in R$.
3-$\theta \leq \Psi \quad pp \Rightarrow \int\limits_x \theta d\mu \leq \int\limits_x \Psi d\mu$.
4-$\left|\int \theta d\mu\right| \leq \int\limits_x |\theta d\mu|$.

Intégrale de Riemann exprimé par des fonction étagées

Soit $f : [a,b] \to R,\ p = (x_0, x_1, ..., x_n) \in [a,b]$,

T

$$p = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), Sp = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}),$$

$$\theta(x) = \sum_{i=1}^{n} M_i.\chi(x), \Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} m_i\ .\chi(x).$$

θ et Ψ sont des fonction étagées par intervalles $\theta(x) \leq f(x) \leq \Psi(x)$,

$$\begin{aligned}
Tp &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \int_{x_{i-1}}^{x} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x} M_i dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x} \Psi(x) dx \\
&= \int_{a}^{b} \Psi(x) dx
\end{aligned}$$

de meme façons

$$\begin{aligned}
Sp &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \int_{x_{i-1}}^{x} dx \\
&= \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x} m_i dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x} \theta(x) dx \\
&= \int_{a}^{b} \theta(x) dx
\end{aligned}$$

On designe par

$J_i[f]$ l'ensemble de toutes les fonction inferieur ou égale à f sur $[a, b]$.

$J_s[f]$ l'ensemble de toutes les fonction superieur ou égale à f sur $[a, b]$.

$\xi_i(f)$ l'ensemble de toutes les fonction étagées infeieur ou égale à f sur $[a, b]$.

$\xi_j(f)$ l'ensemble de toutes les fonction étagées superieur ou égale à f sur $[a, b]$.

$E = [a, b]$, $J_i(f) \subset \xi_i(f)$, $J_i(f) \subset \xi_j(f)$ si f est intégrable de Riemann $\sup Sp = \inf Tp$.

$$\sup \left\{ \int_{a}^{b} \theta(x) dx \right\} = \inf \left\{ \int_{a}^{b} \Psi(x) dx \right\}$$

Si f n'est pas intégrable de Riemann $\sup Sp \leq \inf Tp$

Intégrale de Lebergue d'une fonction mesurable bornée sur ensemble mesurable de mesure finie

Théorème 3.1 *Soit* (X, Σ, μ) *espace mesuré ,* $E \subset \Sigma$, $\mu(E) < \infty$, $f : X \to \mathbb{R}$, *bornée sur* E

$$f \quad \textit{est mesurable} \Leftrightarrow \quad \sup \left\{ \int\limits_E \theta(x) d\mu \right\} = \inf \left\{ \int\limits_E \Psi d\mu \right\}$$

.

Preuve $\Rightarrow$)

$|f\ | < M$ sur E, $M > 0$, $E_k = \left\{ x \in E, \frac{(k-1)M}{n} \leq f(x) \leq \frac{kM}{n} \right\}$

$$\begin{aligned}
\theta_n(x) &= \sum \frac{(k-1)M}{n} \chi_{Ek}, \\
\int \theta_n(x) &= \sum \frac{(k-1)M}{n} \mu(E_K) \leq S, \\
\Psi_s &= \sum \frac{(k-1)M}{n} \chi_{Ek}, \\
S &\leq T \leq \int\limits_E \Psi_n = \sum \frac{kM}{n} \mu(E_K), \\
0 &\leq T - S \leq \frac{M}{n}, \\
\sum \mu(E_k) &= \frac{M}{n} \mu(E) \ \to 0 \Rightarrow S = T
\end{aligned}$$

■

3.2.3 les propriétés de intégrale de Lebesgue :

Toutes les fonction considérés sont mesurable bornée et les ensemble mesurable de mesure finie, $(E \subset \Sigma,\ \mu(E) < \infty)$, f mesurable bornée

$1 - \int\limits_E (f+g) d\mu = \int\limits_E f \ d\mu + \int\limits_E g \ d\mu.$

$2 - \int \lambda f \ d\mu = \lambda \int f \ d\mu \qquad ,\lambda \in R.$

a$-$ $\lambda > 0$, $\int\limits_E \lambda f \ d\mu = \sup \left\{ \int \lambda \theta d\mu \right\} = \lambda \sup \left\{ \int \theta d\mu \right\} = \lambda \int f \ d\mu.$

b− $\lambda < 0$, $\int \lambda f \ d\mu = \inf \{\lambda \Psi d\mu\} = \lambda \inf \left\{\int \Psi d\mu\right\} = \lambda \inf \left\{\int \Psi d\mu\right\}$.

3− Si $f \ \leq g$ alors $\int f \ d\mu \leq \int g \ d\mu$.

$4 - \left|\int_E f \ d\mu\right| \leq \int_E |f \ d\mu|$.

5− **Théotème de la moyenne :** Si $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m\mu(E) \leq \int\limits_E f(x) \leq M\mu(E)$.

6− Si $.\mu(E) = 0 \Rightarrow \int f \ d\mu = 0$.

7− **Théorème de la convergence uniforme**

Si $f_n \to f \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E \lim f_n d\mu$.

Si $f_n \to f$ sur $E \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_E f_n = \int_E f \ d\mu$.

Preuve Preuve : Dementrons que : $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, n \geq n_0 : \left|\int_E f_n - \int_E f\right| < \varepsilon$

Si $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int\limits_E f \ _n d\mu = 0 = \int\limits_E f \ d\mu \Rightarrow \left|\int_E f_n - \int_E f\right| = 0$,

Si $\mu(E)$ soit $\frac{\varepsilon}{\mu(E)}$ d'apres la convergence uniforme

$$\exists n_0, \forall n \geq n_0 \, |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{\mu(E)}, \forall x \in E,$$

$$\left|\int_E f \ d\mu - \int_E f_n d\mu\right| = \left|\int_E f(x) - f_n(x)\right| \leq \int_E |f - f_n| \, d\mu.$$

D'apres la théoreme de l'approximation $\leq \frac{\varepsilon}{\mu(E)}\mu(E)$ pour une fonction mes bornée

Il exist une suit des fonction étagées $\langle f_n \rangle \to f$ si $f_n \to f$ alors d'après (7), ■

8−**Additivité denombrable d'ensemble disjoint :** Si

$$E = \bigcup_{i=0}^{n} E_i, E_i \cap E_j = \phi, i \neq j$$

alors

$$\int_E f = \sum_{i=1}^{n} \int_E f d\mu.$$

9− Si $f = g \ \ pp$ sur E alors $\int_E f \ d\mu = \int_E g \ d\mu$.

Soit $A = \{x \ \ ; f + g\} \Rightarrow \mu(A) = 0 = \int_A f = \int_A g = 0$,

$\int_E f \ d\mu = \int_A f + \int_{A^c} f = \int_A g = \int_{A^c} g = \int_E g \ d\mu$ on particulier si $f = 0 \ \ pp \Rightarrow \int_E f \ d\mu = 0$.

Mais la reciproque n'est pas vrai.

Exemple 3.3 $\int_E \sin x \ dx = 0 \not\Rightarrow \sin x = 0$

$10-$ Si $f \quad \geq 0$ et $\int f \ d\mu = 0 \Rightarrow f = 0 \ pp$ sur :

Si $\mu(E) = 0 \Rightarrow \int f = 0 \Rightarrow f = 0 \ pp$

Si $\mu(E) = 0$,on pose $A = \{x \ \ ; f(x) \neq 0\} \ \mu(A) =^? 0$,

Supposons le contrair (c- à -d) , $\mu(A) > 0$

Posons $A_n = \left\{x \ \ ; f(x) > \frac{1}{n}\right\}, A = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A_n \subset A_{n+1} \subset ....$

$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) > 0 \Rightarrow \exists n \ \ , \mu(A_n) > 0$

Donc $\int_E f \ d\mu = \int_{An_0} f \ + \int_{An_0^C} f \ \ \geq \int_{An_0} f \geq \frac{1}{n_0}\mu(A) > 0$

Donc $\int_E f \ d\mu > 0$ contradiction

Théorème 3.2 ***de convergence bornée***

Si $f_n \to f$, *et* $f_n(x)$ *est uniformément bornée* $(|f_n(x)| < M, \forall n, x)$ *alors*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

Exemple 3.4 $f_n(x) = \begin{cases} 0, \ si \ x \in [1/n, 1], \\ 0, \qquad si \ x = 0, \\ n, \qquad si \ x \in]0, 1[, \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} f_n = 0, \forall x \in [0, 1] \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n - \int\limits_{[0,1]} 0x = 0$

$\int\limits_{[0,1]} f_n(x)dx = n.m(]0, \frac{1}{n}[) = 1 \nrightarrow 0$

Si $\mu(E) > 0$ *,on note que* $|f(x)| < M, \quad \forall x \in E,$

D'apres la théoreme d'egoraff on prend $\frac{\varepsilon}{4M}$, $\exists \ A \in E$ *tel que*

$1/\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4M}, \qquad 2/ \ \ f_{\ n} \to f$

$\left|\int_E f \ - \int_E f_n d\mu\right| \ \leq \ \int_E |f -_n| \ = \ \int_A |f - f_n| + \int_{A^C} |f - f_n| \ \leq \ \int_A 2M d\mu + \int_{A^C} |f - f_n| \ \leq$ $2M_k(A) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

3.2.4 Intégrale d'une fonction positive

Définition 3.5 *Soit* (X, Σ, μ) *espace mesuré ,*$E \subset \Sigma$, $\theta(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i.\chi_{Ai}$ *(fonction étagée mesurable)*

$\theta(x) \geq 0$ *sur* X , $\alpha_i \geq 0$; $f : E \to [0, \infty], f \geq 0$ *mes*; $\int_E \theta \ d\mu = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i.\mu(A_I \cap E)...(1)$

Alors $\int_E f \ d\mu = \sup \left\{ \int \theta d\mu \right\} = \inf \left\{ \int \Psi d\mu \right\}$

Remarque 3.1 *Si dans l'inégalité* (1) *si* $\alpha_i = 0, \mu(E \cap A_i) = \infty$ *ou bien* $\alpha_i = \infty$, $\mu(E \cap E_i) = 0$,

-Admettant par convention que $0.\infty = 0$

-par les définition,toutes les fonction mes ≥ 0 *est integrable de Lebesgue meme si* $\int_E f = 0$.

Propriétés de l'intégrale

$1-$Si $0 \leq f \leq g \Rightarrow \int_E f \ d\mu \leq \int_E g \ d\mu$.

$2-$Si $f \geq 0$, $E \subset F \Rightarrow \int_E f \ d\mu \leq \int_F f \ d\mu$.

$3-$Si $c > 0, f \geq 0 \Rightarrow \int_E cf = c \int_E f$.

$4-$Si $f = 0$ pp sur E alors $\int f \ d\mu = 0$, meme si $\mu(E) = \infty$.

$5-$Si $\mu(E) = 0, f \geq 0 \Rightarrow \int_E f = 0$ meme si $f(x) = \infty, \forall x \in E$.

$6-$Si $f \geq 0$, $\int f \ d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0$ pp sur E.

$7 - \theta \geq 0$ (fonction étagés) $\lambda(E)$ est un mesure positif sur Σ.

$8-$ **Théorème de convergence monotone (de Lebesgue) :** Si $\langle f_n \rangle$ suit de fonctions mesurable

a/ $\langle f_n \rangle \geq 0$,

b/ $f_n \uparrow$,

c/ $f_n(x) \to f$ sur X,

Alors $\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n(x) = \int_X f \ (x) d\mu$.

$9-$**Addivité finie des fonctions :** soit $f, g \geq 0$;

$\int (f + g) d\mu = \int f \ d\mu + \int g \ d\mu$,

$\int_X f \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \theta_{n1} \ d\mu$,

$\int_X g \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \theta_{n2} \ d\mu$,

$\int (f + g) d\mu = \int (\theta_{n1} + \theta_{n2}) \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \theta_{n1} \ d\mu + \lim_{n\to\infty} \int \theta_{n2} \ d\mu = \int f \ d\mu + \int g \ d\mu$

$10-$**Addivité total des fonctions** ($\sigma-$ add des fonctions) : Si $f_k \geq 0$ mesurable alors $\int_X \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \ (x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \int_X f(x) d\mu$.

preuve : $f_k \geq 0$ mesurable alors $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k \ (x) \uparrow$

Donc on peut utilisie les théoremes de la cge monotone

$\int \sum_{k=1}^{\infty} f_k\ (x)d\mu = \int \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} f_k\ (x)d\mu = \lim_{n\to\infty} \int \sum_{k=1}^{\infty} f_k\ (x)d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int f_k(x)d\mu$

11$-$**Addivité total denembrable disjoint :** Soit $f\ \ \geq 0, E_i$ mesurable tel que :

1) $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j,$

2) $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i.$

Alors $\int_E f = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\ d\mu.$

Preuve on note que$\int_E f\ d\mu = \int_E f\ \chi_{E_I} d\mu$ si on pose $g_i = f\ \chi_{E_I} = \begin{cases} f\ ,\ si\ \ x \in E_i, \\ 0,\ \ si\ \ x \notin E_i, \end{cases}$

alors $\sum_{k=1}^{\infty} f(x)\ \chi_{E_I}(x) = f(x)$ (car :$E_i \cap E_j = \phi$).

$g_i(x) \geq 0 \Rightarrow \int_E \sum_{i=1}^{\infty} g_i\ d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_E g_i\ d\mu \Rightarrow \int_E f\ d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\ d\mu.$ ■

Lemme 3.1 ***de Fatou*** *Soit* $f \geq 0$ *mesurable alors*

$$\begin{aligned} \int_X \lim_{n\to\infty} f_n(x) &\leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)d\mu, \\ \lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty} \inf \{U_i\ \ , i \geq 1\}. \end{aligned}$$

3.2.5 Fonctions sommables

Soit $f\ \ : X \to [0, +\infty]$:

$$f^{\ +}(x) = \begin{cases} f(x),\ \ si\ \ \ f(x) \geq 0, \\ 0,\ \ si\ \ \ f(x) \leq 0. \end{cases}$$

$$f^{--}(x) = \begin{cases} 0,\ \ si\ \ f(x) \geq 0, \\ -f(x),\ \ si\ \ f(x)\ \ \leq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f^{+},\ f^{--} &: X \to [0, +\infty], \\ f &= f^{\ +} - f^{\ -}, \\ |f\ | &= f^{\ +} + f^{\ -}, \end{aligned}$$

Définition 3.6 $f \in L^1(X,\mu) \Leftrightarrow f^{+}, f^{-} \in L^1(X,\mu)$ *et dans ce cas on a : si* $f \in L^1(X,\mu)$ *alors*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^{+} d\mu - \int_X f^{-} d\mu.$$

Propriétés :

1$-$Si f mesurable , $f \in L^1(X,\mu) \Leftrightarrow |f| \in L^1(X,\mu)$ et $\left|\int_X f\, d\mu\right| \leq \int\limits_X |f|\, d\mu$,

$\Rightarrow]$ $f \in L^1 \Rightarrow \int_X f^{+} < \infty$ et $\int_X f\, d\mu < \infty \Rightarrow \int_X f^{+} + \int_X f^{-} < \infty \Rightarrow \int\limits_X |f|\, d\mu < \infty \Rightarrow |f| \in L^1(X,\mu)$,

$\Leftarrow]$ $|f| \in L^1$; $\int\limits_X |f| = \int_X f^{+} + \int_X f^{-} < \infty \Rightarrow f \in L^1$,

$\left|\int_X f\, d\mu\right| = \left|\int_X f^{+} + \int_X f^{-}\right| \leq \left|\int_X f^{+}\right| + \left|\int_X f^{-}\right| = \int_X f^{+} + \int_X f^{-} = \int |f|\, d\mu$.

2$-$**Addivité totale d'ensemble disjoint**

Si $f \in L^1(E,\mu)$; $E = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$, $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j$ alors $f \in L^1(E,\mu)$,$\forall i$ et $\int_E f\, d\mu = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f\, d\mu$

3$-$ Si $a \in \mathbb{R}$, $f, g \in L^1$ alors $f + g \in L^1$.

4$-$**Théoréme de convergence dominée :**

Soit $\langle f_n \rangle$ suit de fonctions mesurable : $X \to [0,\infty]$ et $f_n \to f$, s'il existe $\theta : X \to [0,+\infty]$

Tel que $\theta(x) \geq 0$, $\theta \in L^1(E,\mu)$ et $|f_n(x)| \leq \theta(x)$,$\forall n$ alors

a/ $\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n = \int_X f\, d\mu$.

b/ $\lim_{n\to\infty} \int\limits_X |f_n(x) - f(x)|\, d\mu = 0$

Définition 3.7 *Soit* (X, Z, μ) *espace mesuré* $f \geq 0$ *on dit que* f *est sommable* ($f \in L^1(X,\mu) = L^1(\mu) = L^1(X) = L^1$) *si* $\int f\, d\mu < \infty$,

2$-$*si* $f \in L^1$ *alors* f *est finie partout,* $A = \{x\ , f(x) = \infty\}$, $\mu(A) = 0$

Suposons $\mu(A) > 0 \Rightarrow \int_X f\, d\mu > \int_A f\, d\mu = \infty$ contradiction

$\mu(A) = \infty$ $(f \in L^1)$

3.3 Les espaces de Lebesgue L^p

Définition 3.8 $L^p(X,\mu) = L^p(X) = \left\{f(x), f \text{ mesurable, } \int_X |f|^p\, d\mu < \infty\right\} = \|f\|_{L^P}^{P}$.

Ppropriétés

1$-$ $f \subset L^p \Rightarrow f$ est finie pp.

2$-$Si $\mu(X) < \infty$ alors $L^2 \subset L^1$.

3 $-$ $L^p \supset L^q$, si $\mu(X) < \infty$, $/p < q$.

4 $-$ L^p est espace vectoriel.

Définition 3.9 $f \in L^1, \|f\|_p = [\int_X |f|^p]^{\frac{1}{p}}$ *ou* $\|f\|_p^p = \int_X |f|^p$, *si* $1 \leq p \leq \infty,\ \exists q \in \mathbb{R}^+ / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Lemme 3.2 ***(Inégalité de Holder)*** *Si* $p; q > 0 \ / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ f \in L^p$ *alors :*

a / $f.g \in L^1$.

b / $\int |f\ g| \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

c/ $\|f\ g\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

Preuve $\forall a, b \geq 0, a, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ prenons $a = \frac{|f|}{\|f\|_p},\ b = \frac{|g|}{\|g\|_q}$

$$\int \frac{|f|}{\|f\|_p} - \frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \int \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \int \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

implique

$$\int_X |f\ .g| \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \cdot (\int \frac{1}{p} \frac{|f|^p}{\|f\|_p^p} + \int \frac{1}{q} \frac{|g|^q}{\|g\|_q^q}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\|g\|_q}{p} \int_X \frac{|f|^p}{\|f\|_p^{p-1}} + \frac{\|f\|_p}{q} \int_X \frac{|g|^q}{\|g\|_q^{q-1}} \\
&= \frac{1}{p} \|g\|_q \cdot \|f\|_p + \frac{1}{q} \|f\|_p \cdot \|g\|_q \\
&= \|g\|_q \cdot \|f\|_p [\frac{1}{p} + \frac{1}{q}] = \|g\|_q \cdot \|f\|_p
\end{aligned}$$

■

7$-$**Inégalité de Minkawski :** Si $p; q > 0 \ / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ f \in L^p, g \in L^q$ alors :

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_q$$

Preuve

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p &= \int\limits_X |f+g|^p = \int_X |f+g||f+g|^{p-1} \\
&\leq \int_X |f||f+g|^{p-1} + \int_X |g||f+g|^{p-1} \\
&\leq \|f\|_p [\int\limits_X |f+g|^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}} + \|g\|_p [\int\limits_X |f+g|^{(p-1)q}]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

donc

$$\|f+g\|_p^p \leq [\|f\|_p + \|g\|_q] \|f+g\|^{\frac{p}{q}}$$

■

$8 - L^p$ est un espace normé.

Théorème 3.3 ***de Riez-Ficher :*** *L^p est espace de Banach pour $p \in [1, +\infty\lceil$ (e v.n complet)*

Preuve *Dementrons que L^p est complet*

1- construction d'une sous suite converge pp

Soit $\langle f_n \rangle$ suite de Couchy de L^p équivalent

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall m.n > n_0, / \|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2r}$ on trouve

$$\exists n_i, \forall m.n > n_i \quad / \|f_n - f_m\|_p \leq \frac{1}{2^i}$$

On pose

$$\begin{aligned}
m_1 &= n_1, m_2 = \max(n_2, m_1+1), ..., \\
m_k &= \max(n_k, m_{k-1}+1)
\end{aligned}$$

d'où

$$m_1 < m_2 < .... < m_i > n$$

donc

$$\left\| f_{m_{i+1}} - f_{m_i} \right\|_p \leq \frac{1}{2^i}$$

Dementrons que cette suite converge pp onpose

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \sum_{i=1}^{k} \left| f_{m_{i+1}} - f_{m_i} \right| \\ g(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \left| f_{m_{i+1}} - f_{m_i} \right| \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned} g_k(x) &\geq 0, g_k(x)_{k\to\infty} \to g(x), \\ \left\| g_k \right\|_p &\leq \sum_{i=1}^{k} \left\| f_{m_{i+1}} - f_{m_i} \right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1 \end{aligned}$$

Donc $\int_X |g|^p \, d\mu \leq 1 \Rightarrow |g| \in L^p \Rightarrow g$ *est finie pp*

implique

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{k} \left| f_{m_{i+1}} - f_{m_i} \right| \text{ converge pp} \\ \Rightarrow \quad & f_{m1} + \sum_{i=1}^{k} \left| f_{m_{i+1}} - f_{m_i} \right| \text{converge pp} \end{aligned}$$

Soit $f(x)$ *sa somme* $f_{mi} \to f(x)$ *pp*

Si $m_i \to \infty \Rightarrow f(x)$ *est mesurable*

2-$\| f_n - f_m \|_{n\to\infty} \to 0,$ *et* $f \in L^p$

Puisque f_n *etant suite de Cauchy :*

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall m.n_i > n_0$ $, \| f_m - f_{n_i} \|_p \leq \varepsilon$

(ie)

$$\begin{aligned}\left|\int_X |f_m - f_{n_i}|\right|^P &< \varepsilon^p, \forall m_i \geq n_0, \|f_n - f\|_p < \varepsilon \\ &\Rightarrow f_n - f \in L^p, f = f_n - (f_n - f) \in L^p\end{aligned}$$

donc L^p *est compet.* ■

Définition 3.10 *Si* $p = \infty : L^\infty = \{f(x), \exists M : \mu\{x : |f(x)| > M\} = 0\}$

Soit $S(E) = \sup\{|f(x)|, x \in E\}$

$\|f\|_\infty = \inf\{S(E), E \in \Sigma, \mu(E) = 0\} = \inf\{M : \mu\{x : |f(x)| > M\} = 0\}$

Propriétés :

$1 - |f| \leq \|f\|_\infty$ *pp.*

$2 - \|f\|_\infty = 0 \Rightarrow f = 0$ *pp.*

$3 - \|\lambda f\|_\infty = |\lambda| \|f\|_\infty$.

$4 - \|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Théorème 3.4 L^∞ *est un espace de Banach et* $L^\infty \subset L^p$, $\forall\ 1 < p < \infty$

Définition 3.11 *Soit* V *e v*, $(.,.); V * V \to \mathbb{R}$ *est diste produit scalaire* $\forall\ f, g, h \in V$:

$1 - (f, g) = (g, f)$.

$2 - (\lambda f, g) = \lambda(f, g), \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$3 - (f + h, g) = (f, g) + (h, g)$.

$4-\ (f, f) \geq 0, (f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

$(V, (.,.))$ *est dite espace préhelbertiéne*

$\|.\|$ *est un application continue (c a' d)*

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \|f - f_0\| \leq \delta \Rightarrow |\|f\| - \|f_0\|| < \varepsilon$ *de plus* $|\|f\| - \|f_0\|| \leq \|f\| - \|f_0\|$.

Théorème 3.5 *Pour qu'un espace* $(X, \|.\|)$ *soit préhelbertiéne ssi* $\forall f, g \in X$,

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2[\|f\|^2 + \|g\|^2] \qquad (*)$$

Si $(*)$ *a lieu alors :*

$$(f, g) = \frac{1}{4}[\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2] \ / \ \|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

$p \neq 2$, L^p *n'est pas préhelbertiéne.*

Chapitre 4

Exercices corrigés

4.1 Série 01

Exercice 01 :

Soit $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et

a- $\Sigma = \{\{2, 4, 6, 8\}, \{1, 10\} X, \Phi\}$.

b- $\Sigma = \{\{2, 4\}, X, \Phi\}$.

c-$\Sigma = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, X\}$.

d-$\Sigma = \{\{2\}, \{4, 6\}, \{4, 6, 8, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 8, 10\}, X, \Phi\}$.

Est ce que Σ est Algebre ?

La solution :

a-Tous les complémentaires existe et tous les conditions sont vérifiées donc Σ est algèbre.

b-N'est pas algèbre parce que sa complémentaire $\{6, 8, 10\} \notin \Sigma$.

c-$\Phi \notin \Sigma$, donc n'est pas algèbre.

d-N'est pas algèbre parce que lacomplémentaire de $\{2, 4, 6\} = \{8, 10\} \notin \Sigma$.

Exercice 02 :

Soit $X = \{a, b, c, d\}$, Trouver l'Algebre engendré par C si :

1/ $C = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$.

2/ $C = \{\{b\}\}$.

3/ $C = \{\{a\}, \{b, c\}\}$.

La solution :

$1/\Sigma_c = \{X, \Phi, \{a, b\}, \{c, d\}\}$.

$2/\Sigma_c = \{X, \Phi, \{b\}, \{a, c, d\}\}$.

$3/\Sigma_c = \{X, \Phi, \{a\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, d\}, \{a, b, c\} \{d\}\}$.

Exercice 03 :

Soit $X = \{1, 3, 7, 5\}, C = \{\{1\}, \{3, 5\}\}$

1- Trouver la topologie engendré par C.

La solution :

$1/\tau_c = \{X, \Phi, \{1\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

Exercice 04 :

Soit $X = N^*$ et $\Sigma = \{\Phi, N^*, \{2, 4, 6, 8......\}, \{1, 3, 5....\}\}$.

1- Est ce que Σ est Algebre tribu ?

La solution

Oui est un tribu parce que tous algèbres finie est tribu.

4.2 Série 02 :

Exercice 01 :

Soit $X = \overline{\mathbb{R}}$ et $\Sigma = \{\Phi, X\}$

$f : X \to X,\ f(x) = X$, est elle mesurables ?

Si $(X, P(x))$ est mesurable $f : X \to Y$ est elle mesurables ?

La solution :

1-

$$\begin{aligned} f\ mes &\iff \forall v \in \tau : f^{-1}(v) \in \Sigma \\ &\iff \forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}(]a, +\infty[) \in \Sigma \\ &\iff \{x \in X, f(x) > a\} \in \Sigma. \end{aligned}$$

alors

$$f^{-1}(v) \in \Sigma \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\Phi) = \Phi \in \Sigma \\ f^{-1}(X) = X \in \Sigma \end{cases}$$

donc f est mésure

2- si $X = Y : X \rightarrow Y = \overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} f \ mes &\iff \forall v \in \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}(v) \in \Sigma = \{\Phi, X\} \\ &\iff \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, f^{-1}(]-\infty, a[) =]-\infty, a[\notin \Sigma \\ &\iff \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}, f^{-1}(]a, b[) =]a, b[\notin \Sigma \\ &\iff \forall b \in \overline{\mathbb{R}}, f^{-1}(]b, +\infty[) =]-\infty, a[\notin \Sigma \end{aligned}$$

donc f n$'$est pas mésure

Exercice 02 :

Soit (X, Σ) est mesurable $f : X \rightarrow Y$, montrer qu'il existe une topologie τ_y sur y telle que $f : X \rightarrow Y$ est mesurables a cette Topologie

La solution :

$$f \ mes \iff \forall v \in \tau_y : f^{-1}(v) \in \Sigma$$

on a

$$f^{-1}(v) \in \Sigma \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\Phi) = \Phi \in \Sigma \\ f^{-1}(Y) = X \in \Sigma \end{cases}$$

et

$$\tau_y \neq \{\Phi, Y\}$$

alors n'est pas mesure

Exercice 03 :

Soit $\Sigma = \{A \subset E \text{ finie ou } CA \text{ finie}\}$.

Démontrer que Σ un Algebre et tribu ssi E est finie

4.3 Série 03 :

Exercice 01 :

Soit $\Sigma = P(N)$ et μ, $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f(x) = X$, deux opperateurs définie comme suites : $\forall A \subset \mathbb{N}$, $\mu(A) = \sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n|}$

$$f(A) = \begin{cases} \sum\limits_{n \in A} \frac{1}{n|}, \text{ si card } A < \infty \\ 1 \qquad\qquad \text{si card} \quad A = \infty \end{cases}$$

est ce que (f, μ) mesure positive ?

La solution :

$$\mu \; mesure \; positive \Leftrightarrow E_i \in \Sigma : \mu \left(\underset{i \geq 0}{\cup} E_i \right) = \sum_{i \geq 0} \mu \left(E_i \right) \in \Sigma$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} \mu \left(E_i \right) &= \sum_{\substack{n \in \cup E_i \\ i \geq 0}} \left(\sum_{n \in A} \frac{1}{n \mid} \right) \\ &= \sum_{\substack{n \in \cup \{k\} \\ k \geq 0}} \frac{1}{n \mid} \\ &= e \end{aligned}$$

Donc μ n'est pas *mesure positive.*

Exercice 02 :

Soit $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

1-Trouver $B(x)$?

2-Démontrer que f est mesure telle que

$$f(X) = \begin{cases} 1, \text{ si } \; x \in \{0, 1, 2\} \\ 2 \qquad\quad \text{si } \; x \in \{-1, -2\} \end{cases}$$

Exercice 03 :

Soit $E \in \Sigma$, $i = 1, 2, ...$, si f est mesur sur E alors

a- $E = \cup E_i$

b-$E = \cap E_i$

c- $E = CE_1$

Les Séries :

4.4 Série 04

Exercice 01 :

Soit $X = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ et

a- $\Sigma = \{\{2, 4, 6, 8\}, \{1, 10\} X, \Phi\}$.

b- $\Sigma = \{\{2, 4\}, X, \Phi\}$.

c-$\Sigma = \{\{2\}, \{4\}, \{6\}, X\}$.

d-$\Sigma = \{\{2\}, \{4, 6\}, \{4, 6, 8, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 8, 10\}, X, \Phi\}$.

Est ce que Σ est Algebre ?

La solution :

a-Tous les complémentaires existe et tous les conditions sont vérifiées donc Σ est algèbre.

b-N'est pas algèbre parce que sa complémentaire $\{6, 8, 10\} \notin \Sigma$.

c-$\Phi \notin \Sigma$, donc n'est pas algèbre.

d-N'est pas algèbre parce que lacomplémentaire de $\{2, 4, 6\} = \{8, 10\} \notin \Sigma$.

Exercice 02 :

Soit $X = \{a, b, c, d\}$, Trouver l'Algebre engendré par C si :

1/ $C = \{\{a, b\}, \{c, d\}\}$.

2/ $C = \{\{b\}\}$.

3/ $C = \{\{a\}, \{b, c\}\}$.

La solution :

1/$\Sigma_c = \{X, \Phi, \{a, b\}, \{c, d\}\}$.

2/$\Sigma_c = \{X, \Phi, \{b\}, \{a, c, d\}\}$.

3/$\Sigma_c = \{X, \Phi, \{a\}, \{b, c\}, \{b, c, d\}, \{a, d\}, \{a, b, c\} \{d\}\}$.

Exercice 03 :

Soit $X = \{1, 3, 7, 5\}, C = \{\{1\}, \{3, 5\}\}$

1- Trouver la topologie engendré par C.

La solution :

$1/\tau_c = \{X, \Phi, \{1\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}\}$

Exercice 04 :

Soit $X = N^*$ et $\Sigma = \{\Phi, N^*, \{2, 4, 6, 8......\}, \{1, 3, 5....\}\}$.

1- Est ce que Σ est Algebre tribu ?

La solution

Oui est un tribu parce que tous algèbres finie est tribu.

4.5 Série 05 :

Exercice 01 :

Soit $X = \overline{\mathbb{R}}$ et $\Sigma = \{\Phi, X\}$

$f : X \to X,\ f(x) = X$, est elle mesurables ?

Si $(X, P(x))$ est mesurable $f : X \to Y$ est elle mesurables ?

La solution :

1-

$$\begin{aligned} f\ mes &\iff \forall v \in \tau : f^{-1}(v) \in \Sigma \\ &\iff \forall a \in \mathbb{R} : f^{-1}(]a, +\infty[) \in \Sigma \\ &\iff \{x \in X, f(x) > a\} \in \Sigma. \end{aligned}$$

alors

$$f^{-1}(v) \in \Sigma \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\Phi) = \Phi \in \Sigma \\ f^{-1}(X) = X \in \Sigma \end{cases}$$

donc f est mésure

2- si $X = Y : X \to Y = \overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} f\ mes &\iff \forall v \in \overline{\mathbb{R}} : f^{-1}(v) \in \Sigma = \{\Phi, X\} \\ &\iff \forall a \in \overline{\mathbb{R}}, f^{-1}(]-\infty, a[) =]-\infty, a[\notin \Sigma \\ &\iff \forall a, b \in \overline{\mathbb{R}}, f^{-1}(]a, b[) =]a, b[\notin \Sigma \\ &\iff \forall b \in \overline{\mathbb{R}}, f^{-1}(]b, +\infty[) =]-\infty, a[\notin \Sigma \end{aligned}$$

donc f n′est pas mésure

Exercice 02 :

Soit (X, Σ) est mesurable $f : X \to Y$, montrer qu'il existe une topologie τ_y sur y telle que $f : X \to Y$ est mesurables a cette Topologie

La solution :

$$f\ mes \iff \forall v \in \tau_y : f^{-1}(v) \in \Sigma$$

on a

$$f^{-1}(v) \in \Sigma \Rightarrow \begin{cases} f^{-1}(\Phi) = \Phi \in \Sigma \\ f^{-1}(Y) = X \in \Sigma \end{cases}$$

et

$$\tau_y \neq \{\Phi, Y\}$$

alors n'est pas mesure

Exercice 03 :

Soit $\Sigma = \{A \subset E \text{ finie ou } CA \text{ finie}\}$.

Démontrer que Σ un Algebre et tribu ssi E est finie

4.6 Série 06 :

Exercice 01 :

Soit $\Sigma = P(N)$ et μ, $f : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f(x) = X$, deux opperateurs définie comme suites : $\forall A \subset \mathbb{N}$, $\mu(A) = \sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n|}$

$$f(A) = \begin{cases} \sum\limits_{n\in A} \frac{1}{n|}, \text{ si card } A < \infty \\ 1 \qquad\quad \text{si card} \quad A = \infty \end{cases}$$

est ce que (f, μ) mesure positive ?

La solution :

$$\mu \; mesure \; positive \Leftrightarrow E_i \in \Sigma : \mu\left(\underset{i\geq 0}{\cup} E_i\right) = \sum_{i\geq 0} \mu\left(E_i\right) \in \Sigma$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{i\geq 0} \mu\left(E_i\right) &= \sum_{\substack{n\in\cup E_i \\ i\geq 0}} \left(\sum_{n\in A} \frac{1}{n\;|}\right) \\ &= \sum_{\substack{n\in\cup\{k\} \\ k\geq 0}} \frac{1}{n\;|} \\ &= e \end{aligned}$$

Donc μ n'est pas *mesure positive*.

Exercice 02 :

Soit $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

1-Trouver $B(x)$?

2-Démontrer que f est mesure telle que

$$f(X) = \begin{cases} 1, \text{ si } \; x \in \{0, 1, 2\} \\ 2 \qquad\quad \text{si } \; x \in \{-1, -2\} \end{cases}$$

Exercice 03 :

Soit $E \in \Sigma$, $i = 1, 2, ...,$ si f est mesur sur E alors

a- $E = \cup E_i$

b-$E = \cap E_i$

c- $E = CE_1$

4.7 Différents exercices résolus et non résolus

Cette série d'exercices est proposée par le professeur Barbara Tumpach avec quelques modifications.

Propriétés de l'intégrale de Riemann

Exercice 1

En utilisant la définition d'une fonction intégrable au sens de Riemann, montrer les propriétés suivantes :

1. Si f et g sont Riemann-intégrables sur $[a, b]$, alors $f + g$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

2. Si f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

3. Si f et g sont deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,\ b]$ telles que, pour tout $t \in [a, b], f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$.

4. Une limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

5.Quelles sont les fonctions Riemann-intégrables ?

Exercice 2

Montrer qu'une fonction *monotone* sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Exercice 3

Montrer qu'une fonction *continue* sur $[a, b]$ est Riemann-intégrable sur $[a,\ b]$.

Exercice 4

1. Montrer que la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

n'est pas Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

2. Montrer que la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \text{ou} x = 0 \end{cases}$$

est Riemann-intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 5

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est *négligeable* si, pour tout nombre réel $\epsilon > 0$, il existe une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'inter- valles $I_n =]\ a_n, b_n\ [$telle que :

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ et } \sum_{n\in\mathbb{N}} (b_n - a_n) \leq \epsilon.$$

1. Montrer qu'une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est un ensemble négligeable.

2. Montrer qu'une fonction bornée $f : [a,\ b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,\ b]$ si et seule- ment si l'ensemble des points où f n'est pas continue est *négligeable*.

4 Peut-on intervertir limite et intégrale ?

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :]\ 0, 1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ converge simplement vers une fonction $f$sur$]\ 0, 1]$ mais que

$$\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx \neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx.$$

Vérifier que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f n'est pas *uniforme* sur$]\ 0, 1]$.

Exercice 7

Montrer que, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann, on a :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \ .$$

En déduire les limites suivantes :

$$a) \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n} \quad b) \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} \quad c) \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log(\frac{n}{n+k})^{\frac{1}{n}}$$

Exercice 8

1. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx.$$

2. Calculer (en utilisant 1.) les intégrales suivantes :

$$a) \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx \; b) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x) dx.$$

Rappel : $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha)-\tan(\beta)}{1+\tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Correction de l'exercice 1

1.

Soit $\epsilon > 0$ donné. Puisque f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma_1 = \{a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$ telle que $\overline{S}_f^{\sigma_1} \leq \underline{S}_f^{\sigma_1} + \frac{\epsilon}{2}$. Puisque g est Riemann-intégrable sur $[a,b]$, il existe une subdivision $\sigma_2 = \{b_0 = a < b_1 < \cdots < b_p = b\}$ de $[a,b]$ telle que $\mathrm{S}_g^{\sigma_2} \leq \underline{S}_g^{\sigma_2} + \frac{\epsilon}{2}$. On note $\sigma_1 \cup \sigma_2 = \{c_0 = a < c_1 < \cdots < c_{q-1} < c_q = b\}$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en ordonnant l'ensemble $\{a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_n\}$ par ordre croissant, puis en identifiant les points qui apparaissent plusieurs fois (on obtient une subdivision de $[a,b]$ en q intervalles avec $maxn, p\} \leq q \leq n+p)$. Puisque $\sigma_1 \cup \sigma_2$ est une subdivision *plus fine* que σ_1, on a :

$$\overline{S}_f^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq \overline{S}_f^{\sigma_1} et \underline{S}_f^{\sigma_1} \leq \underline{S}_f^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \tag{1}$$

De même,

$$\mathrm{S}_g^{\sigma_1 \cup \sigma_2} \leq \mathrm{S}_g^{\sigma_2} et \underline{S}_g^{\sigma_2} \leq \underline{S}_g^{\sigma_1 \cup \sigma_2}. \tag{2}$$

De plus, sur un intervalle] c_{k-1}, c_k [donné, on a :

$$\sup\{f(x) + g(x),\ x \in]c_{k-1}, c_k[\}$$

De même :

$$\inf\{f(x)+g(x),\ x\in]c_{k-1},\ c_k[\}$$

$$\leq \sup\{f(x), x\in]c_{k-1}, c_k[\} + \sup\{g(x), x\in]c_{k-1}, c_k$$

$$\geq \inf\{f(x), x\in]c_{k-1}, c_k[\} + \inf\{g(x), x\in]c_{k-1}, c_k$$

On en déduit que :

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leq \overline{s}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2} + \mathrm{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2}, \tag{3}$$

et

$$\underline{S}_f^{\sigma_1\cup\sigma_2} + \underline{S}_g^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leq \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}. \tag{4}$$

En utilisant les inégalités (1), (2), (3) et (4), il vient alors :

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leq \overline{s}_f^{\sigma_1} + \mathrm{S}_g^{\sigma_2} \leq \underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} + \epsilon \leq \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} + \epsilon.$$

D'après le théorème rappelé en introduction, on en déduit que $f+g$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$. De plus, de l'inégalité

$$\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2} \leq \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2},$$

on déduit que

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}(\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2}) \leq \sup_{\sigma_1,\sigma_2} \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2}.$$

Or

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2}(\underline{S}_f^{\sigma_1} + \underline{S}_g^{\sigma_2}) = \sup_{\sigma_1} \underline{S}_f^{\sigma_1} + \sup_{\sigma_2} \underline{S}_g^{\sigma_2} = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\sup_{\sigma_1,\sigma_2} \underline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} = \sup_{\sigma} \underline{S}_{f+g}^{\sigma} = \int_a^b (f(x)+g(x))dx.$$

Ainsi

$$\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b (f(x)+g(x))dx.$$

De même, l'inégalité

$$\overline{S}_{f+g}^{\sigma_1\cup\sigma_2} \leq \overline{s}_f^{\sigma_1} + \mathrm{S}_g^{\sigma_2}$$

implique $\int_a^b (f(x)+g(x))dx \leq \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$. En conclusion, $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx+$

$$\int_a^b g(x)dx.$$

2. $\cdot$ Pour $\lambda = 0$ il n'y a rien a démontrer.

. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda > 0$, alors pour tout subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\inf\{\lambda f(x),\ x \in]a_{k-1},a_k[\} = \lambda \inf\{f(x),\ x \in]a_{k-1},a_k[\}$$

$$\sup\{\lambda f(x),\ x \in]a_{k-1},a_k[\} = \lambda \sup\{f(x),\ x \in]a_{k-1},a_k[\}.$$

Par conséquent, $\underline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \underline{S}_f^{\sigma}$ et $\overline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \overline{S}_f^{\sigma}$. On en déduit que

$$\sup_{\sigma} \underline{S}_{\lambda f}^{\sigma} = \lambda \sup_{\sigma} \underline{S}_f^{\sigma} = \lambda \int_a^b f(x)dx = \lambda \inf_{\sigma} \overline{S}_f^{\sigma} = \inf_{\sigma} \overline{S}_{\lambda f}^{\sigma}.$$

En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

. Si f est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et $\lambda < 0$, alors pour tout subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ de $[a,b]$, on a :

$$\inf\{\lambda f(x),\ x \in]a_{k-1},a_k[\} = \lambda \sup\{f(x),\ x \in]a_{k-1},a_k[\}$$

$$\sup\{\lambda f(x),\ x \in]a_{k-1},a_k[\} = \lambda \inf\{f(x),\ x \in]a_{k-1},a_k[\}.$$

Par conséquent, $\underline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \overline{S}^{\sigma}_{f}$ et $\overline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \underline{S}^{\sigma}_{f}$. On en déduit que

$$\sup_{\sigma} \underline{S}^{\sigma}_{\lambda f} = \lambda \inf_{\sigma} \overline{S}^{\sigma}_{f} = \lambda \int_a^b f(x)dx = \lambda \sup_{\sigma} \underline{S}^{\sigma}_{f} = \inf_{\sigma} \overline{S}^{\sigma}_{\lambda f}.$$

En conclusion, λf est Riemann-intégrable et $\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$.

3. Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ telles que, pour tout $t \in [a,b], f(t) \leq g(t)$. Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ une subdivision de $[a,b]$. Alors

$$\inf\{f(x),\ x \in]a_{k-1}, a_k[\} \leq \inf\{g(x),\ x \in]a_{k-1}, a_k[\}.$$

Il en découle que

$$\sup_{\sigma} \underline{S}^{\sigma}_{f} \leq \sup_{\sigma} \underline{S}^{\sigma}_{f},$$

c'est-à-dire $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

4. Soit $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions Riemann-intégrables, qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Soit $\epsilon > 0$ donné. Il existe $N > 0$ tel que $\forall i > N, \sup_{[a,b]} |f_i(t) - f(t)| < \epsilon$. En particulier, $f_i(t) - \epsilon < f(t) < f_i(t) + \epsilon$. Pour un tel i, on en déduit que pour toute subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$, on a

$\sup f \leq \sup f_i + \epsilon$ et $\inf f \geq \inf f_i - \epsilon$

$$]a_{k-1}, a_k[\ ]a_{k-1}, a_k[$$

$$]a_{k-1}, a_k[\ ]a_{k-1}, a_k[$$

En particulier :

$$\sup f - \ \inf f \leq \ \sup f_i - \ \inf f_i + 2\epsilon.$$

$$]a_{k-1}, a_k[\ ]a_{k-1}, a_k[\ ]a_{k-1}, a_k[\ ]a_{k-1}, a_k[$$

Il en découle que :

$$\overline{S}^{\sigma}_{f} - \underline{S}^{\sigma}_{f} \leq \overline{S}^{\sigma}_{i} f - \underline{S}^{\sigma}_{i} f + 2\epsilon(b-a) \ .$$

Comme f_i est Riemann-intégrable, d'après le théorème de l'introduction, il existe une subdivision

σ de $[a,\ b]$ telle que $\overline{S}^{\sigma}_{f}i - \underline{S}^{\sigma}_{fi} \leq \epsilon$. On en déduit que

$$\overline{S}^{\sigma}_{f} - \underline{S}^{\sigma}_{f} \leq \epsilon(1 + 2(b-a)) \ ,$$

ce qui implique que f est Riemann-intégrable.

Correction de l'exercice 2

Soit f une fonction croissante $[a, b]$. Pour montrer que f est Riemann-intégrable, il suffit de trouver, pour tout $\epsilon > 0$ donné, une subdivision de $[a, b]$ telle que $\overline{S}^{\sigma}_{f} - \underline{S}^{\sigma}_{f} < \epsilon$. Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ la subdivision régulière de $[a, b]$, de pas $(\frac{b-a}{n})$. On a

$\inf f = f(a_{k-1})$ et $\sup f = f(a_k)$.

$$]a_{k-1}, a_k[$$

$$]a_{k-1}, a_k[$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\overline{S}^{\sigma}_{f} - \underline{S}^{\sigma}_{f} &= \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})(f(a_k) - f(a_{k-1})) \\
&= (\frac{b-a}{n})\sum_{k=1}^{n}(f(a_k) - f(a_{k-1})) \\
&= (\frac{b-a}{n})(f(b) - f(a)) \ .
\end{aligned}$$

Pour n assez grand, la subdivision régulière de $[a, b]$ satisfait $\overline{S}^{\sigma}_{f} - \underline{S}^{\sigma}_{f} < \epsilon$. D'autre part, si g est décroissante, $f = -g$ est croissante, donc g est Riemann-intégrable par l'exercice précédent (question 2.) avec $\lambda = -1$.

Correction de l'exercice 3

Une fonction f continue sur $[a, b]$ est uniformément continue sur $[a, b]$. En particulier, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n > 0$ tel que

$$|x - \mathrm{y}| < (\frac{b-a}{n}) \Rightarrow |f(x) - f(\mathrm{y})| < \epsilon.$$

Soit $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_n = b\}$ la subdivision régulière de $[a, b]$, de pas $(\frac{b-a}{n})$. On a :

$$\sup f - \inf f \leq 2\epsilon.$$

$$]a_{k-1}, a_k[\ ]a_{k-1}, a_k[$$

Il vient alors :

$$\overline{S}_f^\sigma - \underline{S}_f^\sigma \leq (\frac{b-a}{n}) \sum_{k=1}^{n} 2\epsilon = (b-a)2\epsilon,$$

ce qui permet de conclure grâce au théorème de l'introduction que f est Riemann-intégrable sur $[a, b]$.

Correction de l'exercice 4 A

1. Considérons la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \ . \end{cases}$$

Pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on a :

$\overline{S}_f^\sigma = 1$ et $\underline{S}_f^\sigma = 0$.

On en déduit que $1 = \sup_\sigma \overline{S}_f^\sigma \neq \inf_\sigma \underline{S}_f^\sigma = 0$, ce qui implique que f n'est pas Riemann-intégrable sur

$$[0, 1].$$

2. Considérons la fonction $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ avec } p \text{ et } q \text{ premiers entre eux} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} ou x = 0 \end{cases}$$

Pour toute subdivision σ de $[a, b]$, on a :

$$\underline{S}_g^\sigma = 0.$$

Pour tout $\epsilon > 0$ donné, la fonction g prend des valeurs supérieures à $\frac{\epsilon}{b-a}$ en un nombre fini de points seulement (les points $\frac{k}{q}$, avec $\frac{1}{q} > \frac{\epsilon}{b-a}$ ce qui équivaut à $q < \frac{b-a}{\epsilon}$) . Notons $x_i, i = 1, \ldots, p$ ces points ordonnés par ordre (strictement) croissant.

Sur $[0,1]\backslash\{x_1, \ldots, x_p\}$ la fonction g prend des valeurs $\leq \epsilon$ et ≥ 0. Ainsi avec la subdivision $\sigma = \{x_1, \ldots, x_p\}$ nous obtenons :

$$0 \leq \mathrm{S}_g^\sigma \leq \frac{\epsilon}{b-a}(b-a) = \epsilon$$

Comme On en conclut que g est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

Correction de l'exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n :] \, 0,1] \to \mathbb{R}$ par : $f_n(x) = ne^{-nx}$. Pour tout $x \in] \, 0,1]$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} ne^{-nx} = 0$. On en déduit que la suite de fonctions f_n converge ponctuellement (ou *simplement*) vers la fonction identiquement nulle $f \equiv 0$. On a $\int_0^1 f(x)dx = 0$ mais

$$\int_0^1 f_n(x)dx = 1 - e^{-n},$$

et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{R}}$ ne converge pas uniformément vers f sur$]0,1]$, car pour tout $\epsilon > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sup_{]0,-\frac{1}{n}\log(\frac{\epsilon}{n})[} |f_n(x) - f(x)| > \epsilon.$$

Correction de l'exercice 7

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann.

Notons $x_k = a + k\frac{b-a}{n}, k = 1, \ldots, n$ les points où

Soit $a_0 = a, a_{n+1} = b$ et $a_k = a + \frac{2k+1}{2n}$ pour $k = 1, \ldots, n$.

Considérons la subdivision $\sigma = \{a_0 = a < \cdots < a_k < \cdots < a_n = b\}$ de $[a, b]$. Cette subdivision est presque régulière, seul le premier intervalle et le dernier ont des longueurs différentes. Pour $k = 1, \ldots, n-1, x_k$ est le milieu de$] \, a_k, a_{k+1} \, [$.

Notons $m_k = \inf\{f(x), x \in] \, a_{k-1}, a_k[\}$ et $M_k = \sup\{f(x), x \in] \, a_{k-1}, a_k[$.

Donc pour $k = 1, \ldots, n-1$ on a $m_k \leq f(x_k) \leq M_k$. Mais il faut aussi tenir compte de

$f(x_n) = f(b)$ et des premiers et derniers intervalles. D'où pour la minoration :

$$\begin{aligned} \underline{S}_f^\sigma &= (m_0 + m_n)\frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} m_k \\ &\leq (m_0 + m_n)\frac{b-a}{2n} + \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) \ . \end{aligned}$$

Cela donne

$$\underline{S}_f^\sigma - (m_0 + m_n + 2f(b))\frac{b-a}{2n} \leq \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \ .$$

Quand n tend vers $+\infty$ on trouve que $\underline{S}_f^\sigma \to \int_a^b f$ et $(m_0 + m_n + 2f(b))\frac{b-a}{2n} \to 0$ cela donne l'inégalité :

$$\int_a^b f \leq \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \ .$$

La somme $\overline{S}_f^\sigma$ conduit de manière similaire à l'inégalité inverse, d'où :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} (\frac{b-a}{n})\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) \ .$$

On a :

$$a) \ \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \tan\frac{k}{n} = -\log(\cos 1) \ \ b) \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}$$

$$c) \ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \log(\frac{n}{n+k})^{\frac{1}{n}} = -2\ln 2 + 1.$$

Correction de l'exercice 8 A

1.
$$\int_a^b f(a+b-x)dx = -\int_a^b f(a+b-x)(a+b-x)'dx$$

$$= -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

où $\varphi : [a, b] \to [a, b], \varphi(x) = a + b - x$ est une fonction de classe C^1.

2. *a*)

$$I := \int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx = \int_0^\pi \frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$= \pi\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx - I$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{(\cos x)'}{1+\cos^2 x}dx = -\frac{\pi}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\pi)} \frac{1}{1+t^2}dt$$

$$= -\frac{\pi}{2}\int_1^{-1} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi^2}{4}.$$

où $\varphi : [0,\ \pi] \to [-1,1], \varphi(x) = \cos x$ est une fonction de classe C^1.

b)

$$J\ := \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan x)dx = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan(\frac{\pi}{4}-x))dx$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x})dx = \int_0^{\pi/4} \log(\frac{2}{1+\tan x})dx = \frac{\pi}{4}\log 2 - J$$

d'où la valeur de l'intégrale est $J = \frac{\pi}{8}$ log2.

Intégrales généralisées

Exercice 1

1. *Le but de cette question est de montrer que* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ *n'est pas absolument convergente.* Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}dt.$$

Montrer que pour $n \geq 0$, $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}dt$ est divergente.

2. *Deuxième formule de la moyenne.* Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$, admettant des primitives notées F et G respectivement. Supposons que F est positive et décroissante. Montrer qu'il existe y $\in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(a)\int_a^y g(x)dx.$$

3. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente.

4. *Le but de cette question est de calculer la valeur de cette intégrale.* Pour tout nombre réel $\lambda \geq 0$, on pose :

$$\begin{cases} f(t,\lambda) &= e^{-\lambda t \frac{\sin t}{t}} \quad \text{pour } t > 0 \\ f(0,\lambda) &= 1. \end{cases}$$

(a) Pour $0 < x \leq$ y, démontrer que l'on a :

$$|\int_x^y f(t,\lambda)dt| \leq \frac{2}{x} e^{-\lambda x}$$

(b) En déduire que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)dt$ sont convergentes, uniformément pour $\lambda \geq 0$. On pose, pour $\lambda \geq 0$,

$$F(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Démontrer que la fonction F est continue pour $\lambda \geq 0$.

(c) Démontrer que la fonction F est dérivable pour $\lambda > 0$ et que sa dérivée est égale à l'intégrale généralisée convergente

$F'(\lambda) = -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}$ sint dt.

(d) Calculer cette dernière intégrale généralisée, par exemple en intégrant par parties sur $[0, x]$ et en calculant la limite quand $x \to +\infty$.

(e) En déduire la valeur de $F(\lambda)$ pour $\lambda \geq 0$ à une constante additive près. Démontrer que $F(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to +\infty$. En déduire la valeur de la constante additive, puis la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

Exercice 2

Montrer que $\mathcal{A}$ est une σ-algèbre si et seulement si $\mathcal{A}$ est une algèbre et une classe monotone.

Exercice 3

Soit (, Σ) un espace mesurable (i.e. un ensemble Ω muni d'une tribu $\Sigma \subset \mathcal{P}$ Soit μ une mesure finie sur (, Σ) . Montrer les propriétés suivantes : (A, B, A_i sont des élements de Σ)

1. Si $A_1, A_2, \ldots, A_k$ sont deux à deux disjoints, alors

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{k} A_{\mathrm{i}}) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_{\mathrm{i}}) \ .$$

2. Si $B \subset A$ alors $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(B)$.

3. *Monotonie* : Si $B \subset A$ alors $\mu(B) \leq \mu(A)$.

4. *Principe inclusion-exclusion* : $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

5. $\mu(\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_{\mathrm{i}}) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \mu(A_{\mathrm{i}})$. (*Rappelons que l'on a égalité si l'union est disjointe.*)

Correction de l'exercice 1

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

Pour $n \geq 0$, on a $\frac{1}{(n+1)\pi} \leq \frac{1}{t}$, donc

$$\frac{1}{(n+1)\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t| dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt.$$

Or $|\sin t| = (-1)^n$ sint sur $[n\pi,\ (n+1)\pi]$. Ainsi

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |sintdt = (-1)^n [-\cos t]_{n\pi}^{(n+1)\pi} = 2.$$

Il en découle que $\frac{2}{(n+1)\pi} \leq u_n$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$$

est divergente.

2. *Deuxième formule de la moyenne.* D'après l'énoncé, F est une primitive de f et est positive et décrois- sante. Puisque la fonction g admet des primitives, la fonction $G(\mathrm{y}) := \int_a^y g(x)dx$ est la primitive de g s'annulant en a. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour montrer

qu'il existe y $\in [a,b]$ tel que :

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(a)\int_a^y g(x)dx,$$

il suffit de montrer que

$$F(a)_{y\in[a,b]} \min G(\mathrm{y}) \leq \int_a^b F(x)g(x)dx \leq F(a) \max_{y\in[a,b]} G(\mathrm{y}) \ .$$

Par intégration par parties, on obtient :

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(b)G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

avec $F(a)G(a) = 0$. Comme f est négative sur $[a,b]$, on a :

$$\begin{aligned} y &\in [a,b] \min G(\mathrm{y}) \int_a^b -f(x)dx \\ &\leq -\int_a^b f(x)G(x)dx \leq \max_{y\in[a,b]} G(\mathrm{y}) \int_a^b -f(x)dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \ & y \in [a,b] \min G(\mathrm{y})(F(a)-F(b)) \\ \leq \ & -\int_a^b f(x)G(x)dx \leq \max_{y\in[a,b]} G(\mathrm{y})(F(a)-F(b)) \ . \end{aligned}$$

On en déduit l'encadrement suivant :

$$F(b)(G(b) - \mathcal{Y} \in [a,b]$$

$$\leq F(b)(G(b) - \max_{y\in[a,b]} G(\mathrm{y}))) + F(a) \max_{y\in[a,b]} G(\mathrm{y}) \ .$$

Les inégalités $G(b) - \min_{y\in[a,b]} G(\mathrm{y}) \geq 0$ et $G(b) - \max_{y\in[a,b]} G(\mathrm{y}) \leq 0$ et la positivité de F permettent de conclure.

3. D'après le critère de Cauchy (voir la proposition des rappels), pour montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est conver- gente, il suffit de montrer que $\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}dt$ tend vers 0 lorsque x et x' tendent vers $+\infty$.

D'après la formule de la moyenne appliquée à $F(t)=\frac{1}{t}$ et $g(t)=\sin t$, il vient :

$$\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{1}{x}\int_x^y \sin t dt$$

pour un certain y $\in [x,x']$. On en déduit que

$|\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}dt| = \frac{1}{x}|\cos y$-$\cos x| \leq \frac{2}{x}$.

Ainsi $\lim_{x,x'\to+\infty}\int_x^{x'} \frac{\sin t}{t}dt = 0$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ est convergente.

4. (a) Posons pour $t>0, U(t)=\frac{e^{-\lambda t}}{t}$. On a $u(t)=U'(t)=-\frac{e^{-\lambda t}}{t^2}(\lambda t+1)<0$. Ainsi U est positive et décroissante sur] $\mathrm{O},+\infty$[. D'après la deuxième formule de la moyenne, pour $0<x\leq$ y, il vient :

$|\int_x^y f(t,\lambda)dt| = |\int_x^y$ U(t) sint $dt| = |\frac{e^{-\lambda x}}{x}\int_x^{y'}$ sint $dt|$,

pour un certain y$'\in[x,$y$]$. On en déduit que

$$|\int_x^y f(t,\lambda)dt| \leq \frac{2e^{-\lambda x}}{x}.$$

(b) On remarque que, pour tout $x>0$, la fonction $t-\to f(t,\ \lambda)$ est continue sur $[0,x]$, donc Riemann- intégrable sur cet intervalle. D'après le critère de Cauchy et la question 4. a), les intégrales généra- lisées $\int_0^{+\infty} f(t,\lambda)dt$ sont convergentes. Soit $F(\lambda)=\int_0^{+\infty} f(t,\ \lambda)dt$. Pour montrer que les intégrales généralisées $\int_0^{+\infty} f(t,\ \lambda)dt$ convergent uniformément en $\lambda\geq 0$, il faut montrer que pour tout $\epsilon>0$, il existe $x_0>0$ tel que pour tout $x>x_0$ et pour tout $\lambda\geq 0$,

$$|F(\lambda)-\int_0^x f(t,\lambda)dt| \leq \epsilon.$$

Or, d'après la question 4. a),

$$|F(\lambda)-\int_0^x f(t,\lambda)dt| \leq \frac{2e^{-\lambda x}}{x} \leq \frac{2e^{-\lambda x_0}}{x_0} \leq \frac{2}{x_0}.$$

Ainsi pour $x_0>\frac{2}{\epsilon}$, on a l'inégalité désirée, et ce indépendamment de la valeur de λ. Posons $F_n(\lambda)=\int_0^n f(t,\ \lambda)dt$. D'après ce qui précède,

$$\sup\ |F(\lambda)-F_n(\lambda)| \leq^2$$

$$n'$$

$$\lambda \in [0, +\infty[$$

i.e. F_n converge uniformément vers F sur $[\ 0, +\infty[$. Comme les fonction F_n sont continues, il en découle que F est continue. On peut aussi revenir à la définition de continuité : pour montrer que la fonction $\lambda - \to F(\lambda)$ est continue en un point $\lambda_0 \in [0, +\infty[$, il faut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un voisinage de λ_0 tel que $|F(\lambda) - F(\lambda_0)| < \epsilon$ pour tout λ dans ce voisinage. Soit $\epsilon > 0$ fixé, et posons $x_\epsilon = \frac{6}{\epsilon}$. On a :

$$|F(\lambda) - F(\lambda_0)| = |\int_0^{x_\epsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)dt + \int_{x_\epsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)dt - \int_{x_\epsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)dt|$$

$$\leq |\int_0^{x_\epsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)dt| + |\int_{x_\epsilon}^{+\infty} f(t,\lambda)dt| + |\int_{x_\epsilon}^{+\infty} f(t,\lambda_0)dt|$$

$$\leq \ |\int_0^{x_\epsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)dt| + \frac{2}{3}\epsilon.$$

Pour conclure, il suffit de trouver un voisinage de λ_0 tel que $|\int_0^{x_\epsilon} (f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)dt| < \frac{\epsilon}{3}$ pour tout λ dans ce voisinage. L'existence d'un tel voisinage est garantie par la continuité de la fonction $\lambda - \to \int_0^{x_\epsilon} f(t,\lambda)dt$ donnée par le théorème de continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels). On peut également déterminer l'existence de ce voisinage à la main de la facon suivante :

où l'on a utiliser l'inégalité $|\sin t| \leq |t|$. On a :

$$\int_0^{x_\epsilon} |(f(t,\lambda) - f(t,\lambda_0)|dt$$
$$\leq \ \sup_{t\in[0,x_\epsilon]} |e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}| \int_0^{x_\epsilon} |\frac{\sin t}{t}|dt, x_\epsilon \sup_{t\in[0,x_\epsilon]} |e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}|,$$

$$|e^{-\lambda t} - e^{-\lambda_0 t}| \ = \ |e^{-\frac{(\lambda+\lambda_0)t}{2}}(e^{-\frac{(\lambda_0-\lambda)t}{2}} - e\frac{(\lambda_0 - \lambda)t}{2})|$$
$$\leq \ 2\sinh(\frac{|\lambda - \lambda_0|t}{2}) \leq 2\sinh(\frac{|\lambda - \lambda_0|x_\epsilon}{2})\ ,$$

car la fonction sinh est croissante. Ainsi le voisinage de λ_0 déterminé par $|\lambda - \lambda_0| < \frac{\epsilon}{3} \arg\sinh(\frac{\epsilon^2}{36})$ convient.

(c) Pour $x \in [0, +\infty[$et$\lambda \in]0, +\infty$ [, posons

$$F(x, \lambda) = \int_0^x f(t, \lambda)dt.$$

D'après le théorème de dérivabilité d'une intégrale dépendant d'un paramètre (voir les rappels), la fonction F est dérivable par rapport à la deuxième variable et sa dérivée partielle vaut :

$$\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x, \lambda) = \int_0^x \frac{\partial f}{\partial \lambda}(t, \lambda)dt.$$

Lorsque $x \to +\infty, F(x,\ \lambda)$ tend vers $F(\lambda)$. D'après la question 4. b) cette convergence est uniforme pour $\lambda \geq 0$. D'autre part, lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ tend vers $F'(\lambda) := -\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}$ sint dt. On peut montrer comme dans la question *4. b*) que cette convergence est uniforme pour $\lambda > 0$ (attention il faut exclure $\lambda = 0$ ici). Il en découle que $\lim_{h \to 0} \frac{F(\lambda+h) - F(\lambda)}{h} = F'(\lambda)$.

(d) Soit $x > 0$. On a :

$-\int_0^x e^{-\lambda t}$ sint $dt = [\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \sin t]_0^x - \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} \cos t dt$

$= \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + [\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \cos t]_0^x + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2} \sin t\ dt = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \cos x - \frac{1}{\lambda^2} + \int_0^x \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda^2}$ sint dt.

Ainsi

$-(1 + \frac{1}{\lambda^2}) \int_0^x e^{-\lambda t}$ sint $dt = \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \sin x + \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2} \cos x - \frac{1}{\lambda^2}$.

On en déduit que

$F'(\lambda) = \lim_{x \to +\infty} -\int_0^x e^{-\lambda t}$ sint $dt = \frac{-1}{1+\lambda^2}$.

5

(e) De la question précédente, il découle que

$$F(\lambda) = -\arctan \lambda + C,$$

où C est une constante réelle. Montrons que $F(\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$. Soit $\epsilon > 0$ et $x > \frac{4}{\epsilon}$. On a :

$$|F(\lambda)| = |\int_0^x e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}dt + \int_x^{+\infty} e^{-\lambda t}\frac{\sin t}{t}dt|$$

$$\leq \int_0^x e^{-\lambda t}dt + \frac{\epsilon}{2},$$

où on a utiliser que $|\sin t| \leq t$ et la question 4. b). Ainsi

$$|F(\lambda)| \leq \frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} + \frac{\epsilon}{2}.$$

Comme $\lim_{\lambda\to+\infty} \frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} = 0$, il existe $\lambda_0 > 0$ tel que pour tout $\lambda > \lambda_0$, $\frac{1-e^{-\lambda x_0}}{\lambda} < \frac{\epsilon}{2}$. On en déduit que pour $\lambda > \lambda_0, |F(\lambda)| < \epsilon$, c'est-à-dire $\lim_{\lambda\to+\infty} F(\lambda) = 0$. Alors $C = \lim_{\lambda\to+\infty} \arctan\lambda = \frac{\pi}{2}$. Ainsi

$$F(\lambda) = -\arctan\lambda + \frac{\pi}{2} et \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Fonctions mesurables, intégrale de Lebesgue

Exercice 1

Montrer les égalités ensemblistes suivantes :

$$[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]a-\frac{1}{n}, b+\frac{1}{n}[et]a,b[= \bigcup_{n=1}^{\infty} [a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]$$

Exercice 2

Soit $(\Omega, \Sigma, \ \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction (Σ_B())-mesurable. Montrer que la troncature f_A de f définie par :

f

$$_A(x) = \begin{cases} -A & \text{si } f(x) < -A \\ f(x) & \text{si } |f(x)| \leq A \\ A & \text{si } f(x) > A \end{cases}$$

est $(\Sigma\_\mathcal{B}())$-mesurable.

Exercice 3

Soit $\Omega = \mathbb{N}, \Sigma = P()$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E) = \#E = \sum_{k \in E} 1,$$

où $E \in \Sigma$. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Montrer que f est $(\Sigma\_\mathrm{B}())$-mesurable et que :

$$\int_\Omega f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ .$$

Exercice 4

Soit $(, \ \Sigma)$ un espace mesurable. On dit que $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est une *fonction simple* ou *étagée* si φ est mesurable et ne prend qu'un nombre fini de valeurs, i.e. si φ s'écrit :

$$\varphi = \sum_{j \in J} c_j 1_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i \neq j, c_{\mathrm{i}} \neq c_j$ et $E_{\mathrm{i}} \cap E_j = 0$. Soit φ une fonction simple positive. On rappelle que l'intégrale de φ par rapport à une mesure μ est définie par :

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \int_0^\infty \mu(S_\varphi(t)) dt,$$

où $S_\varphi(t) = \{x \in \Omega, \ \varphi(x) > t\}$.

1. Montrer que

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \sum_{j \in J} c_j \mu(E_j) \ .$$

2. Montrer que pour toute fonction réelle mesurable positive, $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$, il existe une suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions simples positives telle que :

(a) $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(b) $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Correction V [005936]

Exercice 5

Soit $(,\ \Sigma,\ \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ (i.e f est une fonction réelle mesurable positive). Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_\Omega 1_A \cdot f d\mu.$$

Monter que λ définit une mesure sur $(,\ \Sigma)$.

Exercice 6

Soit $p > 0$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p} 1_{\{|x|<1\}}(x)\ .$$

Calculer l'intégrale de f par rapport àla mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$ de deux manières différentes :

(i) En utilisant les coordonnées polaires et les méthodes standard de calcul d'intégrales ;

(ii) En calculant la mesure des ensembles $S_f(a) = \{x \in \Omega, f(x) > a\}$ et la définition de l'intégrale de Le- besgue.

Correction de l'exercice 1

1. Montrons que $[a, b] = \bigcap_{n=1}^{\infty}]\ a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\ [$.

–Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $[a, b] \subset]\ a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[$. Donc $[a, b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}]a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\ [$.

–Soit $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}]\ a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}\ [$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$a - \frac{1}{n} < x < b + \frac{1}{n}.$$

Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty} (a - \frac{1}{n}) \leq x \leq \lim_{n\to+\infty} (b + \frac{1}{n})\ ,$$

c'est-à-dire $x \in [a, b]$. Donc $\bigcap_{n=1}^{\infty}]\ a - \frac{1}{n}, b + \frac{1}{n}[\subset [a, b]$ et on a démontré l'égalité entre ces deux ensembles.

2. Montrons que$]\ a,b[=\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$.

–Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]\subset]\ a,b[$, donc $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]\subset]a,b\ [$.

–Soit $x\in\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$. Alors il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $x\in[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]$. Ainsi $x\in]\ a,b[$et $\bigcup_{n=1}^{\infty}[a+\frac{1}{n},b-\frac{1}{n}]\subset]a,b[$, d'où l'égalité de ces deux ensembles.

Correction de l'exercice 2

Soit $(,\ \Sigma,\ \mu)$ un espace mesuré et $f:\Omega\to\mathbb{R}$ une fonction $(\Sigma-\mathrm{B}())$-mesurable. Montrons que la troncature f_A de f définie par :

$$f_A(x)=\begin{cases}-A & \text{si } f(x)<-A\\ f(x) & \text{si } |f(x)|\leq A\\ A & \text{si } f(x)>A\end{cases}$$

est mesurable. Notons

$$E_1:=\{x\in\Omega|f(x)<-A\}=f^{-1}(]-\infty,\ -A[)\ ,$$

$$E_2\ :=\{x\in\Omega||f(x)|\leq A\}=f^{-1}([-A,A])\ ,$$

$$E_3:=\{x\in\Omega|f(x)>A\}=f^{-1}(]A,\ +\infty[)\ .$$

Comme $]-\infty,-A[,\ \ [-A,A],\ \ ]A,+\infty[$ appartiennent à la tribu borélienne et f est $(\Sigma\_\mathrm{B}())$-mesurable, les ensembles E_1,E_2, et E_3 appartiennent à Σ. Alors $f_A=f\cdot 1_{E_2}-A\cdot 1_{E_1}+A\cdot 1_{E_3}$ est mesurable comme somme de produits de fonctions mesurables.

Correction de l'exercice 3

Soit $\Omega=\mathbb{N},\Sigma=P()$ et μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ définie par :

$$\mu(E)=\#E=\sum_{k\in E}1,$$

où $E\in\Sigma$. Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ une fonction positive ou nulle. Pour tout borélien $E,f^{-1}(E)$ appartient à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, donc f est $(\Sigma\_\mathrm{B}())$-mesurable. Par définition de l'intégrale,

$$\int_{\Omega}fd\mu=\int_{0}^{\infty}\mu(S_f(t))dt,$$

où $S_f(t) = \{n \in \Sigma,\ f(n) > t\}$. Pour tout $\mathrm{y} \in [0, +\infty[$, posons $A_y := \{n \in \mathbb{N},\ f(n) = \mathrm{y}\}$. Alors

$$S_f(t) = \bigcup_{y>t} A_y$$

où l'union est disjointe et où A_y est vide sauf pour un ensemble dénombrable $\{\mathrm{y_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ de valeurs de y. Par σ-additivité de la mesure μ,

$$\mu(S_f(t)) = \mu(\bigcup_{\mathcal{Y}i>t} A_{\mathcal{Y}i}) = \sum_{\mathcal{Y}i>t} \mu(A_{\mathcal{Y}i}) = \sum_{\mathcal{Y}i>t} \mu(\{f = \mathrm{y}_i\}) \ .$$

Ainsi :

$$\int_\Omega f d\mu \ = \ \int_0^\infty \sum_{\mathcal{Y}i>t} \mu(\{f = \mathrm{y}_i\}) dt = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{0\le t<\mathcal{Y}i} \mu(\{f = \mathrm{y_i}\}) dt$$

$$= \ \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{y_i} \cdot \mu(\{f = \mathrm{y_i}\}) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{y_i} \cdot \#\{n \in \mathbb{N}, f(n) = \mathrm{y_i}\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \ .$$

Correction de l'exercice 4

Soit φ une fonction simple positive :

$$\varphi = \sum_{j\in J} c_j 1_{E_j},$$

où J est un ensemble fini, les ensembles E_j sont mesurables et où, pour $i \neq j, c_{\mathrm{i}} \neq c_j$ et $E_{\mathrm{i}} \cap E_j = 0$.

1. On a

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \int_0^\infty \mu(S_\varphi(t)) dt,$$

où $S_\varphi(t) = \{x \in \Omega,\ \varphi(x) > t\} = \bigcup_{c_j>t} E_j$ et où $\mu(S_\varphi(t)) = \sum_{c_j>t} \mu(E_j)$. Ainsi

$$\int_\Omega \varphi d\mu = \int_0^\infty \sum_{c_j>t} \mu(E_j) dt = \sum_{j\in J} \int_0^{c_j} \mu(E_j) dt = \sum_{j\in J} c_j \mu(E_j) \ .$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$E_{k,n} := \{x \in \Omega,\ k2^{-n} \le f(x) < (k+1)2^{-n}\}$ pour $k = 0, \ldots, n2^n - 1, E_{n,n} := \{x \in \Omega,\ f(x) \ge n\}$ pour $k = n2^n$

Puisque f est mesurable, les ensembles $E_{k,n}$ appartiennent à Σ. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, les ensembles $E_{k,n}, 0 \leq k \leq n2^n - 1$ sont deux à deux disjoints et $\bigcup_k E_{k,n} = \Omega$. Posons

$$\varphi_n = \sum_{k=0}^{n2^{-n}-1} k2^{-n} 1_{E_{k,n}}.$$

Alors φ_n est une fonction simple positive vérifiant $\varphi_n \leq f$. En outre $0 \leq \varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, $\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) = f(x)$ pour tout $x \in \Omega$.

Correction de l'exercice 5 A

Soit $(,\ \Sigma,\ \mu)$ un espace mesuré et $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$. Pour tout $E \in \Sigma$, on pose :

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_\Omega 1_A \cdot f d\mu.$$

Montrons que λ définit une mesure sur $(,\ \Sigma)$.

$1^{ère}$ *méthode* : On montre d'abord que l'affirmation est vraie pour les fonctions simples. D'après l'exercice 4, toute fonction $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ s'écrit $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} \varphi_n$, où les φ_n sont des fonctions simples. Puisque le supremum d'une famille quelconque de mesure est une mesure, on conclut que λ est une mesure.

4

2^{de} *méthode* : On a clairement $\lambda(0) = 0$. Il suffit donc de vérifier la σ-additivité de λ. Soit $\{E_{\mathrm{i}}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset \Sigma$ une suite d'éléments deux à deux disjoints. On a

$$\begin{aligned}
\lambda(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) &= \int_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f d\mu = \int_\Omega 1_{\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i} f d\mu \\
&= \int_\Omega (\sum_{i=1}^{\infty} 1_{E_i}) f d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^{\infty} (1_{E_i} f) d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \int_\Omega (1_{E_i} f) d\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} f d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(E_{\mathrm{i}})\ .
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$f(x) = |x|^{-p} 1_{\{|x|<1\}}(x) \ .$$

(i) On a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \ = \ \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-p} 1_{\{|x|<1\}}(x)dx = \int_{|x|<1} |x|^{-p}dx = \int_{r=0}^{1} \int_{\sigma\in\mathcal{S}_{n-1}} r^{n-p-1} dr d\sigma$$

$$= \ \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^1 r^{n-p-1} \ dr.$$

Pour $n \leq p$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \ = \ +\infty.$$

Pour $p < n$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \ = \ \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}[\frac{r^{n-p}}{(n-p)}]_0^1 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma(\frac{n}{2})}$$

(ii) Pour $a \in [0, +\infty[$,

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, \ |x|^{-p} 1_{|x|<1} > a\} = \{x \in \mathbb{R}^n, \ |x|^{-p} > a\} \cap \mathcal{B}(0, 1) \ ,$$

où $\mathcal{B}(0, 1)$ est la boule de centre 0 et de rayon 1. Ainsi

$$S_f(a) = \{x \in \mathbb{R}^n, a^{-\frac{1}{p}} > |x|\} \cap \mathcal{B}(0, \ 1) \ .$$

On en déduit que $S_f(a) = \mathcal{B}(0, 1)$ si $a^{-\frac{1}{p}} > 1$, i.e. si $a < 1$ et que $S_f(a)$ est égale à la boule $\mathcal{B}(0, a^{-\frac{1}{p}})$ de centre 0 et de rayon $a^{-\frac{1}{p}}$ lorsque $a \geq 1$. Il vient alors :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx \ = \ \int_0^{+\infty} \mu(S_f(a))da = \int_0^1 \mu(\mathcal{B}(0, 1))da + \int_1^{+\infty} \mu(\mathcal{B}(0, a^{-\frac{1}{p}}))da$$

$$= \ \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \int_1^{+\infty} a^{-\frac{n}{p}} da.$$

Si $p \geq n$, on obtient $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = +\infty$ et pour $p < n$, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} + \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}[\frac{a^{-\frac{n}{p}+1}}{-\frac{n}{p}+1}]_1^{+\infty} \\ &= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}(1+\frac{p}{n-p}) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-p)\Gamma(\frac{n}{2})}.\end{aligned}$$

Théorème de convergence monotone, dominée et le lemme de Fatou

Exercice 1

1. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Montrer que

$$\int_\Omega (\sum_{n=1}^{+\infty} g_n)d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n d\mu.$$

2. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(s)\zeta(s) \ ,$$

où Γ est la fonction d'Euler et où $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$. (On pourra considérer les fonctions $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}1_{[0,+\infty)}$.)

Exercice 2

Soit $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = \mathrm{B}()$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = 1_{[0,n]}, n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone croissante vers $f = 1_{[0,+\infty)}$. Bien que les fonctions f_n soient uniformément bornées par 1 et que les intégrales des f_n sont finies, on a :

$$\int_\Omega f d\mu = +\infty.$$

Est-ce que le théorème de convergence monotone s'applique dans ce cas ?

Exercice 3

Soit $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = \mathrm{B}()$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si on pose $f_n = \frac{1}{n}1_{[n,+\infty)}, n \in \mathbb{N}$, alors la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone décroissante et converge uniformément vers 0, mais

$$0 = \int_\Omega f d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n d\mu = +\infty.$$

Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Exercice 4

Soit $f_n = \frac{1}{n}1_{[0,n]}, n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f, mais que

$$\int_\Omega f d\mu \neq \lim \int_\Omega f_n d\mu$$

Est-ce que cela contredit le théorème de convergence monotone ?

Exercice 5

Soit $\Omega = \mathbb{R}, \Sigma = B()$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit $f_n = -\frac{1}{n}1_{[0,n]}, n \in \mathbb{N}$, et $f = 0$. Montrer que f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ mais que

$$\lim \inf_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu < \int_\Omega f d\mu.$$

Est-ce que cela contredit le lemme de Fatou ?

Exercice 6

Soit $f \in \mathcal{M}^+(\Omega, \Sigma)$ tel que $\int_\Omega f d\mu < +\infty$. Montrer que

$$\mu\{x \in \Omega,\ f(x) = +\infty\} = 0.$$

On pourra considérer les fonctions $f_n = n1_{\{f\geq n\}}$.

Exercice 7

Soit $(\Omega, \Sigma,\ \mu)$ un espace mesuré avec $\mu() < +\infty$. Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables convergeant presque partout vers une fonction mesurable f. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $|f_n| \leq C$ pour tout $n \geq 1$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Exercice 8

Soit $f \in \mathcal{L}^1$ Que vaut la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda(x)?$$

Exercice 9

On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite intégrable si $f_+ := \max\{f, 0\}$ et $f_- = \max\{-f, 0\}$ vérifient $\int_\Omega f + d\mu < +\infty$ et $\int_\Omega f_- d\mu < +\infty$. On note $\mathcal{L}^1(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ l'ensemble des fonctions réelles intégrables. Pour $f \in \mathcal{L}^1(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$, on pose

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega f + d\mu - \int_\Omega f_- d\mu.$$

1. Montrer l'équivalence

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu) \Leftrightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma,\ \mu)$$

et

$$|\int_\Omega f d\mu| \leq \int_\Omega |f| d\mu. \tag{1}$$

2. Montrer que si f est mesurable, g intégrable et $|f| \leq |g|$, alors f est intégrable et

$$\int_\Omega |f| d\mu \leq \int_\Omega |g| d\mu.$$

3. On rappelle qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est dite intégrable si la partie réelle $\mathrm{Re} f$ et la partie imaginaire $\mathrm{Im} f$ de f sont intégrables. On pose alors

$$\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega \mathrm{Re} f d\mu + i \int_\Omega \mathrm{Im} f d\mu.$$

Montrer que l'inégalité (1) est vérifiée.

Exercice 10

Soit $(, \ \Sigma, \ \mu)$ un espace mesuré. On dit que f_n converge vers f *en mesure* si pour tout ϵ,

$$\lim_{n\to+\infty} \mu\{x \in \Omega, \ |f_n(x) - f(x)| > \epsilon\} = 0.$$

Montrer que si $f_n \to f$ en mesure, alors il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $f\mu$-presque partout.

Exercice 11

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est intégrable au sens de Lebesgue mais pas au sens de Riemann. Correction V [005949]

Exercice 12

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}+, \{(1+\frac{x}{n})^n\}$ est une suite croissante et

$$\lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

2. Calculer la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}+} (1+\frac{x}{n})^n \mathrm{e}^{-bx} d\lambda(x)$$

Exercice 13

Montrer que

1. $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1-\frac{x}{n})^n x^m dx = m!$ (pour tout $m \in \mathrm{N}$).

2. $\lim_{n\to\infty} \int_0^n (1+\frac{x}{n})^n e^{-2x} dx = 1$.

Exercice 14

Montrer le théorème suivant, Ω étant un espace mesurable. (On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.)

Théorème.(Dérivation sous le signe $\int$)

Soit $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que

(i) Pour tout $s \in [s_1, s_2]$, la fonction $x- \to f(x,s)$ est intégrable ;

(ii) pour presque tout x, la fonction $s- \to f(x,s)$ est dérivable sur (s_1, s_2) ;

(ii) il existe $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathbb{R}^+)$ tel que pour tout $s \in [s_1, s_2]$ et pour presque tout $x \in \Omega$ on ait

$|\frac{\partial f(x,s)}{\partial s}| \leq g(x)$. Alors la fonction $I(s) := \int_\Omega f(x,s)d(x)$ est dérivable sur (s_1, s_2) et

$$\frac{dI}{ds} = \int_\Omega \frac{\partial f(x,s)}{\partial s} d\mu(x) .$$

Exercice 15

Soit $f \in \mathcal{L}^1$ Sa *transformée de Fourier* est la fonction $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\hat{f}(\mathrm{y}) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixy} f(x)dx,$$

montrer que

1. $\hat{f}$ est continue,
2. $\hat{f}$ est bornée et $\sup|\hat{f}| \leq \|f\|_{L^1} (= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|dx)$,
3. Si $x \to xf(x)$ est intégrable, alors $\hat{f}$ est dérivable et on a

$$\frac{d}{d\mathrm{y}}\hat{f} = -\overline{ixf(x)} .$$

Correction de l'exercice 1

1. Soit $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$. Alors $f_k = \sum_{n=1}^k g_n$ est une suite croissante de $\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$. D'après le théorème de convergence monotone

$$\int_\Omega (\sum_{n=1}^{+\infty} g_n) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n d\mu.$$

2. Posons $g_n(x) = x^{s-1}e^{-nx}1_{[0,+\infty)}$. Les g_n appartiennent à $\mathcal{M}^+(\Omega,\Sigma)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente,

$$\int_\Omega (\sum_{n=1}^{+\infty} g_n) d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n d\mu.$$

Or d'une part,

$$\int_\Omega g_n d\mu = \int_\Omega x^{s-1}e^{-nx}1_{[0,+\infty)}dx = \frac{1}{n^s}\int_0^{+\infty} \mathrm{y}^{s-1}e^{-y}d\mathrm{y} = \frac{1}{n^s}\Gamma(s) ,$$

donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\int_\Omega g_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\Gamma(s) = \zeta(s)\Gamma(s)\ .$$
D'autre part,
$$\int_\Omega (\sum_{n=1}^{+\infty} g_n) d\mu = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}dx = \int_0^{+\infty}\frac{x^{s-1}}{e^x-1}dx,$$
d'où l'égalité cherchée.

Correction de l'exercice 2

Oui, le théorème de convergence monotone ne dit pas que l'intégrale de f est finie. On a bien
$$+\infty = \int_\Omega f d\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \lim_{n\to+\infty} n.$$

Correction de l'exercice 3

Non, le théorème de convergence monotone ne s'applique pas à une suite décroissante de fonctions positives.

Correction de l'exercice 4

Non, la suite de fonctions n'est pas même monotone.

Correction de l'exercice 5

En effet, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_{\mathcal{E}} = [\frac{1}{\epsilon}] + 1$ tel que $\forall n \geq N_{\mathcal{E}}$,
$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$
i.e. f_n converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. On a :
$$\lim\inf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \lim\inf_{n\to+\infty} -\int_0^n \frac{1}{n}d\mu = -1.$$
D'autre part $\int_\Omega f d\mu = 0$. Le lemme de Fatou ne s'applique pas car les fonctions f_n ne sont pas à valeurs dans $[0,\ +\infty]$.

Correction de l'exercice 6

On a
$$\mu(f = +\infty) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{f \geq n\})\ .$$

Puisque les ensembles $A_n := \{f \geq n\}$ vérifient $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \ldots$ et $\mu(A_i) < +\infty(i = 1, 2, \ldots$ par continuité de la mesure, on a :

$$\mu(f = +\infty) = \lim_{n \to +\infty} \mu(f \geq n) \ .$$

Or, comme f est à valeurs positives, les fonctions f_n définies par $f_n = n1_{\{f \geq n\}}$ vérifient $f_n \leq f$. Ainsi

$$\int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega n1_{\{f \geq n\}} d\mu = n\mu(f \geq n) \leq \int_\Omega f d\mu < +\infty.$$

On en déduit que

$$\mu(f \geq n) \leq \frac{1}{n} \int_\Omega f d\mu \to 0,$$

donc

$$\mu(f = +\infty) = 0.$$

Correction de l'exercice 7

Puisque $\mu(\Omega) < +\infty$, la fonction constante égale à C est intégrable, d'intégrale $C\mu(\Omega)$. Une application directe du théorème de convergence dominée donne

$$\lim_{n \to +\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu.$$

Correction de l'exercice 8

Soit $f \in \mathcal{L}^1$ Comme $\cos(\pi x) < 1$ si $x \notin \mathrm{Z}, \cos^n(\pi x) \to 0$lorsque $n \to \infty$ presque partout (pour tout $x \in \mathbb{R} \backslash \mathrm{Z})$. Notons $f_n(x) = f(x) \cos^n(\pi x)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $|f_n(x)| \leq |f(x)|$ et comme $|f| \in \mathcal{L}^1$

par le théorème de convergence dominée de Lebesgue,

$$\lim_{n \to \infty} \int_\mathbb{R} f(x) \cos^n(\pi x) d\lambda(x) = \lim_{n \to \infty} \int_\mathbb{R} f_n(x) d\lambda(x) = \int_\mathbb{R} \lim_{n \to \infty} f_n(x) d\lambda(x) = 0.$$

Correction de l'exercice 9

1. Par définition, $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \ \mu)$ si et seulement si $f +$ et$f$-sont intégrables. On note que $|f| = f + + f_-$. Donc $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu) \Rightarrow |f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \ \mu)$. Réciproquement, on a $0 \leq f \pm \leq |f|$,

donc $|f| \in \mathcal{L}^1(, \ \Sigma, \ \mu) \Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(, \ \Sigma, \ \mu)$. D'autre part :

$$|\int_\Omega f d\mu| = |\int_\Omega f + d\mu - \int_\Omega f_- d\mu| \leq \int_\Omega f + d\mu + \int_\Omega f_- d\mu = \int_\Omega |f| d\mu.$$

2. Par monotonie de l'intégrale, on a

$$\int_\Omega |f| d\mu \leq \int_\Omega |g| d\mu < +\infty.$$

D'après la question (a) , il en découle que f est intégrable.

3. Définissons $z = \int_\Omega f d\mu$. Comme z est un nombre complexe, il s'écrit $z = |z| e^{i\theta}$. Soit u la partie réelle de $e^{-i\theta} f$. On a $u \leq |e^{-i\theta} f| = |f|$. Donc

$$|\int_\Omega f d\mu| = e^{-i\theta} \int_\Omega f d\mu = \int_\Omega e^{-i\theta} f d\mu = \int_\Omega u d\mu \leq \int_\Omega |f| d\mu,$$

où la troisième égalité découle du fait que le nombre $\int_\Omega e^{-i\theta} f d\mu$ est réel donc est l'intégrale de la partie réelle de $e^{-i\theta} f$ c'est-à-dire de u.

Correction de l'exercice 10

On cherche une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour μ-presque tout $x \in \Omega$, étant donné un $\epsilon > 0$, il existe un $k \in \mathbb{N}$ (dépendant à priori de x) vérifiant $j \geq k \Rightarrow |f_{n_j}(x) - f(x)| < \epsilon$. Il suffit de montrer que pour μ-presque tout x, il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que $j \geq k \Rightarrow |f_{n_j}(x) - f(x)| < \frac{1}{2^j} \leq \frac{1}{2^k}$. Cela revient à montrer que le complémentaire de l'ensemble

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{j \geq k} \{|f_{n_j} - f| < \frac{1}{2j}\}$$

est de mesure nulle. Or

$$A^c = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j \geq k} \{|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2j}\}.$$

Posons $B_k := \bigcup_{j \geq k} \{|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j}\}$. On a $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \ldots$ avec B_1 de mesure fini ; donc par continuité de la mesure, il vient :

$$\mu(A^c) = \lim_{k \to +\infty} \mu(B_k) \ .$$

Par σ-additivité, on a :

$$\mu(B_k) \leq \sum_{j\geq k} \mu(\{|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2j}\}) \ .$$

On définit alors la sous-suite $\{f_{n_k}\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante. Puisque f_n converge vers f en mesure, il existe un indice n_1 tel que pour $n \geq n_1$,

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \frac{1}{2}\}) \leq \frac{1}{2}.$$

Il existe un indice $n_2 > n_1$ tel que pour $n \geq n_2$,

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \frac{1}{2^2}\}) \leq \frac{1}{2^2},$$

et ainsi de suite : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe un $n_k > n_{k-1}$, tel que pour $n \geq n_k$

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \frac{1}{2^k}\}) \leq \frac{1}{2^k}.$$

Pour cette sous-suite on a alors :

$$\mu(B_k) \leq \sum_{j\geq k} \mu(\{|f_{n_j} - f| \geq \frac{1}{2^j}\}) \leq \sum_{j\geq k} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{k-1}}.$$

On a bien

$$\mu(A^c) = \lim_{k\to+\infty} \mu(B_k) = 0.$$

Correction de l'exercice 11

La fonction de Dirichlet restreint à l'intervalle $[a, b]$, $f(x) = 1_{\mathbb{Q}}|_{[a,b]}(x)$, est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue vaut 0. Mais elle n'est pas intégrable au sens de Riemann : $\mathrm{S}(f,\ \tau) = 0$ et $\mathrm{S}(f,\ \tau) = b - a$ pour toute subdivision τ de l'intervalle $[a, b]$.

Correction de l'exercice 12

1. Montrons que pour tout $x \in \mathbb{R}+$, $(1 + \frac{x}{n})^n$ est une suite croissante et que $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n =$

e^x. Pour $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(1+\frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) (\frac{x}{n})^k = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k\frac{\sqrt{k}}{k!}},$$

où $a_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}$.

Les assertions suivantes sont vraies :

i) $a_{n+1,k} \geq a_{n,k}$. En effet, $\frac{n+1-l}{n+1} \geq \frac{n-l}{n}$ pour $l \in \mathbb{N}$ car $n^2+n-l\cdot n \geq n^2+n-l\cdot n-l$, ii) $a_{n,k} < 1$ (évident) ;

iii) Pour tout $k \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 1$.

Comme $a_{n+1,n+1} > 0, (1+\frac{x}{n+1})^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n+1,k}\frac{x^k}{k!} > \sum_{k=0}^{n} a_{n+1,k}\frac{x^k}{k!}$. Il s'ensuit donc de (i) que la suite $\{(1+\frac{x}{n})^n\}$ est croissante. Les assertions (ii) et (iii) impliquent que

$$(1+\frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k}\frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

et que, pour tout $m \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$. Ainsi, $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$.

2. Par le théorème de convergence monotone, on a pour $b > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}+} (1+\frac{x}{n})^n e^{-bx} d\lambda(x) \ = \int_{\mathbb{R}+} \lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n e^{-bx} d\lambda(x)$$

$$= \int_0^\infty e^{(1-b)x} d\lambda(x) = \frac{1}{b-1}.$$

Correction de l'exercice 13

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(1-\frac{x}{n})^n \leq e^{-x}.$$

En effet, comme $\ln y \leq y - 1$ pour $y > 0$, on a $\ln y^{-\frac{1}{n}} \leq y^{-\frac{1}{n}} - 1$, c'est-à-dire $(1-\frac{\ln y}{n})^n \leq y^{-1}$. Ainsi, en posant $x = \ln y$, il vient $(1-\frac{x}{n})^n \leq e^{-x}$. De plus,

$$\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{x}{n})^n = \lim_{n\to+\infty} e^{n\ln(1-\frac{x}{n})} = \lim_{n\to+\infty} e^{n(-\frac{x}{n}+\frac{x}{n}\mathcal{E}(\frac{x}{n}))},$$

où $\lim_{\iota u\to 0}\epsilon(u)=0$. Ainsi $\lim_{n\to+\infty}(1-\frac{x}{n})^n=e^{-x}$.

Posons $f_n(x)=(1-\frac{x}{n})^n x^m 1_{[0,n]}$. Alors en utilisant le théorème de convergence dominée et sachant que $\Gamma(m+1)=\int_0^\infty e^{-x}x^m dx=m!$, on obtient le résultat.

2. Soit $f_n(x)=(1+\frac{x}{n})^n e^{-2x}1_{[0,n]}$. Comme la suite $\{f_n(x)\}$ est croissante et $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=e^{-x}$, on obtient le résultat en appliquant le théorème de convergence monotone.

Correction de l'exercice 15

1. Notons $g(x,\mathrm{y})=e^{-ixy}f(x)$. Alors,

i.) pour tout $\mathrm{y}\in\mathbb{R}$, la fonction $x-\to g(x,\mathrm{y})$ est mesurable ;

ii.) pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ (pour tout les $x\in\mathbb{R}$ tels que $f(x)$ est finie) la fonction $\mathrm{y}-\to g(x,\mathrm{y})$ est continue pour tout $\mathrm{y}\in\mathbb{R}$;

iii.)$|g(x,\mathrm{y})|=|e^{-ixy}f(x)|\leq|f(x)|$ et $|f|\in\mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$.

On doit montrer que pour tout suite $\{\mathrm{y}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers y, on a $\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(\mathrm{y}_n)=\hat{f}(\mathrm{y})$. Posons $g_n(x)=g(x,\mathrm{y}_n)$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\lim_{n\to+\infty}\hat{f}(\mathrm{y})\ :=\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}}g_n(x)dx=\int_{\mathbb{R}}g(x,\mathrm{y})dx=:\hat{f}(\mathrm{y})\ .$$

Ainsi $\hat{f}$ est continue.

2. Pour tout $\mathrm{y}\in\mathbb{R}$, $|\hat{f}(\mathrm{y})|\leq\int_{\mathbb{R}}|e^{-ixy}f(x)|dx\leq\int_{\mathbb{R}}|f(x)|dx=\|f\|_{L_1}$ et donc

$$\sup|\hat{f}|\leq\|f\|_{L_1}.$$

3. Soit $g(x,\mathrm{y})=e^{-ixy}f(x)$. Alors, on a

i.) pour tout $\mathrm{y}\in\mathbb{R}$, la fonction $x-\to g(x,\mathrm{y})$ est intégrable ;

ii.) pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ la fonction $\mathrm{y}-\to g(x,\mathrm{y})$ est dérivable pour tout $\mathrm{y}\in\mathbb{R}$;

iii.)$|\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}|=|-ixe^{-ixy}f(x)|\leq|xf(x)|$ avec $x-\to xf(x)$ intégrable.

Ainsi, d'après l'exercice 14 (le théorème de dérivation sous le signe $\int$), on a

$$\frac{d}{d\mathrm{y}}\hat{f}=\int_{\mathbb{R}}e^{-ixy}(-ixf(x))dx=-\overline{i\mathrm{y}f(\mathrm{y})}\ .$$

Espaces L^p

Exercice 1

1. Soit $a, b \geq 0$ et soit $p, q \in (1,\ +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (*on dit que p et q sont conjugués au sens de Young*). Montrer l'inégalité de Young :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

On pourra considérer la fonction $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$.

2. Soit de nouveau $p, q \in (1,\ +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $f \in L^p(\mu), g \in L^q(\mu)$. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_\Omega |g|^q d\mu.$$

Optimiser cette inégalité par rapport à λ et montrer l'inégalité de Holder :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Cette inégalité est-elle vraie pour $p = 1$ et $q = +\infty$?

3. Soient p et p' dans $[\ 1, +\infty[$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si f appartient à $L^p(\mu) \cap L^{p'}$ alors f appartient à $L^r(\mu)$ pour tout r compris entre p et p'.

4. Montrer que si μ est une mesure finie alors

$$L^\infty(\mu) \subset \bigcap_{p \geq 1} L^p(\mu)\ ,$$

et, pour tout f,

$$\lim_{p \to +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

5. Montrer que si $f \in L^p()$ et $g \in L^q(\mu)$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$, alors $f \cdot g \in L^r(\mu)$ et

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Exercice 2

Théorème 1.(Théorème de Riesz) Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $L^p(\mu)$ est complet.

Théorème 2. Soit p tel que $1 \leq p \leq +\infty$ et soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$ convergeant vers une fonction $f \in L^p(\mu)$. Alors il existe une sous-suite de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement presque-partout vers f.

Le but de cet exercice est de démontrer les théorèmes 1 et 2.

1. *Cas de* $L^\infty(\mu)$.

(a) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Pour $k, m, n \geq 1$, considérons les ensembles

$$\begin{aligned} A_k \quad &: \quad = \{x \in \Omega,\ |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}; \\ B_{m,n} \quad &: \quad = \{x \in \Omega,\ |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}. \end{aligned}$$

Montrer que $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$ est de mesure nulle.

(b) Montrer que sur le complémentaire de E, la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f.

(c) En déduire que $L^\infty(\mu)$ est complet.

2. *Cas de* $L^p(\mu)$.

(a) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Montrer qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq 2^{-k}$.

(b) Posons

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \text{ et } g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

où g est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Montrer que pour tout $k \geq 1$, on a $\|g_k\|_p < 1$, puis que $\|g\|_p \leq 1$.

(c) En déduire que la série

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

est absolument convergente pour presque tout $x \in \Omega$. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x) = 0$ sinon. Vérifier que f est la limite ponctuelle des $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ pour presque tout

$$x \in \Omega.$$

(d) Montrer que $f - f_m \in L^p(\mu), f \in L^p(\mu)$ et que $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to +\infty$. Conclure.

3

Exercice 3(Différentiabilité des normes $\|\|_p$)

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. Montrer que la fonction $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(t) = \int_\Omega |f(x) + t \cdot g(x)|^p d\mu$$

est différentiable et que sa dérivée en $t = 0$ est donnée par :

$$\frac{dN}{dt}|t = 0 = p \int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) d\mu,$$

où par convention $|f(x)|^{p-2} f(x) = 0$lorsque f= 0.

Correction de l'exercice 1

1. Soit $a, b \geq 0$ et soit $p, q \in (1,\ +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La fonction $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définit par $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q - ab$ est dérivable et :

$$\theta'^{p-1} - b.$$

Cette dérivée s'annule lorsque $a = b^{\frac{1}{p-1}}$, est négative pour $a < b^{\frac{1}{p-1}}$ et positive pour $a > b^{\frac{1}{p-1}}$. On a

$$\theta(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p} b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q} b^q - b^{1+\frac{1}{p-1}} = 0.$$

Ainsi $\theta(a) \geq 0$, i.e.

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q.$$

2. Soit $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$. D'après la question précédente, pour tout $\lambda > 0$ et pour

μ-presque tout x :

$$|fg|(x) = |\lambda f(x) \cdot \frac{g(x)}{\lambda}| \leq \frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$

Ainsi

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q d\mu.$$

Posons

$$\Phi(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q d\mu.$$

La fonction Φ est dérivable et :

$$\Phi'^{p-1}\|f\|_p^p - \lambda^{-q-1}\|g\|_q^q.$$

Cette dérivée s'annule pour $\lambda_1 := (\frac{||g||_q^q}{||f||_p^p})^{\frac{1}{p+q}}$, est négative pour $\lambda \leq \lambda_1$ et positive pour $\lambda \geq \lambda_1$. Ainsi le minimum de Φ vaut :

$$\Phi(\lambda_1) \ = \frac{1}{p}(\frac{||g||_q^q}{||f||_p^p})^{\frac{p}{p+q}}\|f\|_p^p + \frac{1}{q}(\frac{||g||_q^q}{||f||_p^p})^{-\frac{q}{p+q}}\|g\|_q^q$$

$$= \frac{1}{p}\|g\|^{\frac{qp}{qp+q}}\|f\|^{\frac{qp}{pp+q}} + \frac{1}{q}\|g\|^{\frac{qp}{qp+q}}\|f\|^{\frac{qp}{pp+q}} = \|f\|_p\|g\|_q.$$

On en déduit l'inégalité de Holder :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p\|g\|_q.$$

Si $f \in L^1()$ et $g \in L^\infty(\mu)$, alors $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$ et

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f| d\mu,$$

i.e. $\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.

3. Soient $p, p' \in [1,\ +\infty)$. On suppose $p < p'$. Soit $p < r < p'$. On a

$$|f|^r = |f|^r 1_{|f|>1} + |f|^r 1_{|f|<1} \leq |f|^{p'} 1_{|f|>1} + |f|^p 1_{|f|<1}.$$

On en déduit que

$$\int_{\Omega} |f|^r d\mu \leq \int_{\Omega} |f|^{p'} d\mu + \int_{\Omega} |f|^p d\mu < +\infty,$$

donc f appartient à L^r

4. Supposons que μ soit une mesure finie et soit $f \in L^{\infty}(\mu)$. Alors

$$|f(x)| \leq \|f\|_{\infty}$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Ainsi pour tout p

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu \leq \|f\|_{\infty}^p \int_{\Omega} 1 d\mu = \|f\|_{\infty}^p \mu(\Omega) < +\infty,$$

ce qui implique que $f \in L^p(\mu)$. En particulier, f appartient à $1'$intersection $\bigcap_{p\geq 1} L^p(\mu)$. De plus, pour tout p, on a :

$$\|f\|_p \leq \|f\|_{\infty} \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique que

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_{\infty}.$$

D'autre part, pour tout $0 < \epsilon < \|f\|_{\infty}$, on a

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu \geq \int_{|f|>(\|f\|_{\infty}-\epsilon)} |f|^p d\mu \geq (\|f\|_{\infty} - \epsilon)^p \mu(|f| > (\|f\|_{\infty} - \epsilon)) \ .$$

Ainsi pour tout p, il vient

$$\|f\|_p \geq (\|f\|_{\infty} - \epsilon) \mu(|f| > (\|f\|_{\infty} - \epsilon))^{\frac{1}{p}}$$

Puisque $\lim_{p\to+\infty} \mu(|f| > (\|f\|_{\infty} - \epsilon))^{\frac{1}{p}} = 1$, il en découle que

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_{\infty} - \epsilon.$$

Comme ϵ peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty,$$

donc finalement $\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

5. Posons $f_1 := f^r$ et $g_1 := g^r$. On a $f_1 \in L^{\frac{p}{r}}()$ et $g_1 \in L^{\frac{q}{r}}$ Notons que l'identité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ entraîne que $\frac{p}{r}, \frac{q}{r} > 1$ et que les nombres $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont conjugués au sens de Young. Par l'inégalité de Holder on a donc

$$\int_\Omega (fg)^r d\mu = \int_\Omega f_1 g_1 d\mu \leq (\int_\Omega f_1^{\frac{p}{r}} d\mu)^{\frac{r}{p}} (\int_\Omega g^{\frac{q}{1r}} d\mu)^{\frac{r}{q}} = (\int_\Omega f^p d\mu)^{\frac{r}{p}} (\int_\Omega g^q d\mu)^{\frac{r}{q}}$$

D'où, finalement,

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Correction de l'exercice 2

1. *Cas de* $L^\infty(\mu)$.

(a) Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $L^\infty(\mu)$. Pour $k, m, n \geq 1$, soient les ensembles

$$\begin{aligned} A_k \quad &: \quad = \{x \in \Omega, \ |f_k(x)| > \|f_k\|_\infty\}; \\ B_{m,n} \quad &: \quad = \{x \in \Omega, \ |f_m(x) - f_n(x)| > \|f_m - f_n\|_\infty\}, \end{aligned}$$

et $E := \bigcup_k A_k \bigcup_{n,m} B_{m,n}$. Par définition de la norme infinie, les ensembles A_k et $B_{n,m}$ sont de mesure nulle. Par σ-sous-additivité de μ, on a

$$\mu(E) \leq \sum_k \mu(A_k) + \sum_{n,m} \mu(B_{n,m}) = 0.$$

4

(b) Sur $\Omega\backslash E$, on a :

$$\sup_{x\in\Omega\backslash E} |f_n - f_m| \leq \|f_n - f_m\|_\infty,$$

i.e. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy uniforme sur $\Omega\backslash E$. En particulier, pour tout $x \in \Omega\backslash E$, la suite $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy réelle, donc est convergeante car $\mathbb{R}$ est complet. Notons f la limite ponctuelle de f_n sur $\Omega\backslash E$. Montrons que la suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le complémentaire de E. On a

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to+\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \lim_{m\to+\infty} \|f_n - f_m\|_\infty.$$

Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(\mu)$, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang N_ϵ tel que pour $n, m > N_\epsilon$, $\|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon$. Alors pour $n > N_\epsilon$,

$$\sup_{x\in\Omega\backslash E} |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon.$$

Il est découle que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\Omega\backslash E$.

(c) Étendons la fonction f à Ω en posant $f = 0$ sur E. Il reste à montrer que la fonction f appartient à $L^\infty(\mu)$. Pour $n > N_\epsilon$, et $x \in \Omega\backslash E$, on a

$$|f(x)| < |f_n(x)| + \epsilon \leq \|f_n(x)\|_\infty + \epsilon$$

On en déduit que $\|f\|_\infty \leq \|f_n(x)\|_\infty + \epsilon < +\infty$. Ainsi $L^\infty()$ est complet.

2. *Cas de* $L^p(\mu)$.

(a) Soit $1 \leq p < +\infty$ et $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mu)$. Il existe n_1 tel que pour $n, m \geq n_1$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-1}$. On prend ensuite $n_2 > n_1$ tel que pour $n, m \geq n_2$, $\|f_n - f_m\|_p < 2^{-2}$, et ainsi de suite, pour tout k, il existe un $n_k > n_{k-1}$ tel que $n, m \geq n_k \Rightarrow \|f_n - f_m\|_p < 2^{-k}$.

(b) Posons

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| et g = \sum_{i=1}^{+\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|,$$

où g est à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Pour tout $k \geq 1$, on a

$$\|g_k\|_p = \| \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \|_p.$$

D'après l'inégalité de Minkowski,

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p = \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} < 1.$$

D'après le lemme de Fatou, on en déduit que $\|g\|_p \leq 1$.

(c) Comme $\int_\Omega |g|^p d\mu < +\infty$, nécessairement $|g| < +\infty \mu -$ pp, i.e. pour presque tout $x \in \Omega$ la série

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$$

est absolument convergente. Notons $f(x)$ sa somme lorsque celle-ci est finie et posons $f(x) = 0$ sinon. On a :

$$f_{n_1} + \sum_{i=1}^{k-1} (f_{n_{i+1}} - f_{n_i}) = f_{n_k}$$

et $f(x) = \lim_{k\to+\infty} f_{n_k} \mu -$ pp.

(d) Soit $\epsilon > 0$. Comme $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(\mu)$, il existe $N_\epsilon > 0$ tel que pour $n, m > N_\epsilon, \|f_n - f_m\|_p < \epsilon$. Pour $m > N_\epsilon$ on a par le lemme de Fatou :

$$\int_\Omega |f - f_m|^p d\mu = \int_\Omega |\lim_{k\to+\infty} f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leq \lim \inf_{k\to+\infty} \int_\Omega |f_{n_k} - f_m|^p d\mu \leq \epsilon^p.$$

Ainsi $f - f_m \in L^p(\mu)$ et $\|f - f_m\|_p \to 0$ quand $m \to +\infty$. De plus, d'après l'inégalité de Minkowski, on a

$$\|f\|_p = \|(f - f_m) + f_m\|_p \leq \|(f - f_m)\|_p + \|f_m\|_p < +\infty,$$

c'est-à-dire $f \in L^p(\mu)$. En conclusion $L^p()$ est complet.

Correction de l'exercice 3

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. La fonction $\psi(t) = |f(x) + \tan(x)|^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\psi'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x) + \tan(x) + hg(x)|^p - |f(x) + \tan(x)|^p}{h} = p|f(x)+\tan(x)|^{p-2}(f(x)+\tan(x))g(x) \, ,$$

lorsque $f(x)$ et $g(x)$ ont un sens, c'est-à-dire pour presque tout x. De plus, d'après le théorème des accroisse- ments finis, on a

$$\frac{|f(x)+\tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t} = \psi'(t_0) = p|f(x)+t_0g(x)|^{p-2}(f(x)+t_0g(x))g(x) \ ,$$

pour un certain t_0 compris entre 0 et t. Ainsi pour $|t| \leq 1$,

$$|\frac{|f(x)+\tan(x)|^p - |f(x)|^p}{t}| \ = p|f(x)+t_0g(x)|^{p-1}|g(x)|$$

$$\leq p(|f(x)|+|g(x)|)^p$$

$$\leq 2^{p-1}p(|f(x)|^p+|g(x)|^p) \ ,$$

où la première inégalité découle de l'inégalité triangulaire et de la majoration $|g(x)| \leq (|f(x)| + |g(x)$ et où la deuxième inégalité provient de la convexité de la fonction $x- \to x^p$ pour $p > 1$ impliquant en particulier : $(\frac{\iota u+v}{2})^p \leq \frac{\iota u^p}{2} + \frac{v^p}{2}$. Il en découle que $t- \to \frac{|f(x)+\tan(x)|^p-|f(x)|^p}{t}$ est uniformément bornée par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors de dériver sous le signe somme et

$$\frac{dN}{dt}t = 0 = p\int_\Omega |f(x)|^{p-2}f(x)g(x)d\mu.$$

Intersections des L^p et convergences Exercice 1

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x)dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1$$

2. Soit $\mathrm{B}^n(0,1)$ la boule unité centrée en 0 de $\mathbb{R}^n$. En considérant les fonctions

$$f_\alpha(x) = |x|^{-\alpha}$$

montrer que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathrm{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathrm{B}^n(0,1))$ est stricte.

Exercice 2 (mesure de comptage sur $\mathbb{N}$)

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes 1

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := (\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p)p < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞

1. Montrer que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. En particulier, pour $1 < q < 2 < p$, on a :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty$$

2. En considérant les suites $u_n = n^{-\alpha}$, montrer que pour $q < p$, l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte.

Exercice 3 (la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$)

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. –Pour quelle valeur de α la fonction $x- \to \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?

–Pour quelle valeur de β la fonction $x- \to \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient-elle à $L^p(\mathbb{R}^n)$?

–Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. En utilisant (a) et (b) , trouver une fonction f qui appartienne à $L^q(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^p(\mathbb{R}^n)$ et une fonction g qui appartienne à $L^p(\mathbb{R}^n)$ mais pas à $L^q(\mathbb{R}^n)$.

2. –Soit $1 \leq q < p < +\infty$. Montrer que l'espace $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_{p,q} = \|\cdot\|_p + \|\cdot\|_q$.

–Soit r tel que $q < r < p$. Montrer que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \alpha \in [0,1]$. On pourra écrire $r = r\alpha + r(1-\alpha)$ et utiliser l'inégalité de Holder pour un couple de réels conjugués bien choisi.

–En déduire que si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^r(\mathbb{R}^n)$, i.e $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

3. Soit $f \in L^p([0,\ +\infty[) \cap L^q([0,\ +\infty[)$ avec $1 \leq q < 2 < p$. Montrer que la fonction h définie par $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} f(r)$ appartient à $L^1([0,\ +\infty[)$ et trouver des constantes $C_{p,q}$ et γ telles que $\|h\|_1 \leq C_{p,q} \|f\|_q^{\gamma} \|f\|_p^{(1-\gamma)}$.

Exercice 4($Convergences$)

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} 1_{[n,2n]}(x) \ .$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,\ +\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans

$$L^2([0,\ +\infty$$

2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,\ +\infty[)$ pour $p > 2$.

Exercice 5

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} 1_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x) \ .$$

1. Montrer que f_n converge faiblement vers 0 dans $L^2([0,\ +\infty[)$ mais ne converge pas fortement dans

$$L^2([0,\ +\infty$$

2. Montrer que f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,\ +\infty[)$ pour $p < 2$.

Correction de l'exercice 1

Soit Ω un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ dont la mesure de Lebesgue est *finie* : $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, notons $L^p()$ l'espace des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_\Omega |f|^p(x)dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\Omega)$.

1. Si $f \in L^\infty$ alors

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p(x)dx \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$

ainsi $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ pour tout p et $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$. Montrons que si $q \leq p$, alors $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$, on a par exemple :

$$\begin{aligned}
\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)dx &= \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^q(x)dx + \int_{\{|f|<1\}} |f|^q(x)dx \\
&\leq \int_{\{|f|\geq 1\}} |f|^p(x)dx + \int_{\{|f|<1\}} 1dx \\
&\leq \|f\|_p^p + \mu(\Omega) < +\infty.
\end{aligned}$$

Ou encore, en utilisant l'inégalité de Holder pour les réels conjugués $r = \frac{p}{q} > 1$ et $r' = \frac{p}{p-q}$:

$$\begin{aligned}
\|f\|_q^q = \int_\Omega |f|^q(x)dx &= (\int_\Omega |f|^{q\cdot\frac{p}{q}}(x)dx)^{\frac{q}{p}} (\int_\Omega 1^{\frac{p}{p-q}}(x)dx)^{\frac{p-q}{p}} \\
&= \|f\|_p^q \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{p}},
\end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\|f\|_q \leq \|f\|_p \mu(\Omega)^{\frac{p-q}{qp}}$$

En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$:

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1$$

2. Montrons que pour $q < p$, l'inclusion $L^p(\mathrm{B}^n(0,1)) \subset L^q(\mathrm{B}^n(0,1))$ est stricte. La fonction f_α appartient à $L^\infty(\mathrm{B}^n(0,1))$ si et seulement $\alpha \leq 0$, et à $L^p(\mathrm{B}^n(0,1))$ avec $p < +\infty$ si et seulement si

$$p\alpha - n + 1 < 1 \Leftrightarrow \alpha < \frac{n}{p}$$

Soit $1 \leq q < p$, alors $f_{\frac{1}{2}(\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}$ appartient à $L^q(\mathrm{B}^n(0,1))\backslash L^p(\mathrm{B}^n(0,1$ En particulier, $f_{\frac{1}{2}(\frac{n}{p}+\frac{n}{q})}$ appartient à $L^q(\mathrm{B}^n(0,1))\backslash L^\infty(\mathrm{B}^n(0,1$

Correction de l'exercice 2 A

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note ℓ^p l'espace des suites complexes 1

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\|u\|_p := (\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^p)p < +\infty$. L'espace des suites bornées sera noté ℓ^∞

1. Montrons que si $q \leq p$, alors $\ell^q \subset \ell^p$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^q$. Comme

$$\sum_{i=0}^{+\infty} |u_n|^q < +\infty,$$

il existe un rang N tel que pour $n > N, |u_n|^q < 1$. En particulier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à ℓ^∞ et

$$\|u\|_\infty \leq \max\{u_0,\ \ldots,\ u_N,\ 1\}.$$

De plus, pour $n > N$, on a $|u_n|^p \leq |u_n|^q$ et

$$\sum_{\text{i}=N+1}^{+\infty} |u_n|^p \leq \sum_{\text{i}=N+1}^{+\infty} |u_n|^q \leq \|u\|_q^q < +\infty,$$

ce qui implique que $\|u\|_p < +\infty$. En conclusion, pour $1 < q < 2 < p$, on a :

$$\ell^1 \subset \ell^q \subset \ell^2 \subset \ell^p \subset \ell^\infty$$

$$(\alpha\ )$$

2. La suite $u_n = n^{-\alpha}$ appartient à $\ell\infty$ pour tout $\alpha \geq 0$ et à ℓ^p avec $1 \leq p < +\infty$ si et seulement si $\alpha p > 1$, i.e $\alpha > \frac{1}{p}$. En particulier la suite constante égale à 1 appartient à $\ell\infty$ mais n'appartient à aucun ℓ^p pour $p < +\infty$. Soit $1 < q < p < +\infty$. Pour tout α tel que $\frac{1}{p} < \alpha < \frac{1}{q}$, la suite $u^{(\alpha)}$ appartient à $\ell^p \backslash \ell^q$. C'est le cas en particulier pour $\alpha = \frac{1}{2}(\frac{1}{p} + \frac{1}{q})$. Ainsi l'inclusion $\ell^q \subset \ell^p$ est stricte lorsque $q < p$.

Correction de l'exercice 3 A

Soit $\Omega = \mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Pour tout $1 \leq p < +\infty$, on note $L^p(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ telles que $\|f\|_p := (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)dx)^{\frac{1}{p}} < +\infty$ modulo l'équivalence $f \sim g \Leftrightarrow f - g = 0\mu - p.p.$ L'espace des fonctions essentiellement bornées sera noté $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

1. –La fonction $x- \to \frac{1}{(1+|x|^2)^\alpha}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $2\alpha p > n$.

–La fonction $x - \to \frac{1}{|x|^\beta} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour $p\beta < n$.

–Soit $1 \leq q < p \leq +\infty$. La fonction

$$f(x) = (1 + |x|^2)^{-\frac{n}{p+q}}$$

vérifient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $f \notin L^q(\mathbb{R}^n)$. La fonction

$$g(x) = |x|^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p}+\frac{1}{q})} e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

vérifient $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ et $g \notin L^p(\mathbb{R}^n)$.

2. –Soit $1 \leq q < p < +\infty$ et f_n une suite de Cauchy pour la norme $\| \cdot \|_{p,q} = \| \cdot \|_p + \| \cdot \|_q$. Comme $\| \cdot \|_p \leq \| \cdot \|_{p,q}$, f_n est une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, donc elle converge vers une fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\| \cdot \|_p$. De même, $\| \cdot \|_q \leq \| \cdot \|_{p,q}$, donc f_n converge vers une fonction $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ pour la norme $\| \cdot \|_q$. De plus, il existe une sous-suite de f_{n_k} qui converge vers f presque- partout et il existe une sous-suite de f_{n_k} qui converge vers g presque-partout. Ainsi $f = g\mu -$ p.p. et f_n converge vers $f = g$ dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$.

–Soit r tel que $q < r < p$. Montrons que

$$\|f\|_r \leq \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha}$$

où $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}, \alpha \in [0, 1]$. Puisque $1 = \frac{\alpha r}{p} + \frac{(1-\alpha)r}{q}$, les réels $p' = \frac{p}{\alpha r}$ et $q' = \frac{q}{(1-\alpha)r}$ sont conjugués. D'après l'inégalité de Holder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{r\alpha}(x) \cdot |f|^{(1-\alpha)r}(x)dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\alpha r p'}(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^{(1-\alpha)rq'}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)dx\right)^{\frac{\alpha r}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)dx\right)^{\frac{(1-\alpha)r}{q}} \\
&\leq \|f\|_p^{\alpha r} \|f\|_q^{(1-\alpha)r},
\end{aligned}$$

ce qui équivaut à $\|f\|_r \leq \|f\|_p^{\alpha}\|f\|_q^{(1-\alpha)}$. On peut également écrire $r = \beta q + (1-\beta)p$ avec $\beta \in]0,1[$ et appliquer H"¨o"lder avec les réels conjugués $\beta 1$ et $\frac{1}{1-\beta}$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f|^r(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{\beta q}(x) \cdot |f|^{(1-\beta)p}(x)dx$$

$$\leq (\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q(x)dx)^{\beta}(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p(x)dx)^{(1-\beta)},$$

ce qui implique

$$\|f\|_r \leq \|f\|^{\frac{q\beta}{q^r}}\|f\|^{\frac{p(1-\beta)}{pr}}$$

qui est l'inégalité cherchée car $\alpha = \frac{p\beta}{r}$ vérifie bien $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

–Si f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ alors f_n converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ et dans $L^q(\mathbb{R}^n)$, donc dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ d'après l'inégalité précédente. En conclusion, $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $L^r(\mathbb{R}^n)$ donc un sous-espace de Banach de $L^r(\mathbb{R}^n)$.

3. Soit $f \in L^p([0, +\infty[) \cap L^q([0, +\infty[)$ et h la fonction définie par $h(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}f(r)$. On notera p' le conjugué de p et q' le conjugué de q. Montrons que h appartient à $L^1([0,+\infty$ On a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|dr = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)dr$$

$$\leq (\int_0^R r^{-\frac{p'}{2}}dr)^{\frac{1}{p}}(\int_0^R |f(r)|^p dr)^{\frac{1}{p}} + (\int_R^{+\infty} r^{-\frac{q'}{2}}dr)^{\frac{1}{q}}(\int_R^{+\infty} |f(r)|^q dr)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq (\frac{1}{1-\frac{p'}{2}})^{\frac{1}{p}}R(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})\|f\|_p + (\frac{1}{\frac{q'}{2}-1})^{\frac{1}{q}}R(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})\|f\|_q.$$

En optimisant par rapport à R, on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{r}}|f(r)|dr \leq C_{p,q}\|f\|_p^{1-\gamma}\|f\|_q^{\gamma},$$

où, en posant $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{q} - \frac{1}{2}$, on a $\gamma = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, et $C_{p,q} = \frac{\alpha+\beta}{\alpha^{\gamma}\beta^{1-\gamma}}(1-\frac{p'}{2})^{-\frac{1-\gamma}{p'}}(\frac{q'}{2}-1)^{-\frac{\gamma}{q}}$

Correction de l'exercice 4

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} 1_{[n,2n]}(x) \ .$$

1. Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x)dx = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_n^{2n} g(x)dx \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, f_n converge faiblement vers 0. D'autre part, f_n converge presque partout vers 0. Supposons que f_n converge fortement vers une fonction f dans $L^2([0,+\infty$ Alors il existe une sous-suite de f_n qui converge presque-partout vers f, ce qui implique que $f = 0$ est la seule limite possible. Or :

$$\|f_n\|_2 = 1$$

pour tout n, donc $\|f_n\|_2$ ne tend pas vers $\|f\|_2 = 0$ ce qui contredit le fait que f_n converge vers f dans

$$L^2([0,\ +\infty$$

2. Pour $p > 2$, on a :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)|^p dx = \int_n^{2n} n^{-\frac{p}{2}} dx = n^{1-\frac{p}{2}} \to 0,$$

quand $n \to +\infty$ donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$

Correction de l'exercice 5

Soit $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies par :

$$f_n(x) = \sqrt{n} 1_{[n,n+\frac{1}{n}]}(x) \ .$$

1. Quelque soit g continue à support compact,

$$\int_{[0,+\infty[} f_n(x)g(x)dx = \sqrt{n} \int_n^{n+\frac{1}{n}} g(x)dx \to 0$$

quand $n \to +\infty$. Par densité des fonctions continues à support compact, f_n converge faiblement vers 0. Comme f_n converge presque partout vers 0 on conclut comme précédemment que f_n ne converge pas fortement vers 0 dans $L^2([0,\ +\infty[)$ car

$$\|f_n\|_2 = 1.$$

2. Pour $p < 2$, on a :

$$\int_{[0,+\infty[} |f_n(x)| dx = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n^{\frac{p}{2}} dx = n^{\frac{p}{2}-1} \to 0,$$

donc f_n converge fortement vers 0 dans $L^p([0,+\infty[)$.

Bibliographie

[1] R. A. Adams, Sobolev spaces, Academic Press, New York, 1975.

[2] Cédric Villani. Intégration et Analyse de Fourier, Cours de première année donné à l'Ecole normale supérieure de Lyon année universitaire 2005-2006 .

[3] Le grand classique est sans conteste l'ouvrage de W. Rudin, Real and Complex Analysis (McGrawHill, New York, 1987, 3e édition), qui est également une référence précieuse pour l'analyse complexe.

[4] E. Lieb et M. Loss, Analysis (American Mathematical Society, Providence, 2001, 2e ´edition).

[5] Le cours de l'Ecole Polytechnique de J.-M. Bony, Intégration et analyse hilbertienne (édition 2001).