République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Echahid Cheikh Larbi Tébessi – Tébessa -

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie

Département de Mathématiques et de l'Informatique

Polycopié de cours

ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUES

Ce polycopié est destiné aux étudiants de **3 ème Année Licence Mathématiques**

Réalisé par :

Dr. Boumaza Nouri

Année Universitaire 2022-2023, **Cinquième Semestre**

Table des matières

Introduction

Il existe une infinité d'équationes aux dérivées partielles, mais il n'existe pas une méthode universe pour résoudre toutes celles-ci . Beaucoup de domaines sont fortement dépendants de la théorie des EDP. L'aérodynamique, la dynamique des fluides, l'électrodynamique, la géophysique, la mécanique.

Définition 0.1 *une équation aux dérivées partielles est une équation mathématique contenant en plus de la variable dépendante " u " est les variables indépendantes* $(x, y, \cdots)$ *une ou plusieurs dérivées partielles. Cette équation est ainsi de la forme :*

$$F\left(x, y, \ldots, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \ldots\right) = 0 \tag{E}$$

où F est une fonction de plusieues variabes. l'ordre d'une équation au dérivées partielle est l'ordre de la dérivée superieures, si n est le nombre de variables indépendantes, alors nous cosidérons le n-tuplet de variable indépendante $(x, y, \cdots)$ comme appartenant à un domaine D courenable (Ω, Δ) de $\mathbb{R}^n$.

- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a(x, y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} = f(x, y)$ est d'ordre 3
- $u_{xx} + u_{yy} = \Delta u = f(x, y)$ est d'ordre 2
- $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0$ est d'ordre 2
- $\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$ est d'ordre 2

Pour ce qui suit, un opérateur L désignera une trasformation qui associée à toute fonction $u = u(x, y, \cdots)$ de plusieurs variables les $x, y, \cdots$ sur un domaine D ; une fonction

$$Lu = Lu(x, y, \cdots),$$

sur ce même domaine .si $u = u(x, y)$ alors :

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial x}$$

est un exemple d'opérateur. L'équation (1) peut donc s'ècrire sous la forme

$$L(u) = f(x, y....).$$

L'opèrateur L est linéaire si

$$L(au + bv) = aL(u) + bL(v) \;\; \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Une EDP est dite linéaire si elle est de la forme $L(u) = f(x, y....)$ où L est un opérateur linéaire $f(x, y....)$ est une fonction des n variables indépendantes, $(x, y, \cdots)$ appartient à un domaine D courenable de $\mathbb{R}^n$ et u est la fonction recherchèe . Si en plus $f(x, y....) = 0$ en dit alors que l'équation est linéaire homogène. Sinon elle est non-homogène.

$$u + y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

est un EDP linéaire non-homogène (pour $D = \mathbb{R}^2$) ,où $u = u(x, y)$

$$Lu = u + y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

est un opèrateur linéaire et $f(x, y....) = L$. En effet L est linèaire car si $a, b \in \mathbb{R}$ et u, v deux fonction alors

$$\begin{aligned}
L(au + bv) &= (au + bv) + y\frac{\partial^2(au + bv)}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2(au + bv)}{\partial y^2} \\
&= a(u + y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + b(v + y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) \\
&= aLu + bLv.
\end{aligned}$$

Une autre EDP (pour $D = \mathbb{R}^2$) est :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + xu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \sin(y) \;\; \text{où } u = u(x, y)$$

cette équation n'est pas linéaire et $f(x, y....) = \sin(y)$, pour vérifier que L n'est pas linéaire il suffit de considérer par exemple les deux nombres réeles $a = b = 1$ et les deux fonctions $u = v = x^2$. Avec ces choix, nous obtenons que $L(u+v) = 16x$, $L(u) = L(v) = 4x$ et clairement que $L(u+v) \neq L(u) + L(v)$, $\left\{ L(u) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + xu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \right\}$.

Une EDP est dite quasi-linéaire si elle est linéaire par rapport à sa dérivée superieure par exemple $\Delta u + xu_x u_y = \exp(x+y)$.

- la forme général d'une EDP linéaire du 1^{er} ordre est donnée par :

$$Lu = a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y + c(x,y)\,u = g(x,y)\,.$$

- la forme général d'une EDP linéaire du $2^{ème}$ ordre est donnée par :

$$Lu = a(x,y)\,u_{xx} + 2b(x,y)\,u_{xy} + c(x,y)\,u_{yy} + d(x,y)\,u_x + e(x,y)\,u_y + f(x,y)\,u = h(x,y)\,.$$

- Certaines des èquations classique de la physique sont des EDP linéaires.
- On donne quelques problèmes qui se produisent en pratique.

Transfert de la chaleur dans une barre mince

Supposons qu'une barre métalique fine est placée le long de l'axe $\overrightarrow{ox}$. Cette barre est plongé dans l'eau de température $T = 100°c$, en suite elle est tirée de son lieu en plaçent ces extrimitées $x = 0$, $x = l$ dans la glace, de telle manière que les deux extrimitées sont à une température de $0°c$, on suppose que la surface de la barre est isolée. On veut déterminer la température $u(x,t)$ à tout instant t et en tout points de la barre, la formulation mathématique de ce problème est :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = ku_{xx} \\ u(0,x) = 100° \qquad 0 < x < l \\ u(0,t) = 0 \quad , \qquad u(l,t) = 0. \end{cases}$$

Vibration d'un transversalle d'une corde

Le deplaçement u de petite vibration transversalle d'une corde de longeur infinie le longe de l'axe $\overrightarrow{ox}$ vérifie l'EDP :

$$c^2u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

où c est une canstante avec les coditions initiales

$$u \mid_{t=0} = f(x) \text{ déplacement initiale (à l'instant } t = 0),$$
$$u \mid_{t=0} = g(x) \text{ déplacement initiale (à l'instant } t = 0).$$

le problème

$$\begin{cases} c^2u_{xx} - u_{tt} = 0 \\ u \mid_{t=0} = f(x) \\ u_t \mid_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

est dite problème de **Cauchy** pour l'équation de la corde vibrante ou bien un problème à valeur initiales (P.V.I).

Si la corde est de longeur fini dans ce cas les vibrations transversalles de cette corde sont régies par l'EDP $c^2u_{xx} - u_{tt} = 0$ avec les coditions initiales et aux limite suivantes $u \mid_{t=0} = f(x)$ déplacement initiale, $u \mid_{t=0} = g(x)$ déplacement initiale, $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. Ce dernier problème est appelée problème mixte ou problème aux limites à valeurs initiales, on peut généraliser l'équation d'une corde vibrante de la manière suivante. Supposons par exemple qu'on a une membrane de la forme d'une cercle dans le plan xoy ayant une frontière fixée, si on fait vibrer cette membrane, chaque point (x,y) de la membrane est en mouvement dans une direction $\perp$ au plan xoy , si on note par $u(x,y,t)$ le déplacement du point (x,y) du plan, qui est la position d'équilibre en tout instant t, alors l' EDP de la vibration est donnée par :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ où } a = \frac{\tau}{\rho},$$

où τ est la tension par unité de longeur, ρ est la densité du matiriel utilisé avec les conditions initiales $u\mid_{t=0}= f(x)$, $u\mid_{t=0}= g(x)$ .et la condition au bord $u\mid_{\Gamma}= 0$ où Γ est la frontière de la membrane qui est un cercle.

Electrostatique

Le champe électrostatique E dûe à une distribution de charges peut être mis sous la forme $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ u$ où u vérifie l'EDP :

$$\triangle u = \bigtriangledown^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z)$$

où f ici est la densité des charges. Cette dernière équation est appelée équation de **Poisson** en trois dimensions.

si $f = 0$, on a l'équation de **Laplace** en trois dimensions.

Chapitre 1

Equations aux dérivées partielles du premier order

1.1 EDP Linéaires du premier ordre

On appelle équation aux dérivées partielles linéaires d'order un, une équation fonctionnelle de la forme :

$$\sum_{i=0}^{n} f_i\left(x_1,...,x_n,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}=g\left(x_1,...,x_n,u\right) \tag{1.1}$$

$$f_1\left(x_1,...,x_n,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_1}+...+f_n\left(x_1,...,x_n,u\right)\frac{\partial u}{\partial x_n}=g\left(x_1,...,x_n,u\right)$$

où le f_i et g sont des fonctions donnnées de $x_1,...,x_n$ et u, où u est une fonction non connue de $x_1,...,x_n$.

Soit $\triangle$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ $(x_1,...,x_n)$ et $\Omega=\Delta\times\left]a,b\right[$ un ouvert cylindrique de $\mathbb{R}^{n+1}$ $\left(x_1,...,x_{n+1}\right)$.

Notre problème est etudier les solutions u de (E) lorsque les f_i et g sont des fonctions définies de $\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1, l'une des f_i au mois est supposée non identiquement nulle.

1.1.1 Courbes caractéristique

Avant de décrire la méthode des courbes caractéristique nous allons préablement rappeler la notion de la courbe paramétrée dans le domaine ouvert $D\subseteq\mathbb{R}^2$et de dérivée directionnelle d'une fonction de deux variable dans la direction $\overrightarrow{j}$.

Définition 1.1 *une courbe C paramétrée est l'image d'une fonction $\gamma:I\longrightarrow D$ d'un interval ouvert I de $\mathbb{R}$ vers le domaine ouvert D de $\mathbb{R}^2$définie par $s\longmapsto\gamma(s)=(x(s),y(s))$ pour tout $s\in I$ et on dit alors que γ est paramétrisation de C a mèthnous supposons que les fonctions $s\longmapsto x(s)$ et $s\longmapsto y(s)$ sont conntinûment dérivables sur I dans cette situation, le vecteur $\gamma'(s_0)=\left(x'(s_0),y'(s_0)\right)$ est un vecteur tangent à la courbe C au point $(x(s_0),y(s_0))\cdot$ Revenons maintenant à la méthode des courbes caractéristique, avant d'exposer les différents étapes* *de la méthode, nous allons premièrement illustrer celle-ci dans un exemple simple, étudions le problème à valeur initiale suivant :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + c\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ avec } u(x,0) = F(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

où $F(x)$ est une fontion réelle donnée et c est une constant réelle donnée, nous voulons déterminer toutes les solutions $u = u(x,t)$ qui satisfait à l'EDP et à la condition initiale $u(x,0) = F(x)$, cosidérons toute les courbes paramètrées ayant paramétrisation $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $s \longmapsto (x(s), t(s))$ pour toute $s \in \mathbb{R}$ et dont le vecteur tangente $\gamma'(s) = \left(x'(s), t'(s)\right)$

au point $\gamma(s) = (x(s), t(s))$ est $(c, 1)$ pour toute $s \in \mathbb{R}$, les fonction $x(s)$ et $t(s)$ satisfait aux deux équations différentielles ordinaires

$$\frac{dt}{ds} = 1 \text{ et } \frac{dx}{ds} = c.$$

Si nous fixons $t(0) = t_0$ et $x(0) = x_0$, il y a une et une seule solution à ce système d'équation différentielles, à savoire $t(s) = s + t_0$ et $x(s) = cs + x_0$ pour toute $s \in \mathbb{R}$ ces courbes $\gamma : s \longmapsto (x(s), t(s))$ sont ici des droites, si maintement nous considérons les valeurs $u(s) = (t(s), x(s))$ d'une solution u sur ces courbes alors :

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

notes que l'équation $\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ signifie que la dérivée directionnelle de $u = (t, x)$ dans la direction du vecteur tangent $\left(x'(s), t'(s)\right) = (c, 1)$ est nulle pour tout point $(x(s), t(s))$ avec $s \in \mathbb{R}$ parceque $u'(s) = 0$,nous avons que u est constante parrapport à s .noter ici que u est constante sur les courbes $s \longmapsto (x(s), t(s)) = (cs + x_0, s + t_0)$ avec $s \in \mathbb{R}$ notons que cette constante par u_0 .nous avons donc que

$$\begin{cases} x = cs + x_0 \\ t = s + t_0 \\ u = u_0 \end{cases}$$

chacune des courbes dans $\mathbb{R}^3$ donnée par la paramétrisation $s \longmapsto (x,t,u) = (cs+x_0, s+t_0, u_0)$

$$s \longmapsto (x,t,u) = (cs + x_0, s + t_0, u_0)$$

avec $s \in \mathbb{R}$ est ce qu'on appellera une courbe caractréstique.

Nous n'avons pas encore tenu couple de la condition initiale de plus nous n'avons pas pour l'instant décrit u en fonction de x et t . les valeurs initiales (x_0, t_0, u_0) peuvent aussi être paramétrisées par une courbe de valeurs initiales $x_0 = \tau, t_0 = 0, u_0 = F(\tau)$ avec $\tau \in \mathbb{R}$.

Donc

$$\begin{cases} x(s,\tau) = cs + \tau \\ t(s,\tau) = s \\ u(s,\tau) = F(\tau) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} s = t \\ \tau = x - cs = x - ct \end{cases}$$

Alors : $u = F(\tau) = F(x - ct)$ c'est la solution recherchée au problème.

Vérification

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cF'(x-ct) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x} = F\prime(x-ct) \Longrightarrow \frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ et } u(x,0) = F(x-ct) = F(x).$$

Dans cette solution $u(x,t) = F(x - ct)$ nous voyons que l'information initiale $u(x,0) = F(x)$ est transmise le long des courbes caractréstiques, c'est -à-dire que $u(x,t)$ est constant pour tous les points (x,t) tels que $x - ct$ est une constante, ici les courbes caractréstiques sont de la forme $x - ct = k$ où k est une constante.

1) soit $f(x,y)$ une fonction définie sur le domaine D, $(x,y) \in D$ et $\overrightarrow{d} = (d_1, d_2)$ une direction c'est -à-dire que $\overrightarrow{d}$ est un vecteur normal de $\mathbb{R}^2$. Alors la dérivée diréctionnelle

f au point (x_0, y_0) dans la direction $\overrightarrow{d}$ est

$$\begin{aligned}
\grave{f}((x_0, y_0); \overrightarrow{d}) &= \lim_{t\to 0}\left(\frac{f(x_0 + td_1, y_0 + td_2) - f(x_0, y_0)}{t}\right) \\
\text{ou } \grave{f}((x_0, y_0); \overrightarrow{d}) &= \frac{\partial f}{\partial x}\mid_{(x_0,y_0)} d_1 + \frac{\partial f}{\partial x}\mid_{(x_0,y_0)} d_2 = \overrightarrow{\nabla} f \mid_{(x_0,y_0)} \overrightarrow{d} \\
\text{ou } \overrightarrow{\nabla} f &= \overrightarrow{\text{grad}} f.
\end{aligned}$$

1.1.2 Courbes caractréstiques associées à l'équation (1.1)

Considérons le système différentiel (1.2) associé à l'équation (1.1)

$$\begin{cases}
\dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \cdots, x_n, u) \\
\dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \cdots, x_n, u) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad \text{Systéme caractréstique} \\
\dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \cdots, x_n, u) \\
\dfrac{dz}{dt} = g(x_1, \cdots, x_n, u),
\end{cases} \tag{1.2}$$

qu'on écrit sous une forme symétrique

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n} = dt.$$

Toute solution de ce système représente une courbe dans $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ appelleé courbe caractréstique associée à l'équation (1.1)

$$\begin{cases}
x_1 = \Psi_1(t) \\
x_2 = \Psi_2(t) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
x_n = \Psi_n(t) \\
z = \Psi_{n+1}(t).
\end{cases}$$

Théorème 1.1 *Par une point $\mu_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0) \in \Omega$ passe une courbe caractréstique unique Γ_{μ_0} contenue dans Ω ($\Gamma_{\mu_0} \subset \Omega$).*

1.1.3 Intégrales premières de (1.2)

Théorème 1.2

Il existe n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ de classe C^1. $\Omega \in \mathbb{R}$, telles que $\forall \mu_0 \in \Omega$, la courbe caractréstique Γ_{μ_0} a pour équations :

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \cdots, x_n, u) = c_1 \\ \varphi_2(x_1, \cdots, x_n, u) = c_2 \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1, \cdots, x_n, u) = c_n \end{cases}$$

où les c_i sont des constantes (vérifiants evidament) et $\varphi_i(x_1^0, \cdots, x_n^0, u) = c_i$.

Les fonctions c_i sont indépendantes dans Ω c-à-d qu'il ne peux exister une relation fonctionnelle $\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n) = 0$ identiquement vérifiée parraport à $x_1, \cdots, x_n$ .ceci est équivalante à la condition suivante :
La matrice Jacobien

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \text{ telque } rang\ A = n\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \Omega$$

Définition 1.2 *Les fonctions* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ *sont appellés Intégrales premières de* (1.2).

Remarque 1.1 *Le long de la courbe P_{M_0}, les fonctions φ_i restent constantes, donc chaque intégrale premier reste constante sur une courbe caractéristique et sa valeur sur Γ est déterminée, elle change lorsque on passe de la courbe P à une autre courbe caractéristique.*

1.1.4 Surfaces intégrales de (1.1), résolution de (1.1)

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, ..., x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = g\left(x_1, ..., x_n, u\right),$$

$$\frac{dx_1}{f_1} = \frac{dx_2}{f_2} = ... = \frac{dx_n}{f_n} = \frac{du}{g},$$

$$\varphi_i\left(x_1, ..., x_n, u\right) = \varphi_i \quad sur\ \Gamma \Rightarrow \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + ... + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}\frac{du}{dt} = 0,$$

$$f_1\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} + f_2\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2} + f_3\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_3} + ... + f_n\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_n} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial z}g = 0 \quad sur \quad \Gamma$$

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{d\varphi_i}{dt} g = 0,$$

si l'on connait n intégrale premieres indépondantes $\varphi_1, ..., \varphi_n$ du système caractéristique (1.2). La théorie des intégrales premières montre que les surfaces intégrales (solutions) de (1.1) ont pour équation :

$$F\left(\varphi_1\left(x_1, ..., x_n, z\right), ..., \varphi_n\left(x_1, ..., x_n, z\right)\right) = 0, \tag{1.3}$$

où F est une fonction arbitraire de classe C^1 par rapport à ces argument, ont écrit symboliquement

$$F\left(C_1, ..., C_n\right) = 0.$$

- La solution générale de EDP contient une fonction arbitraire t'ont dit que la solution générale d'une EDO du 1^{er} ordre ne contient qu'une constante arbitraire.
- Il existe des solution de (1.1) qui échape la formule (1.3) sont dit solutions singulières.

- Supposon que parmis les fonctions $\varphi_1, ..., \varphi_n$, une seule (par exemple φ_1) contienne u on pouras écrire la relation (1.3) sous la forme $\varphi_1 = G(\varphi_2, ..., \varphi_n)$

1) Intégrer l'équation aux dérivée partielle homogène suivante :

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \tag{1.4}$$

on associée à l'équation (1.4) le système caractéristique

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}, \ du = 0,$$

qui admet les intégrales premières

$$\begin{aligned} C_1 &= x^2 + y^2 \\ C_2 &= u \end{aligned}$$

où C_1, C_2 sont des constantes arbitraires.

La solution générale de u est donnée par la relation $C_2 = G(C_1)$ (ie) $u = G(x^2 + y^2)$, où G est de classe C^1.

2) Intégrer l' EDP suivante :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \frac{\partial u}{\partial x_k} = mu, \quad m \ \text{ constante donnée,} \tag{1.5}$$

le système caractéristique

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = ... = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{mu}$$

les intégrales premières

$$\frac{x_2}{x_1} = C_1, \ \frac{x_3}{x_1} = C_2, \ .....\frac{x_n}{x_1} = C_{n-1}, \frac{u}{x_1^m} = C_n$$

ces integrales premières sont indépondantes, la surface intégrale (solution) de (1.5) à pour équation $C_n = G(C_1, C_2, ..., C_{n-1})$ ou G est de classe C^1,tellque :

$$\frac{u}{x_1^m} = G\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)$$

alors la solution est

$$u = x_1^m G\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, ..., \frac{x_n}{x_1}\right)$$

3) Intégrer l' EDP suivante

$$xy^2\frac{\partial u}{\partial x} - x^2y\frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 + y^2\right)u \tag{1.6}$$

on lui associé le sysyème différentiel :

$$\frac{dx}{xy^2} = \frac{dy}{x^2y} = \frac{du}{(x^2 + y^2)\,u}$$

on tire facilement, des deux premiers rapports, l'intégrale première :

$$\varphi_1(x, y) = x^2 - y^2 = C_1$$

puis, en additionnant les numérateurs puis les dénominateurs des deux premiers rapports, on obtient l'équation

$$\frac{ydx + xdy}{xy^3 + x^3y} = \frac{du}{(x^2 + y^2)\,u}$$

d'où on déduit une autre intégrale première :

$$\frac{u}{xy} = C_2$$

un calcul simple montre qu'on démontre que C_1 et C_2 sont indépendants

alors les surfaces intégrales ont pour équation

$$C_2 = G(C_1) \quad \text{c.a.d} \quad u = xyG\left(x^2 - y^2\right) \quad /G \text{ de classe } C^1$$

4) Intégrer l' EDP suivant :

$$u\frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{1 - u^2}, u = u(x, y) \tag{1.7}$$

dans cette équation y jous simplement le role d'un parametre, on peut donc consideré l'équation (1.7) comme une équation différentielle ordinaire :

$$\frac{udu}{dx} = \sqrt{1 - u^2}$$

on sépare les variables

$$\frac{udu}{\sqrt{1-u^2}} = dx \quad d'ou \quad -\frac{-2udu}{2\sqrt{1-u^2}} = dx$$

c.a.d $d\left(\sqrt{1-u^2}\right) = -dx$ alors $\sqrt{1-u^2} = -x + H(y)$ où H est une fonction arbitraire

$$\begin{cases} 1-u^2 = (-x+H(y))^2 \\ -x+H(y) \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 1-(-x+H(y))^2 \\ -x+H(y) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \pm\sqrt{1-(-x+H(y))^2} \\ H(y) \geqslant x \end{cases} \tag{1.8}$$

la solution de (1.7) apartienne à la famille de surface

$$u = \pm\sqrt{1-(-x+H(y))^2},$$

il est claire que le plans $u = 1$ est une surface solution de (1.7), alors que $u = 1$ ne verifie pas (1.8) c'est une solution singulière de l'équation (1.7).

1.1.5 Interprétation géometrique du problème de Cauchy

Ecrivons l'équation (E) étudiée sous la forme

$$f_1(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y} = g(x,y,u) \tag{1.9}$$

le système différentielle caractéristique s'écrire sous la forme

$$\frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{du}{g}$$

les courbes caractéristique sous la forme

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y,u) = C_1 \\ \varphi_2(x,y,u) = C_2 \end{cases}$$

Problème de Cauchy

Théorème Pour toute courbe Γ caractéristique en aucun point passe une solution unique de (1.9) on l'appelle la solution au problème de Cauchy relatif à Γ.

pour écrire la solution générale de (1.1), on établie une relation entre C_1 et C_2 c.a.d entre φ_1 et φ_2 de la forme

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0,$$

où F est une fonction arbitraire de classe C^1.
Si l'on choisit d'une façon determinée la fonction F, la surface H sera constituée des courbes caractéristiques correspondant aux paires des constantes (C_1, C_2) qui verifiée la relation

$$F(C_1, C_2) = 0$$

géométriquement cela signifie que toute surface intégrale d'une E.D.P linéaire du 1^{er} ordre est formée par une famille de courbes caractéristiques (sauf les solutions singulières).

Rappeles géometriques

1 L'équation d'un plans dans $\mathbb{R}^3$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

avec $(A, B, C) \neq (0, 0, 0)$ la normale à ce plans est dirigée par le vecteur (A, B, C)

2 Soit f une fonction numérique définie sur un voisinage V de point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $f : V \to \mathbb{R}$ et soit Σ sont graphe c.a.d la surface de l'équation $u = f(x, y) \ /(x, y) \in V$, si est differentiable au point (x_0, y_0) alors admet le plan d'équation

$$u - f(x_0, y_0) = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

pour plan tangent géométrique au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ de pluse la normale à Σ au point (x_0, y_0, u_0) et derigé par le recteur $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$ les fonction f_1, f_2, g définie un champ de direction dans l'espace (x, y, u) en champ point de cette espace il existe une direction définite par le vecteur (f_1, f_2, g) ce champ de diriction définit une famille de courbe telque la tangent à chaqu une d'elle est can foudue avec la direction du champ au point de contacte cette famille de courbe sobtien par integration du systéme E.D.O

$$\frac{dx}{f_1(x,y,u)} = \frac{dy}{f_2(x,y,u)} = \frac{du}{g(x,y,u)}$$

donc par conséquant ces courbes ne sont autre que les courbes caractéristique de l'équation (1.9).

Notons pas $u = u(x,y)$ une surface solution de l'équation (1.9) alors le plans tangente à cette surface aux point (x_0, y_0, u_0) à pour équation

$$u - u(x_0, y_0) = (x - x_0)\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + (y - y_0)\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0)$$

d'où la normale à cette surface au point $(x_0, y_0, u_0(x_0, y_0))$ est dérigée par le vecteur $\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, -1\right)$ et l'équation (1.9) $\frac{\partial u}{\partial x}f_1 + f_2\frac{\partial u}{\partial y} + (-1)g = 0$, exprime la condition d'orthogonalité de la normale à la surface $u = u(x,y)$ et de la direction du champ point, (i.e) l'équation (1.9) traduit le fait qu'en chauqe points de la surface solution $u = u(x,y)$, le vecteur (f_1, f_2, g) se trouve dans le plans tangent à la surface S, ainsi on peut conclure les solution de (1.9) sont les surface S.

Si une surface S d'équation $u = u(x,y)$ et constitué par une famille de caractéristique de l'équation (1.9). alors en chaque point $M \in S$ la tangent à une courb Γ de S possont par M et constenue dans le plans tangent à une courbe Γ en M et par suite il en est de même pour le vecteur (f_1, f_2, g) correspondant au point M , qui signifie que S est une surface solution de (1.9) ,on déduire que si une surface $u = u(x,y)$ est formée par une famille caractéristique de l'équation (1.9) alors est une surface intégrale de l'équation (1.9), réciproquement il et possible de construire sur une surface de solution de (1.9) une famille de courbe caractéristique.

- Le problème de cauchy pour l'E.D.P d'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial x} f_1 (x, y, u) + \frac{\partial u}{\partial y} f_2 (x, y, u) = g (x, y, u)$$

consiste à trouver une surface intégrale passant par une courbe donnée (L'). la projectée de la courbe (L) sur le plan (xOy), le problème posée sera même à la recherche d'une solution de (1.9) qui prend des valeur S données sur la courb (L').
- Si (L) n'est pas courbe caractéristique de (1.9) la surface cherchée s'obtient comme réuinion des courbes caractéristiques qui rencontre (L)
- Si ces caractéristiques engendrent une surface S d'équation $u = u (x, y)$, cette surface qui passe par la courb (L) est la solution cherchée
- Si (L) est une courbe caracteristique, le problème de Cauchy peut admetre une infinitée de solution, on dit qu'il ya un détérmination, toute famille des caractéristiques à l'aquelle apartienne (L) est la solution du problème posée.

Remarque 1.2 *Le problème de Cauchy peut n'avoir aucune solution, ceci correspendant au cas où les caractéristiques passant par les points de (L) ne forme pas aux voisinage de (L) une surface d'équation $u = u (x, y)$ où u est une fonction de classe C^1.*

1.1.6 Méthode pratique de résolution du problème de Cauchy

Supposons que la courbe non caractéristique (L) est définie par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \Psi_1 (x, y, u) = 0, \\ \Psi_2 (x, y, u) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Pour trouver la solution de (1.1) qui contient la courbe (L) on élimine entre les 4 équation (1.10) et (1.11) les variable x, y, u ce qui permet d'obtenire une relation entre C_1 et C_2 qui en vertue de S.

$$F (C_1, C_2) = 0$$

définie la forme de la fonction F qu'il faut prendre pour que la relation

$$F(\varphi_1, \varphi_2) = 0$$

donne la surface chercheé qui passe par (L)

$$(\Gamma) \begin{cases} \varphi_1(x, y, u) = C_1 \\ \varphi_2(x, y, u) = C_2 \end{cases} \tag{1.11}$$

Exemple 1.1 *Trouver la solution de l'équation*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

qui psse par l'éllipse (L)

$$\begin{cases} x^2 + (y-a)^2 = r^2 \\ z = my \end{cases}, (a, m) \neq (0, 0).$$

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}, dz = 0, \varphi_1 = x^2 + y^2 = C_1, \varphi_2 = u = C_2$$

donc φ_1 et φ_2 sont indépendantes, donc la solution générale de l'E.D.P considirée est $u = G(x^2 + y^2)$,

la surface intégrale cherchée est définie par les relation

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1, \\ u = C_2 \\ x^2 + (y-a)^2 = r^2 \\ u = my \end{cases}$$

il vient $y = \dfrac{C_2}{m}, \quad C_1 + a^2 - r^2 = \dfrac{2a}{m}C_2,$

d'où la relation existant entre C_1 et C_2 :

$$C_2 = \frac{m}{2a}\left(C_1 + a^2 - r^2\right)$$

ce qui définie la fonction G comme suit

$$G(\alpha) = \frac{m}{2a}\left(\alpha + a^2 - r^2\right)$$

et donc l'équation de la surface cherchée est

$$x^2 + y^2 - \frac{m}{2a}u + a^2 - r^2 = 0.$$

Si $a = 0$ et $m = 0$, le cercle donné devient caractéristique, le problème de Cauchy est indétaminée.

1.2 EDP Quasi-linéaires du premier ordre

Définition 1.3 *Une equation aux dérivées partielles quasi-linéaire est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre le plus elevé de la fonction u.*

Définition 1.4 *On appelle équation aux dérivées partielles linéaires d'order un, une équation fonctionnelle de la forme :*

$$f_1(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + ... + f_n(x_1, ..., x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = g(x_1, ..., x_n, u)$$

où le f_i et g sont des fonctions donnnées de $x_1, ..., x_n$ et u, où u est une fonction non connue de $x_1, ..., x_n$.

Exemple 1.2

$$\frac{\partial u}{\partial x} - u^3\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

1.3 EDP non Linéaires du premier ordre

Soit l'équation aux dérivée partielle non linéaire d'ordre 1

$$F(x,y,z,p,q)=0 \tag{1.12}$$

où $p=\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $z=z(x,y)$

1.3.1 Enveloppes De surface

Enveloppes à un paramètre

Considérons la famille de sphères d'équation

$$\varphi(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+(z-\lambda)^2-1=0$$

toutes les sphères sont centrées sur l'axe des z au point w_λ de coté λ, toutes les sphères S_λ sont tangentes au cylindre Σ de rayon 1 et d'axe oz. La sphère S_λ est tangente à Σ tout le long du cercle Γ_λ de centre w_λ et de rayon 1.

Réciproquement en tout point de coté μ de Σ passe un cercle Γ_λ horizentale, le long duquel S_μ est tangente à Σ , on dit que Σ est l'enveloppes de la famille S_λ lorsque λ varie et que Γ_λ et la courbe caractéristique de S_λ.

Soit $\Gamma_{\lambda,\mu}$ l'intersection de S_λ *et* S_μ, lorsque $\mu\to\lambda$ alors $\Gamma_{\lambda,\mu}\to\Gamma_\lambda$, Γ_λ à pour équation

$$\begin{cases}\varphi(x,y,z,\lambda)=0\\ \varphi(x,y,z,\mu)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\varphi_1(x,y,z,\lambda)=0\\ \dfrac{1}{\lambda-\mu}\left(\varphi(x,y,z,\lambda)-\varphi(x,y,z,\mu)\right)=0 \quad (\lambda\neq\mu)\end{cases}$$

$$\mu\to\lambda\begin{cases}\varphi(x,y,z,\lambda)=0\\ \dfrac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x,y,z,\lambda)=0\end{cases}$$

ce sont les équation de $\Gamma_\lambda, \Sigma = \cup\Gamma_\lambda$ l'équation Σ s'obtient en éliminant λ entre ces 2 équation. En effet on a

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z,\lambda) &= x^2+y^2+(z-\lambda)^2-1=0\\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x,y,z,\lambda) &= -2(z-\lambda)=0\end{aligned}$$

alors

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=\lambda \end{cases} \quad \text{l'équation } \Sigma \text{ est bien } x^2+y^2=1.$$

Définition 1.5 *Soit (S_λ) une famille de surfaces dépendant d'un parmètre λ d'équation $\varphi(x,y,z,\lambda) = 0$, on suppose φ de classe C^2 et $\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\varphi(x,y,z,\lambda) \neq 0$. on appelle courbe caractéristique de S la courbe Γ_λ si elle existe, située sur S_λ d'équation Γ_λ*

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z,\lambda)=0 \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x,y,z,\lambda)=0 \end{cases} \quad (i.e)\ \Gamma_\lambda \subset S_\lambda.$$

La surface engendrée par les courbe Γ_λ (i.e $\Sigma = \cup\Gamma_\lambda$) s'appelle envellope de la famille (S_λ), Σ et S_λ $(\forall\lambda)$ sont tengentes le longe de Γ_λ l'équation de Σ s'obtient en éliminant λ entre les équation de Γ_λ.

Remarque 1.3 *Une famille n'a pas toujours d'envellope, aussi les sphères d'équation*

$$x^2+y^2+z^2=\lambda$$

n'ont pas d'envoloppes car

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x,y,z,\lambda)=-1$$

n'est jamais nul

$$\varphi(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda.$$

Familles à deux paramètres

Considérons les sphères $S_{\lambda,\mu}$ de rayon 1 centrées dans le plan $z = 0$ au point $w_{\lambda,\mu}$ de coordonnées $x = \lambda, y = \mu$ elles sont toutes tangents aux plans $z = +1$ et $z = -1$ aux points $P_{\lambda,\mu}$ et $Q_{\lambda,\mu}$ de cordonnées $(\lambda, \mu, 1), (\lambda, \mu, -1)$ réspectivement ces points s'appellent point caractéristique de $S_{\lambda,\mu}$ et on constate qu'ils sont solution des équations :

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, \lambda) = (x - \lambda)^2 + (y - \mu)^2 + z^2 - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\varphi(x, y, z, \lambda) = -2(x - \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \mu}\varphi(x, y, z, \lambda) = -2(y - \mu) = 0 \end{cases}$$

à tout fonction h de classe C^2 et associée une famille à un paramètre $\varphi(x, y, z, \lambda, h(\lambda))$, ce sont des sphères centrées sur la courbe $z = 0, h(\lambda) = \mu$, ces sphères ont une enveloppe qui s'appelle envloppe à un paramètre de la famille $S_{\lambda,\mu}$, toutes les enveloppes à un paramètre sont tangent aux plans

$$z = H_0 \ \left((i.e)\ S_{\lambda,\mu} \to S_{\lambda,h(\lambda)} \to \Sigma_h\right), \cup \{P_{\lambda,\mu}, Q_{\lambda,\mu}\} = \Sigma_h.$$

Définition 1.6 *Soit $(S_{\lambda,\mu})$ une famille de surfaces dépendant de 2 paramètres λ et μ d'équation*

$$\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0,$$

on suppose φ de classe C^2 et qu'une des dérivées d'ordre 2 en λ et μ est non nulle, on appelle point caractéristique de $S_{\lambda,\mu}$ un point telque :

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \lambda}\varphi(x, y, z, \lambda) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \mu}\varphi(x, y, z, \lambda) = 0 \end{cases}$$

l'ensembles des points caractéristique, s'il n'est pas vide forme une surface Σ *appelée enveloppe de la famille à deux paramètres* $(S_{\lambda,\mu})$, $\Sigma = \{z = +1\} \cup \{z = -1\}$.
Toutes les surfaces $S_{\lambda,\mu}$ *sont tangentes à* Σ *en leurs points caractéristiques.*

Soit h *une fonction de classe* C^2, *si la famille d'équation*

$$\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0$$

admet une enveloppe Σ_λ, *celle ci s'appelle enveloppes à 1 penamètre de la famille* $(S_{\lambda,\mu})$, *les surfaces* Σ_λ *sont tangentes à* $\Sigma \to W_{\lambda,\mu}$

$$\begin{cases} z = 0 \\ y = h(\lambda) \end{cases}$$

Remarque 1.4 *Il n'existe pas toujours d'enveloppes d'une famille à deux parmètres, les sphéres* $S_{\lambda,\mu}$ *d'équation*

$$(x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 = \mu$$

n'ont pas d'enveloppes car

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = -1$$

n'est jamais nul, par contre la famille à un paramètre extraite d'équation suivante

$$(x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 - \frac{\lambda^2}{4} = 0$$

$\left(\mu = h(\lambda) = \dfrac{\lambda^2}{4}\right)$ *à un envellppe la courbe caracteristique de* $S_{\lambda,\frac{\lambda^2}{4}}$ *est donné par*

$$\begin{cases} (x - \lambda)^2 + y^2 + z^2 - \dfrac{\lambda^2}{4} = 0 \\ -2(x - \lambda) - \dfrac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2\lambda x + y^2 + z^2 + \dfrac{z\lambda^2}{4} = 0 \\ -2x + \dfrac{3\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

éliminons λ *entre ces deux équation* $\lambda = \frac{4x}{3}$

$$x^2 - 2\left(\frac{4x}{3}\right)x + y^2 + z^2 + \frac{z}{4}\left(\frac{4x}{3}\right)^2 = 0$$

alors

$$\frac{-x^2}{3} + y^2 + z^2 = 0 \text{ \textit{équation de} } \Sigma_\lambda$$

1.3.2 Solutions complètes, singulières pour l'équation non linéaire d'ordre 1

Définition : on appelle intégrale complète de (1.12), une famille de solution définie implicitement par la relation

$$\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \tag{1.13}$$

contenant deux paramètres independants λ et μ, en éliminamt les constantes arbitraires λ et μ alors on dit que (1.13) est la solution complète de (1.12), cette solution complète représente une famille de surfaces à deux paramètres qui peut avoir ou ne pas avoir d'envellppe pour trouver celle ci, si elle existe on élimine λ et μ entre

$$\begin{cases} \varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial\mu}\varphi(x, y, z, \lambda, \mu) = 0 \end{cases}$$

Si l'équation obtenue par l'éliniation

$$g(x, y, z) = 0$$

vérifie (1) on l'appelle la solution singulière de (1.12) si

$$g(x, y, z) = g_1(x, y, z) . g_2(x, y, z)$$

et si $g_1 = 0$ vérifie (1.12), $g_2 = 0$ ne vérifiant pas (1.12), alors $g_1 = 0$ est la solution singulière peut s'obtenir à partirde l'E.D.P en éliminant p et q entre

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, p, q) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \mu}(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

Exercice vérifions que $z = \lambda x + \mu y - (\lambda^2 + \mu^2)$ est une solution complète de

$$z = px + qy - (p^2 + q^2) \tag{1.14}$$

En éliminant λ et μ entre

$$\begin{cases} \varphi = \lambda x + \mu y - (\lambda^2 + \mu^2) = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -x + 2\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial \mu} = -y + 2\mu = 0 \end{cases}$$

on a

$$z = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$$

cette fonction vérifie l'équation différentielle et c'est la solution singuliére. la solution compléte représente une famille de plans à deux bramètres qui enrelloppe le paraboloide $x^2 + y^2 = 4z$

Solutions générales

si dans la solution complète (1.13) l'une des constantes soit μ est remplacée par une fonction connue de l'autre constante soit $\mu = h(\lambda)$ alors

$$\varphi(x, y, z, \lambda, h(\lambda)) = 0$$

est une famille de surface de (1.12) à un paramètre, si cette famille a une enveloppe, son éqation peut se trouver comme d'habitude en éliminant λ d'entre

$$\begin{cases} \varphi\left(x,y,z,\lambda,h\left(\lambda\right)\right)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\left(x,y,z,\lambda,h\left(\lambda\right)\right)=0 \end{cases}$$

Exemple on pose $\mu = h(\lambda)$ dans la solution complète de l'exemple (1.14), le resultat de l'élimination de λ entre

$$\varphi = z - \lambda\left(x+y\right) + 2\lambda^2 = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = -\left(x+y\right) + 4\lambda,$$

est $z = \dfrac{1}{8}\left(x+y\right)^2$, on l'appelle la solution générale.

système complètement intégrables de deux E.D.P du 1^{er} ordre

Considérons un système de deux E.D.P du 1^{er} ordre vérifiées par une même fonction inconnue x, y, z

$$\begin{cases} F\left(x,y,z,p,q\right)=0 \\ G\left(x,y,z,p,q\right)=0 \end{cases} \tag{1.15}$$

admettons qu'on puisse résondre ces deux équations par rapport à p et q

$$\begin{cases} p = f\left(x,y,z\right) \\ q = g\left(x,y,z\right) \end{cases} \tag{1.16}$$

Définition on dit que le système (1.15) ou (1.16) est complètement intégrable s'il admet une solution dépendant d'une constante arbitraire.

cherchons une condition nécessaire et suffisente d'une telle solution

$$\frac{\partial z}{\partial y\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x\partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}g = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}f \tag{1.17}$$

Si la relation (1.17) entre les variables x, y, z n'est pas vérifiée identiquement (en tous point) alors elle définie z, comme une fonction de x, y $(z = z(x, y))$ et seule cette fonction qui ne contient pas de constante arbitraire peut être une solution du système (1.15) donc la réalisation de la relation1.174) pour tout x, y, z est une condition nécessaire pourque le système (1.15) soit intégrable.

Montrons qu'elle est suffisante :

Considérons l'équation $p = f(x, y, z)$ comme une équation différentielle entre x, y, z un paramètre, l'intégrale générale de cette équation $p = f(x, y, z,)$ est de la forme

$$z = \varphi(x, y, C(y)) \tag{1.18}$$

où C est une fonction dependant de y. En portant (1.18) dans $q = g(x, y, z)$

on obtient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial C}\frac{dC}{dy} = g(x, y, \varphi x, y, C(y))$$

$$\frac{dC}{dy} = \frac{g(x, y, \varphi) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial C}} \tag{1.19}$$

la relation (1.19) permet de déterminer la fonction $C(y)$ à une constante μ à condition que la seconde membre de (1.19) ne contient pas x. Montrons que ceci est vérifie si (1.17) est réalisé en tous point annutons la dérivée de seconde mambre de (1.19) par rapport a x

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial C} - \left(g - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial C} \tag{1.20}$$

comme $z = \varphi(x, y, C)$ vérifie l'équation $p = f(x, y, z)$ on a $f = p = \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial C} = \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial C}$$

D'ou

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}f-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}g\right)\frac{\partial \varphi}{\partial C}-\left(g-\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial C} &= 0\\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}g=\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial z}f\end{aligned}$$

ce qui est vrais d'aprés (1.17). aussi en peut moncé le resultat suivante pour lesystème (1.15) soit completement integrable (c.à.d admet une famille à 2 paramètre) si seulment si la condition (1.17) soit verifie au point du domaine.

1.3.3 Méthode d'intégration de Lagrange-Charpit

Cette méthode est une générale de construction du intégrale complète d'une E.D.P du 1^{er} ordre

$$F(x,y,z,p,q)=0 \tag{1.21}$$

associons à (1.21) une seconde équation de la forme

$$G(x,y,z,p,q)=\lambda \tag{1.22}$$

où λ est un paramètre et cherchons à déterminer la fonction G de 5 variables de façons tellque c'est deux équations (1.21) et (1.22) forme un système complètement intégrable, dans ce cas les solution du système (1.21) et (1.22) dépendent d'une constante μ. et donc constituent une famille de solution S de (1) dépendante de 2 paramètres λ et μ c'est bien une intégrale complète de (1.21), la condition d'intégrabilité complète du (1.21) et (1.22) s'écrit :

$$\frac{\partial p}{\partial y}+q\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial q}{\partial y}+p\frac{\partial q}{\partial z} \tag{1.23}$$

calculons la dérivées partielle dans cette identitée, on utilisons les régles de dérivation des fonction implicite p et q de (x,y,z) définie par (1.21) et (1.22)

Notations :

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial F}{\partial x}, F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, F_z = \frac{\partial F}{\partial z}, F_p = \frac{\partial F}{\partial p}, F_q = \frac{\partial F}{\partial q} \\ G_x &= \frac{\partial G}{\partial x}, G_y = \frac{\partial G}{\partial y}, G_z = \frac{\partial G}{\partial z}, G_p = \frac{\partial G}{\partial p}, G_q = \frac{\partial G}{\partial q} \end{aligned}$$

(F et G des fonction de 5 variables) indépendante de x, y, z, p, q

Dérivons (1.21) et (1.22) par rapport à z

$$\begin{cases} F_z + F_p \dfrac{\partial p}{\partial z} + F_q \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0 \\ G_z + G_p \dfrac{\partial p}{\partial z} + G_q \dfrac{\partial q}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

tellque

$$\det \begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix} = \frac{D(F,G)}{D(p,q)} \neq 0$$

comme on doit supposé que F, G ne sont pas liée par une relation fonctionnelle ce jacobien n'est pas nul d'on en tire.

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} F_z & F_q \\ G_z & G_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\begin{vmatrix} F_p & F_z \\ G_p & G_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}$$

De même, on dérivons (1.21) et (1.22) par rapport à x, puis pa rapport à y, on obtient

$$\begin{cases} F_x + F_p \dfrac{\partial p}{\partial x} + F_q \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0 \\ G_x + G_p \dfrac{\partial p}{\partial x} + G_q \dfrac{\partial q}{\partial x} = 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{\begin{vmatrix} F_p & F_x \\ G_p & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}$$

$$\begin{cases} F_x + F_p \dfrac{\partial p}{\partial y} + F_q \dfrac{\partial q}{\partial y} = 0 \\ G_x + G_p \dfrac{\partial p}{\partial y} + G_q \dfrac{\partial q}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad , \quad \frac{\partial q}{\partial y} = -\frac{\begin{vmatrix} F_y & F_q \\ G_y & G_q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_p & F_q \\ G_p & G_q \end{vmatrix}}$$

la condition (1.17) devient

$$F_p G_x + F_q G_y + (qF_q + pF_p) G_z - (F_x + pF_z) G_p - (F_y + qF_z) G_q = 0 \tag{1.24}$$

c'est une E.D.P liniaire du 1^{er} ordre d'inconnue G, fonction de 5 variables x, y, z, p, q, son système caractéristique

$$\frac{dx}{F_q} = \frac{dy}{F_q} = \frac{dz}{qF_q + pF_p} = -\frac{dp}{F_x + pF_z} = -\frac{dq}{F_y + qF_z} \tag{1.25}$$

Tout intégrale première de ce système contenant p et q fournit une fonction $G(x, y, z, p, q)$

1.3.4 Cas particuliers

1^{er} *cas* : l'équation (1.21) ne contient pas l'inconnue z

$$F(x, y, p, q) = 0 \tag{1.26}$$

on associe $G(x, y, z, p, q) = \lambda$

la condition (1.17) devient $F_p G_x + F_q G_y - F_x G_p - F_y G_q = 0$

le système caractéristique associé est

$$\frac{dx}{F_q} = \frac{dy}{F_q} = -\frac{dp}{F_x} = -\frac{dq}{F_y} \tag{1.27}$$

Exemple

chercher une intégrale complète de l'E.D.P suivante

$$xpq + yq^2 - 1 = 0 \tag{1.28}$$

posons $F(x, y, z, p, q) = xpq + yq^2 - 1$

le système caractéristique est

$$\frac{dx}{xq} = \frac{dy}{xp + 2yq} = -\frac{dp}{pq} = -\frac{dq}{q^2} \tag{1.29}$$

les deux derniers rapports donnent

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}; \frac{p}{q} = \lambda; \quad \lambda \ \ \mathrm{C}^{st}\text{arbitrere} \tag{1.30}$$

$$G(p, q) = \frac{p}{q}$$

$$\frac{D(F, G)}{D(p, q)} = \begin{vmatrix} xq & xp + 2yp \\ \frac{1}{q} & -\frac{p}{q^2} \end{vmatrix} = \frac{-2xp}{q} - 2y \neq 0$$

Résolvons le système par rapport à p

$$\begin{cases} (\lambda x + y) q^2 = 1 \\ p = \lambda q \end{cases} \tag{1.31}$$

D'autre part

$$p^2 (\lambda x + y) = \lambda^2 \tag{1.32}$$

et on a

$$p = \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{\lambda x + y}} \tag{1.33}$$

$$q = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda x + y}}, \ \ avec\ \varepsilon = \pm 1 \tag{1.34}$$

Considerons (133) comme une équation différentielle d'inconnue z fonction de x, où y est un paramètre

$$dz = \frac{\varepsilon\lambda}{\sqrt{\lambda x + y}} dx$$

on obtient

$$z = 2\varepsilon\sqrt{\lambda x + y} + C\left(y\right) \tag{1.35}$$

où $C\left(y\right)$ est une fonction de y. remplaçant (1.35) dans (1.34) on obtient

$$\frac{2\varepsilon}{2\sqrt{\lambda x + y}} + C'\left(y\right) = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda x + y}} \Leftrightarrow C'\left(y\right) = 0 \Leftrightarrow C\left(y\right) = \mu$$

μ : C^{st} la solution de l'équation donnée ou (1.33)-(1.34) est alors

$$z = 2\varepsilon\sqrt{\lambda x + y} + \mu$$

soit $\left(z - \mu\right)^2 = 4\left(\lambda x + y\right)$ où λ et μ sont deux constantes indépendantes.

2ème *cas* :

$$F\left(z, p, q\right) = 0 \tag{1.36}$$

dans le cas où l'équation données est de cette forme, on peut chercher directement une intégrale complète sous la forme suivante

$$\varphi\left(z, x + \lambda y, \mu\right) = 0 \tag{1.37}$$

pour cela, on pose $z = f\left(x + \lambda y\right), u = x + \lambda y$ et on résoud l'équation différentielle

$$F = \Big(f\left(u\right), f'\left(u\right), \lambda f'\left(u\right)\Big) = 0 \tag{1.38}$$

puis on utilise le changement $u = x + \lambda y$.

Exemple

soit l'équation

$$z^2\left(p^2+q^2+1\right)=1 \tag{1.39}$$

elle ne contient ni x, ni y, on en cherche une solution de type :

$$z=f\left(x+\lambda y\right) \tag{1.40}$$

λ étant un paramètre ; en remplaçant dans l'équation (1.39), on obtient l'équation différentielle :

$$\left(f\left(u\right)\right)^2\left(\left(f^{'}\left(u\right)\right)^2+\lambda^2\left(f^{'}\left(u\right)\right)^2+1\right)=1$$

cherchons f telque

$$f^{'}\left(u\right)=\frac{\varepsilon\sqrt{1-\left(f\left(u\right)\right)^2}}{\sqrt{\left(f\left(u\right)\right)\left(1+\lambda^2\right)}}, \varepsilon=\pm 1,$$

son intégrale générale est :

$$1-f^2=\frac{\left(u-\mu\right)^2}{1+\lambda^2}$$

on obtient une intégrale complète de l'équation (1.39), compte-tenu de (1.40) on obtient :

$$z^2-\frac{\left(x+\lambda y-\mu\right)^2}{1+\lambda^2}=1 \tag{1.41}$$

3ème**cas** :

$$F\left(p,q\right)=0 \tag{1.42}$$

la solution est de la forme

$$z=\lambda x+\eta y+\mu \tag{1.43}$$

où λ,η,μ, sont des constantes telles que

$$F\left(\lambda,\eta\right)=0\Leftrightarrow\eta=f\left(\lambda\right) \tag{1.44}$$

Donc une intégrale complète de l'E.D.P donnée est

$$z = \lambda x + f(\lambda) y + \mu, \tag{1.45}$$

cette relation définie une famille à deux parmètres du plans, l'intégrale générale sera l'enveloppe de cette famille à un paramètre.

Exemple

$$p^2 + q^2 = k^2, \quad k : C^{st} \text{ donnée}$$

$$F(p,q) = p^2 + q^2 - k^2 = 0 \Rightarrow \eta^2 = k^2 - \lambda^2 \Rightarrow \eta = \varepsilon\sqrt{k^2 - \lambda^2}, \varepsilon = \pm 1$$

on obtient une intégrale complète $z = \lambda x + \varepsilon\sqrt{k^2 - \lambda^2}y + \mu$, où λ, μ ; 2 constantes

4èmecas :

Considérons le cas suivante

$$F_1(x,p) = F_2(y,q) \tag{1.46}$$

on pose

$$\begin{cases} F_1(x,p) = \lambda \\ F_2(y,q) = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = f_1(x,\lambda) \\ q = f_2(y,\lambda) \end{cases}$$

la différentielle totale de z

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \\ dz &= pdx + qdy, \\ dz &= f_1(x,\lambda)\,dx + f_2(y,\lambda)\,dy \end{aligned}$$

En intégrant , il vient

$$z = \int f_1(x,\lambda)\,dx + \int f_2(y,\lambda)\,dy + \mu, \mu; C^{et} \tag{1.47}$$

C'est une integrale complète de l'E.D.P donnée

Exemple soit l'équation

$$pq - xy = 0 \tag{1.48}$$

$$(1) \Leftrightarrow pq = xy \Leftrightarrow \frac{p}{x} = \frac{y}{q}$$

posons

$$\begin{cases} \dfrac{p}{x} = \lambda \\ \dfrac{y}{q} = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \lambda x \\ q = \dfrac{y}{\lambda} \end{cases}$$

D'où

$$z = \frac{\lambda}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda}y^2 + \mu \tag{1.49}$$

est une intégrale complète de (1.48).

1.3.5 Résolution du problème de Cauchy

L'intégrale générale de l'équation

$$F(x,y,z,p,q) = 0 \tag{1.50}$$

est l'enveloppe d'une famille de surface a un paramètre dans l'équation (1.50)

$$\varphi(x,y,z,\lambda,h(\lambda)) = 0 \tag{1.51}$$

on obtient cette enveloppe en associes a (1.51) l'équation

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} + h'(\lambda)\frac{\partial\varphi}{\partial\mu} = 0 \tag{1.52}$$

L'ensemble de ces deux équation, (1.51) et (1.52) représente une courbe caractéristique de l'enveloppe qui l'orsque λ varie, engendre la surface S solution du λ pour chaque valeur de λ on a une courbe de ces courbe pénètre représente par les l'équation

$$\begin{cases} \varphi\left(x,y,z,\lambda,\mu\right)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda}+\vartheta\dfrac{\partial\varphi}{\partial\mu}=0 \end{cases} \tag{1.53}$$

Définition les courbe $\Gamma_{\lambda,\mu,\vartheta}$ de la famille (1.53) s'appelle courbe caracteristique de (1.50) pour avoir une surface solution (non singulière) de (1.50) soit remplacée par une fonction de et ϑ la dérivée de cette fonction on obtient une famille de courbe caractéristique à un paramètre ($\cup\Gamma=S$) il passe une infinité de surfaces solution par une courbe caractéristique, le problème de Cauchy pour l'équation (1.50) consiste a chercher une surface de solution S passant par une courbe donnée L telque $L\subset S$

Théorème

1 Il passe une infinité de surface solution par une courbe caractéristique

2 soit L une courbe non caractéristique d'équations $x=x\left(t\right),y=y\left(t\right),z=z\left(t\right)$. Il passe par une nombre finie de surfaces solution désignons par $\varphi\left(x,y,z,\lambda,\mu\right)=0$, une intégrale complète :

- **a)** L pénètre sur l'une des surfaces de l'intégrale complète
- **b)** L pénètre sur l'une l'enveloppe à deux paramètre (si elle existe)
- **c)** L pénètre sur l'une ou plusieurs enveloppes à un paramètre

3 pour trouver les enveloppes à un paramètre qui passent par L on procède ainsi :

- **a)** on résout le système $\begin{cases} \varphi\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),\lambda,\mu\right)=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial t}\left(x\left(t\right),y\left(t\right),z\left(t\right),\lambda,\mu\right)=0 \end{cases}$ en λ et μ, on obtient ainsi $\lambda=\alpha\left(t\right),\mu=\beta\left(t\right)$
- **b)** on élimine t entre les relations $\lambda=\alpha\left(t\right),\mu=\beta\left(t\right)$, ceci fournit des relations entre λ et μ
- **c)** soit $\mu=h\left(\lambda\right)$ l'un de ces relation l'enveloppe de la famille à un paramètre $\varphi\left(x,y,z,\lambda,h\left(\lambda\right)\right)=$

0 est une surface solution passant par L.

Exemple : trouver les solution de l'équation

$$F(p,q) = pq - p - q = 0 \tag{1.41}$$

qui passe par la courbe

$$x + y = 0, z = 1;$$

Solution :

l'intégrale complète est de la forme

$$z = \lambda x + \frac{\lambda}{\lambda - 1} y + \mu \quad ; \lambda, \mu \text{ 2 constantes arbitraire } / \lambda \neq 1$$

on paramètre la droite envisagée : $x = t, y = -t$, $z = 1$, on obtient alors le système :

$$\begin{cases} 1 = \lambda t + \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} t + \mu \\ 0 = \lambda - \dfrac{\lambda}{\lambda - 1} = \dfrac{\lambda(\lambda - 2)}{\lambda - 1} \end{cases}$$

on tire, d'une part, de la dernière relation $\lambda = 0$ où $\lambda = 2$, qui entraîne, de la première $\mu = 1$: les surfaces chercher sont alors :

$$z = 1 \quad ; \quad z = 2(x + y) + 1. \tag{1.42}$$

Remarque 1.5 *Les surfaces trouvées appartiennent à l'intégrale complète.*

1.4 Exercices

Exercise 1 *Détérminer la surface de l'E.D.P suivante*

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = x + y \tag{1.43}$$

qui contient la droite D d'équation

$$(D):\begin{cases} x=1 \\ u=0 \end{cases}$$

$1^{ère}$ *Méthode*

Le système caractéristique est

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{du}{x+y}.$$

Les premiers rapports donne

$$\ln|x|=\ln|y|-C^{st}\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{x}\right|=C^{st}\Rightarrow \frac{y}{x}=C_1,$$

d'autre part

$$\begin{aligned} \frac{dx+dy}{x+y} &= \frac{du}{x+y}\Rightarrow du=d(x+y) \\ &\Rightarrow u=x+y+C_2\Rightarrow C_2=u-x-y \end{aligned}$$

où C_1, C_2 sont deux constantes.

Vérifians que les intégrales premières sont indépendantes

$$rg\begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2} & \frac{1}{x} & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=2,$$

par suite, la solution générale de l'E.D.P considérée s'écrit $C_2=G(C_1)$ c.a.d $u=x+y+G\left(\frac{y}{x}\right)$, où G est une fonction arbitraire de classe C^1, pour trouver la solution particulière qui contient D on doit avoir

$$\begin{cases} x=1 \\ u=0 \\ u=x+y+G\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow\quad 0=1+y+G(y)\Rightarrow G(y)=-1-y$$

(i.e) $G(\alpha) = -1 - \alpha$ finalement la solution chercher est $u = x + y - 1 - \dfrac{y}{x}$

$\mathbf{2}^{ème}$***procédée***

Le système suivant :

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x+y} = dt$$

admet la solution

$$(\Gamma) \begin{cases} x = ae^t \\ y = be^t \\ u = (a+b)\,e^t + C. \end{cases} \qquad a, b, c \text{ des constantes arbitraires}$$

la surface solution cherchée est engendrée par les courbes caractéristiques de l'E.D.P donnée qui passant par la droite D pour ces courbes on a :

$$S = \cup_{\Gamma \cap D \neq \Phi} \Gamma \ x, y, z \in D \text{ pour } t = 0$$

c.à.d $(x(0), y(0), u(0)) \subset D$.

D'où

$$\begin{cases} a = 1, \\ a + b + c = 0. \end{cases}$$

D'autre part

$$\begin{cases} a = xe^{-t} \\ b = ye^{-t} \\ a + b + c = xe^{-t} + ye^{-t} + c \end{cases}$$

tellque

$$\begin{cases} xe^{-t} = 1 \\ xe^{-t} + ye^{-t} + u - (a+b)\, e^{t} = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-t} = \dfrac{1}{x} \\ x\dfrac{1}{x} + y\dfrac{1}{x} + u - \left(xe^{-t} + ye^{-t}\right) e^{t} = 0 \end{cases}$$

alors

$$u = x + y - 1 - \frac{y}{x}.$$

Exercise 2 *Détérminer la solution de l'équation suivante*

$$pq - xy = 0, \tag{1.44}$$

qui passe par $L : \left(x = t, y = \dfrac{1}{t}, z = 1\right)$

On considère le système

$$\begin{cases} 1 = \lambda t^2 + \dfrac{\lambda}{2\lambda t^2} + \mu \\ 0 = \lambda t - \dfrac{\lambda}{\lambda t^3} \end{cases}$$

dont la solution est : $\mu = 0$, $\mu = 2$ on obtient deux familles de surface à un paramètre

$$z = \frac{1}{2}\lambda x^2 + \frac{\lambda}{2\lambda} y^2 \tag{1.45}$$

$$z = \frac{1}{2}\lambda x^2 - \frac{\lambda}{2\lambda} y^2 + 2 \tag{1.46}$$

l'enveloppe de la première famille s'obtient par élimination de paramètre λ entre

$$z = \frac{1}{2}\lambda x^2 + \frac{\lambda}{2\lambda} y^2$$

$$0 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{\lambda}{2\lambda}y^2$$

on trouve après simplifications, les deux surfaces enveloppe :

$$\begin{aligned} z &= \varepsilon xy. \\ z &= \varepsilon xy + 2. \end{aligned} \tag{1.47}$$

Exercise 3

a) Déterminer la solution de l'équation $pq = 1$ qui contient la droite définie par $y = 0, z = x$.

b) Même qustion pour l'équation $p^2q = 1$.

Posons $F(p, q) = pq = 1$ on sait que $z = \lambda x + \eta y + \mu$ (λ, μ, η constantes) est une intégrale complète

$$z = \lambda x + \frac{1}{\lambda}y + \mu.$$

On paramètre la droite donnée par : $x = t, y = 0, z = t$, et on cherche les foncions λ et μ solution du système :

$$\begin{cases} t = \lambda t + \mu \\ 1 = \lambda \end{cases}$$

dont la solution est : $\lambda = 1, \quad \mu = 0$;en remplaçant λ et μ par leurs valeurs, il apparaît une surface unique, c'est le plan d'équation : $z = x + y$.

Exercise 4 *Déterminer la solution de l'équation suivante*

$$p^2 - q^2 = 0 \tag{1.48}$$

qui contient la parabole définie par $y = 0, z = x^2$.

Posons

$$\begin{cases} F(p,q) = \lambda x + \eta y + \mu \\ F(\lambda,\mu) = \lambda^2 - \eta = 0 \end{cases}$$

on trouve

$$\eta = \lambda^2 \Rightarrow z = \lambda x + \lambda^2 y + \mu, \quad \lambda, \eta, \mu \ : \text{constantes arbitraires.}$$

On paramétre la parabole $x = t, y = 0, z = t^2$

$$\begin{cases} t^2 = \lambda t + \mu \\ 2t = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\lambda^2}{4} = \dfrac{\lambda^2}{2} + \mu \\ t = \dfrac{\lambda}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{\lambda^2}{4},$$

on obtient une famille de surfaces du paramètre λ

$$\begin{cases} \varphi(x,y,z,\lambda) = \lambda x + \lambda^2 y + \dfrac{\lambda^2}{4} - z \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = x + 2\lambda y - \dfrac{\lambda}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -\dfrac{x^2}{2y - \frac{1}{2}} + \dfrac{x^2}{\left(2y - \frac{1}{2}\right)}\left(y - \dfrac{1}{4}\right) \\ \lambda = -\dfrac{x^2}{2y - \frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad z = \frac{x^2}{1-4y} \quad \text{la surface solution}$$

Exercise 5 *Déterminer la solution de l'équation suivante*

$$p^2 - q^2 = 0 \tag{1.49}$$

qui contient la droite définie par $y = 0, z = 0.$

On pose

$$\begin{cases} F_1(x,p) = \lambda \\ F_2(y,q) = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^2 = \lambda \\ y - q^2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p = \pm\sqrt{\lambda} \\ q = y - \lambda \end{cases} ; \varepsilon = \pm 1.$$

La différentielle totale de z est $dz = \dfrac{\partial z}{\partial x}dx + \dfrac{\partial z}{\partial y}dy$

$$\begin{aligned} dz &= pdx + qdy \Rightarrow dz = \varepsilon\sqrt{\lambda}dx + y - \lambda dy, \\ &\Rightarrow z = \int \varepsilon\sqrt{\lambda}dx + \int (y-\lambda)\,dy, \\ &\Rightarrow z = \varepsilon\sqrt{\lambda}x + \frac{1}{2}y^2 - \lambda y + \mu. \end{aligned}$$

Intégrale complète où à la droite $x = t, y = 0, z = 0$

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon\sqrt{\lambda}t + \mu \\ 0 = \varepsilon\sqrt{\lambda} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \mu = 0, \\ \lambda = 0. \end{cases}$$

Alors la surface solution qui contient L est : $z = \dfrac{1}{2}y^2$.

Exercise 6 *Déterminer la solution de l'équation suivante*

$$F(x,y,u,p,q) = xp + yq + upq = 0 \tag{1.50}$$

On pose

$$\frac{\partial u}{\partial x} = p, \frac{\partial u}{\partial y} = q$$

doncsystéme caractéristique et de la forme

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dx}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = -\frac{dp}{F_x + qF_u} = -\frac{dq}{F_y + qF_u}$$

les deux derniér rapports donnent

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q},$$

donc

$$\frac{p}{q} = \lambda$$

où λ conctant arbitraire

$$G(p,q) = \frac{p}{q}. \tag{1.51}$$

Le jacobien

$$\frac{D(F,G)}{D(p,q)} = \begin{vmatrix} x - up & y - up \\ \frac{1}{q} & -\frac{p}{q^2} \end{vmatrix} = -\frac{\lambda}{q}(\lambda x + y) \neq 0$$

Résoudre le systéme par rapport à p

$$\begin{cases} xp + yq - upq = 0 \\ \frac{p}{q} = \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\lambda q + yq - u\lambda q^2 = 0 \\ p = \lambda q \end{cases}$$

$$\begin{aligned} q &= \frac{\lambda x + y}{\lambda u}, && (1.52)' \\ p &= \frac{\lambda x + y}{u}. && ((1.53)) \end{aligned}$$

Considérons (1.53) comme une équation différontielle d'inconnue a fonction de x où y est un paramétre

$$p = \frac{\lambda x + y}{u} \Leftrightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\lambda x + y}{u} \Rightarrow du = \frac{(\lambda x + y)}{u}dx \Rightarrow \frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\lambda x^2 + yx + C(y)$$

où $C(y)$ est une fonction dy, donc

$$u = \pm\sqrt{\lambda x^2 + 2yx + 2C(y)}. \tag{1.54}$$

Romplaçons (1.54) dans (1.52) on obtient

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \pm\frac{x + C'(y)}{\sqrt{\lambda x^2 + 2yx + 2C(y)}} = -\pm\frac{\lambda x + y}{\lambda\sqrt{\lambda x^2 + 2yx + 2C(y)}}$$

donc

$$x = C'(y) = x - \frac{1}{\lambda}y \Rightarrow C(y) = \frac{1}{2\lambda}y^2 + \mu \quad ;\mu \textit{ constant arbitreaire}$$

les solutions de (1.50) est (les surface intégrable)

$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}\lambda x^2 + yx + \frac{1}{2\lambda}y^2 + \mu$$

où λ et μ sont deux constante indépendant.

On paramétre $L : x = t, y = 1 + t, u = 2t + 1$ et on concédére le systéme

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(2t+1)^2 = \frac{1}{2}\lambda t^2 + t(t+1) + \frac{1}{2\lambda}(1+t)^2 + \mu \\ \lambda t + 4 = 2\lambda t + 4t + 2 + \frac{2}{\lambda}t + \frac{2}{\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 4t + 2 = \left(2\lambda + \frac{2}{\lambda}\right)t + \frac{2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow \mu = 0.$$

la surface chercher est alors

$$\frac{1}{2}u^2 = \frac{1}{2}x^2 + yx + \frac{1}{2}y^2 \Rightarrow u^2 = \left(x^2 + y^2\right)$$

(i.e) les deux plans

$$\begin{cases} u + x + y = 0, \\ u - x - y = 0. \end{cases}$$

Chapitre 2

Equation aux dèrivées partielles linéaire du second ordre

2.1 Généralités, surfaces caractéristiques, classification

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n(x), x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ de fontiére $\partial\Omega$ suffison réguliére. le type général d'une EDP linéaire du second ordre est donné par

$$Lu = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f, \quad avec \ (a_{ij} = a_{ji}) \qquad \mathbf{(2.1)}$$

Soit $L_2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$. On associe à l'operteur L_2 en tout point $M_0(x^0)$, $[M_0 \in \Omega]$, la forme quadratique à n variables $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$

$$\Phi\left(x^0, \xi\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x^0\right)\xi_i \xi_j. \qquad (2.2)$$

Dans la cas $n = 2$

$$\Phi\left(x^0, \xi\right) = a_{11}\left(x^0\right)\xi_1^2 + 2a_{12}\left(x^0\right)\xi_1\xi_2 + a_{22}\left(x^0\right)\xi_2^2, \qquad (2.3)$$

$$\Phi = \xi^t A \xi \quad où \quad A\left(x^0\right) = a_{ij}\left(x^0\right),$$

et

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Alors

$$\Phi = (\xi_1, \xi_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

On peut réprésonter cette forme quadratiqe sous forme matricielle.

2.1.1 Surface caractéristiques et cônes caractéristiques

Surface caractéristiques : Par définition ce sont les surfaces de $\mathbb{R}^n$ d'équation

$$S\left((x_1, x_2, ..., x_n\right) = 0,$$

qui satisfont à l'E.D.P du permier ordre

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial S}{\partial x_i} \frac{\partial S}{\partial x_j} = 0. \tag{2.4}$$

Cônes caractéristiques en un point : Le point $M_0\left(x^0\right)$ étant un point donné de Ω, l'ensembles normales en M_0 à toutes les surfaces caractéristiques passant par M_0 est le cônes $\left(C_{M_0}\right)$ d'équation

$$\Phi\left(x^0, \xi\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x^0\right) \xi_i \xi_j \ , \ \left(\xi_j = x_j - x_j^0\right).$$

Le cônes supplémentaire, soit $\left(C_{M_0}^*\right)$, est appelé cônes caractéristiques au point M_0, les surfaces caractéristiques sont donc définies comme étant tangentes, en chaque point au Cônes caractéristiques.

2.1.2 Classification des équations

Elle s'obtient en appliquant les résultats classiques de l'algébre concernant les formes quadratiques.

a) Type elliptique : L'opérateur L_2 et l'équation (3.1) sont dits elliptiques en un point M (resp, sur Ω) si et seulement si, la forme quadratique Φ est définie (positive où négative) c'est à dire si l'ona

$$\forall \xi \neq 0, \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x^0\right) \xi_i \xi_j \geq 0 \text{ où } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(x^0\right) \xi_i \xi_j \leq 0. \tag{2.5}$$

Au point M_0 (resp, $\forall M_0 \in \Omega$) ,$\Phi\left(x^0, \xi\right)$ et donc décomposable à une somme de n cares dont les coéditions sont non nulles et de même signe dans ce cas toutes les valeurs propres de la matrice associée à $\Phi\left(x^0, \xi\right)$ sont donc non nulles et de même signe

b) Type parabolique : L'operateur (L_2) et l'équation (3.1) sont dits paraboliques en un semi définie point M_0 (resp, $\forall M_0 \in \Omega$) si et seulement si la forme quadratique Φet dégénérée c-à-d la matrice $A\left(x^0\right)$ et singulière (non inversible) toutes les valeurs propres non nulles de la matrice associée sont donc de même signe si l'une seulement des valeurs propres est nulle on dit que (L_2) est strictement parabolique

c) Type Hyerbolique : L'operateur (L_2) et l'équation (3.1) sont dits hyerboliques en un semi définie point M_0 (resp, $\forall M_0 \in \Omega$) si et seulement si la forme quadratique Φet indifinie non désignes au point M_0 (resp, $\forall M_0 \in \Omega$) toutes les valeurs propres de A et des signes qulconques.

Si toutes sauf une, sont de même signe, on dit que l'équation est hyerboliques au sens strictement (on de type hyerboliques normal) dans les autres cas, on dit aussi ultra hyerboliques.

Exemples

1) L'équation de Laplace

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

est élliptique sur $\mathbb{R}^n$, car la forme quadratique $\Phi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + ... + \xi_n^2$, est définie positive où

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{cases}$$

2) L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} - h^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$$

est parabolique sur $\mathbb{R}^3$, car la forme quadratique $\Phi = \xi_1^2 + \xi_2^2 + 0$.

3) L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - C^2 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0$$

est hyperbolique sur $\mathbb{R}^n$, car la forme quadratique

$$\Phi = -C^2\xi_1^2 + -C^2\xi_2^2 + ... + -C^2\xi_{N-1}^2 + \xi_n^2.$$

2.1.3 Classification des E.D.P linéaire du 2ème ordre dans $\mathbb{R}^2$

Considérons une E.D.P linéaire du 2ème ordre de la forme :

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\,a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \qquad (2.6)$$

où a, b, c des fonctions réel donné dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et F une fonctions réel de 5 variable inconnes , il est ivédons que faisant le changement devariable suivante.

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(x,y) \\ X_2 = \varphi_2(x,y) \end{cases} \quad \varphi_1 \ et \ \varphi_2 \text{ de classe C}^1 \qquad (2.7)$$

admettant une transformation inverse, (i.e) $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$, on a oboutit à une équation équivalante à l'équation (2.6).

Théorème 2.1 *Il existe un chengment de variable de la forme (2.7), qui réduit l'équation à l'une des équations suiventes*

- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + f\left(X_1, X_2, u, u_{X_1}, u_{X_1}\right) = 0$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + f\left(X_1, X_2, u, u_{X_1}, u_{X_1}\right) = 0$
- $\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + f\left(X_1, X_2, u, u_{X_1}, u_{X_1}\right) = 0$

Preuve Soient

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(x, y) \\ X_2 = \varphi_2(x, y) \end{cases}$$

telles que le $J \neq 0$ (Notation $u(x,y) = u\left(X_1(x,y), X_2(x,y)\right)$). cherchons la nouvelle forme de (2.6) dans le système X_1, X_2

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y} \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial X_1}\right)\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial X_2}\right)\frac{\partial X_2}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial X_2}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial^2 X_1}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial x^2} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\frac{\partial X_1}{\partial y}\frac{\partial X_2}{\partial y}$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\left(\frac{\partial X_2}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial^2 X_1}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial^2 X_2}{\partial y^2} \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}.\frac{\partial X_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}.\frac{\partial X_2}{\partial y}\right)$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\left(\frac{\partial X_2}{\partial y}.\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial x}.\frac{\partial X_1}{\partial y}\right) + \frac{\partial^2 X_1}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial^2 X_2}{\partial x \partial y}\frac{\partial u}{\partial X_2}, \qquad 2.12)$$

portant ces expressions dans (2.6), on obtient

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + C\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + G\left(X_1, X_2, u, u_{X_1}, u_{X_1}\right) = 0 \tag{2.13}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= a\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial X_1}{\partial x}.\frac{\partial X_1}{\partial y} + c\left(\frac{\partial X_1}{\partial y}\right)^2 \\ C &= a\left(\frac{\partial X_2}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial X_2}{\partial x}.\frac{\partial X_2}{\partial y} + c\left(\frac{\partial X_2}{\partial y}\right)^2 \\ B &= a\frac{\partial X_1}{\partial x}.\frac{\partial X_2}{\partial x} + b\left(\frac{\partial X_2}{\partial y}.\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial x}.\frac{\partial X_1}{\partial y}\right) + c\frac{\partial X_1}{\partial y}.\frac{\partial X_2}{\partial y}. \end{aligned}$$

supposons $a \neq 0$ et cherchons un changement de variable telque $A = 0$

$$a\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial X_1}{\partial x}.\frac{\partial X_1}{\partial y} + c\left(\frac{\partial X_1}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{2.14}$$

$\dfrac{\partial X_1}{\partial y} \neq 0, (ranJ \neq 0)$, nous posons $Z = \dfrac{\frac{\partial X_1}{\partial x}}{\frac{\partial X_1}{\partial y}}$, l'equation (2.14) devienne

$$aZ^2 + 2bZ + c = 0 \tag{2.15}$$

3 cas peuvent se presente.

<u>**1ercas**</u> **:** si $b^2 - ac > 0$ dans Ω l'équation (2.15) admet deux solutions réeles distingées.

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a} \tag{2.16}$$

ce qui donne

$$\frac{\partial X_1}{\partial x}+\left(\frac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)\frac{\partial X_1}{\partial y}=0 \tag{2.17}$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial x}+\left(\frac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a}\right)\frac{\partial X_1}{\partial y}=0 \tag{2.18}$$

(2.17) et (2.18) des E.D.P plin 1^{er}ordre (système caractéristique)

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b+\sqrt{b^2-ac}}{a} \\ \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{b-\sqrt{b^2-ac}}{a} \end{cases} \tag{2.19}$$

où

$$a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2b\left(\frac{dy}{dx}\right)+c=0 \tag{2.20}$$

■

Définition 2.1 *L'équation (2.20) est appelé équation caractéristique de (2.6), les solution de (2.20) s'appellent courbes caractéristique il y à deux familles de courbes caractéristiques réeles. on dit que l'équation (2.6) est hyperbolique dans* Ω.

Soient $\begin{cases} \varphi_1(x,p)=\lambda_1 \\ \varphi_2(y,q)=\lambda_2 \end{cases}$ $,\left(\lambda_1,\lambda_2 C^{st}\in\mathbb{R}\right)$, on pose

$$\begin{cases} X_1=\varphi_1(x,p) \\ X_2=\varphi_2(y,q) \end{cases}, \quad \text{alors } A=C=0.$$

Alors (2.13) devienne

$$2B\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+G\left(X_1,X_2,u,u_{X_1},u_{X_1}\right)=0. \tag{2.21}$$

On remarque que $B^2-AC=\left(b^2-ac\right)J^2\Rightarrow B^2=\left(b^2-ac\right)J^2\succ 0\Rightarrow B\neq 0.$

Par suite on dévisons (2.21) par $2B$ on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+G\left(X_1,X_2,u,u_{X_1},u_{X_1}\right)=0 \tag{2.22}$$

ces le $2^{ème}$ forme camonique des équation hyperbolique Introduisons le changement de variable suivante

$$\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 \\ Y_2 = X_1 - X_2 \end{cases} \qquad (J \neq 0) \left(\frac{D(Y_1, Y_2)}{D(X_1, X_2)} \neq 0 \right).$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial X_1} &= \frac{\partial u}{\partial Y_1} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2} \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} = \frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial}{\partial X_1} \left(\frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}. \end{aligned}$$

Par suite l'équation (2.21) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} + f(Y_1, Y_2, u, u_{Y_1}, u_{Y_1}) = 0 \tag{2.23}$$

c'est la $1^{ère}$ forme canonique des équations hyperbolique

<u>**2^{er} cas :**</u> si $b^2 - ac > 0$, l'équation (2.20) peut être résolus sous la forme

$$\begin{aligned} \varphi_1(x, y) &= \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = \lambda_1 \\ \varphi_2(x, y) &= \alpha(x, y) - i\beta(x, y) = \lambda_2; \quad \lambda_1,\ \lambda_2 \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

On peut poser

$$\begin{aligned} X_1 &= \alpha(x, y) + i\beta(x, y) = \lambda_1 \\ X_2 &= \alpha(x, y) - i\beta(x, y) = \lambda_2 \end{aligned} \tag{2.24}$$

l'équation (2.6) est dite elliptique telles que $A = C = 0$ d'où

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 X_2} + G_1(X_1, X_2, u, u_{X_1}, u_{X_1}) = 0 \tag{2.25}$$

On pose

$$\begin{cases} Y_1 = \dfrac{1}{2}(X_1 + X_2) = \alpha(x,y) \\ Y_2 = \dfrac{1}{2i}(X_1 - X_2) = \beta(x,y) \end{cases}, \begin{cases} X_1 = Y_1 + iY_2 \\ X_2 = Y_1 - iY_2 \end{cases} \tag{2.26}$$

On a

$$\frac{\partial u}{\partial X_1} = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{1}{2i}\frac{\partial u}{\partial Y_2} \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}\right] \tag{2.28}$$

en remplaçantns dans (2.25) on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} + f(Y_1, Y_2, u, u_{Y_1}, u_{Y_1}) = 0 \tag{2.29}$$

<u>3èmecas :</u> si $b^2 - ac = 0$ l'équation (2.20) a une solution double réelle $\varphi_1(x,y) = \lambda, (\lambda \in \mathbb{R})$ on dit que (2.6) est parabolique

Dans ce cas l'équation (2.17) et (2.18) se confondue et on a

$$a\frac{\partial X_1}{\partial x} + b\frac{\partial X_1}{\partial y} = 0. \tag{2.30}$$

On pose

$$\begin{cases} X_1 = \varphi_1(x,y) \\ X_2 = \varphi_2(y,y) \end{cases}$$

où φ_2 est une fonction arbitraire indépendant de φ_1, (ie) $\left(\dfrac{D(\varphi_1,\varphi_2)}{D(\varphi_1,\varphi_2)} \neq 0\right)$, avec cette transformation on obtient $A = 0$ et $C = \dfrac{b^2}{a}$ d'où

$$B = a\frac{\partial X_1}{\partial x}.\frac{\partial X_2}{\partial x} + b\left(\frac{\partial X_1}{\partial x}.\frac{\partial X_2}{\partial y}\right) + b\left(\frac{\partial X_1}{\partial y}.\frac{\partial X_2}{\partial x}\right) + \frac{b^2}{a}\frac{\partial X_1}{\partial y}.\frac{\partial X_2}{\partial y}$$

$$B = a\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial X_2}{\partial y}\right).\left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{b}{a}\frac{\partial X_2}{\partial y}\right) = 0. \tag{2.31}$$

Par suite l'équation (6) devient

$$C\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + G_1\left(X_1, X_2, u, u_{X_1}, u_{X_1}\right) = 0 \tag{2.32}$$

c'est la forme canonique d'équation parabolique.

Resumé : Si $a \neq 0$ l'équation (2.20), elle se décompose en deux équations

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} = g_1\left(x, y\right), \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} = g_2\left(x, y\right),$$

dont les solution c'est appellé courbes caractéristique, il y a donc 2 famille de courbes caractéristiques qui peuve être réelles, imaginaires ou confondues.

1) Caractéristiques réelles : Si $b^2 - ac > 0$, les caractéristique sont réelles, l'équation (2.6) est du type hyperbolique.

Exemple 2.1 *: l'équation du courbe vibrante* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

cas $b^2 - ac = (0)^2 - (-1) = 1 > 0$ *les caractéristiques sont solutions de* $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - 1 = 0,$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial t} = 1 \\ \dfrac{\partial x}{\partial t} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t + \lambda_1 \\ x = t + \lambda_2 \end{cases} \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ constantes arbitraires}$$

2) Caractéristiques confondues : Si $b^2 - ac = 0$, les deux familles de caractéristiques sont confondues, l'équation (2.6) est du type parabolique

Exemple 2.2 *: l'équation* $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

cas $b^2 - ac = (0)^2 - (1)\,0 = 0 = 0$ *les caractéristiques sont solution de* $-\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 0$

il y à une famille caractéristique solution de $\frac{dx}{dt} = 0$, *ce sont la droite* $x = \lambda$.

3) Caractéristiques imaginaires : Si $b^2 - ac < 0$, les caractéristique sont imaginaires et l'équation (2.6) est du type elliptique.

Exemple 2.3 *l'équation de Laplace* $\Delta u = 0$ *, ou* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

cas $b^2 - ac = (0)^2 - (-1)\,1 = -1 < 0$ *les caractéristique sont solution* $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 1 = 0$

donc

$$\frac{dy}{dx} = i, \frac{dy}{dx} = -i \Rightarrow y = \lambda_1 + ix, y = \lambda_2 - ix \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in C)$$

Remarque 2.1 ***a)*** *Dans le cas $a = c = 0$, l'équation caractéristique $dx = dy = 0$ dont les solution sont $x = \lambda_1, y = \lambda_2$, il y a donc deux familles caractéristiques réelles les droites $x = C^{st}, y = C^{st}$ l'équation est hyperbolique.*

b) *$a, b, c \in \mathbb{R}$, le type de (2.6) est lui de la cônique $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$*

c) *Il existe des équations du tupe mixte par exemple l'équation du Tricomi $yu_{xx} + u_{yy} = 0$, $b^2 - ac = -y$.*

Si $y > 0 \Rightarrow$ l'équation est elliptique

Si $y < 0 \Rightarrow$ l'équation est hyperbolique

Si $y = 0 \Rightarrow$ l'équation est parabolique

2) Soit l'équation

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.33}$$

$b^2 - ac = (xy)^2 - (xy)^2 = 0$ alors (2.33) est parabolique.

L'équation caractéristique

$$x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \tag{2.34}$$

pour ramèner (2.32) à la forme canonique, on pose

$$X_1 = \frac{y}{x}, X_2 = y; \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y}{x^2} \neq 0 \tag{2.35}$$

on a :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial x} \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{y}{x^2}\frac{\partial X_1}{\partial x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial X_1}\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial X_2}\frac{\partial X_2}{\partial y} \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{x}\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial X_2}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{2y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial u}{\partial X_1} - \frac{y}{x^3}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{y}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}$$

(2.33) devient

$$\begin{aligned} \frac{2y}{x}\frac{\partial u}{\partial X_1} + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2\frac{y}{x}\frac{\partial u}{\partial X_1} - 2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} - 2\frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} \\ + \frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + 2\frac{y^2}{x}\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial X_2} = f(X_1) \;\; f;\ \text{fonction arbitrere de classe } C^2 \\ &\Rightarrow \quad u = f(X_1) X_2 + g(X_1) \;\; g\ f;\ \text{fonction arbitrere de classe } C^2 \\ u \quad &= \quad f\left(\frac{y}{x}\right) y + g\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned}$$

3) Soit l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y} = 0 \tag{2.36}$$

$b^2 - ac = 0 - x^2 = 0$, si $x \neq 0$ alors (2.36) est elliptique

$$\begin{aligned} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^2 &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -x^2, \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = ix \\ \frac{dy}{dx} = -ix \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y = ix^2 + \lambda_1 \\ 2y = -ix^2 + \lambda_2 \end{array} \right. ; \lambda_1, \lambda_2 \in C. \end{aligned}$$

On pose

$$X_1 = 2y, X_2 = x^2,$$

alors

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\,;\, \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2\dfrac{\partial u}{\partial X_1} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\dfrac{\partial u}{\partial X_2} + 4x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 4\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} \end{cases}$$

(2.36) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_2^2} + \frac{1}{2X_2}\frac{\partial u}{\partial X_2} = 0 \tag{2.37}$$

Problèmes posée : Ils sont différents suivant les types d'équations

a) Type elliptique : Problèmes de Dirichlet , Neumann et plus généralement Fourier

- **Dirichlet :** Trouver une solution u telle que $Lu = f$ sur Ω $u\,|_{\partial\Omega} = \varphi, \varphi$ étant donnée
- **Neumann :** Trouver une solution u telle que $Lu = f$ sur Ω $\dfrac{du}{d\eta}\,|_{\partial\Omega} = \Psi$ ($\dfrac{du}{d\eta}$dérivée normale),Ψ étant donnée
- **Fourier :** $Lu = f$ sur Ω $\left(\alpha u + \beta\dfrac{du}{d\eta}\right)|_{\partial\Omega} = \theta, \theta$ étant donnée

Problèmes mélée : Si $\partial\Omega$ est la réunion de deux sous ensembles Σ_1 et Σ_2 on impose

$$u\,|_{\Sigma_1} = \varphi \ et\ \frac{du}{d\eta}\,|_{\Sigma_1} = \Psi, (\partial\Omega = \Sigma_1 \cap \Sigma_2)\,, (\partial\Omega = \Gamma_1 \cap \Gamma_2)$$

Problèmes d'interface : Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ deux ouverts ayant un marcean de frontière commun Σ on impose

$$\begin{cases} Lu_i = f_i \ \ dans\ \Omega_i, i = 1, 2 \\ u_i\,|_{\partial\Omega_i} - \Sigma = \varphi_i, i = 1, 2 \end{cases}$$

ainsi que les conditions dites d'interface :

$$u_1\,|_\Sigma = u_2\,|_\Sigma \ \ et\ \frac{\partial u_1}{\partial\eta}\,|_\Sigma = \frac{\partial u_2}{\partial\eta}\,|_\Sigma$$

b) Type hyperbolique : Problèmes de Cauchy-trouver une solution u telleque

$$u\,|_\Sigma = \varphi\ et\ \frac{du}{d\eta}\,|_\Sigma = \Psi\ \varphi\ \ et\ \ \Sigma \text{ donnée}$$

Σ surface donnée non caractéristique, ce problème est du type condition initiales analogue à celui des équations différentielles.

Problèmes mixte : On cherche une solution u satisfaisant à des conditions initiales et à des conditions aux limite $Lu = f$ dans $\Omega \times (0, \infty)$

Conditions initiales :

$$u\,|_t = 0 = \varphi(x) \;\; et \;\; \frac{du}{d\eta}\,|_{t=0} = \Psi(x)\,, \forall x \in \Omega$$

Conditions aux limite :

$$u\,|_{\partial\Omega} = \alpha(t)\;, \forall t \geq 0 \;\;\; \varphi, \Psi \;\; et \;\; \alpha \;\;\; \text{données}$$

c) Type parabolique : Les problèmes sont ceux du problème hyperbolique en suppriment la condition $\frac{du}{d\eta}\,|_{t=0} = \Psi(x)$. saufe que sur $(t = 0)$ en se donne seulement u

Notion du problème bien posé :

Définition 2.2 *On dit qu'un problème aux limite est bien posé (au seus de hadamard) ou stable si :*

1) Il existe une solution

2) La solution est unique

3) La solution dépend continûment des données : c-à-d une petite variation des données entraîne une petite variation de solution, dans la cas contraire il s'agit d'un problème mâle posé ou instable.

Exemple 2.4 *Résoudre le problème suivant :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u(x,y,z)}{\partial x^2} = x \\ u(0,y,z) = y \sin z \\ \dfrac{\partial u(0,y,z)}{\partial x} = y + z \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}x^2 + F(y,z)$$

$$u = \frac{1}{6}x^3 + xF(y,z) + G(y,z). \quad F, G \quad \textit{fonction} \quad \textit{arbitraire}$$

$$\frac{\partial u(0,y,z)}{\partial x} = F(y,z) = y + z, u(0,y,z) = G(y,z) = y\sin z$$

la solution du problème est

$$u(x,y,z) == \frac{1}{6}x^3 + x(y+z) + y\sin z. \tag{2.39}$$

2.1.4 Principe de superposition dans les equation linéaires

Considérons une E.D.P linéaire d'ordre deux

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + cu = 0, \tag{2.40}$$

où a_{ij}, b_{ij} et c soient des fonctions réelles de $x_1, \quad , x_n$

$$\begin{aligned} L \quad &: \quad C^2 \to C \\ u \quad &\to \quad Lu \end{aligned}$$

est linéaire au sens suivant

$$\begin{aligned} L(u) &= \lambda Lu, \forall\lambda \in \mathbb{C}, \forall\lambda \in C^2 \\ L(u_1 + u_2) &= Lu_1 + Lu_2, \forall u_1, u_2 \in C^2 \end{aligned}$$

$Lu = 0$ équation homogéne, $Lu = f$ équation linéaire avec seconde membre.

Théorème 2.2 ***P****rincipe de superposition*
si $u_1, u_2, ..., u_p$ sont p solutions de l'équation (2.40) linéaire homogène alors

$$u = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + ... + \alpha_p u_p$$

est aussi solution du (2.40) $\forall \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_p \in \mathbb{R}$ *où* $\mathbb{C}$

Preuve

$$L\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i L u_i = 0$$

■

Remarque 2.2 *Si* $Lu_1 = f$ *et* $Lu_2 = 0 \Rightarrow u = u_1 + u_2$ *est solution de* $Lu = f$*, généralement si*

$$\begin{cases} Lu_1 = f \\ Lu_2 = g \end{cases} \Rightarrow L(u_1 + u_2) = f + g.$$

2.2 Exercices

Exercise 7 *soit l'équation*

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{E}$$

$b^2 - ac = x^2 y^2 \succ 0$ *si* $x \neq y \neq 0$ *alors (E) est hyperbolique*

on dehors des axes $x = 0$ *et* $y = 0$ *l'équation (E) hyperbolique est les caractéristique soit solution de*

$$y^2 \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x^2 = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \text{ où } \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$

$$\begin{cases} y^2 - x^2 = \lambda_1 \\ y^2 + x^2 = \lambda_2 \end{cases} ; \lambda_1, \lambda_2 \text{ canstant réelles}$$

on pose (pourramener (E) à la forme canonique)

$$\begin{cases} X_1 = y^2 - x^2 \\ X_2 = y^2 + x^2 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{c}
\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial X_1}\dfrac{\partial X_1}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\dfrac{\partial X_2}{\partial x}\\
\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x\left(-\dfrac{\partial u}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\right)\\
\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial X_1}\dfrac{\partial X_1}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\dfrac{\partial X_2}{\partial y}\\
\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y\left(\dfrac{\partial u}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\right)\\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\left(\dfrac{\partial X_1}{\partial x}\right)^2+2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{c}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2\left(-\dfrac{\partial u}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\right)+2x\dfrac{\partial}{\partial x}\left(-\dfrac{\partial u}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\right)\\
=2\left(-\dfrac{\partial u}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\right)+2x\left[-\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}\dfrac{\partial X_1}{\partial x}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}\dfrac{\partial X_1}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}\dfrac{\partial X_2}{\partial x}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}\dfrac{\partial X_1}{\partial x}\right]\\
=2\left(-\dfrac{\partial u}{\partial X_1}+\dfrac{\partial u}{\partial X_2}\right)+2x\left[2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}-2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}-2x\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}\right]\\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}+4x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}-8x^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+2x\dfrac{\partial u}{\partial X_2}-2x\dfrac{\partial u}{\partial X_1}\\
\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1^2}+4y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_2^2}-8y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+2y\dfrac{\partial u}{\partial X_2}-2y\dfrac{\partial u}{\partial X_1}
\end{array}\right.$$

(E) devient

$$\begin{aligned}
-16x^2y^2\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}-2\left(y^2+x^2\right)u_{X_1}+2\left(y^2-x^2\right)u_{X_1} &= 0\\
&\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}+\frac{y^2+x^2}{8x^2y^2}u_{X_1}-\frac{y^2+x^2}{8x^2y^2}u_{X_2}=0
\end{aligned}$$

on pose

$$\left\{\begin{array}{c}
Y_1=X_1+X_2=2y^2\\
Y_2=X_1-X_2=-2x^2
\end{array}\right.$$

alors

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X_1\partial X_2}=\frac{y^2+x^2}{8x^2y^2}u_{X_2}-\frac{y^2+x^2}{8x^2y^2}u_{X_1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial X_1} &= \frac{\partial u}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial X_1} \\
&= \frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2} \\
\frac{\partial u}{\partial X_1} &= \frac{\partial u}{\partial Y_1} - \frac{\partial u}{\partial Y_2} \\
\frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} &= \frac{\partial}{\partial X_2}\left(\frac{\partial u}{\partial Y_1} + \frac{\partial u}{\partial Y_2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2}\frac{\partial Y_1}{\partial X_1} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2}\frac{\partial Y_2}{\partial X_2} + \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}\frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2} - \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial X_1 \partial X_2}
\end{aligned}$$

alors (E) devient

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} &= \frac{1}{2\left(X_2^2 - X_1^2\right)}\left[X_1\frac{\partial u}{\partial Y_1} - X_1\frac{\partial u}{\partial Y_2} - X_2\frac{\partial u}{\partial Y_1} - X_2\frac{\partial u}{\partial Y_2}\right] \\
X_2^2 - X_1^2 &= -Y_1 Y_2
\end{aligned}$$

et (E) devient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial Y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y_2^2} = \frac{1}{2Y_2}u_{Y_2} - \frac{1}{2Y_1}u_{Y_1}$$

l'équation est hyparbolique**Exercice02 :**

$$-u_{xx} - u_{yy} = 0 \quad i.e \quad u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

système caractéristique est :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm i \\
&\Rightarrow \begin{cases} y + ix = C_1 & C_1 \in \mathbb{C} \ est\ arbitraire \\ y - ix = C_2 & C_2 \in \mathbb{C} \ est\ arbitraire \end{cases}
\end{aligned}$$

posons le changement de variable suivant

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

remplaçant dans (1) , on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial y}=f(Y)\Rightarrow u\left(X,Y\right)=F\left(Y\right)+G\left(X\right)$$

(1) donc

$$u\left(x,y\right)=F\left(y+ix\right)+G\left(y-ix\right)$$

tel que F,G deux fonction arbitraire de classe C^2 et F est la primitire de f

$$\left(n-1\right)u_{xx}-y^{2n}u_y=ny^{2n-1}$$

si $n\geq 0$, le système caractiristique est de la forme

$$\left(n-1\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y^{2n}=0\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{\sqrt{n-1}}{n-1}y^{-n+1}-x=C_1\in\mathbb{R}\\ \dfrac{\sqrt{n-1}}{n-1}y^{-n+1}+x=C_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$

soit le changement de variables suivant

$$\begin{cases}X=\dfrac{\sqrt{n-1}}{n-1}y^{-n+1}-x=C_1\in\mathbb{R}\\ Y=\dfrac{\sqrt{n-1}}{n-1}y^{-n+1}+x=C_2\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=\sqrt{n-1}y^{-n}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right]\\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sqrt{n-1}y^{-n-1}\left(-n\right)\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right]++\sqrt{n-1}y^{-n}\times\\ &\times\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\sqrt{n-1}y^{-n}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sqrt{n-1}y^{-n}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\sqrt{n-1}y^{-n}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\sqrt{n-1}y^{-n}\right]\end{aligned}$$

substition dans (E) on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0 \Rightarrow u\left(X, Y\right) = F\left(X\right) + G\left(Y\right)$$

donc

$$u(x,y) = F\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n-1} y^{-n+1} + x\right) + G\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n-1} y^{-n+1} - x\right)$$

où $F\ et\ G$ deux fonctions arbitraire de classe C^2.

pour $n = 2$

$$u(x,y) = F\left(-\frac{1}{y} + x\right) + G\left(-\frac{1}{y} - x\right)$$

$$u\left(0, y\right) = F\left(-\frac{1}{y}\right) + G\left(-\frac{1}{y}\right) = 0 \Rightarrow -F\left(-\frac{1}{y}\right) = G\left(-\frac{1}{y}\right)$$

$$u(x, \frac{1}{x}) = F\left(-x + x\right) + G\left(-x - x\right) = 4x^2 \Rightarrow F\left(0\right) + G\left(-2x\right) = 4x^2$$

d'où

$$F\left(\alpha\right) = -\alpha^2 + F\left(0\right)$$

alors

$$u(x,y) = -\left(-\frac{1}{y} + x\right)^2 + F\left(0\right) + \left(-\frac{1}{y} + x\right)^2 - F\left(0\right)$$

$$u(x,y) = 4\frac{x}{y}. \tag{2}$$

Chapitre 3

Méthode de séparations des variables (Méthode de Fourier)

La méthode de séparations des variables, elle permet de transformer et éxprimer la solution de l'EDP sous la forme d'une somme infinie (série). Cherchons la solution du problème mixte suivant :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < l,\ \ t \geq 0, \tag{3.1}$$

$$u(0,t) = u(l,t), t \geq 0, \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x). \end{cases} \tag{3.3}$$

Le principe est de chercher une solutions de l'équation (3.1), non identiquement nulle sous la forme

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{3.4}$$

qui vérifie les conditions aux limite (3.2), on obtient on remplçons (3.4) dans (3.1)

$$\frac{1}{c^2}X(x)T''(t) = X''(x)T(t).$$

On dévisons par XT, en tous points (x,t) où $u(x,t) \neq 0$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(t)}{X(t)} = -\lambda, \quad \lambda: \text{ constante réelle} \tag{3.5}$$

(14) donne deux E.D.P pour les fonction $X(t)$, $T(t)$

$$\begin{aligned} X''(t) + \lambda X(t) &= 0 \qquad X(t) \neq 0, & (3.6)\\ T''(t) + \lambda T(X) &= 0 \qquad T(X) \neq 0. & (3.7) \end{aligned}$$

Les conditions aux limite (3.2) deviennes

$$\begin{aligned} u(0,t) &= X(0)T(t) = 0,\\ u(l,t) &= X(l)T(t) = 0, \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{3.8}$$

ce qui contuit aux probléme suivant :

Problème : trouver toutes, les valeur de parametre λ et toutes les fonction $X(t) \neq 0$ telque

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

ces valeurs de λ s'appelle valeur propre, et les solutions $X \neq 0$ associées sont dite fonction propre du problème (s'appelle problème de **Sturun-Liouville).**

Considérons 3 cas séparément $\lambda < 0, \lambda = 0, \lambda \geq 0$

- **Cas 1 :** si $\lambda < 0$, le problème (3.6)-(3.8) n'admet pas de solutions non triviales en effet l'équation (3.6) donne

$$X(x) = C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}; \text{où } C_1, C_1: \text{ constantes réelles}$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2, \\ X(l) &= C_1 \left(e^{-\sqrt{-\lambda}x} - e^{\sqrt{-\lambda}x} \right) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0. \end{aligned}$$

- **Cas 2 :** si $\lambda = 0$, il n'ya pas de solution non trivialle en effet l'équation (3.6) à des solutions sons la forme

$$X(x) = C_1 x + C_2,$$

les conditions aux limite

$$\begin{aligned} X(0) &= C_2 = 0, X(l) = C_1 l = 0 \\ &\Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow X(x) = 0. \end{aligned}$$

- **Cas 3 :** si $\lambda > 0$, la solution générale de (3.6) est

$$X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x,$$

les conditions aux limites

$$\begin{aligned} X(0) &= C_1 = 0, X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \\ &\Rightarrow \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = n\pi \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{l} \\ &\Rightarrow \lambda = \frac{n^2 \pi^2}{l^2}, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Alors le problème (3.6)-(3.8) admet des solutions non triviales seulement pour

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \Rightarrow X_n = C_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad où\ C_n \in \mathbb{R}, n \geq 0.$$

Pour l'équation (3.7)

$$\begin{aligned} T_n(t) &= A_n \cos \sqrt{\lambda_n} C t + B_n \sin \sqrt{\lambda_n} C t \\ T_n(t) &= A_n \cos \frac{n\pi}{l} C t + B_n \sin \frac{n\pi}{l} C t; \text{ où } A_n, B_n \text{ sont 2 constantes arbitreaires} \end{aligned}$$

c'est bien que la fonction.

$$u_n(x,t) = X_n(x)\,T_n(t) = \left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}Ct + B_n \sin\frac{n\pi}{l}Ct\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

C'est une solutios élémentaire de l'équation (3.1), vérifiant les conditions aux limite (3.2) par le théorème de superposition

$$S_p(x,t) = \sum_{n=1}^{p} u_n(x,t),$$

est une aussi une solution de (3.1) qui vérifie (3.2)

$$S_p(0,t) = \sum_{n=1}^{p} u_n(0,t) = 0,$$

on supose que $\lim\limits_{p\longrightarrow+\infty} S_p(x,t)$ existe, (i.e) $\sum_{n=1}^{p} u_n = S$ convergente et qu'elle est deux fois dérivable par rapport x et par rapport à t, on cherche la solution de (3.1) vérifiant les conditions (3.2) sous la forme de la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}Ct + B_n \sin\frac{n\pi}{l}Ct\right)\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{3.9}$$

vérifiant les conditions (3.2) et (3.3).

Supposons pour le moment que (3.9) définie une solution de (3.1) vérifiant les condition aux limites (3.2)

Suposons que la dérivée vers à t de la somme de la série (3.9) puisse être obtenue, on dérive la série terme à terme c-à-d

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t),$$

trouvons A_n et B_n telque la somme de la série (18) vérifie les conditions initiales (3.1)

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0), \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t), \end{aligned}$$

$$\begin{cases} u_0(x) = \sum_{n\geq 1} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \\ u_1(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{n\pi C}{l} B_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \end{cases} \tag{3.10}$$

supposons que u_0 et u_1 est développable en série de Fourier sinus dans l'intervale $[0, l]$ où

$$\begin{cases} u_0(x) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad où \quad \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \\ u_1(x) = \sum_{n\geq 1} \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad où \quad \beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \end{cases} \tag{3.11}$$

on comparons (3.10) et (3.11) on obtient

$$\begin{cases} A_n = \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \\ B_n = \frac{l}{n\pi C} \beta_n = \frac{2}{n\pi C} \int_0^l u_1(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \end{cases} \tag{3.12}$$

ce qui permet de déterminer la fonction (3.9).

La solutiion obtenue par (3.9) est une solution formelle, en effet si la série (3.9) est divergente à sa somme n'est pas différentiable. cette dérnière n'est pas une solution de l'équation (3.1) c'est pour quoi est nécessaire de justifier les calculent et détérminer les conditions sous les qu'elle la série (3.9) définit bien une solution de problème étudiée.

3.1 Dérivation des series de fonctions de plusieurs variables

Définition 3.1 *Soit* $\sum_{n\geq 1} f_n$ $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une* S *de fonction on ditque la serie est uniformer convergente sur* $[a, b] \to S$ *si* $\{S_n\}_n$ *définie par*

$$S_n(x) = \sum_{p=1}^{n} f_p, \tag{3.13}$$

convergente uniformement vers S *lorsque* $n \to +\infty$ *c-à-d*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon), \forall x \in [a, b], \forall n \geq N(\varepsilon); |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon,$$

Théorème 3.1 *Il existe une série numérique à terms positife* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n < \varepsilon$ *telque*

$$\forall x \in [a,b], \forall n \geq n_0; |f_n(x)| \leq C_n,$$

alors, $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$.

Théorème 3.2 ***S****i toutes les fonctions* f_n *sont continues en* $x_0 \in [a,b]$ *et si* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *alors la somme* S *de la série et continue en* x_0

1) (i.e) $\forall n : f_n$ continue en x_0 et $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément, alors S continue en x_0

2) Si toute les fonctions f_n sont continue sur $[a,b]$ et si $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ alors la somme S et converge sur $[a,b]$.

Théorème 3.3 *Si la série* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *converge au moins en un point* $x_0 \in [a,b]$, *si* $\forall n : f_n$ *dérivable sur* $[a,b]$ *et si la série* $\sum_{n\geq 1} f_n'$ *converge uniformément sur* $[a,b]$ *alors :*

1) la série $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$

2) Sa somme est dérivable sur $[a,b]$ et on a $S'(x) = \left(\sum_{n\geq 1} f_n\right)' = \sum_{n\geq 1} f_n'$

ce resultat se généralise aux dérivées d'ordre supérieur.

Définition 3.2 *Soit* f_n *une suite de fonctions de deux variable* x *et* t*,*$\sum_{n\geq 1} f_n$ *convergente uniformer pour* $x \in [a,b]$ *et* $t \in [t_0, t_1]$ *vers* $S(x,t)$*si la suit* $\{S_n\}_n$ *définie par* $S_n(x,t) = \sum_{p=1}^{n} f_p(x,t)$ *converge uniformément vers* S *pour* $x \in [a,b]$ *et* $t \in [t_0,t_1]$. *tellque*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists\ N(\varepsilon),\ \forall x \in [a,b], \forall t \in [t_0,t_1], \forall n \geq N(\varepsilon); |S_n(x,t) - S(x,t)| < \varepsilon \tag{3.14}$$

Théorème 3.4 *Soit*

$$f_n(x,t) = X_n(t)\, T_n(t)$$

si il existe une serie numérique positife converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n < +\infty, C_n \geq 0; \forall x \in [a,b], \forall t \in [t_0,t_1]; \forall n \geq n_0; |f_n(x,t)| \leq C_n$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$*convergente uniformer pour* $x \in [a,b], t \in [t_0,t_1]$

Théorème 3.5 ***: (Théorème d'Abel) :*** *soit $\{X_n\}_n$ une suite de fonvtions telque $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ convergente uniformer pour $x \in [a,b]$ et soit $\{X_n\}_n$ une suite de fonction tellque*

$$\forall n \geq n_0, \forall t \in [t_0, t_1], \begin{cases} |T_n(t)| \leq A \\ |T_{n+1}(t)| \geq |T_n(t)| \quad où \quad |T_{n+1}(t)| \leq |T_n(t)| \end{cases}, \tag{3.15}$$

alors la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$ convergente uniformer pour $x \in [a,b], t \in [t_0, t_1]$

Théorème 3.6 *Si $\forall n, X_n$ et T_n sont sur $[a,b]$ et $[t_0, t_1]$ respectivement et si $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge uniformément vers S alors S et continue pour $x \in [a,b], t \in [t_0, t_1]$ si toutes les X_n sont dérivable sur $[a,b]$ et si série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n'(x) T_n(x)$ converge uniformément pour $x \in [a,b], t \in [t_0, t_1]$ vers une fonction $\widetilde{S}(x,t)$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$ est converge uniformément pour $x \in [a,b], t \in [t_0, t_1]$ vers S*

- sa somme S est dérivable vers à x sur $[a,b]$ et on à

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) T_n(x)\right), \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} X_n'(x) T_n(x) = \widetilde{S}(x,t). \end{aligned}$$

Ce resultat transpose naturellement à la série $\sum_{n=1}^{\infty} X_n' T_n$ et se générale aux dérivées d'ordre superieur. si les séries correspondantes sont convergente uniformer sur $[a,b] \times [t_0, t_1]$. Théoréme(6) ce généralise à des fonctions de plusier variables.considéront une EDP linéaire homogéne

$$L(u) = 0 \tag{3.16}$$

3.1.1 Principe de superposition généralisé

Si les fonctions u_n $(n \in \mathbb{N})$ sont des solutions particuliére de l'équation (3.16) alors la série

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n, \qquad C_n \in \mathbb{R}$$

est aussi solution de (3.16) si cette série et convergente et si les posible d'obtenire les dérivées presents dans (3.16) on dérivont la série terme à térme

Preuve :

$$L(u) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n L(u_n) = 0$$

aussi u vérifie bien l'équation (3.16)

Remarque 3.1 *Les condition surfisentes pour avoire dérivé térme à térme une série converge et la convergente uniformer de la série* $\sum_{n=1}^{\infty} C_n L(u_n)$ *on obtenit aprés différentiation il faut d'abore s'assurer de la continuité de série*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}Ct + B_n \sin\frac{n\pi}{l}Ct\right) \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.17}$$

pour cela il sefie demontré la convergence uniforme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *ona*

$$|u_n(x,t)| = \left|A_n \cos\frac{n\pi}{l}Ct + B_n \sin\frac{n\pi}{l}Ct\right| \left|\sin\frac{n\pi}{l}x\right| \leq |A_n + B_n|, \forall n$$

d'où la série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *est majorée par la série numérique à térme positife* $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| + |B_n|$ *si cette série majorée converge alors la série (18) convergente uniformer et la continute de* $u(x,t)$ *en résulte afin de sassuré la converge* $\frac{\partial u}{\partial t}$ *vers ses valeurs initiales il faut montré la continuité de cette dérivée et pour sela il faut montré la convergente uniforme de la série*

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \backsimeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) = \frac{\pi C}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n\left(-A_n \sin\frac{n\pi}{l}Ct + B_n \cos\frac{n\pi}{l}Ct\right) \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.18}$$

on la converge de la série majoront $\frac{\pi C}{l} \sum_{n=1}^{\infty} n(|A_n| + |B_n|)$ *alors* $u(x,t)$ *est une solution de l'équation (10).(c-à-d le princip de superposition généralisé est aplicable), si la série (18) peut être dérivée térme à térme 2 fois vers à* x *et 2 fois vers à* t *et pour ce la il sufit que les série suivante :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) &\backsimeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t) = -\left|\frac{\pi}{l}\right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}Ct + B_n \sin\frac{n\pi}{l}Ct\right) \sin\frac{n\pi}{l}x \\
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) &\backsimeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2}(x,t) = -\left|\frac{\pi C}{l}\right|^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n \cos\frac{n\pi}{l}Ct + B_n \sin\frac{n\pi}{l}Ct\right) \sin\frac{n\pi}{l}x
\end{aligned}$$

sont uniforme convergente vers à t et x. ou ces deux série sont majorées par la série majoronte $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(|A_n|+|B_n|\right)$ *et puisque* $A_n=\alpha_n, B_n=\dfrac{l}{n\pi C}\beta_n$ *tous revient à établire la convergente des série numérique suivante*

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^k\left|A_n\right| & k=0,1,2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k\left|B_n\right| & k=0,1,2 \end{cases}$$

tellque

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n^k\left|\alpha_n\right| & k=0,1,2 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k\left|\beta_n\right| & k=0,1,2 \end{cases} \tag{3.19}$$

pour cela on utilise la propriété des séries de Fourier.

Théorème 3.7 *Si une fonction préiodique $F(x)$ de préiode $2\,l$ et $k+1$ fois dérivable sa dérivée d'ordre $(k+1)$ estant continue par marçaux, alors la série numérque $\sum_{n=1}^{\infty} n^k\left(|a_n|+|b_n|\right)$ où a_n et b_n sont les coefficient de Fourier de F est convergente*

Remarque 3.2 *Pour garontire la convergence de série $\sum_{n=1}^{\infty} n^k\left|\alpha_n\right|,\ k=0,1,2$ il sufit que u_0 verifie :*

les conditions initiale(C1) : u_0 et 3 fois dérivable sur $[0,l]$ sa dérivée 3^{eme} continue par marçeaux et de plus

$$\begin{cases} u_0\left(0\right)=u_0\left(l\right)=0 \\ u_0''\left(0\right)=u_0''\left(l\right)=0 \end{cases} \tag{3.20}$$

et pour graontire la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} n^k\left|\beta_n\right| \quad k=0,1,2$ il sufitque u_1 vérifie :

les conditions initiale (C2) :

$$u_1\left(0\right)=u_1\left(l\right)=0 \tag{3.21}$$

Remarque 3.3 *Les condition **(C1) et (C2)** ne sont pas nécessaire pour l'existence de la solution d'équation avec second membre sur un intervalle borné.*

Etudions l'équation non homogéne

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad 0 < x < l, t > 0$$

avec les conditions initiale

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq l \tag{3.23}$$

et les conditions aux limite

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \qquad t > 0 \tag{3.24}$$

En cherche la solution de problème mixte (3.22), (3.23),(3.24) sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{3.25}$$

où t joue le rôle d'un paramètre.

pour détérminer $u(x,t)$ il faut détérminé $u_1(x)$ on suppose que $\forall t > 0$, $f(x,t)$ continue % à x ainsi que sa dérivée % à x. développement f, u_0 et u_1, suivant les fonctions $\sin \frac{n\pi}{l} x$. On considère $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$.

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{l} x \qquad (3.26) \\ u_1(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned}$$

$$\begin{cases} f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \\ \alpha_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \\ \beta_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_1(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \end{cases} \tag{3.27}$$

si on peut dérivée la relation (3.25) 2 fois, l'équation (3.22) devient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n^{"}(t) + C^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 u_n(t) - f_n(t) \right] \sin \frac{n\pi}{l} x = 0$$

$$u_n^{"}(t) + C^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 u_n(t) = f_n(t) \tag{3.28}$$

les conditions initiales donnes

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{'}(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{cases} u_n(0) = \alpha_n \\ u_n^{'}(0) = \beta_n \end{cases} \tag{3.29}$$

ainsi $u_n(t)$ est solution de l'EDO (3.28) vérifient les condition (3.29) expriment cette solution sous la forme.

$$u_n(t) = v_n(t) + w_n(t) \tag{3.30}$$

où $v_n(t)$ est la solution du probléme

$$\begin{cases} v_n^{"}(t) + C^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 v_n(t) = f_n(t) \\ v_n(0) = 0 \\ v_n^{'}(0) = 0 \end{cases} \tag{3.31}$$

et $w_n(t)$ est la solution du probléme

$$\begin{cases} w_n^{"}(t) + C^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 w_n(t) = 0 \\ w_n(0) = \alpha_n \\ w_n^{'}(0) = \beta_n \end{cases} \tag{3.32}$$

$$w_n(t) = \alpha_n \cos \frac{n\pi}{l} Ct + \frac{l}{n\pi C} \beta_n \sin \frac{n\pi}{l} Ct. \tag{3.33}$$

Lemme 3.1 *La solution de l'équation linéaire non homogéne à coeficient constant*

$$u^{"}(t) + pu^{'}(t) + qu(t) = f(t) \tag{3.34}$$

vérifions les conditions initiales homogéne

$$u(0) = u^{'}(0) = 0 \tag{3.35}$$

est donnée par

$$u(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{3.36}$$

où $u(t)$ *est la solution de l'équation homogéne*

$$U^{"}(t) + pU^{'}(t) + qU(t) = 0 \tag{3.37}$$

vérifions les conditions initiales

$$U(0) = 0, U^{'}(0) = 1. \tag{3.38}$$

Dans notre cas le problème (3.31) la fonction u est la solution du problème

$$\begin{cases} U^{"}(t) + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 C^2 U^{'}(t) = 0 \\ U(0) = 0, U^{'}(0) = 1 \end{cases} \tag{3.39}$$

telleque

$$U(t) = \frac{l}{n\pi C} \sin \frac{n\pi}{l} Ct \tag{3.40}$$

du la relation (3.36) on obtient la solution du problème (3.31)

$$v_n(t) = \int_0^t U(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{3.41}$$

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{l}{n\pi C} \int_0^t \sin \frac{n\pi}{l} C(t-\tau) \left[\frac{2}{l} \int_0^l f(\xi,t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \right] d\tau \\ &= \frac{2}{n\pi C} \int_0^t \int_0^l \sin \frac{n\pi}{l} C(t-\tau) f(\xi,t) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi d\tau \end{aligned} \tag{3.42}$$

alors la solution du problème (3.22)-(3.23)-(3.24) est

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (v_n(t) + w_n(t)) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} w_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned} \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{2}{n\pi C}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t\int_0^l \left[\sin\frac{n\pi}{l}C(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}x\right] f(\xi,t)\,d\xi d\tau \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi}{l}Ct+\frac{l}{n\pi C}\beta_n\sin\frac{n\pi}{l}Ct\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t\int_0^l \frac{2}{\pi C}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}C(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}x\right] f(\xi,t)\,d\xi d\tau \\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi}{l}Ct+\frac{l}{n\pi C}\beta_n\sin\frac{n\pi}{l}Ct\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \end{aligned}$$

$$u(x,t)=\int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\,f(\xi,t)\,d\xi d\tau+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n\cos\frac{n\pi}{l}Ct+\frac{l}{n\pi C}\beta_n\sin\frac{n\pi}{l}Ct\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.44}$$

où

$$G(x,\xi,t-\tau)=\frac{2}{\pi C}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{l}C(t-\tau)\sin\frac{n\pi}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}x\right] \tag{3.45}$$

$1^{er}CAS$: Etudions le problème générale suivant :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \qquad 0<x<l \quad t>0 \tag{3.46}$$

$$u(x,0) = u_0(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=u_1(x) \qquad 0\le x\le l \tag{3.47}$$

$$u(0,t) = p(t)\,,\ u(l,t)=q(t) \tag{3.48}$$

on introduit une nouvelle fonction inconnue $v(x,t)$ on posons

$$u(x,t)=U(x,t)+v(x,t) \qquad x\in[0,l]\,,\ t>0$$

tel que v est la solution du probléme

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=C^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\widetilde{f}(x,t) \qquad où \quad \widetilde{f}(x,t)=f(x,t)-\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-C^2\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right\}$$

v : vérifie les conditions initiales

$$\begin{cases} v(x,0)=\widetilde{u}_0(x) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0)=\widetilde{u}_1(x) \end{cases} \qquad où \qquad \begin{aligned} \widetilde{u}_0(x)&=p(t)-U(x,0) \\ \widetilde{u}_1(x)&=q(t)-\frac{\partial U}{\partial t}(x,0) \end{aligned}$$

v : vérifie les conditions aux limites

$$\begin{cases} v(0,t) = \widetilde{p}(t) \\ v(l,t) = \widetilde{q}(t) \end{cases} \quad où \quad \begin{matrix} \widetilde{p}(t) = p(t) - v(0,t) \\ \widetilde{q}(t) = q(t) - v(l,t) \end{matrix}$$

choisissons la fonction auxiliere U tel que :

$$\begin{aligned} \widetilde{p}(t) &= 0, \widetilde{q}(t) = 0 \qquad U(x,t) = a(t)x + b(t) \\ \widetilde{p}(t) &= 0 \Leftrightarrow U(0,t) = p(t) \Rightarrow b(t) = p(t) \\ \widetilde{q}(t) &= 0 \Leftrightarrow U(l,t) = q(t) \Rightarrow a(t) = \frac{1}{l}(q(t) - p(t)) \end{aligned}$$

D'où

$$U(x,t) = \frac{x}{l}[q(t) - p(t)] + q(t) \tag{3.49}$$

$U(x,t)$ est une interpolation de les points $(0, p(t)), (l, q(t))$ ainsi le problème (3.46)-(3.47)-(3.48) ramaine au problème avec les conditions aux limites homogène suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t) - \dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ v(x,0) = u_0(x) - U(x,0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = u_1(x) - \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,0) \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \end{cases} \tag{3.50}$$

le quel est etudier.

2ème CAS : étudions le problème suivant avec les données stationnaires

$$u_{tt} = C^2 u_{xx} + f(x) \qquad 0 < x < l \quad t > 0 \tag{3.51}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \qquad 0 \leq x \leq l \tag{3.52}$$

$$u(0,t) = A^{Cst}, u(l,t) = B^{Cst} \tag{3.53}$$

on cherche la solution sous la forme suivante

$$u(x,t) = \overline{u}(x) + v(x,t)$$

le probléme (3.51)-(3.52)-(3.53) devient

$$\begin{aligned} v_{tt} &= C^2 v_{xx} + \left\{ C^2 \overline{U}^{"}(x) + f(x) \right\} \\ v(x,0) &= u_0(x) - \overline{U}(x), v_t(x,0) = u_1(x) \\ u(0,t) &= A - \overline{U}(0), u(l,t) = B - \overline{U}(l) \end{aligned}$$

on cherche $\overline{U}$ tel que

$$\begin{cases} C^2 \overline{U}^{"}(x) + f(x) = 0 \Rightarrow \overline{U}^{"}(x) = -\dfrac{1}{C^2} f(x) \\ \overline{U}(0) = A \\ \overline{U}(l) = B \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \overline{U}^{'}(y) &= -\int_0^y \frac{f(\xi)}{C^2} d\xi + a \\ \overline{U}(x) &= \int_0^x \overline{U}^{'}(y)\, dy = ax + b - \int_0^x \int_0^y \frac{f(\xi)}{C^2} d\xi dy \\ \overline{U}(0) &= A \Rightarrow b = A \\ \overline{U}(l) &= B \Rightarrow al + A - - \int_0^l \int_0^y \frac{f(\xi)}{C^2} d\xi dy = B \\ &\Rightarrow \quad a = \frac{B-A}{l} + \frac{1}{lC^2} \int_0^l \int_0^y f(\xi)\, d\xi dy \end{aligned}$$

alors :

$$\overline{U}(x) = \frac{B-A}{l} x + \frac{x}{lC^2} \int_0^l \int_0^y f(\xi)\, d\xi dy + A - \frac{1}{C^2} \int_0^l \int_0^y f(\xi)\, d\xi dy \tag{3.54}$$

si par exemple si $f = f_0 = C^{st}$ alors :

$$\overline{U}(x) = \frac{B-A}{l} x + A + \frac{f_0}{2C^2} \left(lx - x^2 \right)$$

il rest à déterminer $v(x,t)$ solution de l'équation homogéne

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = C^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad < x < l \quad t \succ 0 \\ v(0,t) = v(l,t) = 0 \\ v(x,0) = u_0(x) - \overline{U}(x,0), v_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{3.55}$$

ce type de probléme est déja êtudié.

3.2 Exercices

Exercise 8 *Résoudre par la méthode de séparation des variables, l'équation (E) avec les condition frontiéres (F) et les conditions initiales (I) suivante :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad 0 < x < 1, t > 0 & (E)\\ u(0,t) &= 0, u_x(1,t) = 0 \qquad t \geq 0 & (F)\\ u(x,0) &= 0, u_t(x,0) = \sin\frac{\pi}{2}x + \sin\frac{3\pi}{2}x & (I)\end{aligned}$$

On pose

$$u(x,t) = T(t)\,X(x) \Rightarrow \frac{T"}{T} = \frac{X"}{X} = -\lambda$$

d'où

$$\begin{aligned} X" + \lambda X &= 0,\\ T" + \lambda T &= 0.\end{aligned}$$

les condition (F) doment

$$\begin{cases} T(t)\,X(0) = 0 & \forall t \succ 0\\ T(t)\,X'(0) = 0 & \forall t \succ 0\end{cases} \Rightarrow X(0) = X'(1) = 0$$

on obtient ainsi le problème de Sturme-liouville

$$\begin{cases} X" + \lambda X = 0,\\ X(0) = X'(1) = 0.\end{cases}.$$

On distinge 3 Cas :

1erCas :$\lambda < 0$,

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \lambda &= 0 \Rightarrow X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}\\ &\Rightarrow X(0) = C_1 + C_2; X'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \ \text{ solution } \ \text{ triviale.}\end{aligned}$$

$2^{éme}$ Cas : $\lambda = 0$

$\Rightarrow \alpha^2 = 0 \Rightarrow x = ax + b \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow b = 0, X'(1) = 0 \Rightarrow a = 0$ solution triviale.

$3^{éme}$ Cas : $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} X(\pi) &= C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x; X(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0, X(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \\ X'(x) &= C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \Rightarrow X'(1) = 0 \Rightarrow C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \cos\sqrt{\lambda} = 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{\lambda} = \sqrt{\lambda_n} = (2n+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{(2n+1)^2}{4}\pi^2, n \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

d'où

$$X_n(x) = C_n \sin\frac{2n+1}{2}\pi x, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Les solution correspendants à $\lambda = \lambda_n$ de l'équation $T(t)$ sont

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{2n+1}{2}\pi t + B_n \sin\frac{2n+1}{2}\pi t.$$

Cherchons la solution du probléme (E), (F), (I) sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0}\left(A_n \cos\frac{2n+1}{2}\pi t + B_n \sin\frac{2n+1}{2}\pi t\right)\sin\frac{2n+1}{2}\pi x$$

Détérminons A_n et B_n tel que la solution $u(x,t)$ vérifie les conditions

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 0} A_n \sin\frac{2n+1}{2}\pi x \Rightarrow A_n = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

d'où

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n\geq 0} B_n \sin\frac{2n+1}{2}\pi t . \sin\frac{2n+1}{2}\pi x, \\ u_t(x,t) &= \sum_{n\geq 0} B_n \frac{2n+1}{2}\pi \cos\frac{2n+1}{2}\pi t \sin\frac{2n+1}{2}\pi x, \\ u_t(x,0) &= \sum_{n\geq 0} B_n \frac{2n+1}{2}\pi \sin\frac{2n+1}{2}\pi x = \sin\frac{\pi}{2}x + \sin\frac{3\pi}{2}x. \\ &\Rightarrow B_0\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + B_1\frac{3\pi}{2}\sin\frac{3\pi}{2} + \sum_{n\geq 0} B_n\frac{2n+1}{2}\pi\sin\frac{2n+1}{2}\pi x \\ &= \sin\frac{\pi}{2}x + \sin\frac{3\pi}{2}x. \end{aligned}$$

par identification on trouve

$$B_0 = \frac{2}{\pi}, B_1\frac{2}{3\pi}, B_n = 0, \forall n \geq 2,$$

ainsi la solution du probléme est

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}t\sin\frac{\pi}{2}x + \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2} + \sin\frac{3\pi}{2}.$$

c'est une solution du classe C^∞.

Exercise 9 *Résoudre par la méthode de séparation des variables, l'équation (E) avec les condition frontiéres (F) et les conditions initiales (I) suivant :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a \quad 0 < x < \pi, t \succ 0 && (E) \\ u(0,t) &= A = u(\pi,t) \quad a : C^{st} && (F) \\ u(x,0) &= ax(x-\pi) + A, \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 && (I) \end{aligned}$$

On cherche la solution sous le forme

$$u(x,t) = \overline{u}(x) + v(x,t)$$

en remplaçant dans (E), (F), (I)

$$v_{tt} = \overline{u}'' + v_{xx} + 2a$$

$$\begin{cases} \overline{u}(0) + v(0,t) = A \\ \overline{u}(\pi) + v(\pi,t) = A \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{u}(x) + v(x,t) = ax(x-\pi) + A, \\ v_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

Cherchons $\overline{u}$ solution de

$$\overline{u}'' + 2a = 0 \qquad \overline{u}(0) = \overline{u}(\pi) = A$$

et on a

$$\overline{u}(x) = ax(x-\pi) + A$$

v est alors solution de

$$\begin{aligned} v_{tt} &= v_{xx}, && (\mathrm{E}_1) \\ v(0,t) &= v(\pi,t), && (\mathrm{F}_1) \\ v(x,0) &= 2ax(x-\pi), v_t(x,0) = 0. && (\mathrm{I}_1) \end{aligned}$$

Appliquons la méthode de séparation des variables de probléme (E_1)-(F_1)-(I_1), on obtient la famille des solutions élémontaires :

$$\begin{aligned} v_n(x,t) &= (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx \\ v(x,t) &= \sum_{n\geq 1} (A_n \cos nt + B_n \sin nt) \sin nx. \end{aligned}$$

En utilisons les données initiales détérminer A_n, B_n on à

$$v(x,0) = \sum_{n\geq 1} A_n \sin nx$$

developpons en série de Fourier-sinus la fonction

$$v_0(x) = 2ax(x-\pi)$$

on a

$$2ax(x-\pi) = \sum_{n\geq 1} \alpha_n (\sin nx)$$

avec

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2ax(x-\pi)\sin nx dx = \frac{4a}{\pi}\int_0^\pi x(x-\pi)\sin nx dx = \frac{8a}{n^3\pi}\left[(-1)^n - 1\right].$$

$$\alpha_n = \begin{cases} 0 & n \ \ paire \\ \dfrac{-16a}{n^3\pi} & n \ \ impaire \end{cases}$$

d'où

$$2ax(x-\pi) = \sum_{k\geq 0} \frac{-16a}{(2k+1)^3\pi} \sin(2k+1)x.$$

par suite

$$A_n = \begin{cases} 0 & n \ \ paire \\ \dfrac{-16a}{n^3\pi} & n \ \ impaire \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ A_{2k} = 0, A_{2k+1} = \frac{-16a}{(2k+1)^3\pi}.$$

$$v(x,t) = \sum_{k\geq 0} \frac{-16a}{(2k+1)^3\pi} \cos(2k+1)t \sin(2k+1)x$$

est la solution du probléme (E_1)-(F_1)-(I_1) donc la solution du probléme donnée est A aussi

$$u(x,t) = 2ax(x-\pi) + A - \frac{16a}{\pi}\sum_{k\geq 0}\frac{-1}{(2k+1)^3}\cos(2k+1)t\sin(2k+1)x.$$

Remarque 3.4 *v définit bien une solution du probléme (E_1)-(F_1)-(I_1) cas les condition de converge sur les donnée initiales sou vérifion*

$$\begin{aligned} v_0(x) &= 2ax(x-\pi) \quad et \quad C^\infty \quad et \quad v_0(0) = v_0(\pi), \qquad (C_1) \\ v_0^{"}(x) &= 2ax, \quad v_0^{"}(0) = v_0^{"}(\pi). \end{aligned}$$

$$v_1(x) = 0. \qquad (\mathrm{C}_2)$$

Exercise 10 *Méme questions pour :*

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx} + t\sin x \qquad 0 < x < 1, t \succ 0 \\ u(0,t) &= 0 = u(\pi,t) \\ u(x,0) &= x(x-\pi), u_t(x,0) = 0 \end{aligned}$$

On cherche u sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{k\geq 0} u_n(t)\sin nx.$$

$$\begin{aligned} f(x,t) &= t\sin x \\ &= \sum_{k\geq 0} f_n(t)\sin nx = f_1(t)\sin x + f_2(t)\sin x + ... + f_n(t)\sin x + ... \\ &\Rightarrow f(x,t) = \begin{cases} f_1(t) = t & n = 1 \\ f_n(t) = 0 & n \succ 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$u_0(x) = x(x-\pi) = \sum_{k\geq 0} \alpha_n \sin nx$$

avec

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(x-\pi)\sin nx dx.$$

$$\alpha_n = \frac{-4}{n^3\pi}\left[(-1)^n - 1\right] = \begin{cases} 0 & n \ \ paire \\ \dfrac{-8}{n^3\pi} & n \ \ impaire \end{cases}$$

$$u_1(x) = 0, B_n = 0, \forall n$$

u_n est solution du probléme

$$\begin{cases} u_n^{"}(t) + n^2 u_n(t) = f_n(t) \\ u_n(0) = \alpha_n \\ u_n^{'}(0) = 0 \end{cases}$$

pour $n \succ 0$

$$\begin{cases} u_{2n}^{"}(t) + 4n^2 u_{2n}(t) = 0 \\ u_{2n}(t) = 0, u_{2n}^{'}(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow u_{2n}(t) = 0$$

$$\begin{cases} u_{2n+1}^{"}(t) + (2n+1)^2 u_{2n+1}(t) = 0 \\ u_{2n+1}(t) = 0, u_{2n+1}^{'}(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ u_{2n+1} = A\cos(2n+1)t + B\sin(2n+1)t$$

$$\begin{cases} u_{2n+1}(t) = A = \dfrac{-8}{(2n+1)^3\pi} \\ u_{2n+1}^{'}(t) = (2n+1)B = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$u_{2n+1}(t) = \frac{8}{(2n+1)^3 \pi} \cos(2n+1)t$$

pour $n = 1$

$$\begin{cases} u_1^{"}(t) + u_1(t) = t \\ u_1(t) = \frac{8}{\pi}, u_1'(t) = 0 \end{cases}$$

$$u_1 = v_1 + w_1$$

avec

$$\begin{cases} w_1^{"}(t) + w_1(t) = t \\ w_1(t) = \frac{8}{\pi}, w_1'(t) = 0 \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} v_1^{"}(t) + v_1(t) = t \\ v_1(t) = \frac{8}{\pi}, v_1'(t) = 0 \end{cases}$$

d'où

$$w_1(t) = \frac{8}{\pi} \cos t$$

v_1 est bonné par :

$$v_1(t) = \int_0^t U(t-\tau)\,\tau d\tau$$

où U est la solution du probléme

$$\begin{cases} U_1^{"}(t) + U_1(t) = t \\ U_1(t) = \frac{8}{\pi}, U_1'(t) = 1 \end{cases} \Rightarrow U_1(t) = \sin t$$

donc

$$v_1(t) = \int_0^t \tau \sin(t-\tau)\, d\tau = t - \sin t$$

d'où

$$u_1(t) = \frac{8}{\pi} \cos t + t - \sin t$$

d'où la solution du probléme est :

$$\begin{aligned} u(x,t) &= u_1(t) \sin x + \sum_{n \geq 0} u_{2n+1}(t) \sin(2n+1)x \\ &= \left(\frac{8}{\pi} \cos t + t - \sin t \right) \sin x + \sum_{n \geq 0} \frac{8}{(2n+1)^3 \pi} \cos(2n+1)t \sin(2n+1)x. \end{aligned}$$

Exercise 11 *Même question pour*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t\sin x \qquad 0 < x < \pi, t \succ 0 \tag{E}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = \pi^2 t \tag{F}$$

$$u(x,0) = x(\pi - x), u_t(x,0) = \pi^2 \tag{I}$$

On introduit un nouvelle fonction inconnue $v(x,t)$

$$u(x,t) = U(x,t) + v(x,t)$$

où

$$U(x,t) = \pi^2 t$$

u est solution du probléme $(E) - (F) - (I)$ si

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx} + t\sin x \\ v(0,t) = 0 = v(\pi,t) \\ v(x,0) = x(\pi - x), v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$$u(x,t) = \pi^2 t = (t - \sin t)\sin x + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos(2n+1)t\sin(2n+1)x.$$

Exercise 12 *Même question pour le probléme :*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{xx} \qquad 0 < x < 1, t \succ 0 \tag{E}$$

$$u_x(0,t) = 0, u_x(1,t) = 0 \qquad t \succ 0 \tag{F}$$

$$u(x,0) = x^2 - x, u_t(x,0) = 0 \qquad 0 < x < 1 \tag{I}$$

On pose $u(x,t) = X(x)T(t)$ pour tous dans (E) on trouve

$$\frac{X"}{X} + \frac{T"}{T} = -\lambda$$

$$\begin{aligned} X" + \lambda X &= 0 \\ T" + \lambda T &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_x(x,t) &= X'(x)T(t), u_x(0,t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \\ u_x(1,t) &= 0 \Rightarrow X'(1) = 0. \end{aligned}$$

on obtient le probléme Sturn-liouville

$$\begin{cases} X" + \lambda X = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

on distingue 3 Cas :

1^{éme}Cas : $\lambda < 0$ la solution générale de (1) est

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{\sqrt{-\lambda}x}; X'(0) = X'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

solution triviale.

2^{éme}Cas : $\lambda = 0$

$$X(x) = C_1 x + C_2; X'(0) = X'(1) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$$

solution triviale.

3^{éme}Cas : $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \\ X'(x) &= -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \\ X'(0) &= 0 \Rightarrow C_2 = 0, \\ X'(1) &= 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \lambda_n = n^2\pi^2 \\ &\Rightarrow X(x) = C_n \cos n\pi x, n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

la solutions de l'équation $T_n(t)$ correspondants à $\lambda_n = n^2\pi^2$ sont

$$T_n(t) = A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t.$$

Cherchons la solution du probléme $(E)-(F)-(I)$ sons la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$$

$$u(x,t) = \sum_{n\geq 0} (A_n \cos n\pi t + B_n \sin n\pi t) \cos n\pi x.$$

Détérminons A_n et B_n

$$u(x,0) = \sum_{n\geq 0} A_n \cos n\pi x = x^2 - x$$

développons en serie de Fourier-cosunus la fonction $\overline{u_0}$

$$u_0(x) = x^2 - x$$

prolengement paire periodique de pério de 2 de la fonction

$$x^2 - x = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n\geq 0} \alpha_n \cos n\pi x$$

où

$$\alpha_n = 2\int_0^1 \left(x^2 - x\right) \cos n\pi x dx, n \geq 0$$

$$\alpha_0 = 2\int_0^1 \left(x^2 - x\right) dx = -\frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} n &\geq 0, \alpha_n = 2\int_0^1 \left(x^2 - x\right) \cos n\pi x dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n + 1\right) = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2} & si \quad n \; paire \\ 0 \quad si & n \; impaire \end{cases} \end{aligned}$$

d'où

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\pi x = -\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos n\pi x,$$

par identification on trouve

$$A_0 = -\frac{1}{6}, A_n = \alpha_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n^2\pi^2} & si \quad n\ paire \\ 0 \quad si \quad n\ impaire \end{cases}$$

D'outre part

$$u_t(x,t) = \sum_{n\geq 0} (-n\pi A_n \sin n\pi t + n\pi B_n \cos n\pi t) \cos n\pi x.$$

$$u_t(x,t) = 0 \Rightarrow B_n = 0.$$

Ainsi

$$u(x,t) = -\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n)^2 \pi^2} \cos 2n\pi t. \cos 2n\pi x$$

il reste à s'assurer que la série converge et qu'elle définit bien une solution du probléme on a :

$$\frac{1}{n^2} \cos 2n\pi t. \cos 2n\pi x \leq \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty,$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$ série de Rémaine.
alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos 2n\pi t. \cos 2n\pi x$$

converge uniforme sur $\mathbb{R}^2$ examinons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{2}{\pi} \sum_{n\geq 0} \cos 2n\pi t. \sin 2n\pi x \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{n\geq 0} \left(\frac{\sin 2n\pi (x+t)}{n} + \frac{\sin 2n\pi (x-t)}{n} \right) \\
&= -\frac{1}{\pi} \sum_{n\geq 0} \left[\frac{\sin nz}{n} + \frac{\sin ny}{n} \right]
\end{aligned}$$

où

$$z = 2\pi\,(x+t)\,, y = 2\pi\,(x-t)$$

pour cette série la critère d'Abel pour la converg uniforme est applicable. car chacune des série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{\sin nz}{n}, \sum_{n\geq 0}\dfrac{\sin ny}{n}$ satisfait au critère d'Abel, et ça peut affirmer la converge uniforme sur tous compacte ne contenant pas

$$z = 2k\pi, y = 2k^{'}\pi; \left(k, k^{'} \in \mathbb{Z}\right)$$

c-à-d $2\pi\,(x+t) = 2k\pi, x-t = k^{'}$. on retrouve les problèmes d'abcise $x = k^{"}$. qui sont des points de discontinuté de $\overline{u}_0$

$$\begin{aligned} \overline{u}_0 &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \overline{u}_0\,(x) &= \begin{cases} x^2 - x & 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 + x & -1 \leq x \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\overline{u}_0$ est 2-périodique.

Par exemple

$$1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 0 \leq x-1 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq (x-2) \leq 1$$

$$\begin{aligned} \overline{u}_0\,(x) &= \overline{u}_0\,(x-2) \qquad 2-\text{périodique} \\ &= (x-2)^2 + (x-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} sur \quad 0 &\leq x \leq 1, \overline{u}_0^{'} = 2x - 1.\overline{u}\left(0^+\right) = -1 \\ sur \quad -1 &\leq x \leq 0, \overline{u}_0^{'} = 2x + 1.\overline{u}\left(0^+\right) = 1 \end{aligned}$$

ausi u_x admet deux points de discontinuité dans $[0,1]$ l'équelle sut $x = 0, x = 1$ même résultat si u_t

$$-2\sum_{n\geq 0} \cos 2n\pi\,(x+t) + \cos 2n\pi\,(x-t)$$

le terme général ne tend pas vers 0, donc elle n'est pas uniforme converge. La dérivation terme à terme est donc initialisable pour les dérivée d'ordre 2 autrement dit la série (*)-(**) reperesentent et la dérivée eux dans

$$\left([0,1]\times\mathbb{R}^{+}\right)-\left\{(x,t)\,/x+t=k,x-t=k^{'}.k,k^{'}\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Chapitre 4

Équations de Laplace

4.1 Équations de Laplace et Fonction harmonique

L'équation de laplace dans $\mathbb{R}^n$ est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0, \tag{4.1}$$

ainsi l'équation dans $\mathbb{R}^3$ C'est l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u = 0. \tag{4.2}$$

La quantité Δu s'appelle le la placien de u.

Définition 4.1 *Une fonction u vérifie $\Delta u = 0$ dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ s'appelle une fonction harmonique dans Ω.*

- soit $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$ et r la distance de A au point M de coordonnées $x_1, ..., x_n$ définie par : $r^2 = (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2$.

  les fonctions harmoniques de la forme $u(x_1, ..., x_n) = f(r)$ jouent un rôle import.

Théorème 4.1 *Une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^2$ qui ne dépend que de r est de la forme $f(r) = a \ln r + b$. une fonction harmonique dans $\mathbb{R}^n$, $n > 2$ qui ne dépent que de r est de la* *forme* $f(r) = ar^{2-n} + b$. *ces fonction sont harmoniques dans tout ouvert ne contenant pas le point* A.

Preuve

$$r^2 = (x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2$$

dans le cas $\mathbb{R}^2$

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2}.$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - a_i}{r}, \frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2} = \frac{1}{r} - \frac{(x_i - a_i)^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = f"(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 + f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_i^2}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} &= f"(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 + f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2}. \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} &= f"(r)\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 + f'(r)\frac{\partial^2 r}{\partial x_2^2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f"(r)\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2\right) + f'(r)(\Delta r) \\
\Delta u &= f"(r)\left(\frac{(x_1 - a_1)^2}{r^2} + \frac{(x_1 - a_1)^2}{r^2}\right) + f'(r)\left(\frac{1}{r} - \frac{(x_1 - a_1)^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{(x_2 - a_2)^2}{r^3}\right) \\
\Delta u &= f"(r) + f'(r)\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right) \Rightarrow \Delta u = f"(r) + \frac{1}{r}f'(r) \\
\Delta u &= \frac{1}{r}(rf'(r))' = 0 \quad u = f(r) \text{ est harmonique si } rf'(r) = a; C^{st} \\
&\Rightarrow \frac{df}{dr} = \frac{a}{r} \Rightarrow f(r) = a\ln r + b = u
\end{aligned}$$

■

4.1.1 Fonction de Green associée au contour Γ

Soit Ω domaine borné de frontiére Γ et la fonction $(p, M) \rightarrow G(p, M) . M \in \Gamma, p \in \Omega$, telle que.

i) $G(p, M) \rightarrow 0$ lorsque $p \rightarrow p_0 \in \Gamma$, avec $p_0 \neq M$. c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon \succ 0, \exists \eta; d(p, p_0) < \eta \Rightarrow |G(p, M) - G(p_0, M)| < \varepsilon, \forall M; d(p_0, M) \succ \eta.$$

ii) $\lim \int_\Gamma G(p, M)\, ds = 1$, lorsque $p \rightarrow p_0$ si de plus G satisfait à la condition $p \rightarrow G(p, M)$ est harmonique sur Ω, on dit que G est une fonction de Green associée au contour Γ.

Exemple 4.1 *Vérifier que la fonction*

$$[(x, y), \xi] \rightarrow G(x, y, \xi) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}, \xi \in AB$$

est une fonction de Green pour le segment $AB\,[A(a, 0), B = (b, 0)]$ de l'axe Ox il s'agit de vérifier les axiomes ***i),ii),iii)***

i) Soit

$$\begin{aligned} p_0 &= (x_0, 0) \qquad x_0 \in [a, b] \\ M &= (\xi, 0) \qquad \xi \neq x_0 \\ p &= (x, y) \end{aligned}$$

alors

$$G(p, M) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}$$

a pour limite 0, poisque $p \rightarrow p_0 \Leftrightarrow y \rightarrow 0$ et $x - \xi \nrightarrow 0$.

ii) $\int_\Gamma G(p, M)\, ds$ sexprime par $\frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi$ =????? lorsque $p \rightarrow p_0, x \rightarrow x_0 \in [a, b]$ et $y \rightarrow 0$ suivant le signe de y. ona les limites

$$y \rightarrow 0^+ : \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1 \quad et \quad y \rightarrow 0^- : \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right] = -1.$$

La fonction G est donc une fonction du Green.

vérifions maintenant le point **iii)** $p \to G(p, M)$ est harmonique dans $\mathbb{R}^3 - \{[a,b] \times \{0\}\}$

iii) On remarque que

$$G(p, M) = \operatorname{Im}\left[\frac{-1}{\pi(z-\xi)}\right],$$

et la fonction $z \to \dfrac{1}{(z-\xi)}$ est homorphe pour $z \neq \xi$, la partie imaginaire est donc hormonique le plans privé du point $(\xi, 0)$.

De plus la fonction

$$(x, y) \to F(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_a^b \frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2} d\xi$$

est une solution du probléme de Dirichlet suinant :

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{[a,b] \times \{0\}\}, \\ u(x, 0) = u(x, y)|_\Gamma = 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta F &= \frac{1}{\pi} \int_a^b \Delta \overbrace{\frac{y}{(x-\xi)^2 + y^2}}^{=0} d\xi \Rightarrow \Delta F = 0 \\ \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y0}} F(x, y) &= F(x_0, 0) = \lim_{p \to p_0} \int_a^b G(x, y)\, d\xi = 1. \end{aligned}$$

La notation

$$C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{\overline{u \in C\left(\overline{\Omega}\right) : \sup_{x,y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty}\right\}$$

avec $0 < \alpha < 1.C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right)$ désigne l'espace des fonction de classe C^k sur Ω et dont les dérivées d'ordre k satisfont à une condition de lipshitz d'exposant α sur $\overline{\Omega}$; $(\alpha \in]0, 1[)$

$$C^{k,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right) = \left\{u \in C^k : D^j u \in C^{0,\alpha}\left(\overline{\Omega}\right), \forall j : |j| \leq k\right\}$$

4.2 Noyau de Poisson

Théorème 4.2 (Formule de Poisson) *Soit u une fonction harmonique dans le disque ouvert $D(0;R)$ et continue dans le disque fermé $\overline{D}(0;R)$. Alors*

$$u(\rho,\theta)=\int_{-\pi}^{\pi}k(\rho,\theta-\xi)f(\xi)d\xi,$$

avec

$$k(\rho,w)=\frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos w+\rho^2}.$$

4.3 Exercices

Exercise 13 *Cherchons des solutions de l'EDP*

$$\begin{cases}\nabla^2 u=0 \quad 0\leq\rho\leq R\ ,\ -\pi\leq\theta\leq\pi,\\ \qquad\qquad u(R,\theta)=f(\theta).\end{cases}$$

Pour les raisons physique il nous faut suposer les assumptions suivants

Remarque 4.1 (A_1) $u(\rho,\pi)=u(\rho,-\pi)$ *et* $\frac{\partial u(\rho,\pi)}{\partial\theta}=\frac{\partial u(\rho,-\pi)}{\partial\theta}$

(A_2) $|u(\rho,\theta)|$ *est bornée si* $\rho\longrightarrow 0$

maintenant cherchons des solutions sous la forme :

$u(\rho,\theta)=\varphi(\rho)S(\theta)$ il vient

$$\nabla^2 u=0\Longrightarrow \varphi^{''}S+\frac{1}{\rho}\varphi^{'}S+\frac{1}{\rho^2}\varphi S^{''}=0\Longrightarrow\frac{\varphi^{''}+\frac{1}{\rho}\varphi^{'}}{\frac{1}{\rho^2}\varphi}=-\frac{S^{''}}{S}=\lambda,$$

en utilisant les assumpations

$S(\pi)=S(-\pi)$ et $S^{'}(\pi)=S^{'}(-\pi)$ et $|\varphi(\rho)|$ est bornée lorsque $\rho\longrightarrow 0$, on obtient les deux problémes :

$$\begin{cases}\varphi^{''}+\frac{1}{\rho}\varphi^{'}-\frac{\lambda}{\rho^2}\varphi=0,\\ |\varphi(\rho)|\ \text{ est bornée }\ \rho\longrightarrow 0\end{cases}\tag{P_1}$$

$$\begin{cases} S^{''} + \lambda S = 0, \\ S(\pi) = S(-\pi), \\ S^{'}(\pi) = S^{'}(-\pi), \end{cases} \tag{P_2}$$

on distingue 3 cas pour le probléme (P_2) :

si $\lambda = 0$ (solution trivial)

si $\lambda < 0$ (solution trivial)

si $\lambda > 0$ alors

$$S(\theta) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\theta + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\theta,$$

telque

$$S^{'}(\theta) = \sqrt{\lambda}(-c_1 \sin\sqrt{\lambda}\theta + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\theta),$$

les conditions aux limites nous donnes :

$$\begin{cases} c_1 \cos\sqrt{\lambda}\pi + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\pi - c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi, \\ -c_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\pi = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi + c_2 \cos\sqrt{\lambda}\pi, \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \\ c_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0, \end{cases}$$

ce qui implique $\sqrt{\lambda} = n \Longrightarrow \lambda^2 = n$

les valeurs propres et les fonctions propres

$$S_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta.$$

L'équatin (P_1) prend la forme

$$\rho^2\varphi^{''} + \rho\varphi^{'} - n^2\varphi = 0 \quad \text{(équation de Chauchy-Euler)}$$

dont l'intégrale (obtenue en cherchons des solutions particuliére du type $\rho \longrightarrow \rho^{\alpha}$) s'ecrit

$$\varphi(\rho) = c_n\rho^n + d_n\rho^{-n}$$

l'existance de $\varphi(0)$ contraine $d_n = 0$ finalement on a le systéme de solution suivants :

$$\begin{cases} S_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta \\ \varphi_n(\rho) = c_n \rho^n, \end{cases}$$

alors une solution possible est :

$$u(\rho, \theta) = \rho^n [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta],$$

appliquons le principe de supperposition, on obtient :

$$\begin{aligned} u(\rho, \theta) &= \sum_{n \geq 0} \varphi_n(\rho) S(\theta) \\ &= \sum_{n \geq 0} \rho^n [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta], \end{aligned}$$

la condition $u(R, \theta) = f(\theta)$ nous donne

$$f(\theta) = \sum_{n \geq 0} R^n [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta],$$

developpons $f(\theta)$ en serie de fourier, on obtient

$$u(\rho, \theta) = A_0 + \sum_{n \geq 1} \rho^n [A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta]$$

où

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta,$$

$$A_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \qquad n = 1, 2, 3......$$

$$B_n = \frac{1}{R^n \pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta\ , \qquad n = 1, 2, 3......$$

Si $\rho = 0$ on a

$$\begin{aligned} u(0,\theta) &= A_0 \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\ d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(R,\theta)\ d\theta. \end{aligned}$$

Remarque 4.2 *Si* $f(\theta) = at \Longrightarrow A_0 = at$ *et* $A_n = B_n = 0$

Integrale de Poisson

On peut toujours exprimer la solution comme un integrale, en effet

$$\rho^n A_n \cos n\theta = \frac{\rho^n}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos n\xi \cos n\theta d\boldsymbol{\xi},$$

$$\rho^n B_n \sin n\theta = \frac{\rho^n}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\sin n\xi \sin n\theta d\boldsymbol{\xi},$$

il results :

$$\begin{aligned} \rho^n[A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta] &= \frac{\rho^n}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)[\cos n\xi \cos n\theta\ + \sin n\xi \sin n\theta\ ]d\xi \\ &= \frac{\rho^n}{R^n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n(\theta-\xi))d\xi, \end{aligned}$$

la solution (1) devient

$$\begin{aligned}
u(\rho,\theta) &= A_0 + \frac{1}{\pi}\sum_{n\geq 1}\frac{\rho^n}{R^n}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\cos(n(\theta-\xi))d\xi \\
&= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)(\sum_{n\geq 1}\frac{\rho^n}{R^n}\cos(n(\theta-\xi)))d\xi \\
&= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\operatorname{Re}\left\{\frac{\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\xi)}}{1-\frac{\rho}{R}e^{i(\theta-\xi)}}\right\}d\xi \\
&= A_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\operatorname{Re}\left\{\frac{\rho(\cos(\theta-\xi)+i\sin(\theta-\xi))}{R-\rho(\cos(\theta-\xi)+i\sin(\theta-\xi))}\right\}d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\partial\xi + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\frac{R\rho\cos(\theta-\xi)-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\xi)+\rho^2}d\xi \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi)\left\{\frac{1}{2}+\frac{R\rho\cos(\theta-\xi)-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos(\theta-\xi)+\rho^2}\right\}d\xi.
\end{aligned}$$

Finalement

$$u(\rho,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} k(\rho,\theta-\xi)f(\xi)d\xi,$$

avec

$$k(\rho,w) = \frac{1}{2\pi}\frac{R^2-\rho^2}{R^2-2R\rho\cos w+\rho^2},$$

cette expression appelleé noyau de poisson

Exercise 14 *Soit Γ le cercle de cantre o et de rayon R on cherche à déterminer $(x,y) \to f(x,y)$ telle que $\Delta f = 0$ à l'interieur de Γ et $f(x,y)|_\Gamma = g(\theta)$ g fonction donnée de l'ongle polaire θ on écrit f sous la forme suivant*

$$f(z) = \alpha_0|_{2+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n z^n}{R^n}, \alpha_n = a_n - ib_n$$

1) En passant en coordonnée polaires, montrer que l'on a

$$f\left(re^{i\theta}\right) = a_0 + \sum_{n\geq 0} \frac{r^n}{R^n}\left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$$

avec $\Phi(r,\theta) = g(\theta)$. En déduire l'expression des a_n et des b_n en fonction de g.

2) Établir que l'on a (2)

$$\Phi(R,\theta) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2} + \sum_{n\geq 0}\frac{r^n}{R^n}\cos n(\theta - u)\right] g(u)\, du$$

3) Retrouve à l'ande de (2) la formule

$$\Phi(r,\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} K(r,\theta - u)\, g(u)\, du$$

où $K(r,w)$ est le noyan de poisson.

Exercise 15 (Théoèreme de Harnack)

Si une suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ de fonction harmoniques $u_n \in C^2(\Omega)\, C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ converge uniformêment sur $\partial\Omega$ (Ω supposé borné) alors la suite $\{u_n\}_{n\geq 0}$ converge uniformêment.

1) En remplaçant α par $a_n - ib_n$ et z par $re^{i\theta}$ il vient même déterment

$$f\left(re^{i\theta}\right) = a_n - ib_n + \sum_{n\geq 0}\left(a_n - ib_n\right)\frac{r^n}{R^n}e^{in\theta}$$

d'où, en prenant la partie réelle $\Phi(r,\theta)$

$$\Phi(r,\theta) = a_0 + \sum_{n\geq 0}\frac{r^n}{R^n}\left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$$

comme $f\left(Re^{i\theta}\right) = g(\theta)$. on a nécessairement

$$g(\theta) = a_0 + \sum_{n\geq 0}\frac{r^n}{R^n}\left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right)$$

ce qui permet de conclure que les a_n et les b_n sont les coefficients de Fourier de on en déduit

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\, du, a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u) \cos nudu \quad et \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u) \sin nudu$$

2) En remplaçant les expressions de a_n et b_n dans le développement de Φ, on obtient :

$$\Phi\left(r,\theta\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(u\right)du+\sum_{n\geq 0}\frac{r^n}{R^n}\int_{-\pi}^{\pi}g\left(u\right)\cos n\left(\theta-u\right)du\right]$$

c'est-à-dire

$$\Phi\left(r,\theta\right)=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 0}\frac{r^n}{R^n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\left(\theta-u\right)\right]g\left(u\right)du$$

cette série est borné.

Il s'agit donc de calculer la somme de la série

$$\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 0}\frac{r^n}{R^n}\cos nw,$$

qui est la partie réelle de la série

$$\frac{1}{2}+\sum_{n\geq 0}\frac{r^n}{R^n}e^{inw}$$

cette derniére a pour somme

$$\frac{1}{2}+\frac{\lambda e^{iw}}{1-\lambda e^{iw}}\quad o\grave{u}\quad \lambda=\frac{r}{R}$$

la partie réelle de cette expression vant

$$\frac{1}{2}+\frac{\lambda\left(\cos w-\lambda\right)}{1-2\cos w+\lambda^2}=\frac{1-\lambda^2}{1-2\cos w+\lambda^2}$$

donc

$$\Phi\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-\dfrac{r^2}{R^2}}{1-\dfrac{r}{R}\cos\left(\theta-u\right)+\dfrac{r^2}{R^2}}g\left(u\right)du.$$

Chapitre 5

Equations des Ondes

La notation de variable dans $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ est (t, x) où $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, la variable t représente le temps

5.1 Existence et unicité

Théorème 5.1 (d'existence est d'unicité) *(Cauchy-Kowa lewska) soit*

$$Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + b_0(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j} + c(t, x) u = f \quad (5.1)$$

on pose

$$L_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \quad et \quad L_1 = b_0(t, x) \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} b_j(t, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_j} + c(t, x) I$$

telle que

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - L_2 + L_1$$

avec les hypothèses :

– • L_2 est elliptique sur Ω : $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \forall x \in \Omega$

- les cofficients de L_1 et L_2 sont analytique (C'est-à-dire développables en série entière au voisinage de tout point)
- la surface S est une surface analytique non caractéristique, le problème de cauchy :

$$\begin{cases} Lu = f \\ u\,|_S = \varphi \\ \dfrac{\partial u}{\partial \eta}\,|_S = \Psi \end{cases} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial \eta} \text{ dérivée normale}\right)$$

admet une solution analytique unique dans un voisinage de S, l'orsque f, φ et Ψ sont des fonctions analytique.

5.2 Equation des cordes vibrantes

Considérons l'équation :

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \tag{5.2}$$

pour trouver une solution générale de (5.2) on ramène l'équation (5.2) à la $2^{ème}$ forme canonique, l'équation des caractéristique

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - ct = \lambda_1 \\ x + ct = \lambda_2 \end{cases} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \text{ constantes arbitraires})$$

effectuons le changement de variable :

$$\begin{cases} X = x - ct \\ Y = x + ct \end{cases}$$

on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} = 0 \Rightarrow u\,(X, Y) = F\,(X) + G\,(Y)\,, \left(F, G \in C^2 \text{ fonctions arbitraire}\right)$$

ce qui donne comme solution générale de l'équation (1)

$$u\,(x, t) = F\,(x + ct) + G\,(x - ct) \tag{5.3}$$

5.2.1 problème de cauchy

il s'agit de trouver une solution de l'équation (5.2) vérifiant les conditions initiales données

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{5.4}$$

la forme de la corde à l'instant $t = 0$, distribution des vitesse $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ le long de la corde à l'instant $t = 0$

alors

$$\begin{aligned} u(x,0) &= F(x) + G(x) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= CF'(x+ct) - CG'(x-ct) \end{aligned}$$

en $t = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= CF'(x) - CG'(x) = u_1(x) \\ &\Rightarrow F'(x) - G'(x) = \frac{1}{C} u_1(x) \end{aligned}$$

en intégrant entre 0 et x

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c} \int_0^x u_1(s)\, ds + k, \;\; k: \text{ constante d'intégration}$$

D'ou, en faisant la somme puis la difference, il vient.

$$F(x) = \frac{u_0(x)}{2} + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s)\, ds + \frac{k}{2} \tag{5.5}$$

$$G(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(s)\, ds - \frac{k}{2} \tag{5.6}$$

remplaçons x par $x + ct$ dans (5.5) et par $x - ct$ dans (5.6), puis a gentant on obtient

$$F(x+ct) - G(x-ct) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+ct) - u_0(x-ct)\right] + \frac{1}{2C} \int_0^{x+ct} u_1(s)\, ds - \int_0^{x-ct} u_1(s)\, ds$$

Ce qui donne la formule de **D'ALEMBERT**

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+ct) - u_0(x-ct)\right] + \frac{1}{2C}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds \tag{5.7}$$

où u_0 et u_1 sont respectivement de classe C^2 et C^1.

Remarque 5.1 *Pour l'instant initial $t = \tau$ la solution est la suivant*

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+c(t-\tau)) - u_0(x-c(t-\tau))\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} u_1(s)\,ds \tag{5.8}$$

5.2.2 Equation avec second membre dans $\mathbb{R}$

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x) \end{cases} \tag{5.9}$$

d'après les principes de superposition, la solution du problème (5.9) peut être obtenir comme somme des solution v et w des problèmes suivants

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, x \in \mathbb{R} \\ v(x,0) = v_0(x)\,; x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial v}{\partial t}(x,0) = v_1(x)\,, t \geq 0 \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, x \in \mathbb{R} \\ w(x,0) = w_0(x)\,; x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1(x)\,, t \geq 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

la solution de (5.10) est déja donnée par le problème de D'ALMBERT

$$v(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+ct) - u_0(x-ct)\right] + \frac{1}{2C}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds$$

pour trouvé la solution de (5.11), on considére le probléme de Cauchy auxilière pour l'instant initiale τ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, x \in \mathbb{R}, t \geq \tau \\ U(x,t,\tau) = 0; x \in \mathbb{R} \\ \dfrac{\partial U}{\partial t}(x,t,\tau) = f(x,\tau), x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{5.12}$$

la solution du (5.12) est

$$U(x,t,\tau) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t+\tau)} f(x,\tau)\,ds \tag{5.13}$$

U : est de classe C^2 si f de classe C^1, w définie par

$$w(x,t) = c^2\int_0^t U(x,t,\tau)\,d\tau \tag{5.14}$$

5.2.3 Dérivation sous le signe somme

g(x,y) continue , ayant une dérivée $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ continue dans $\{x_1 \leq x \leq x_2, x_1 \leq y \leq x_2\}$, x_1 et x_2 étant deux fonctions dérivables par rapport à x

alors :

$$\frac{d}{dx}\int_{x_1}^{x_2} g(x,y)\,dy + g(x,x_2)\frac{dx_2}{dx} - g(x,x_1)\frac{dx_1}{dx}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt}(x,t) &= c^2\left[\int_0^t \frac{\partial U}{\partial t}(x,t,\tau)\,d\tau + U(x,t,\tau)\frac{dt}{d\tau} - U(x,t,\tau)\right] \\ \frac{d^2w}{dt^2}(x,t) &= c^2\left[\int_0^t \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t,\tau)\,d\tau + \frac{\partial U}{\partial t}(x,t,\tau)\frac{dt}{d\tau}\right] \\ \frac{d^2w}{dt^2}(x,t) &= c^2\int_0^t \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t,\tau)\,d\tau + C^2 f(x,t) \\ \frac{d^2w}{dx^2}(x,t) &= c^2\int_0^t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t,\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

alors

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \int_0^t \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}(x,t,\tau)\,d\tau + f(x,t) - c^2\int_0^t \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(x,t,\tau)\,d\tau$$

D'où w définie par (5.14), vérifie l'E.D.P du problème (5.11)

$$w(x,0) = w_0(x)\,; x \in \mathbb{R}$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = w_1(x)\,, t \geq 0$$

alors w définie par (5.14) est bien la solution de (5.11), alors par conséquent

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[u_0(x+ct) - u_0(x-ct)\right] + \frac{1}{2C}\int_{x-ct}^{x+ct} u_1(s)\,ds + \frac{c}{2}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(x,\tau)\,ds \quad (5.15)$$

$x \in C^2$ si $u_0 \in C^2$ et $u_1 \in C^1$ et $f \in C^1$

5.2.4 Continuité par rapport aux données initiales

Montrons que la solution du problème de Cauchy (1)-(3) dépend continûment des données initiales, c-à-d pour tous intervale $[0, t_0]$ et pour tous $\varepsilon \geq 0$ il existe $\delta(\varepsilon, t_0)$ positve telque les solution de (1) u et $\tilde{u}$ corespondant aux données initiales $(u_0,\ u_1)$ et $(\tilde{u}_0,\ \tilde{u}_1)$, respectivement vérifient $|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| < \varepsilon$ si $|u_0(x) - \tilde{u}_0(x)| < \delta$ et $|u_1(x) - \tilde{u}_1(x)| < \delta$. Les solutions u et $\tilde{u}$ sont liées aux données initiales par la relation de **D'ALEMBER**

$$\begin{aligned}
|u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| &\leq \frac{1}{2}|u_0(x+Ct) - \tilde{u}_0(x+Ct)| + \\
&\quad + \frac{1}{2}|u_0(x-Ct) - \tilde{u}_0(x-Ct)| + \frac{1}{2C}\int_{x-Ct}^{x+Ct} |u_1(x) - \tilde{u}_1(x)|\,ds \\
&\leq \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2C}\delta.2Ct = \delta(1+t) \leq \delta(1+t_0)
\end{aligned}$$

on peut prendre $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1+t_0}$, pour avoir

$$|u_0(x) - \tilde{u}_0(x)| < \delta \ et\ \ |u_1(x) - \tilde{u}_1(x)| < \delta \Rightarrow |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| < \varepsilon$$

le problème (1) et (3) est donc bien posés.

5.3 Formule de Kirchhoff

5.3.1 Probl eme de Cauchy sur $\mathbb{R}^3$

On Considère le problème suivante

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \wedge u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \tag{5.16}$$

où $\wedge u = \sum_{i=1}^{3} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t)$. On introduit S_r et B_r la sph ere et la boule de $\mathbb{R}^3$

$$S_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = r \right\}$$

et

$$B_r = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| \leq r \right\}.$$

Pour $u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, la moyenne de u est donnée par

$$\overline{u}(x,t) = \frac{1}{S.(B(x,r))} \int_{S_r} u(y,t)dS(y) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u(y,t)dS(y)$$

où $dS(y)$ désigne la mesure de surface de B_r.

Lemme 5.1 *Si u résout (5.16) alors $\overline{u}$ résout*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial r^2} - \frac{(n-1)}{r} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial r} = 0, \quad 0 < r < 1,\ t \geq 0 \\ \overline{u}(r,0) = \overline{f}(x), \\ \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t}(r,0) = \overline{g}(x). \end{cases} \tag{5.17}$$

Preuve Voir ([4]). ■

Théorème 5.2 *Soient* $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ *et* $g \in C^1(\mathbb{R}^3)$, *alors le probl eme* (5.16) *admet une solution unique donnée par*

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\|x-x_0\|=ct} f(s)dS(s)\right] + \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{\|x-x_0\|=ct} g(s)dS(s).$$

Preuve Voir ([4]). ∎

Chapitre 6

Equation de la chaleur

6.1 Equation de la chaleur

Elle s'écrit de la façon suivante dans le cas d'une variable $u_{xx} = ku_t$, et plus généralement $\Delta u = ku_t$.

Enoncé du problème mixte pour l'équation $u_t = \frac{1}{k}u_{xx}$ dans le rectangle $(0, T) \times (0, l)$.

Il s'agét de déterminer u tel que

$$\begin{cases} u_t = \frac{1}{k}u_{xx} \\ u(0, x) = \zeta(x) \\ u(t, 0) = \Psi_1(t), u(t, l) = \Psi_2(t), \forall t \in [0, T] \end{cases} \tag{6.1}$$

ζ, Ψ_1 et Ψ_2 étant de classe C^1 et satisfaisant aux conditions de raccord.

$$\zeta(0) = \Psi_1(0), \qquad \zeta(l) = \Psi_2(0) \tag{6.2}$$

Théorème 1 : d'existence et d'unicité -sous les hypothéses ci-dessus le probleme mixt admet une solution, et une seule, de classe C^2 en x, et C^1 en t à l'intérieur du rectangle $[0, T] \times [0, l]$

6.1.1 Principe de maximin

soit w un ouvert de $\mathbb{R}^N$ pour $T \succ 0$ fixé. on construi le cylindre Ω dans $\mathbb{R}^{N+1}$ tel que w est la base de ce cylindre Ω

$$\Omega = \{(x,t) \diagdown x \in w, 0 < t < T\}$$

la frontière $\partial\Omega = \partial^{'}\Omega \cup \partial^{"}\Omega$. tel que

$$\partial^{'}\Omega = \{(x,t) \diagdown x \in \partial w, 0 < t < T \wedge x \in w, t = 0\}$$

$$\partial^{"}\Omega = \{(x,t) \diagdown x \in w, t = T\}$$

Théorème 2 : Soit u continue sur $\overline{\Omega}$ et u_t, $u_{x_i x_h}$ existe et continue sur Ω tel que

$$u_t - \Delta u \leq 0$$

alors

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial' \Omega} u \tag{6.3}$$

Preuve : soit $u_t - \Delta u \leq 0$ sur Ω et soit Ω_ε pour $0 < \varepsilon < T$ l'ensemble

$$\begin{aligned} \Omega_\varepsilon &= \{(x,t) \diagdown x \in w, 0 < t < T - \varepsilon\} \\ si \ \ (x,t) &\in \Omega_\varepsilon, u \in C^0 \left(\overline{\Omega_\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

il existe une point $(x,t) \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ tel que

$$u(x,t) = \max_{\overline{\Omega}} u \Rightarrow u_t = 0, \Delta u \leq 0$$

ce qui est imposible.

$$si \ \ (x,t) \in \partial^{"}\Omega_\varepsilon \Rightarrow u_t \geq 0, \Delta u \leq 0$$

ce que est imposible aussi alors

$$(x,t) \in \partial^{'}\Omega_{\varepsilon}$$

et

$$\max_{\overline{\Omega_{\varepsilon}}} u = \max_{\partial^{'}\Omega_{\varepsilon}} u \leq \max_{\partial^{'}\Omega} u$$

et comme u est continre dans $\overline{\Omega}$.

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \lim_{\varepsilon \to 0} \max_{\overline{\Omega_{\varepsilon}}} u$$

alors on obtient (6.3). soit maintenant $u_t - \Delta u \leq 0$ sur Ω. mais introduisons

$$v(x,t) = u(x,t) - kt \quad \left(k : C^{st} \geq 0\right)$$

alors

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - k < 0$$

$$\max_{\overline{\Omega}} = \max_{\overline{\Omega}} (r + kt) \leq \max_{\overline{\Omega}} r + kt = \max_{\partial^{'}\Omega} u + kT$$

pour $k \to 0$ on obtient (6.3).

Remarques :

1) si $u(x,t) \geq 0$ sur $\partial^{'}\Omega$ alors $u(x,t) \geq 0$ sur $\overline{\Omega}$.

2) si $u(x,t) \leq 0$ sur $\partial^{'}\Omega$ alors $u(x,t) \leq 0$ sur $\overline{\Omega}$.

3) soient u_1 et u_2 deux solutions, $u_1 - u_2$ est aussi une solution donc si $u_1 \leq u_2$ sur $\partial^{'}\Omega$ alors $u_1 \leq u_2$ sur $\overline{\Omega}$; on choisissant pour u_2 le maximum M de u_1 sur $\partial^{'}\Omega$. on obtient aussi que $u_1 \leq M$ dans $\overline{\Omega}$ on peut écrire si $m \leq u(x,t) \leq M$ sur $\partial^{'}\Omega$ alors $m \leq u(x,t) \leq M$ sur $\overline{\Omega}$. en particulier si $u(x,t) = 0$ sur $\partial^{'}\Omega$ alors $u(x,t) = 0$ sur $\overline{\Omega}$.

4) le principe du maximum permet d'établire l'unicite de certains probléme. Nous allaus le montrer sur probléme (1). si u_1 et u_2 sont deuxsolutions de ce probléme, leur différence est nulle sur $\partial^{'}\Omega$ elle est donc nulle sur $\overline{\Omega}$ et $u_1 = u_2$.

Lemme : Considérons l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(x,t) \quad sur\ \Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad sur\ \partial\Omega \times \mathbb{R}^+ \tag{6.5}$$

$$u(0,x) = u_0(x) \quad sur\ \Omega \tag{6.6}$$

Si $u_0(x) \geq 0$ alors $u(t,x) \geq 0$

Preuve : supposons $u \in H^1(\Omega)$ alors $u^{'} \in H^1(\Omega)$. $(u^- = \max(-u,0)$ et $\nabla u^{^-} = -|\nabla u|_{u<0})$ nous multiplions l'équation (6.4) par $u^{'}$ et intégrons sur Ω et utilisons l'identité de Green nous obtenons

$$\frac{d}{dt}\left\|u^{^-}\right\|_2^2 = -2a^2\left\|\nabla u^-\right\|_2^2 - 2\left\|f(x,t)\right\|_1$$

D'où la fonction $t \to \left\|u^{^-}(t)\right\|_2^2$ est décroissante. Donc nous avons

$$0 \leq \left\|u^{^-}\right\|_2^2 \leq \left\|u^{^-}(0)\right\|_2^2 = 0 \Rightarrow u^{^-} = 0; u \geq 0$$

Bibliographie

[1] K. Baddari et A. Abbassov, Equations de la physique mathématique appliquée, OPU ; 2009.

[2] J. Bass, Cours de Math´ematiques, tome2 : Equations différentielles et aux dérivées partielles, optimisation, Dunod ; 1978.

[3] H. Reinhard, Equations aux dérivées partielles, Dunod, Paris, 2001.

[4] A. Kelleche, Équations de la physique mathématique, Université Djilali Bounâama, Khemis Miliana, Ain defla, Algérie, 2020.