République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Echahid Cheikh Larbi Tebessi –TEBESSA-
Faculté des Sciences Exactes et Sciences de la Nature et de la Vie
Département des mathématiques et informatique

Thèse

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de Doctorat LMD
En : MATHEMATIQUES
Option : Analyse fonctionnelle appliquées

Par : **MERAH Ahlem**

Intitulée :

Etude de quelques classes d'équations et systèmes d'équations d'évolution non linéaires

Devant le jury :

MESSAOUDENE Hadia	Professeur	Université de Tébessa	Présidente
MESLOUB Fatiha	MCA	Université de Tébessa	Rapporteuse
ZARAI Abderrahmane	Professeur	Université de Tébessa	Co-Rapporteur
GASRI Ahlem	MCA	Université de Tébessa	Examinatrice
DEGAICHIA Hakima	MCA	Université de Tébessa	Examinatrice
OUSSIF Taki-Eddin	MCA	Université de Oum El Bouaghi	Examinateur
REZZOUG Imad	Professeur	Université de Oum El Bouaghi	Examinateur

Date de soutenance : 25/5/2023

Remerciememts

Au nom d'Allah le Miséricordieux et prière et Salut soient sur Notre Cher Maître & Prophète Mohammed « que le salut soit sur lui » et sur sa famille et ses fidèles compagnons.

Je commence par remercier et louanger Allah Tout-Puissant de m'avoir donné la foi et la force d'accomplir cet modeste travail, tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la Bénédiction d'Allah, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier et à adresser ma reconnaissance à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près an de réaliser ce travail.

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vives remerciements à ma groupe de formation et encadrement de Thèse à madame la **Dr. Mesloub Fatiha** et à monsieur le **Prof. Zarai Abderrahmane** de m'avoir accordé ses confiances pour travailler avec eux , et de me donner l'occasion de réaliser mon rêve. Je les suis reconnaissant pour les conseils qui m'ont prodigué au cours de ces années. En dehors de ses apports

scientifiques, je n'oublierai pas aussi de les remercier pour ses qualités humaines, ses cordialités, ses patiences infinies et ses soutiens.

Surtout leur patience avec le retard à cause mon problème familial...

Ils ont mes sincères remerciements et ma gratitude.

Mes sincères remerciements sont destines à Madame la

Prof MESSAOUDENE Hadia

Pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury ma thèse.

Mes remerciements vont également à monsieur le

Dr OUSSAEIF Taki Eddine et monsieur

le Prof REZZOUG Imad Pour leur participation au jury de ma thèse en tant qu'examinateurs pour mon travail.

Je remercie également Madame la Dr Dgaichia Hakima et Madame la Dr Gasri Ahlem pour avoir accepté d'être membres de ce jury et d'avoir accepté d'examiner mon travail.

Qu'ils veuillent trouver ici l'expression de ma sincère gratitude.

Sans oublier d'adresser mes vives remerciements à monsieur le *Prof. Zerauilia Elhadj* pour ses conseils et intérêts durant toute ma formation. Je le remercie du fond du cœur pour toute son aide et ses encouragements.

Aussi je voudrais remercier le *Dr. Draifia Ala Eddine* pour leur aide et leurs informations qui m'ont aidé pendant mon parcours de mastère et de doctorat.

RÉSUMÉ

L'objectif de cette thèse est l'étude et le traitement de différents types des problèmes d'évolution non linéaires, avec des conditions aux limites locales et non locales. D'une part de prouver l'existence et l'unicité de la solution, et d'autre part d'étudier la stabilité et l'explosion de la solution dans un temps fini.

Pour obtenir l'existence de ses solutions, des conditions suffisantes seront considérées dans notre étude. Des résultats de l'unicité sont également donnés pour certaines classes de ses problèmes définies au chapitre 02 et au chapitre 05.

Le comportement asymptotique de type (décroissance de l'énergie) a été établi à l'aide de la fonctionnelle de Lyapunov et la méthode de multiplicateur pour deux problèmes présentés dans la deuxième partie. Grâce à la méthode de Georgiev et Todorova, nous prouvons que la solution obtenue dans le chapitre 02 est explosée dans un temps fini.

ABSTRACT

The aim of this thesis is to treat and study different types of nonlinear evolution problems, with local and non-local boundary conditions. One is to prove the existence and uniqueness of the solution, and on the other hand to study the stability and the blow-up of the solution in a finite time.

To obtain the existence of its solutions, sufficient conditions will be considered in our study. The results of uniqueness are also provided for certain classes of its problems defined in chapters 02 and 05.

The general decay-type stability was established using the Lyapunov functional and the multiplier method for two problems presented in the second part. According to Georgiev and Todorova's method, we prove that the solution obtained in chapter 02 blows-up in a finite time.

ملخص

الهدف من هذه الأطروحة هو معالجة ودراسة أنواع مختلفة من مشاكل التطور غير الخطية. من ناحية نبرهن وجود الحل ووحانيته، ومن ناحية أخرى دراسة الإستقرار وانفجار الحل في زمن منته.

للحصول على وجود الحلول، سنعتمدالشروط الكافية في دراستنا. سيتم أيضا تقديم نتائج الوحدانية لبعض فئات المسائل المقدمة في الفصل الثاني والفصل الخامس.

تم إثبات الاستقرار العام للحلول باستخدام الطريقة الدالية لليابونوف وطريقة كومورنيك لمسألتين تم تقديمهما في الجزء الثاني. بفضل طريقة جورجييف و تودوروفا، نثبت أن الحل الذي تم الحصول عليه في الفصل الثاني ينفجر في وقت محدود.

Table des matières

Notations

Ω	Un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$
$\overline{\Omega}$	Ω avec sa frontière
Γ	La frontière régulière de Ω
E	Espace vectoriel normé.
$\|.\|$	Une norme
$(.,.)$	Un produit scalaire
L^p	L'ensemble des classes d'équivalence des fonctions de fonctions de puissance p-iéme intégrable
η	La normal unitaire extérieure à Ω
$\Delta(u)$	Opérateure différentielle est appelé Laplacien de u.
∇u	le gradient de u
$D^\alpha u$	La dérivée généralisée.
$H^1(\Omega), H^2(\Omega)$	Espace de Sobolev.
$\lim$	La limite.
$\hookrightarrow$	L'injection canonique
$\mathcal{L}$	Application différentiel.
I	Identité.
A	Orérateur
$D(A)$	Le domaine de définition de A
$G(A)$	la graphe de A

Au cours de cette introduction, nous nous concentrerons principalement sur un peu d'histoire des problèmes d'évolution non linéaire en générale avec des exemples physiques de ses modèles et sur les résultats généraux connus dans chaque chapitre.

Au milieu du XVIIe siècle, l'art de la prédiction est révolutionné par un événement majeur de l'histoire des sciences. Conduit à la naissance des équations différentielles, et en général des équations d'évolution. Ces équations cherchent à prédire mathématiquement l'évolution des phénomènes en examinant leurs "tendances" ou "différences infinitésimales". Remarquablement, mais sans surprise, ces équations ont émergé dans le sillage de la naissance du calcul. Les pionniers de cette révolution furent des mathématiciens, des physiciens, et même des philosophes : Newton, Leibniz, Huygens... Avec eux nous avons réussi à maîtriser la trajectoire des obus d'artillerie, des planètes et bien d'autres systèmes mécaniques. À la fin du XVIIe siècle, les célèbres frères Bernoulli étudiaient des cours d'équations différentielles dans différentes villes d'Europe.[**82**, **83**]

La deuxième révolution scientifique s'est produite un peu moins d'un siècle après l'invention des équations différentielles, c'est l'émergence des équations évolutives couvrant tout un domaine, une fonction totalement inconnue. Avec Euler, D'Alembert puis Lagrange, Laplace et d'autres, qui rêvaient de prédire le mouvement insaisissable des fluides. Et cette approche connaîtra un grand succès tout au long du XIXe siècle, entre autres : les équations de Fourier qui régissent les transferts de chaleur. les équations de Navier-Stokes qui constituent aujourd'hui la base des simulations de fluides ; Les équations de Maxwell régissant l'électromagnétisme. Les contacts transatlantiques n'auraient pas été possibles sans une compréhension approfondie des équations aux dérivées partielles... En 1890, dans un essai visionnaire, Henri Poincaré commence à parler de la classification des grandes équations de la physique mathématique, anticipant l'extraordinaire développement de la théorie partielle. Équations différentielles au XXe siècle.

Avec le développement de l'informatique dans les années cinquante du siècle dernier, de nombreuses équations ont été trouvées, qui jusqu'alors ne pouvaient être étudiées que qualitativement ou dans certains cas. La précision n'a cessé d'augmenter. La simulation numérique s'affirme alors comme une composante majeure de la science et de l'industrie, avec le développement de l'analyse numérique, et l'interface entre la théorie mathématique et l'arithmétique. Ce qui était considéré comme une troisième révolution scientifique qui imprègne l'histoire des équations évolutives.

Physiquement, on définit les équations d'évolution non linéaires par les équations aux dérivées partielles avec le temps t comme l'une des variables indépendantes, proviennent non seulement de nombreux domaines des mathématiques, mais aussi d'autres branches de la science telles que

la physique, la mécanique et la science des matériaux. Par exemple, les équations de Navier-Stokes et d'Euler de la mécanique des fluides, les équations de réaction-diffusion non linéaires des transferts de chaleur et des sciences biologiques, les équations de Klein-Gorden non linéaires et les équations de Schrödinger non linéaires de la mécanique quantique et les équations de Cahn-Hilliard de la science des matériaux, pour n'en citer que quelques-unes, sont des exemples particuliers d'équations d'évolution non linéaires. La complexité des équations d'évolution non linéaires et les défis posés par leur étude théorique ont suscité un grand intérêt de la part de nombreux mathématiciens et scientifiques des sciences non linéaires. La première question à se poser dans l'étude théorique est de savoir si, pour une équation d'évolution non linéaire avec des données initiales données, il existe une solution au moins égale à l'équation d'évolution non linéaire données initiales, il existe au moins une solution locale dans le temps, et si elle est unique dans la classe considérée. L'existence et l'unicité d'une solution globale, c'est-à-dire quand une solution locale peut être étendue pour devenir une solution globale dans le temps. En outre, s'il existe une solution globale pour une équation d'évolution non linéaire donnée, on souhaite également connaître le comportement asymptotique de la solution lorsque le temps va à l'infini. Certains des problèmes d'évolution non linéaire les plus connus et les plus intéressants sont les suivants grand intérêt sont présentés dans ce travail.
Les équations non linéaires sont généralement difficiles à analyser. L'existence locale peut être établie par des arguments standard pour les EDP les plus raisonnables. L'existence globale est souvent beaucoup plus difficile à établir et nécessite généralement des estimations a priori suffisamment fortes pour les solutions de l'EDP. Les questions fondamentales d'existence globale et d'unicité ne sont pas résolues, même pour certaines des équations d'évolution non linéaires les plus importantes de la physique classique. Nous présentons donc quelques-unes des méthodes utilisées dans ce contexte (l'estimation à priori , la méthode de Feado Galarkin, la méthode du point fixe ...ect), mais dans ce travail nous appliquons la méthode des semi-groupes[**51**, **77**, **81**].
La méthode des semi-groupes est une technique permettant d'étudier l'existence de solutions d'équations d'évolution à la fois linéaires et non linéaires. Il peut être utilisé pour traiter de nombreux problèmes de valeurs initiales ou de valeurs limites initiales pour les équations d'évolution linéaires et non linéaires. L'idée de base est de considérer essentiellement une équation d'évolution comme un système dynamique de dimension infinie et d'essayer d'utiliser les idées et techniques de base de la théorie EDO (c'est-à-dire les systèmes dynamiques de dimension finie) dans le cadre de l'EDP. Les avantages de ce point de vue ne peuvent pas être sous-estimés, et cela est prouvé par le fait que cette méthodologie est utilisée tout au long de l'analyse pure et appliquée de l'EDP, y compris le développement de théories de la bonne pose, l'existence de solutions, l'analyse des effets de lissage non linéaire, et dans la compréhension de la stabilité locale et de la dynamique

globale de l'EDP non linéaire. Nous l'introduirons en détail dans le **chapitre02** dans la **partie 01**, et dans le **chapitre05** dans la **partie02**. Récemment, de nombreux travaux ont été réalisés dans la littérature concernant l'existence et l'unicité de solutions par cette méthode pour certains équations et systèmes d'équations d'évolution non linéaires , on peut citer comme exemples $([\mathbf{13}], [\mathbf{35}-\mathbf{37}], [\mathbf{43}])$.

La question de la stabilité des solutions d'équations aux Dérivées Partielles (EDP) a inspiré une large recherche, elle consiste à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie E(t). L'objet principal est d'étudier sa limite lorsque t tend vers $+\infty$ afin de déterminer également si cette limite est nulle ou non, et de donner de manière unifiée les taux de déclin optimaux ou quasi optimaux de l'énergie si cette limite est nulle[**84**].

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e :

$$E(t) \to 0, \text{ lorsque } t \to +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte. Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, (i.e)

$$E(t) \leq Ce^{-\gamma t}, \forall t > 0;$$

où C et γ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \forall t > 0;$$

où C et α sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales. Dans ce cas, il faut prendre des données initiales plus régulières, dans le domaine de l'opérateur.

Avec la décroissance le plus faible au sens logarithmique par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{(\log(1+t))^{k}}, \forall t > 0;$$

où C et k sont des constantes positives avec C dépend des données initiales.

Une recherche très active s'est amorcée récemment sur les problèmes de stabilisation avec effet retard. Les phénomènes de retard (en temps) apparaissent dans de nombreuses applications en biologie, mécanique et en automatique...ect. Les travaux dans notre thèse s'orientent dans un général directions vers une stabilisatée au sens de décroissance générale présentée dans le **chapitre 04** et le **dérnier chapitre** (partie02).

Il y a eu une énorme quantité d'activités récentes traitant du sujet des solutions aux équations aux dérivées partielles qui explosent en un temps fini. La théorie mathématique pour cela est vaste et des revues peuvent être trouvées dans **Levine (1990)**[**56**] et **Samarskii et al. (1994)**[**75**]. Cependant, l'explosion en temps fini et d'autres instabilités très rapides se produisent dans des situations en mécanique et dans d'autres domaines des mathématiques appliquées, et les études de ces phénomènes ont très récemment pris de l'ampleur. On peut donc définir l'explosion de la solution des équations d'évolution non linéaires, comme l'ensemble des données initiales pour lesquelles la solution tend vers l'infini dans une norme. Plus précisément, la solution du problème tend vers l'infini lorsque t tend vers une valeur finie T. Pour cette raison, le terme source est appelé terme d'explosion. D'autre part, les termes de dissipation sont des termes qui tendent à stabiliser la solution du problème. Alors, la question centrale est « quel terme l'emporte sur l'autre (terme de dissipation ou terme source) »?. Cette question centrale a été dans de nombreux travaux et est toujours importante. L'interaction entre l'amortissement linéaire et les termes sources a d'abord été considérée par **Levine** [**54**, **56**, **57**]. Il a prouvé que la solution explose en temps fini si l'énergie initiale est négative. Cette interaction a été étendue à l'amortissement non-linéaire par de nombreux chercheurs.

Finalement, cette thèse se compose d'une introduction, notions préliminaires et deux parties avec une conclusion pour chacune. Chaque chapitre est présenté comme suit :

– **Le premier chapitre**

  Contient des notions de base et des définitions élémentaires sur l'analyse fonctionnelle qui vont êtres utilisés dans les chapitres suivants de ce travail.

– **Le deuxième et le troisième chapitre(Partie01)**

  Dans **le chapitre02** nous étudions l'existence locale d'un problème de structure flexible non uniforme logarithmique avec terme de retard donnée dans le travail[**64**] avec la méthode des semi-groupes par rapport à certaines conditions de proposition, puis dans **le chapitre03** nous montrons que l'énergie de toute solution faible explose en un temps fini si l'énergie initiale est négative, où le flux de chaleur est donné par la loi de Cattaneo.

– **Les trois derniers chapitres(Partie02)**

  Dans le **chapitre04** nous étudions l'équation de la membrane élastique avec des conditions aux limites dynamiques, un terme source donnée dans le travail[**63**]avec un amortissement faible non linéaire localisé sur une partie de la frontière et l'histoire passée. Sous certaines hypothèses appropriées sur la fonction de relaxation, la décroissance générale de l'énergie a été établie en utilisant les fonctionnelles de Lyapunov perturbées et certaines des fonctions convexes. Ensuite dans **le chapitre05,** nous traitons une problème d'onde viscoélastique non linéaire en présence d'un terme de retard avec les conditions de Dirichlet-Neumann donnée dans le travail[**65**] à l'aide du travail de A.Benseghir[**13**] nous prouvons l'existence local de la solution avec la même méthode appliqué dans le **chapitre 02**, Enfin, **le chapitre06** est consacré à la preuve de le comportement asymptotique des solutions.

Chapitre 1

Rappels et notations générales

Dans tout ce chapitre K est le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$

1.1 Espaces fonctionnels

Espace normé

Un espace vectoriel E est appelé *espace normé* si à tout $x \in E$ correspond un nombre positif $\|x\|$ (appelé *norme* de x) tel que les trois axiomes suivants, dits *axiomes de la norme*, sont vérifiés :

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$ (la norme est *non dégénérée*)
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ (la norme est *homogène*)
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (*inégalité triangulaire*)

Ainsi, la norme est une application définie sur E, prenant des valeurs positives et vérifiant les propriétés 1 à 3.

Espace de Banach

Un espace normé est dit *complet* si toute suite de Cauchy y est convergente.Un espace normé complet est appelé *espace de Banach*.

Exemple 1.1 *On définit l'espace de Banach* $L^p(\Omega)$ *par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \in \Omega \to \mathbb{R}, \text{ mesurable } / \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty \right\} \tag{1.1.1}$$
$$\text{avec } 1 \leq p < \infty.$$

Lorsque $p = +\infty$ *on dit que* f *est essentiellement bornée ou encore que* $f \in L^\infty(\Omega)$ *s'il existe*

$C \in \mathbb{R}_+$ *tq* $|f| \leq C$ *sur* Ω. *La norme dans* $L^p(\Omega)$ *donnée par* $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}$ *,avec*

$$1 \leq p < +\infty, \tag{1.1.2}$$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = inf\{C \in \mathbb{R}_+; |u| \leq C \; p.p\}. \tag{1.1.3}$$

On peut considérer comme sous-espaces dans $L^p(\Omega)$ les espaces

$\mathbf{C}^k(\Omega)$ et $\mathbf{C}^\infty(\Omega), \mathbf{0} \leq \mathbf{k} \leq \infty$

Définition 1.1 *Dans tout ce qui suit* Ω *désigne toujours un ouvert de* $\mathbb{R}^n$. *On désigne par* $C(\Omega)$ *où* $C^0(\Omega)\,(resp. C^1(\Omega))$ *,l'espace des fonctions continus (resp. continûment différentiable)sur* Ω *à valeurs numériques (i.e réels ou complexes).Pour* $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ *, on pose*

$$C^k(\Omega) = \left\{u \in C^{k-1}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in C^{k-1}(\Omega)\,; i = 1, ..., k\right\}, \tag{1.1.4}$$

c'est l'espace des fonctions k *fois continûment différentiables sur* Ω. *Enfin on notera*

$$C^\infty(\Omega) = \cap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega), \tag{1.1.5}$$

c'est l'espace des fonctions indéffiniment différentiables sur Ω.

l'espace des fonctions tests $\mathbf{D}(\boldsymbol{\Omega})$ ([2], [18])

Définition 1.2 *On appelle espace des fonctions tests, et on note* $D(\Omega)$*, l'espace vectoriel des fonctions indéfiniment différentiables sur* Ω *et a support compact dans* Ω*,*$(i.e)$

$$D(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) \setminus \exists \Bbbk \; compact, \Bbbk \subset \Omega \, , \; supp \; u \subset \Bbbk\}, \tag{1.1.6}$$

certains auteurs utilisent la notation $C_0^\infty(\Omega)$ *ou bien* $C_c^\infty(\Omega)$ *au lieu de* $D(\Omega)$ *.de classe* C^∞ *telles qu'il existe un compact* $\Bbbk \subset \Omega, \Bbbk = supp\varphi$ *.On notera*

$$C_k^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega), \; supp \; \varphi \subset \Bbbk\} \; pour \Bbbk \subset \Omega,$$

un compact fixé, où φ *est une fonction teste*

Norme luxembourgeoise

Définition 1.3 *On définit*

$$\|x\|(M) = \inf\left\{\lambda, \lambda > 0, \int_G M\left(\lambda^{-1} x(t)\right) dt \leq 1\right\}, \tag{1.1.7}$$

où $M(u)$ est convexe et croissante pour u positif,

$$\lim_{u\longrightarrow 0} u^{-1}M(u) = \lim_{u\longrightarrow\infty} u(M(u))^{-1} = 0; \tag{1.1.8}$$

*$M(u) > 0$ pour $u > 0$, et G est un ensemble borné dans $\mathbb{R}^n$. les propriétés de cette norme ont été étudiées par Luxemburg [**59**], et*

$$\|x\|(M) \leq \|x\|_{(M)} \leq 2\|x\|(M).$$

Si les fonctions $M(u), M(v)$ sont complémentaires (ou dual) les unes des autres alors

$$\|x\|(M) = \sup\left\{\int_G x(t)\,y(t)\,dt : \|y\|(N) \leq 1\right\}.$$

Si $\chi_E(t)$ est la fonction caractéristique d'un sous-ensemble mesurable $E \subset F$, alors

$$\|x\|_E(M) = \frac{1}{M^{-1}(1/mes(E))}. \tag{1.1.9}$$

Espace convexe

Définition 1.4 *On dit qu'une application $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est :*

1. *Convexe sur I si*

$$\forall (a,b) \in I^2, \forall\lambda \in [0,1], f(\lambda a + (1-\lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1.1.10}$$

2. *Strictement convexe sur I si, pour $a \neq b$ et $\lambda \in]0,1[$ on a même*

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b). \tag{1.1.11}$$

Réflexivité et séparabilité[18]

Définition 1.5 ***(Réflexivité).*** *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E", on dit que E est réflexif si $J(E) = E$" . Lorsque E est réflexif on identifie implicitement E et E" (à l'aide de l'isomorphisme J).*

Définition 1.6 ***(séparabilité).*** *On dit que l'espace métrique E est séparable s'il existe un sous-ensemble $F \subset E$ dense.*

Quelques résultats sur les espaces réflexifs et séparables

Théorème 1.1 *Soit E un espace de Banach. Alors, E est réflexif (séparable) si et seulement si E'est réflexif (séparable).*

Théorème 1.2 *Soit E un espace de Banach. Soit $\Bbbk \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné.Alors, $\Bbbk$ est compact pour la topologie faibe. Donc de toute suite bornée dans $\Bbbk$, on peut en extraire une sous-suite qui converge faiblement dans $\Bbbk$.*

Application Lipschitzienne

Théorème 1.3 *Soit f une fonction Lipschitzienne sur un intervalle I*

$$\left(\exists k \in \mathbb{R}_{+}, \forall (x,y) \in I^2 : |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|\right). \tag{1.1.12}$$

Alors f est uniformément continue sur$I$.

Remarque 1.1 *f une fonction Lipschitzienne$\Longrightarrow$ f est uniformément continue $\Longrightarrow$ f est continue*

Espace de Hilbert[18]

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé *espace de Hilbert* s'il est complet au sens de la norme associée au produit scalaire.Les espaces de Hilbert qui sont des espaces de Banach particuliers sont des généralisations des espaces $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$.

Définition 1.7 *On appelle un produit scalaire sur E et on note $(.,.)$, tout forme sesquilinéaire, hermitienne, définie positive définir de $E \times E$ dans K, c.à.d.*

1. *Linéarité à gauche :* $\forall x, y, z \in E, \forall \alpha, \beta \in K, (\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x,z) + \beta(y,z)$.
2. *Hermitienne :* $\forall x, y \in E, (x,y) = \overline{(y,x)}$.
3. *Définie positive :* $\forall x \in E - \{0\}, (x,x) > 0 et (x,x) = 0 \Longrightarrow x = 0$.

   Naturellement si $K = \mathbb{R}$, le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive.

Exemple 1.2 *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni de la norme et le produit scalaire suivant*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.13}$$

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uv\, dx. \tag{1.1.14}$$

Espace de sobolev$\mathbf{W}^{m,P}(\boldsymbol{\Omega})$ [2]

Proposition 1.1 *L'espace $W^{1,P}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme*

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)} = \left[\|u\|^p_{L^P(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^P(\Omega)}\right]^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty. \tag{1.1.15}$$

Définition 1.8 *Soit $m \geq 2$ un entier. On définit par récurrence l'espace de Sobolev $W^{m,P}(\Omega)$ par*

$$W^{m,P}(\Omega) = \left\{u \in W^{m-1,P}(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,P}(\Omega)\ \forall i = \overline{1,n}\right\}. \tag{1.1.16}$$

Il revient au même d'introduire

$$W^{m,P}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \left| \begin{array}{c} \forall \alpha \text{ avec } |\alpha| \leq m\ \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tel que} \\ \int\limits_\Omega u D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int\limits_\Omega g_\alpha \varphi dx\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \end{array} \right. \right\}. \tag{1.1.17}$$

Où pour

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), \alpha_i \in INai = \overline{1,n},$$

un multi-indice ; on pose

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \text{ et } D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1 \partial x_2 ... \partial x_n}.$$

Pour $u \in W^{m,P}(\Omega)$, on note $D^\alpha u = g_\alpha$. L'espace $W^{m,P}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,P}(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^P(\Omega)}\right)^{1/p}, \ 1 \leq p < \infty. \tag{1.1.18}$$

est un espace de Banach.

Définition 1.9 *Pour $m \in \mathbb{N}$, on note :*

$$W^{m,P}(\Omega) = \left\{u \in \mathfrak{D}'(\Omega);\ D^\alpha u \in L^P(\Omega)\ \ |\alpha| \leq m\right\}, \tag{1.1.19}$$

où $\mathfrak{D}'(\Omega)$ est l'espace des distributions sur Ω alors pour $m = 0$, on a $W^{0,P}(\Omega) = L^P(\Omega)$ et pour $m \geq 1$, on retrouve les espaces introduits dans les deux définitions **1** *et* **2**.

Remarque 1.2 *Dans les applications on rencontre fréquemment le cas où $p = 2$. On utilise alors la notation $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. L'espace $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int\limits_\Omega D^\alpha u D^\alpha v dx. \tag{1.1.20}$$

Injections de Sobolev[76]

Théorème 1.4 *Si* Ω *est un ouvert borné a frontière Lipschitzienne ou si* $\Omega = \mathbb{R}^N$ *, on a*

1. *Si* $p < N$ *alors* $W^{1,P}(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{Np}{N-p}}(\Omega)$.
2. *Si* $p > N$ *alors* $W^{1,P}(\Omega) \hookrightarrow C^{0,1-\frac{N}{p}}(\Omega)$.
3. *Pour tout* $q \in \left]N, +\infty\right[, W^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$.

Remarque 1.3 $C^{0,\alpha}(\Omega)$ *est l'ensemble des fonctions* α *à Holdériennes de* $C^0(\Omega)$ *c'est-à-dire qui vérifient*

$$\exists k > 0, \textit{tel que } \forall (x,y) \in \Omega, |u(x) - u(y)| \leq k \|x - y\|^{\alpha}. \tag{1.1.21}$$

Théorème 1.5 ***(Rellich-Kondrachov)****. On suppose que* Ω *est borné et de classe* C^1*. On a :*

1. *Si* $N < 2$ *alors* $H^1(\Omega) \hookrightarrow_{compact} C(\bar{\Omega})$.
2. *Si* $N = 2$ *alors* $H^1(\Omega) \hookrightarrow_{compact} L^q(\Omega), \forall q \in [1, +\infty[$.
3. *Si* $N > 2$ *alors* $H^1(\Omega) \hookrightarrow_{compact} L^q(\Omega), \forall q \in \left[1, \frac{2N}{N-2}\right[$.
   On particulier, on a toujours : $H^1(\Omega) \hookrightarrow_{compact} L^2(\Omega)$,

Théorème 1.6 *Soit* Ω *un ouvert borné dans* $\mathbb{R}^N$*. Alors, pour tout* $m \in N$: $H_0^{m+1}(\Omega) \hookrightarrow_{compact} H_0^m(\Omega)$, *En particulier, on a :* $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow_{compact} L^2(\Omega)$,

Théorème de Trace [73]

Théorème 1.7 *Soit* Ω *un ouvert borné et régulier. On peut définir une application linéaire et continue*

$$\begin{aligned} \Phi &: H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega) \\ u &\to \Phi(u). \end{aligned}$$

Prolongeant l'application trace pour les fonctions continues sur $\overline{\Omega}$ *: pour tout*

$$u \in H^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right) : \Phi(u) = u\,|_{\partial\Omega}.$$

L'application trace est continue de $H^1(\Omega)$ *dans* $L^2(\partial\Omega)$, *ce qui signifie qu'il existe une constante* C_Ω *telle que*

$$\|\Phi(u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} \tag{1.1.22}$$

Transformation de Legendre

Définition 1.10 *Soit $f : E \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction propre $(dom\ (f) \neq \emptyset)$. On définit sa transformée de Legendre $f^* : E^* \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ par :*

$$f^*(p) = \sup_{x \in E} \left[\langle p, x \rangle - f(x) \right]. \tag{1.1.23}$$

L'application $\mathcal{L} : f \longrightarrow f^*$ est appelée transformation de Legendre de f.

1.2 Opérateurs

Opérateurs fermés, opérateurs fermables.

Définition 1.11 *Soient E et F deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $A : E \to F$ est fermé si $G(A)$ est fermé dans $E \times F.G(A)$ est le graphe de A.Dire que $G(A)$ est fermé revient à dire que pour $u_n \in D(A)$ et $(u_n, Au_n) \to (u, f)$ dans $E \times F$, on a $u \in D(A)$ et $f = Au.D(A)$ est le domaine de A.*

Définition 1.12 *Soient E et F deux espaces de Banach. On dit qu'un opérateur $A : E \to F$ est fermable s'il admet un prolongement fermé.Autrement dit ; A est fermable si et seulement si pour toute $u_n \in D(A)$, $u_n \to 0$ et $Au_n \to f$ entraîne $f = 0$.*

Opérateur dissipatif et m-dissipatifs dans un espace de Hilbert

Définition 1.13 *Un opérateur $(A, D(A))$, linéaire non borné dans H est dissipatif si et seulement si*

$$\forall x \in D(A) : \langle Ax, x \rangle \leq 0. \tag{1.2.1}$$

Théorème 1.8 *Un opérateur linéaire A dans E est dit dissipatif si on a*

$$\forall x \in D(A), \forall \lambda > 0, \|\lambda x - Ax\|_E \geq \lambda \|x\|_E. \tag{1.2.2}$$

A est dit m-dissipatif si A est dissipatif et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif,$(i.e)$

$$\forall y \in X, \forall \lambda > 0, \exists x \in D(A), \lambda x - Ax = y. \tag{1.2.3}$$

Théorème 1.9 *Si A est m-dissipatif alors pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $(\lambda I - A)$ admet un inverse, $(\lambda I - A)^{-1} y$ appartient à $D(A)$ pour tout $y \in X, et\,(\lambda I - A)^{-1}$ est un opérateur linéaire borné sur X vérifiant*

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{\lambda}. \tag{1.2.4}$$

1.3 Semi-groupes d'un opérateur linéaire[71]

Semi-groupes uniformément continus

Définition 1.14 *On appelle semi-groupe uniformément continu d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. $T(0) = I$,
2. $T(t+s) = T(t)T(s); t, s \geq 0$,
3. $\lim_{t\longrightarrow 0} \|T(t) - I\| = 0$

Définition 1.15 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe uniformément continu$\{T(t)\}_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire :*

$$\begin{aligned} A &: X \longrightarrow X \\ A &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t) - I}{t} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Semi-groupes de classe $\mathbf{C}_0$

Définition 1.16 *On appelle $\mathbf{C}_0$-semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu)d'opérateurs linéaires bornés sur X une famille $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. $T(0) = I$,
2. $T(t+s) = T(t)T(s); \forall t, s \geq 0$,
3. $\lim_{t\longrightarrow 0} T(t)x = x; \forall x \in X$.

Définition 1.17 *On appelle générateur infinitésimal d'un $\mathbf{C}_0$-semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ un opérateur A défini sur l'ensemble :*

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ x \in X \,\middle|\, \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t} \; existe \right\} \\ \textit{par } Ax &= \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{T(t)x - x}{t}; \forall x \in D(A) \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Théorème de Hille - Yosida

Théorème 1.10 *Un opérateur linéaire :*

$$A : D(A) \subset X \longrightarrow X \tag{1.3.3}$$

est le générateur infinitésimal d'un C_0- semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ ssi

1. *A est un opérateur fermé et* $\overline{D(A)} = X$.
2. $\rho(A) \supset \mathbb{R}_+$ *et* $\forall\lambda \geq 0$

$$\|R(\lambda)\| \leq \frac{1}{\lambda} \tag{1.3.4}$$

Théorème de Lax-Milgram[18]

Théorème 1.11 *Soit* $a(u,v)$ *une forme bilinéaire continue et coercive sur* X *. alors, pour tout* $\varphi \in X^*$ *, il existe un élément unique* $u \in X$ *tel que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle, \forall v \in X \tag{1.3.5}$$

De plus, si a *est symétrique alors* u *est caractérisé par la propriété*

$$u \in X \text{ et } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u\rangle = \min_{v\in X}\left(\frac{1}{2}a(v,v) - \langle \varphi, v\rangle\right) \tag{1.3.6}$$

1.4 Quelques inégalités importantes

Lemme de Gronwell

Définition 1.18 *Soient les* $h_i(t),\ i = 1,2,3,$ *des fonctions positives sur l'intervalle*$[0,T]$*,* $h_1(t), h_2(t)$ *sont intégrables et* $h_3(t)$ *est croissante, alors de l'inégalité*

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \leq h_3(t) + c\int_0^\tau h_2(t)dt, \tag{1.4.1}$$

il s'ensuit que

$$\int_0^\tau h_1(t)dt + h_2(t) \leq e^{c\tau}h_3(t). \tag{1.4.2}$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Définition 1.19 *Soit* $f, g \in C([a,b], \mathbb{R})$*. Alors*

$$\int_a^b |fg| \leq \left(\int_a^b |f|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b |g|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4.3}$$

Inégalité de Cauchy

$$\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2. \tag{1.4.4}$$

Inégalité de Cauchy avec ε.
Soit ε un nombre réel strictement positif, alors

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 : |ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2. \tag{1.4.5}$$

Inégalité de Young.
Soient p et q des nombres réels strictement positifs liés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.4.6}$$

Alors

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}. \tag{1.4.7}$$

Inégalité de Young avec ε.
Soit ε un nombre réel strictement positif, alors

$$\forall (a,b) \in IR^2 : |ab| \leq \varepsilon \, |a|^p + C(\varepsilon) \, |b|^q \, , \tag{1.4.8}$$

Où p et q sont reliés par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Et $C(\varepsilon) = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{-q/p}$.
intégrale de Hôlder.

$$\forall (f,g) \in L^p(Q) \times L^q(Q) : \int_Q |fg| \leq \left(\int_Q |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_Q |g|^q \right)^{1/q}, \tag{1.4.9}$$

Où p et q sont toujours reliés par la relation : $1/p + 1/q = 1$.
Inégalité de Jensen

Théorème 1.12 *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout $(x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n$, et pour toute famille $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$, on a*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \, . \tag{1.4.10}$$

Inégalité de Poincaré

Théorème 1.13 *Soient p, tel que $1 \leq p \leq \infty$ et Ω un ouvert de largeur finie (bornée dans une direction). Alors il existe une constante C, dépendant uniquement de Ω et p, telle que, pour toute fonction u de l'espace de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \, \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.4.11}$$

Théorème 1.14 ***(Cas particulière)****. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$que l'on suppose borné, connexe et de frontière suffisamment régulière. Alors il existe une constante $C_\Omega > 0$ tels que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \tag{1.4.12}$$

Pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.

La formule de Green

Lemme 1.1 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière Γ, C^1 par morceaux, et soient $u, v \in H^1(\Omega)$, alors on a*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Gamma u v \vartheta_i ds - \int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx, \text{ pour } i = \overline{1, n}, \tag{1.4.13}$$

où ϑ_i est la $i-éme$ composante de ϑ (la normale extérieure à Γ) et $u(s), v(s)$ sont les traces des fonctions $u(x)$ et $v(x)$ sur Γ, et $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$

Théorème de Fubini[18]

Théorème 1.15 *Soient par exemple X une partie de $\mathbb{R}^p, Y$ une partie de$\mathbb{R}^q$, et*

$$f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

avec

$$p \text{ et } q \in \mathbb{N},$$

une application intégrable. Alors, d'après le théorème de Fubini, la fonction $f(x, .)$ est intégrable pour presque tout x de X, l'intégrale paramétrique F définie par

$$F(x) = \int_Y f(x, y) dy \tag{1.4.14}$$

est intégrable sur X et l'on a

$$\int_{X \times Y} f = \int_X F$$

(et même chose en intervertissant les rôles de x et y).

Première partie

Sur un système de structure flexible logarithmique avec deuxième sonne au présence du terme de retard

Chapitre 2

Existence locale de la solution

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous considérons les vibrations d'un système de structure flexible non homogène avec un retard interne constant et un terme source non linéaire logarithmique :

$$\begin{cases} \begin{array}{l} m(x)\,u_{tt} - \left(p(x)u_x + 2\delta(x)\,u_{tx}\right)_x + \eta\theta_x \\ +\mu u_t(x, t-\tau_0) = u\,|u|^{p-2}\ln|u|^{\gamma}, \end{array} & x \in (0, L)\,, t > 0, \\ \theta_t + kq_x + \eta u_{tx} = 0 & x \in (0, L)\,, t > 0, \\ \tau q_t + \beta q + k\theta_x = 0 & x \in (0, L)\,, t > 0, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

avec les conditions aux limites

$$u(0, t) = u(L, t) = 0; \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, t \geq 0, \tag{2.1.2}$$

et les conditions initiales

$$u(x, 0) = u_0(x)\,, u_t(x, 0) = u_1(x)\,; \theta(x, 0) = \theta_0(x)\,; q(x, 0) = q_0(x)\,, x \in [0, L] \tag{2.1.3}$$

Où $u(x,t)$est le déplacement d'une particule à la position $x \in [0, L]$ et le temps $t > 0, \eta > 0$ est la constante de couplage en fonction de l'effet de chauffe, $p \geq 2$,γ, β et k sont des constants positifs, μ est un nombre réel, $\tau > 0$ est le temps de relaxation décrivant le décalage temporel de la réponse pour la température, et $\tau_0 > 0$ représente le retard en particulier si $\tau = 0$ $(2.1.1)$ se réduit au système visco-thermoélastique avec retard, dans lequel le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier au lieu de la loi de Cattaneo, où $q = q(x, t)$ est le flux de chaleur, $m(x)\,, \delta(x)$ et $p(x)$ sont responsables de la structure inhomogène de la poutre et, respectivement, désignent la masse par unité de longueur de la structure, le coefficient d'amortissement interne du matériau (propriété viscoélastique) et une fonction positive liée à la contrainte agissant sur le corps en un point x. Le modèle de condition thermique, est du type hyperbolique. Nous rappelons les hypothèses de $m(x), \delta(x)$ et $p(x)$ dans $([3], [34])$tel que :

$$m, \delta, p \in W^{1,\infty}(0, L), m(x), \delta(x) \text{ et } p(x) > 0, \forall x \in [0, L]. \tag{2.1.4}$$

Dans ce genre de problème, G. C. Gorain [37] en 2013 a établi une stabilité exponentielle uniforme du problème

$$m(x) u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x) u_{tx})_x = f(x), \ sur \ (0, L) \times \mathbb{R}^+,$$

qui décrit les vibrations d'une structure flexible non homogène avec une force extérieure perturbatrice. Plus tard, Misra et Alves [66]ont montré la stabilité exponentielle des vibrations d'une structure flexible non homogène à effet thermique régie par la loi de Fourier.

$$\begin{aligned} m(x) u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x) u_{tx})_x - k\theta_x &= f(x) \\ \theta_t - \theta_{xx} - ku_{xt} &= 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, on peut citer d'autres travaux sous la même forme comme le système de [72] ; Racke a étudié la stabilité exponentielle en $D1$ linéaire et non linéaire du système de thermoélasticité avec le second son donné par

$$\left\{ \begin{array}{ll} m(x) u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x) u_{tx})_x - k\theta_x = 0 & , \ sur \ (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ \theta_t + kq_x + \eta u_{tx} = 0 & , \ sur \ (0, L) \times \mathbb{R}^+ \\ \tau q_t + \beta q + k\theta_x = 0 & , \ sur \ (0, L) \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \tag{2.1.5}$$

A ce propos on peut référer$([1, 9, 26, 46, 69])$, pour le même problème ci-dessus, Alves, Gamboa et Gorain [3]ont prouvé que le système $(2.1.5)$ est une décroissance polynomiale, avec des conditions aux limites et initiales

$$\begin{gathered} u(0, t) = u(L, t) = 0; \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, t \geq 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x); \\ \theta(x, 0) = \theta_0(x); q(x, 0) = q_0(x), x \in [0, L] \end{gathered}$$

Nous savons que les systèmes dynamiques à terme de retard sont devenus un sujet de recherche majeure en équation différentielle depuis les années du siècle dernier. L'effet de retard qui est similaire aux processus de mémoire est important dans la recherche de mathématiques appliquées telles que la physique, les phénomènes de transmission non instantanée et les motivations biologiques. Le modèle $(2.1.5)$ est lié au problème suivant avec un terme de retard

$$\begin{cases} \begin{array}{l} m(x)\,u_{tt} - (p(x)u_x + 2\delta(x)\,u_{tx})_x \\ +\eta\theta_x + \mu u_t(x, t-\tau_0) = 0 \end{array} & x \in (0, L)\,, t > 0, \\ \theta_t + kq_x + \eta u_{tx} = 0 & x \in (0, L)\,, t > 0, \\ \tau q_t + \beta q + k\theta_x = 0 & x \in (0, L)\,, t > 0, \\ \quad u(0, t) = u(L, t) = 0; \theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, t \geq 0, \\ \qquad u(x, 0) = u_0(x)\,, u_t(x, 0) = u_1(x)\,; \\ \qquad \theta(x, 0) = \theta_0(x)\,; q(x, 0) = q_0(x)\,, x \in [0, L] \end{cases} \tag{2.1.6}$$

Les auteurs dans[35] prouvent que le système $(2.1.6)$ est bien posé et qu'il décroît de façon exponentielle sous une petite condition de retard temporel. Cependant en présence du terme source, le système$(2.1.6)$ devient le système étudié dans ce travail à terme source logarithmique, ce type de problème est rencontré dans de nombreuses branches de la physique telle que la physique Nucléaire, l'optique et la géophysique. Il est bien connu, d'après la théorie quantique des champs, qu'un tel type de non-linéarité logarithmique apparaît naturellement dans la cosmologie de l'inflation et dans les théories des champs supersymétriques, nous citons quelques ouvrages connexes$([3, 15, 41, 52, 62])$.

Dans ce chapitre, nous montrons l'existence locale et l'unicité de la solution. La preuve est basée sur la théorie des semi-groupes.

2.2 Formulation du problème

Dans cette section, nous donnons l'existence et l'unicité de la solution du système $(2.1.1) - (2.1.3)$ en utilisant la théorie des semi-groupes. À cette fin, nous transformons d'abord $(2.1.1)$ en un problème équivalent en introduisant une nouvelle variable dépendante

$$z(x, \rho, t) = u_t(x, t - \rho\tau_0)\,, x \in (0, L)\,, \rho \in (0, 1)\,, t > 0$$

Une simple différenciation montre que z satisfait

$$\tau_0 z_t(x, \rho, t) + z_\rho(x, \rho, t) = 0, x \in (0, L)\,, \rho \in (0, 1)\,, t > 0$$

Par conséquent, le système $(2.1.1)-(2.1.3)$ est équivalent à

$$\begin{cases} m(x)\,u_{tt}-\left(p(x)u_x+2\delta(x)\,u_{tx}\right)_x+\eta\theta_x \\ \qquad +\mu z(x,1,t)=u\,|u|^{p-2}\ln|u|^{\gamma}, & x\in(0,L)\,,t>0, \\ \tau_0 z_t(x,\rho,t)+z_\rho(x,\rho,t)=0 & x\in(0,L)\,,\rho\in(0,1)\,,t>0, \\ \theta_t+kq_x+\eta u_{tx}=0 & x\in(0,L)\,,t>0, \\ \tau q_t+\beta q+k\theta_x=0 & x\in(0,L)\,,t>0, \end{cases}, \tag{2.2.1}$$

$$\begin{cases} u(0,t)=u(L,t)=0;\theta(0,t)=\theta(L,t)=0 & ,t\geq 0, \\ u(x,0)=u_0(x)\,,u_t(x,0)=u_1(x)\,;\theta(x,0)=\theta_0(x) & ,x\in[0,L] \\ q(x,0)=q_0(x) & ,x\in[0,L] \\ z(x,0,t)=u_t(x,t) & ,x\in(0,L)\,,t>0, \\ z(x,\rho,0)=f_0(x,-\rho\tau_0) & ,x\in(0,L)\,,\rho\in(0,1) \end{cases}, \tag{2.2.2}$$

on peut écrire(2.2.1) sous la forme

$$\begin{cases} u_{tt}=-\frac{1}{m(x)}\left(p(x)u_x+2\delta(x)\,u_{tx}\right)_x+\frac{\eta}{m(x)}\theta_x \\ \quad +\frac{\mu}{m(x)}z(x,1,t)+\frac{1}{m(x)}u\,|u|^{p-2}\ln|u|^{\gamma}, & x\in(0,L)\,,t>0, \\ \theta_t=-kq_x-\eta u_{tx} & x\in(0,L)\,,t>0, \\ q_t=-\frac{\beta}{\tau}q-\frac{k}{\tau}\theta_x & x\in(0,L)\,,t>0, \\ z_t(x,\rho,t)=-\frac{1}{\tau_0}z_\rho(x,\rho,t) & x\in(0,L)\,,\rho\in(0,1)\,,t>0, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

2.3 Existence locale par la méthode des semi-groupes

Avec les conditions $(2.2.2)$, on pose $v=u_t$ et désigné par

$$\Phi=(u,v,\theta,q,z)^T\,,\Phi_0=\Phi(0)=(u_0,u_1,\theta_0,q_0,f_0(.,-\rho\tau))^T$$
$$\text{et} \qquad J(\Phi)=\left(0,\frac{1}{m(x)}u\,|u|^{p-2}\ln|u|^{\gamma}\,,0,0,0\right)^T.$$

Par conséquent $(2.2.2)\,,(2.2.3)$ peut être réécrit comme un problème de valeur initiale :

$$\begin{aligned} \partial_t\Phi+A\Phi&=J(\Phi) \\ \Phi_0&=\Phi(0)\,. \end{aligned} \tag{2.3.1}$$

Où l'opérateur linéaire A défini par $A:D(A)\longrightarrow\mathcal{F}$ avec

$$A\Phi=\begin{pmatrix} -v \\ -\frac{1}{m(x)}\left(p(x)u_x+2\delta(x)\,u_{tx}\right)_x+\frac{\eta}{m(x)}\theta_x+\frac{\mu}{m(x)}z(x,1,t) \\ kq_x+\eta u_{tx} \\ \frac{\beta}{\tau}q+\frac{k}{\tau}\theta_x \\ \frac{1}{\tau_0}z_\rho(x,\rho,t) \end{pmatrix}. \tag{2.3.2}$$

L'espace d'état de Φ est l'espace de Hilbert

$$\mathcal{F} = H_0^1(0,L) \times L^2(0,L) \times L^2(0,L) \times L_*^2(0,L) \times L^2((0,1)\times(0,L)).$$

Avec

$$\begin{aligned} L_*^2(0,L) &= \left\{ v \in L^2(0,L) : \int_0^L w(s)\,ds = 0 \right\}; \\ H_*^1(0,L) &= H^1(0,L) \cap L_*^2(0,L). \end{aligned}$$

Équipé du produit intérieur

$$\begin{aligned} \left\langle \Phi, \tilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{F}} &= \int_0^L p(x)\, u_x \tilde{u}_x dx + \int_0^L m(x)\, v_x \tilde{v}_x dx + \int_0^L \theta\tilde{\theta} dx \\ &+ \tau \int_0^L q\tilde{q} dx + \tau_0 |\mu| \int_0^1 \int_0^L z\tilde{z} dx d\rho. \end{aligned}$$

Pour tout $\Phi = (u,v,\theta,q,z)^T$ et $\tilde{\Phi} = \left(\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\theta},\tilde{q},\tilde{z}\right)^T$, le domaine de A est

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{c} \Phi \in \mathcal{F}; u \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L); \\ v \in H_0^1(0,L); \theta \in H_0^1(0,L); \\ q \in H_*^1(0,L); z, z_\rho \in L^2((0,1)\times(0,L)) \\ z(x,0) = v \end{array} \right\}.$$

Avant d'établir le résultat de l'existence locale, nous avons besoin du lemme technique suivant.

Lemme 2.1 *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $A > 0$, telle que la fonction réelle*[49]

$$j(s) = |s|^{p-2} \ln |s|, p > 2,$$

satisfaite

$$|j(s)| \leq A + |s|^{p-2+\varepsilon}.$$

Preuve. Puisque $\lim_{|s|\longrightarrow+\infty} \left(\ln|s| / |s|^{\varepsilon}\right) = 0,$ alors il existe $B > 0$ tel que

$$\frac{\ln|s|}{|s|^{\varepsilon}} < 1, \forall |s| > B.$$

Alors

$$|j(s)| \leq |s|^{p-2+\varepsilon}, \forall |s| > B.$$

Et puisque $p > 2$, ensuite $|j(s)| \leq A$, pour certain $A > 0$ et pour tout $|s| \leq B$. Donc,

$$|j(s)| \leq A + |s|^{p-2+\varepsilon}.$$

Ensuite, nous avons le résultat local suivant. ■

Théorème 2.1 *On suppose que*

$$2 < p \leq \frac{2n}{n-2} \text{ si } n \geq 3, \text{et } p > 2 \text{ si } n = 1, 2.$$

Alors pour tout $\Phi_0 \in \mathcal{F}$ *le problème*(2.1.1) *a une solution faible unique* $\Phi \in C([0,T], \mathcal{F})$.

Preuve. Nous montrerons que A est un opérateur maximal monotone sur $\mathcal{F}$ et que J est une fonction localement Lipschitzienne sur $\mathcal{F}$. En utilisant le technique utilisé dans les travaux([35], [63]). Premièrement, pour tout $\Phi \in D(A)$, nous avons

$$\begin{aligned}
\langle A\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{F}} &= -\int_0^L p(x) u_x v_x dx - \int_0^L (p(x)u_x + 2\delta(x) u_{tx})_x v dx + \int_0^L \eta\theta_x v dx \\
&+k\int_0^L q_x\theta dx + \int_0^L \eta\theta v_x dx + \beta\int_0^L |q|^2 dx + k\int_0^L q\theta_x dx \\
&+\mu\int_0^L z(.,1) v dx + |\mu|\int_0^1\int_0^L z z_\rho dx d\rho.
\end{aligned}$$

On applique l'intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
\langle A\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{F}} &= -\int_0^L p(x) u_x v_x dx + \int_0^L p(x) u_x v_x dx + 2\int_0^L \delta(x) |v_x|^2 dx \\
&+\eta\int_0^L \theta_x v dx + +k\int_0^L q_x\theta dx - \eta\int_0^L \theta_x v dx + \beta\int_0^L |q|^2 dx \\
&+\mu\int_0^L z(.,1) v dx - k\int_0^L q_x\theta dx + |\mu|\int_0^1\int_0^L z z_\rho dx d\rho. \\
&= 2\int_0^L \delta(x) |v_x|^2 dx + \mu\int_0^L z(.,1) v dx + \beta\int_0^L |q|^2 dx \\
&+|\mu|\int_0^1\int_0^L z z_\rho dx d\rho.
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

En utilisant l'inégalité de Young, l'estimation(2.3.3) devient

$$\begin{aligned}
\langle A\Phi, \Phi\rangle_{\mathcal{F}} &\geq 2\int_0^L \delta(x) |v_x|^2 dx + \beta\int_0^L |q|^2 dx \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Deuxièment, on prouve que A est surjectif ([18]), pour prouver que A est maximal, nous prouvons que pour chaque

$$\begin{aligned}
F &= (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)^T \in \mathcal{F}, \\
\exists V &= (u, v, \theta, q, z)^T \in D(A) \\
\text{tq} &: (I + A) V = F.
\end{aligned}$$

C'est

$$\left\{\begin{array}{c} u-v=f_1 \\ m(x)v-(p(x)u_x+2\delta(x)v_x)_x \\ +\eta\theta_x+\mu z(x,1,t)=m(x)f_2 \\ \theta+kq_x+\eta v_x=f_3 \\ q+\frac{\beta}{\tau}q+\frac{k}{\tau}\theta_x=f_4 \\ \Longrightarrow\theta_x=\frac{\tau}{k}\left(-\left(1+\frac{\beta}{\tau}\right)q+f_4\right) \\ \tau_0 z(x,\rho,t)+z_\rho(x,\rho,t)=\tau_0 f_5 \end{array}\right. \tag{2.3.4}$$

En notant que $v=u-f_1$, on résout l'EDO non homogène définit dans l'équation (5) du système $(2.3.4)$ on trouve

$$z(x,\rho,t) = (u-f_1)e^{-\rho\tau_0}+\tau_0 e^{-\rho\tau_0}\int_0^\rho f_5(\gamma,.)e^{\gamma\tau_0}d\gamma. \tag{2.3.5}$$

$$\text{avec } z(x,1,t) = (u-f_1)e^{-\tau_0}+\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 f_5(\gamma,.)e^{\gamma\tau_0}d\gamma \tag{2.3.6}$$

Maintenant on résout l'EDO non homogène définit dans l'équation (4) du système $(2.3.4)$on trouve

$$\theta_x = \frac{\tau}{k}f_4-\left(\frac{\beta+\tau}{k}\right)q \tag{2.3.7}$$

$$\theta = \frac{\tau}{k}\int_0^x f_4 ds-\left(\frac{\beta+\tau}{k}\right)\int_0^x q(s)\,ds \tag{2.3.8}$$

En substituant$(2.3.5)-(2.3.7)$ dans$(2.3.4)_2$, le système$(2.3.4)$ prend la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{c} m(x)(u-f_1)-(p(x)u_x+2\delta(x)v_x)_x+\eta\left(\frac{\tau}{k}f_4-\left(\frac{\beta+\tau}{k}\right)q\right) \\ +\mu\left((u-f_1)e^{-\tau_0}+\mu f_1 e^{-\tau_0}+\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 f_5(\gamma,.)e^{\gamma\tau_0}d\gamma\right)=m(x)f_2 \\ \frac{\tau}{k}\int_0^x f_4 ds-\left(\frac{\beta+\tau}{k}\right)\int_0^x q(s)\,ds+kq_x+\eta v_x=f_3 \\ q+\frac{\beta}{\tau}q+\frac{k}{\tau}\left(\frac{\tau}{k}f_4-\left(\frac{\beta+\tau}{k}\right)q\right)=f_4, \end{array}\right. \tag{2.3.9}$$

l'équation(1)du $(2.3.9)$ prend la forme

$$\begin{array}{rl} & -(p(x)u_x+2\delta(x)v_x)_x-\left(\frac{(\beta+\tau)\eta}{k}\right)q+\left(m(x)+\mu e^{-\tau_0}\right)u(x) \\ = & \left(m(x)+\mu e^{-\tau_0}\right)f_1-\frac{\tau\eta}{k}f_4-\mu\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 f_5(\gamma,.)e^{\gamma\tau_0}d\gamma+m(x)f_2. \end{array} \tag{2.3.10}$$

Si on multiple l'équation $(2.3.9)_2$ par $-k$ et en utilisant $v_x+u_x=f_{1x}$ on trouve

$$-k^2q_x+(\beta+\tau)\int_0^x q(s)\,ds+\eta k u_x=\eta k f_{1x}-kf_3+\tau\int_0^x f_4 ds. \tag{2.3.11}$$

Si en remplaçant (2.3.10) et (2.3.11) dans (2.3.9) on obtient

$$\left\{\begin{array}{c} -\left(p(x)u_x+2\delta\left(x\right)v_x\right)_x-\left(\frac{(\beta+\tau)\eta}{k}\right)q+\left(m\left(x\right)+\mu e^{-\tau_0}\right)u\left(x\right) \\ =\left(m\left(x\right)+\mu e^{-\tau_0}\right)f_1-\frac{\tau\eta}{k}f_4-\mu\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 f_5\left(\gamma,.\right)e^{\gamma\tau_0}d\gamma+m\left(x\right)f_2 \\ -k^2q_x+\left(\beta+\tau\right)\int_0^x q\left(s\right)ds+\eta k u_x=\eta k f_{1x}-kf_3+\tau\int_0^x f_4 ds \\ v_x+u_x=f_{1x}. \end{array}\right. \qquad (E')$$

On pose

$$\begin{array}{rcl} g_1(x) & = & \left(m\left(x\right)+\mu e^{-\tau_0}\right)f_1-\dfrac{\tau\eta}{k}f_4-\mu\tau_0 e^{-\tau_0}\displaystyle\int_0^1 f_5\left(\gamma,.\right)e^{\gamma\tau_0}d\gamma+m\left(x\right)f_2 \\ g_2(x) & = & \eta k f_{1x}-kf_3+\tau\displaystyle\int_0^x f_4 ds \\ g_3(x) & = & f_{1x}. \end{array}$$

Maintenant on définit la formulation variationnelle du système(E') comme suit

$$\begin{array}{c} B\left(\left(u,q\right),\left(\tilde{u},\tilde{q}\right)\right)=\int_0^L\left(p(x)u_x-2\delta\left(x\right)u_x\right)\tilde{u}_x\left(x\right)dx-\left(\frac{(\beta+\tau)\eta}{k}\right)\int_0^L q\tilde{u}\left(x\right)dx \\ +\int_0^L\left(m\left(x\right)+\mu e^{-\tau_0}\right)u\left(x\right)\tilde{u}\left(x\right)dx-\int_0^L\left(\beta+\tau\right)q_x\tilde{q}dx \\ +\frac{(\beta+\tau)^2}{k^2}\int_0^L\left(\int_0^x q\left(s\right)ds\right)\left(\int_0^x\tilde{q}\left(s\right)ds\right)dx+\frac{\eta(\beta+\tau)}{k}\int_0^L u_x\tilde{q}dx. \end{array} \qquad (2.3.12)$$

Et une forme bilinéaire définie par

$$B:\left[H_0^1\left(0,L\right)\times L_*^2\left(0,L\right)\right]^2\longrightarrow\mathbb{R},$$

et la forme linéaire F défini par

$$F:\left[H_0^1\left(0,L\right)\times L_*^2\left(0,L\right)\right]\longrightarrow\mathbb{R}.$$

Donné par la forme suivante

$$F\left(\tilde{u},\tilde{q}\right)=\int_0^L g_1(x)\tilde{u}dx+2\int_0^L\delta\left(x\right)g_3(x)\tilde{u}_x dx+\frac{(\beta+\tau)}{k^2}\int_0^L g_2(x)\tilde{q}dx. \qquad (2.3.13)$$

Pour $V=H_0^1\left(0,L\right)\times L_*^2\left(0,L\right)$ engendré par la norme $\left\|(u,q)\right\|_V^2=\left\|u_x\right\|_2^2+\left\|q\right\|_2^2$. Ainsi, la forme bilinéaire B (coércive et continue)et la forme linéaire F (continue). Par conséquent, par le théorème de Lax-Milgram on peut conclut que $B\left(\left(u,q\right),\left(\tilde{u},\tilde{q}\right)\right)=F\left(\tilde{u},\tilde{q}\right)$ admet une solution unique $u\in H_0^1\left(0,L\right),q\in L_*^2\left(0,L\right)$. On outre, si $\tilde{q}=0\in L_*^2\left(0,L\right)$ alors(E') et $(2.3.13)$ devient

$$\begin{array}{c} -\left(p(x)u_x+2\delta\left(x\right)u_x\right)_x-\left(\frac{(\beta+\tau)\eta}{k}\right)q+\left(m\left(x\right)+\mu e^{-\tau_0}\right)u\left(x\right) \\ =\left(m\left(x\right)+\mu e^{-\tau_0}\right)f_1+m\left(x\right)f_2+\left(2\delta\left(x\right)g_3(x)\right)_x \\ -\frac{\tau\eta}{k}f_4-\mu\tau_0 e^{-\tau_0}\int_0^1 f_5\left(\gamma,.\right)e^{\gamma\tau_0}d\gamma\in L^2\left(0,L\right) \end{array}$$

$$\int_0^L g_1(x)\tilde{u}dx + 2\int_0^L \delta(x)\, g_3(x)\tilde{u}_x dx, \forall \tilde{u} \in H_0^1(0,L).$$

Par conséquent, par la théorie de la régularitée pour les équations elliptiques linéaires, il s'ensuit que

$$u \in H^2(0,L) \cap H_0^1(0,L) \text{ et } q \in H_*^1(0,L)$$

et on déduit que

$$v, \theta \in H_0^1(0,L)$$

Donc, $I + A$ est surjectif et A est maximal. Finalement, on va prouver que $J : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ est localement lipschitzienne. Donc, si nous définissons

$$F(s) = |s|^{p-2} s \ln |s|^{\gamma}$$

En utilisant la règle de la dérivée de la fonction absolue $|f(x)|' = \frac{|f(x)|}{f(x)} f'(x)$, on trouve

$$F'(s) = \gamma \left[1 + (p-1)\ln |s|\right] |s|^{p-2}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\left\| J(\Phi) - J\left(\tilde{\Phi}\right) \right\|_{\mathcal{F}}^2 &= \left\| \left(0, \frac{1}{m(x)} |u|^{p-2} u \ln |u|^{\gamma} - \frac{1}{m(x)} |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u} \ln |\tilde{u}|^{\gamma}, 0, 0, 0\right) \right\|_{\mathcal{F}}^2 \\
&= \left\| \frac{1}{m(x)} \left(|u|^{p-2} u \ln |u|^{\gamma} - |\tilde{u}|^{p-2} \tilde{u} \ln |\tilde{u}|^{\gamma}\right) \right\|_{L^2(0,L)}^2 \\
&\leq \frac{1}{\|m(x)\|_{\infty}^2} \|F(u) - F(\tilde{u})\|_{L^2(0,L)}^2 , \qquad (2.3.14)
\end{aligned}$$

pour $\theta \in [0,1]$, nous avons

$$\begin{aligned}
& |F(u) - F(\tilde{u})| = |F'(\theta u + (1-\theta)\tilde{u})(u - \tilde{u})| \\
\leq\ & \gamma \left[1 + (p-1)\ln |\theta u + (1-\theta)\tilde{u}|\right] |\theta u + (1-\theta)\tilde{u}|^{p-2} |u - \tilde{u}| \\
\leq\ & \gamma \left[|\theta u + (1-\theta)\tilde{u}|\right]^{p-2} |u - \tilde{u}| \\
& + \gamma (p-1) \left[(\ln |\theta u + (1-\theta)\tilde{u}|) |\theta u + (1-\theta)\tilde{u}|^{p-2}\right] |u - \tilde{u}| . \qquad (2.3.15)
\end{aligned}$$

D'après le *lemme* 2.1 on a $j(s) = |s|^{p-2} \ln |s|$ ce qui donne

$$j(\theta u + (1-\theta)\tilde{u}) = \left[|\theta u + (1-\theta)\tilde{u}|\right]^{p-2} \ln |\theta u + (1-\theta)\tilde{u}|$$

et comme $j(s) \leq A + |s|^{p-2+\varepsilon}$ on obtient

$$\begin{aligned}
|F(u) - F(\tilde{u})| &\leq \gamma \left|\theta u + (1-\theta)\tilde{u}\right|^{p-2} |u - \tilde{u}| \\
&\quad + \gamma (p-1) \left|\theta u + (1-\theta)\tilde{u}\right|^{p-2+\varepsilon} |u - \tilde{u}| \\
&\quad + \gamma (p-1) A |u - \tilde{u}| . \\
&\leq \gamma (|u| + |\tilde{u}|)^{p-2} |u - \tilde{u}| + \gamma (p-1) A |u - \tilde{u}| \\
&\quad + \gamma (p-1) (|u| + |\tilde{u}|)^{p-2+\varepsilon} |u - \tilde{u}| . \qquad (2.3.16)
\end{aligned}$$

Comme $u, \tilde{u} \in H_0^1(0,L)$, en utilisant l'injection de l'espace de Sobolève

$$H_0^1(0,L) \hookrightarrow L^r(0,L), \ \forall 1 \leq r \leq \frac{2n}{n-2}$$

devenir

$$\begin{aligned}
\int_0^L \left[(|u| + |\tilde{u}|)^{p-2} |u - \tilde{u}|\right]^2 dx &= \int_0^L (|u| + |\tilde{u}|)^{2(p-2)} |u - \tilde{u}|^2 dx \\
&\leq \left(\int_0^L (|u| + |\tilde{u}|)^{2(p-2)} dx\right) \left(\int_0^L |u - \tilde{u}|^2 dx\right) \\
&\leq \left(\int_0^L (|u| + |\tilde{u}|)^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \times \left(\int_0^L |u - \tilde{u}|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{(p-1)}} \\
\text{avec l'inégalité triangulaire} &\leq C \left[\left(\int_0^L |u| \, dx + \int_0^L |\tilde{u}| \, dx\right)^{2(p-1)}\right]^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \\
&\quad \times \left(\int_0^L |u - \tilde{u}|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{(p-1)}} \\
&\leq C \left[\int_0^L |u|^{2(p-1)} dx + \int_0^L |\tilde{u}|^{2(p-1)} dx\right]^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \\
&\quad \times \left(\int_0^L |u - \tilde{u}|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{(p-1)}} \\
&\leq C \left[\|u\|_{L^{2(p-1)}(0,L)}^{2(p-1)} + \|\tilde{u}\|_{L^{2(p-1)}(0,L)}^{2(p-1)}\right]^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \|u - \tilde{u}\|_{L^{2(p-1)}(0,L)}^2 \\
\text{avec l'inégalité de Poincaré} &\leq C \left[\|u\|_{H_0^1(0,L)}^{2(p-1)} + \|\tilde{u}\|_{H_0^1(0,L)}^{2(p-1)}\right]^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \|u - \tilde{u}\|_{H_0^1(0,L)}^2 \qquad (2.3.17)
\end{aligned}$$

De même, nous estimons

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left[(|u|+|\tilde{u}|)^{p-2+\varepsilon}|u-\tilde{u}|\right]^2 dx = \int_0^L (|u|+|\tilde{u}|)^{2(p-2+\varepsilon)}|u-\tilde{u}|^2 dx \\
&\leq \left(\int_0^L (|u|+|\tilde{u}|)^{2(p-2)} dx\right)\left(\int_0^L |u-\tilde{u}|^2 dx\right) \\
&\leq \left(\int_0^L (|u|+|\tilde{u}|)^{2(p-2+\varepsilon)(p-1)/(p-2)} dx\right)^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \\
&\times \left(\int_0^L |u-\tilde{u}|^{2(p-1)} dx\right)^{\frac{1}{(p-1)}} \\
&\leq \left(\int_0^L (|u|+|\tilde{u}|)^{2(p-1)+2\varepsilon(p-1)/(p-2)} dx\right)^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \|u-\tilde{u}\|^2_{L^{2(p-1)}(0,L)}
\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

On choisit $\varepsilon > 0$ assez petit que

$$p^* = 2(p-1) + \frac{2\varepsilon(p-1)}{(p-2)} \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\int_0^L (|u|+|\tilde{u}|)^{2(p-2+\varepsilon)}|u-\tilde{u}|^2 dx \\
\leq\ & C\left[\|u\|^{p^*}_{L^{p^*}(0,L)} + \|\tilde{u}\|^{p^*}_{L^{p^*}(0,L)}\right]^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \|u-\tilde{u}\|^2_{L^{2(p-1)}(0,L)} \\
\leq\ & C\left[\|u\|^{p^*}_{H_0^1(0,L)} + \|\tilde{u}\|^{p^*}_{H_0^1(0,L)}\right]^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \|u-\tilde{u}\|^2_{H_0^1(0,L)}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\left\|J(\Phi) - J\left(\tilde{\Phi}\right)\right\|^2_{\mathcal{F}} \leq\ & \left[\gamma^2 (p-1)^2 A^2\right]\|u-\tilde{u}\|^2_{H_0^1(0,L)} \\
&+C\left[\|u\|^{2(p-1)}_{H_0^1(0,L)} + \|\tilde{u}\|^{2(p-1)}_{H_0^1(0,L)}\right]^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \|u-\tilde{u}\|^2_{H_0^1(0,L)} \\
&+C\left[\|u\|^{p^*}_{H_0^1(0,L)} + \|\tilde{u}\|^{p^*}_{H_0^1(0,L)}\right]^{\frac{(p-2)}{(p-1)}} \|u-\tilde{u}\|^2_{H_0^1(0,L)} \\
\leq\ & C\left(\|u\|_{H_0^1(0,L)}, \|\tilde{u}\|_{H_0^1(0,L)}\right)\|u-\tilde{u}\|^2_{H_0^1(0,L)}.
\end{aligned}$$

Donc J est localement Lipschitzienne. la preuve est terminée,([**62**], [**74**]) ■

Chapitre 3

Explosion de la solution

Ce chapitre est consacré à l'étude du phénomène d'explosion. Pour des données initiales et en présence d'une source non linéaire de type logarithmique définit par $(2.2.1)-(2.2.2)$ dans le chapitre précédent, en se basant sur la méthode directe introduite et développée par Georgiev et Todorova [**38**], et sur les techniques de Salim.A.Messaoudi [**74**], nous allons montrer que la solution locale obtenue par le **théorème 2.1** s'explose en temps fini. Sachant que la stabilité de type décroissance exponentielle de ce système sans terme source a été étudiée avant par Gang Li, Yue Luan, Jiangyong Yu et Feida Jiang dans[**34**] .

3.1 Hypothèses et résultats principaux

Pour prouver l'explosion de la solution du problème posé, nous avons besoin des résultats de quelques lemmes importants. Avant ça, on multiple le système $(2.2.4)$ par les fonctions u_t, θ, q (respectivement) et en l'intégrant par parties par rapport à x sur $[0, L]$ on obtient la fonction d'énergie défini comme suit

$$\begin{aligned}
E(t) &= \frac{1}{2}\left(\|m(x)\|_\infty \|u_t(t)\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\left(\|p(x)\|_\infty \|u_x\|_2^2\right) + \frac{\tau}{2}\|q\|_2^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\|\theta\|_2^2 + \frac{\tau_0|\mu|}{2}\int_0^1 \|z(x,\rho,t)\|^2 d\rho + \frac{\gamma}{p^2}\|u\|_p^p \\
&\quad - \frac{1}{p}\int_0^L |u|^p \ln|u|^\gamma dx. \qquad (3.1.1)
\end{aligned}$$

Lemme 3.1 *On suppose que*

$$2 < p \leq \frac{2n}{n-2}, n \geq 3. \qquad (3.1.2)$$

Alors il existe une constante positive $C > 0$ tel que

$$\left[\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx\right]^{\frac{s}{p}} \leq C \left[\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx + \|u_x\|_2^2\right].$$

Pour tout $u \in H_0^1(0, L)$ et $2 \leq s \leq p$, à condition que $\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx \geq 0$.

Preuve. Si $\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx > 1$ alors

$$\left[\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx\right]^{\frac{s}{p}} \leq \int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx. \tag{3.1.3}$$

Si $\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx \leq 1$ alors nous avons mis

$$\Gamma_1 = \{x \in [0, L] \, | |u| > 1\},$$

et pour tout $\beta \leq 2$, nous avons

$$\begin{aligned} \left[\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx\right]^{\frac{s}{p}} &\leq \left[\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx\right]^{\frac{\beta}{p}} \leq \left[\int_{\Gamma_1} |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx\right]^{\frac{\beta}{p}} \\ &\leq \left[\int_{\Gamma_1} |u|^{p+1} \, dx\right]^{\frac{\beta}{p}} \leq \left[\int_0^L |u|^{p+1} \, dx\right]^{\frac{\beta}{p}} \\ &= \|u\|_{p+1}^{\frac{\beta(p+1)}{p}}. \end{aligned}$$

On choisit $\beta = \frac{2p}{(p+1)} < 2$ pour obtenir

$$\left[\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx\right]^{\frac{s}{p}} \leq \|u\|_{p+1}^2 \leq C \|u_x\|_2^2. \tag{3.1.4}$$

En combinant(3.1.3) et (3.1.4) , on obtient le résultat. ■

Lemme 3.2 *Il existe une constante positive$C > 0$ dépendant uniquement de $[0.L]$tel que*

$$\|u\|_p^p \leq C \left[\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx + \|u_x\|_2^2\right]. \tag{3.1.5}$$

Pour tout $u \in H_0^1(0, L)$, à condition que $\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx \geq 0$.

Preuve. Nous fixons

$$\Gamma_+ = \{x \in [0, L] \, | |u| > e\} \text{ et } \Gamma_- = \{x \in [0, L] \, | |u| \leq e\}.$$

Donc

$$
\begin{aligned}
\|u\|_p^p &= \int_{\Gamma_+} |u|^p \, dx + \int_{\Gamma_-} |u|^p \, dx \\
&\leq \int_{\Gamma_+} |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx + \int_{\Gamma_-} e^p \left|\frac{u}{e}\right|^p \, dx \\
&\leq \int_{\Gamma_+} |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx + e^p \int_{\Gamma_-} \left|\frac{u}{e}\right|^2 \, dx \\
&\leq \int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx + e^{p-2} \int_0^L |u|^2 \, dx \\
&\leq C \left\{ \int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx + \|u_x\|_2^2 \right\}
\end{aligned}
$$

En utilisant le fait que $\|u\|_2^2 \leq C \|u\|_p^2 \leq C \left(\|u\|_p^p\right)^{\frac{2}{p}}$, nous avons ■

Corollaire 3.1 *Il existe une constante positive $C > 0$ dépendant de $[0, L]$ telle que*

$$\|u\|_2^2 \leq C \left[\left(\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx \right)^{\frac{2}{p}} + \|u_x\|_2^{\frac{4}{p}} \right], \tag{3.1.6}$$

à condition que $\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \, dx \geq 0$.

Lemme 3.3 *Il existe une constante positive $C > 0$ dépendant de $[0, L]$ telle que*

$$\|u\|_p^s \leq C \left[\|u\|_p^p + \|u_x\|_2^2 \right]. \tag{3.1.7}$$

Pour tout $u \in H_0^1(0, L)$ *et* $2 \leq s \leq p$

Preuve. Si $\|u\|_p \geq 1$ alors

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^p$$

Si $\|u\|_p \leq 1$ alors, $\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2$. En utilisant le théorème de l'injection de Sobolève, nous avons

$$\|u\|_p^s \leq \|u\|_p^2 \leq C \|u_x\|_2^2.$$

■

3.2 Explosion de la solution du problème posé en temps fini

Maintenant Nous sommes prêts à déclarer et à prouver notre résultat principal. Pour cela, nous définissons

$$\begin{aligned} H(t) &= -E(t) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\|m(x)\|_{\infty}\|u_t(t)\|_2^2\right)-\frac{1}{2}\left(\|p(x)\|_{\infty}\|u_x\|_2^2\right)-\frac{\tau}{2}\|q\|_2^2 \\ &\quad -\frac{1}{2}\|\theta\|_2^2-\frac{\tau_0|\mu|}{2}\int_0^1\|z(x,\rho,t)\|^2 d\rho-\frac{\gamma}{p^2}\|u\|_p^p \\ &\quad +\frac{1}{p}\int_0^L|u|^p\ln|u|^\gamma dx \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Corollaire 3.2 *On suppose que* (3.1.2) *est existé. alors*

$$\|u\|_p^s \leq C\left\{\begin{array}{c} \left(1-\frac{\gamma}{p\|p(x)\|_{\infty}}\right)\|u\|_p^p-\left(\frac{2}{\|p(x)\|_{\infty}}\right)H(t) \\ -\left(\frac{\|m(x)\|_{\infty}}{\|p(x)\|_{\infty}}\right)\|u_t(t)\|_2^2-\left(\frac{\tau}{\|p(x)\|_{\infty}}\right)\|q\|_2^2 \\ -\left(\frac{1}{\|p(x)\|_{\infty}}\right)\|\theta\|_2^2-\frac{\tau_0|\mu|}{\|p(x)\|_{\infty}}\int_0^1\|z(x,\rho,t)\|^2 d\rho \\ +\frac{2}{p\|p(x)\|_{\infty}}\int_0^L|u|^p\ln|u|^\gamma dx \end{array}\right\}. \tag{3.2.2}$$

Pour tout $u\in\left(H_0^1(0,L)\right)^n$ *et* $2\leq s\leq p$.

Théorème 3.1 *On suppose que* (3.1.2) *est vérifié. Supposons en outre que*

$$\begin{aligned} E(0) &= \frac{1}{2}\left(\|m(x)\|_{\infty}\|u_1(t)\|_2^2\right)+\frac{1}{2}\left(\|p(x)\|_{\infty}\|\nabla u_0\|_2^2\right)+\frac{\tau}{2}\|q_0\|_2^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}\|\theta_0\|_2^2+\frac{\tau_0|\mu|}{2}\int_0^L\int_0^1|f_0(x,-\rho\tau_0)|^2 d\rho dx+\frac{\gamma}{p^2}\|u_0\|_p^p \\ &\quad -\frac{1}{p}\int_0^L|u_0|^p\ln|u_0|^\gamma dx<0. \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

Alors la solution de (2.1.4) *explose en temps fini.*

Preuve. On a

$$E(t)\leq E(0)<0,$$

et

$$\begin{aligned} H'(t) &= -E'(t)=2\left(\|\delta(x)\|_{\infty}\|u_{xt}(t)\|_2^2\right)+\beta\|q\|_2^2 \\ &\quad +|\mu|\int_0^L|z(x,1,t)|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} H'(t) &\geq C_0 \left\{ \begin{array}{c} \left(\|\delta(x)\|_\infty \|u_{xt}(t)\|_2^2 \right) \\ + |\mu| \int_0^L z^2(x,1,t)\,dx \end{array} \right\} \\ &\geq 0; \forall t \in [0,T), \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

et encore

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma \,dx; \forall t \in [0,T) \tag{3.2.6}$$

En raison de$(3.1.1)$ et $(3.2.1)$. Nous introduisons ensuite

$$\begin{aligned} L(t) &= H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon \int_0^L \left[m(x) u_t(t) u(t) + 4\delta(x) |u_x|^2 \right] dx \\ &+ \varepsilon \int_0^L \frac{n\tau}{k} uq dx. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Où $\varepsilon > 0$ à préciser ultérieurement et

$$\frac{2(p-2)}{p^2} < \alpha < \frac{p-2}{2p} < 1. \tag{3.2.8}$$

Par une dérivation directe de $L(t)$ donne

$$\begin{aligned} L'(t) &= (1-\alpha) H^{-\alpha}(t) H'(t) + \varepsilon \int_0^L m(x) |u_t|^2 \,dx \\ &+ \varepsilon \frac{\eta\tau}{k} \int_0^L q u_t(t)\,dx - \varepsilon \int_0^L p(x) |u_x|^2 \,dx \\ &+ 2\varepsilon\eta \int_0^L \theta u_x dx - \varepsilon \int_0^L \mu z(x,1,t) u dx \\ &+ \varepsilon \int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma - \varepsilon \frac{\eta\beta}{k} \int_0^L q u dx. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

En utilisant l'inégalité de Young

$$2\varepsilon\eta \int_0^L \theta u_x dx \geq -\varepsilon\eta \|\theta\|_2^2 - \varepsilon\eta \|u_x\|_2^2 \tag{3.2.10}$$

$$-\varepsilon \int_0^L p(x) |u_x|^2 \,dx \geq -\varepsilon \|p(x)\|_\infty \|u_x\|_2^2 \tag{3.2.11}$$

$$\varepsilon \int_0^L m(x) |u_t|^2 \,dx \geq \varepsilon \|m(x)\|_\infty \|u_t\|_2^2 \tag{3.2.12}$$

$$\varepsilon \frac{\eta\tau}{k} \int_0^L q u_t(t)\,dx \geq -\varepsilon \frac{\eta\tau}{2k} \|u_t\|_2^2 - \varepsilon \frac{\eta\tau}{2k} \|q\|_2^2. \tag{3.2.13}$$

Et

$$-\varepsilon\int_0^L \mu z(x,1,t)\,udx \geq -\varepsilon|\mu|\left\{\begin{array}{c}\frac{\xi_1}{2}\int_0^L |z(x,1,t)|^2\,dx\\ +\frac{1}{2\xi_1}\|u\|_2^2\end{array}\right\}, \forall\xi_1>0 \tag{3.2.14}$$

$$-\varepsilon\frac{\eta\beta}{k}\int_0^L qudx \geq \varepsilon\frac{\eta\beta}{k}\left\{\frac{\xi_2}{2}\|q\|_2^2+\frac{1}{2\xi_2}\|u\|_2^2\right\}, \forall\xi_2>0. \tag{3.2.15}$$

En substituant $(3.2.10)-(3.2.15)$dans$(3.2.9)$ on trouve

$$\begin{aligned}L'(t) \geq\ & (1-\alpha)H^{-\alpha}(t)H'(t)+\varepsilon\left\{\|m(x)\|_\infty-\frac{\eta\tau}{2k}\right\}\|u_t\|_2^2\\ & -\varepsilon\{\|p(x)\|_\infty+\eta\}\|u_x\|_2^2-\varepsilon\eta\|\theta\|_2^2\\ & -\varepsilon\left\{\frac{\tau\eta+\beta\eta\xi_2}{2k}\right\}\|q\|_2^2+\varepsilon\int_0^L |u|^p\ln|u|^\gamma\,dx\\ & -\varepsilon|\mu|\frac{\xi_1}{2}\int_0^L |z(x,1,t)|^2\,dx-\varepsilon\|u\|_2^2\left\{\frac{|\mu|}{2\xi_1}+\frac{\eta\beta}{2\xi_2 k}\right\}.\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

Nous obtenons, à partir de$(3.2.4)$et$(3.2.16)$,

$$\begin{aligned}L'(t) \geq\ & \left\{(1-\alpha)H^{-\alpha}(t)-\varepsilon\left(\frac{k\xi_1+\eta\xi_2}{2k}\right)\right\}H'(t)\\ & +\varepsilon\left\{\|m(x)\|_\infty-\frac{\eta\tau}{2k}\right\}\|u_t\|_2^2\\ & -\varepsilon\{\|p(x)\|_\infty+\eta\}\|u_x\|_2^2-\varepsilon\eta\|\theta\|_2^2\\ & -\varepsilon\frac{\tau\eta}{2k}\|q\|_2^2+\varepsilon\int_0^L |u|^p\ln|u|^\gamma\,dx\\ & -\varepsilon\left\{\frac{|\mu|k}{2\xi_1 k}+\frac{\eta\beta}{2\xi_2 k}\right\}\|u\|_2^2\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

Nous définissons également $\xi_1=\xi_2=H^{-\alpha}(t)$ par conséquent$(3.2.17)$ donne

$$\begin{aligned}L'(t) \geq\ & \{(1-\alpha)-\varepsilon C\}H^{-\alpha}(t)H'(t)\\ & +\varepsilon\left\{\|m(x)\|_\infty-\frac{\eta\tau}{2k}\right\}\|u_t\|_2^2\\ & -\varepsilon\{\|p(x)\|_\infty+\eta\}\|u_x\|_2^2-\varepsilon\eta\|\theta\|_2^2\\ & -\varepsilon\frac{\tau\eta}{2k}\|q\|_2^2+\varepsilon\int_0^L |u|^p\ln|u|^\gamma\,dx\\ & -\varepsilon\frac{M}{2k}H^\alpha(t)\|u\|_2^2,\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

où C et M ce sont des constantes strictement positives dépendant uniquement à $k, \eta, \beta, |\mu|$. Pour $0 < a < 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq\; & \{(1-\alpha) - \varepsilon C\} H^{-\alpha}(t) H'(t) \\
& + \varepsilon \left\{ \|m(x)\|_{\infty} \left(1 + \frac{p}{2}(1-a)\right) - \frac{\eta \tau}{2k} \right\} \|u_t\|_2^2 \\
& + \varepsilon \left\{ \|p(x)\|_{\infty} \left(\frac{p}{2}(1-a) - 1\right) + \eta \right\} \|u_x\|_2^2 \\
& + \varepsilon \left\{ -\eta + \frac{p\varepsilon(1-a)}{2} \right\} \|\theta\|_2^2 + \varepsilon a \int_0^L |u|^p \ln |u|^{\gamma} dx \\
& + \varepsilon \left\{ -\frac{\tau \eta}{2k} + \frac{p\tau(1-a)}{2} \right\} \|q\|_2^2 + \frac{\gamma \varepsilon (1-a)}{2} \|u\|_p^p \\
& + \varepsilon \frac{\tau_0 p (1-a)}{2} |\mu| \int_0^L \int_0^1 |z(x,\rho,t)|^2 d\rho dx \\
& - \varepsilon \frac{M}{2k} H^{\alpha}(t) \|u\|_2^2 + p\varepsilon(1-a) H(t)
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

En utilisant$(3.1.6), (3.2.6)$ et l'inégalité de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
H^{\alpha}(t)\|u\|_2^2 &\leq \left(\int_0^L |u|^p \ln |u|^{\gamma} dx\right)^{\alpha} \|u\|_2^2 \\
&\leq C\left[\left(\int_0^L |u|^p \ln |u|^{\gamma} dx\right)^{\alpha + \frac{2}{p}} + \left(\int_0^L |u|^p \ln |u|^{\gamma} dx\right)^{\alpha} \|u_x\|_2^{\frac{4}{p}}\right] \\
&\leq C\left[\left(\int_0^L |u|^p \ln |u|^{\gamma} dx\right)^{\frac{(\alpha p+2)}{p}} + \|u_x\|_2^2 + \left(\int_0^L |u|^p \ln |u|^{\gamma} dx\right)^{\frac{\alpha p}{p-2}}\right]
\end{aligned}$$

On exploit $(3.2.8)$, on a

$$2 < \alpha p + 2 \leq p \text{ et } 2 < \frac{\alpha p^2}{p-2} \leq p$$

Ainsi, $le\ lemme$ 3.1donne

$$H^{\alpha}(t)\|u\|_2^2 \leq C\left\{\int_0^L |u|^p \ln |u|^{\gamma} dx + \|u_x\|_2^2\right\} \tag{3.2.20}$$

En combinant(3.2.19) et (3.2.20), on obtient

$$\begin{aligned}
L'(t) \geq\ & \{(1-\alpha)-\varepsilon C\} H^{-\alpha}(t) H'(t) \\
& +\varepsilon\left\{\|m(x)\|_{\infty}\left(1+\frac{p}{2}(1-a)\right)-\frac{\eta\tau}{2k}\right\}\|u_t\|_2^2 \\
& +\varepsilon\left\{\|p(x)\|_{\infty}\left(\frac{p}{2}(1-a)-1\right)+\eta-C\frac{M}{2k}\right\}\|u_x\|_2^2 \\
& +\varepsilon\left\{-\eta+\frac{p\varepsilon(1-a)}{2}\right\}\|\theta\|_2^2+\varepsilon\left\{a-C\frac{M}{2k}\right\}\int_0^L |u|^p \ln|u|^\gamma\, dx \\
& +\varepsilon\left\{-\frac{\tau\eta}{2k}+\frac{p\tau(1-a)}{2}\right\}\|q\|_2^2+\frac{\gamma\varepsilon(1-a)}{2}\|u\|_p^p \\
& +\varepsilon\frac{\tau_0 p(1-a)}{2}|\mu|\int_0^L\int_0^1 |z(x,\rho,t)|^2\, d\rho dx \\
& +p\varepsilon(1-a)H(t).
\end{aligned} \tag{3.2.21}$$

À ce point, nous choisissons $a>0$ assez petit que

$$\begin{aligned}
-\eta+\frac{p\varepsilon(1-a)}{2} &> 0 \\
\left(\frac{p}{2}(1-a)-1\right) &> 0 \\
\frac{\tau_0 p(1-a)}{2} &> 0.
\end{aligned}$$

Et k très grand que

$$\begin{aligned}
\|p(x)\|_{\infty}\left(\frac{p}{2}(1-a)-1\right)+\eta-C\frac{M}{2k} &> 0 \\
a-C\frac{M}{2k} &> 0 \\
\|m(x)\|_{\infty}\left(1+\frac{p}{2}(1-a)\right)-\frac{\eta\tau}{2k} &> 0 \\
-\frac{\tau\eta}{2k}+\frac{p\tau(1-a)}{2} &> 0
\end{aligned}$$

Maintenant on fixe C et a, nous choisissons ε si petit que

$$(1-\alpha)-\varepsilon C>0.$$

Par conséquent(3.2.21) devenir

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & \{(1-\alpha)-\varepsilon C\} H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ & +\varepsilon A_1 \|u_t\|_2^2+\varepsilon A_2 \|u_x\|_2^2+\varepsilon A_3 \|\theta\|_2^2 \\ & +\varepsilon A_4 \|q\|_2^2+\varepsilon\left\{a-C \frac{M}{2k}\right\} \int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma dx \\ & +\varepsilon \frac{\tau_0 p(1-a)}{2}|\mu| \int_0^L \int_0^1 |z(x, \rho, t)|^2 d\rho dx \\ & +\frac{\gamma \varepsilon(1-a)}{2}\|u\|_p^p+p \varepsilon(1-a) H(t) . \qquad (3.2.22)\end{aligned}$$

Où A_1-A_4 sont des constantes strictement positives dépendant à p, τ, η, k, a. Donc, pour certains $A_0>0$, l'estimation(3.2.22) devient

$$\begin{aligned} L'(t) \geq\ & A_0\left\{H(t)+\|u_t\|_2^2+\|u_x\|_2^2+\|u\|_p^p\right. \\ & +\|q\|_2^2+\|\theta\|_2^2+\int_0^L |u|^p \ln |u|^\gamma dx \\ & \left.+\int_0^L \int_0^1 |z(x, \rho, t)|^2 d\rho dx\right\}, \qquad (3.2.23)\end{aligned}$$

et

$$L(t) \geq L(0)>0, \forall t \geq 0. \qquad (3.2.24)$$

Ensuite, en utilisant l'inégalité de Hôlder et l'injection $\|u\|_2 \leq C\|u\|_p$, nous avons

$$\begin{aligned} \left|\int_0^L m(x) u u_t dx\right| & \leq \|m(x)\|_{\infty}\|u\|_2\|u_t\|_2 \\ & \leq C\|u\|_2\|u_t\|_2 .\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Young, on obtient

$$\left|\int_0^L m(x) u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C\left\{\|u\|_p^{\frac{r}{1-\alpha}}+\|u_t\|_2^{\frac{r'}{1-\alpha}}\right\}, \text{pour} \frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1. \qquad (3.2.25)$$

Pour pouvoir utiliser le *Lemme* 3.3, on prend $r'=2(1-\alpha)$ ce qui donne $\frac{r}{1-\alpha}=\frac{2}{1-2\alpha} \leq p$. Par suite, pour $s=\frac{2}{1-2\alpha}$, l'estimation (3.2.25) donne

$$\left|\int_0^L m(x) u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C\left(\|u\|_p^s+\|u_t\|_2^2\right),$$

par conséquent, le *lemme* 3.3 donne

$$\left|\int_0^L m(x) u u_t dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C_1\left(\|u\|_p^p+\|u_t\|_2^2+\|u_x\|_2^2\right), \forall C_1>0. \qquad (3.2.26)$$

Avec la même méthode, on obtient

$$\left|\varepsilon \int_0^L \frac{n\tau}{k} uqdx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C_2 \left(\|u\|_p^p + \|q\|_2^2\right), \forall C_2 > 0 \tag{3.2.27}$$

$$\left|\varepsilon \int_0^L 4\delta(x) |u_x|^2 dx\right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C_3 \|u_x\|_2^2, \forall C_3 > 0. \tag{3.2.28}$$

À partir de$(3.2.26) - (3.2.28)$ on trouve

$$L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t) \leq C \left\{H(t) + \|u\|_p^p + \|q\|_2^2 + \|u_x\|_2^2 + \|u_t\|_2^2\right\}; \forall t \geq 0, \forall C > 0. \tag{3.2.29}$$

En combinant$(3.2.29)$ et $(3.2.23)$, nous arrivons à

$$L'(t) \geq a_0 L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \forall t \geq 0, \tag{3.2.30}$$

Où a_0 est une constante positive dépendant à A_0 et C. Une intégration simple de $(3.2.30)$ sur $(0,t)$ donne

$$L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(t) \geq \frac{1}{L^{\frac{-\alpha}{1-\alpha}}(0) - \frac{\alpha a_0 t}{(1-\alpha)}}$$

Finalement, $L(t)$ explose en un temps fini

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\alpha a_0 L^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(0)}$$

La preuve est terminée. ■

3.3 Conclusion et perspectives

Dans cette partie de la thèse, on s'intéresse à un système de structure flexible logarithmique avec deuxième sonne avec un terme de retard, nous avons étudié l'existence locale de ce problème avec respect de certaines conditions de la proposition et à l'aide de la méthode des semi-groupes. Puis nous avons montré que l'énergie de toute solution faible explose en temps fini si l'énergie initiale est négative. à l'avenir, certaines extensions potentielles de la recherche sont :

- Étudier le non-existence de la solution de ce système sans terme de retard en présence du terme source fractionnaire non linéaire.
- Essayer de vérifier le comportement asymptotique de type (décroissance exponentielle) avec ce type de terme source.
- Si on change le terme source logarithmique par un autre, quelle est la modification dans le sens profond de ce travail ?

Deuxième partie

Sur des problèmes d'ondes viscoélastique non linéaire

Chapitre 4

Equation de la membrane-elastique avec des conditions aux limites dynamiques

4.1 Introduction

Ce chapitre s'intéresse à l'équation de la membrane élastique avec des conditions aux limites dynamiques, un terme source et un amortissement faible non linéaire localisé sur une partie de la limite et un historique définit comme suit :

$$\begin{aligned} & u_{tt}(t) - \left(l + \xi_1 \left\|\nabla u\right\|_2^2 + \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\right) \Delta u(t) \\ & - \int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s)ds = 0, \quad sur\ \Omega \times (0,\infty)\,, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

ainsi que les conditions aux limites

$$u(t) = 0 \qquad , sur\Gamma_0 \times (0,\infty)\,, \tag{4.1.2}$$

$$\begin{aligned} & u_{tt}(t) = -\frac{\partial u(t)}{\partial \nu} - \frac{\partial u_t(t)}{\partial \nu} + \int_0^\infty g(s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(t-s)ds \\ & -h(u_t) - f(u) \qquad , \ sur\Gamma_1 \times (0,\infty)\,, \end{aligned} \tag{4.1.3}$$

et les conditions initiales

$$u(x,-t) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), x \in \Omega, \tag{4.1.4}$$

où $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n\,(n \geq 1)$ est un domaine régulier et borné. $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, mes\,(\Gamma_0) > 0$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi$, et $\frac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivée normale extérieure unitaire. La fonction de relaxation $g(t)$ sera assumée plus tard. $h(u_t)$ pour motiver notre travail, nous rappelons certains résultats liés à l'équation d'onde viscoélastique. Pour l'équation d'onde viscoélastique avec condition aux limites de Dirichlet, les problèmes sont vraiment surchargés. De nombreux résultats d'existence et de stabilité ont été établis, on peut se référer à Berrimi et Messaoudi [14], Cavalcanti et Martinez[23, 24], Cavalcanti et Oquendo [22], Fabrizio et Polidoro [29], Messaoudi[32, 46, 49, 62], pour n'en citer que quelques-uns. Pour le problème viscoélastique linéaire de Cauchy, on peut se référer à Kafini et Mustafa [48]. En ce qui concerne l'équation d'onde viscoélastique avec des frontières de stabilisation, Cavalcanti [20]a considéré le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) + \int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s)ds = 0, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \frac{\partial u(t)}{\partial \nu} - \int_0^\infty g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu}(s)ds + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Sous les hypothèses suivantes sur les fonctions h,

$$\begin{cases} C_1 |s|^p \leq |h(s)| \leq C_2 |s|^{\frac{1}{p}}, & si\, |s| \leq 1 \\ C_3 |s| \leq |h(s)| \leq C_4 |s|, & si\, |s| > 1 \end{cases}$$

les auteurs ont d'abord prouvé l'existence globale de solutions, et obtenu que l'énergie décroisse exponentiellement si $p = 1$ et sa décroissance polynomiale si $p > 1$. Les résultats ont été généralisés par Cavalcanti et al.[19]. Ils ont obtenu les mêmes résultats sans imposer une condition de croissance sur h et sous une hypothèse plus faible sur g.Messaoudi [46] ont étendu ces résultats et ont établi un résultat explicite et général du taux de décroissance en exploitant certaines propriétés des fonctions convexes. Récemment, en utilisant la même méthode que dans [45], Kafini et Messaoudi[49] ont considéré le système d'ondes ci-dessus avec une mémoire infinie $\int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s)ds$ et ont obtenu un résultat général de décroissance en utilisant la méthode du multiplicateur. Gerbi et Said-Houari [36] ont étudié une équation d'onde viscoélastique avec des conditions aux limites dynamiques de la forme

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) - \alpha \Delta u_t + \int_0^\infty g(t-s)\Delta u(s)ds = |u|^{p-2} u, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u_{tt}(t) = -\left[-\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha \frac{\partial u_t}{\partial \nu} - \int_0^\infty g(t-s)\frac{\partial u(s)}{\partial \nu}ds + h(u_t)\right], & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et le théorème du point fixe, ils ont prouvé l'existence et l'unicité d'une solution locale en temps, et ont prouvé que la solution existe globalement en temps sous certaines restrictions sur les données initiales. Ils ont également prouvé que si $\alpha > 0$, la solution est non bornée et croît comme une fonction exponentielle, si $\alpha = 0$, alors la solution cesse d'exister et s'effondre en temps fini. Feng, Baowei [30] ont considéré la même équation d'onde viscoélastique mais avec les conditions aux limites dynamiques suivantes

$$u_{tt}(t) = -\left[-\frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^\infty g(t-s)\frac{\partial u(s)}{\partial \nu}ds + \sigma \frac{\partial u_t}{\partial \nu} + \mu_1 h(u_t) + \mu_2 h(u_t(t-\tau))\right], sur\ \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

Ils ont établi un résultat général de décroissance, en introduisant des fonctions d'énergie de Lyapunov appropriées et certaines propriétés des fonctions convexes. Ferhat et Hakem [31] ont étudié le système suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) - \alpha \Delta u_t + \delta(t) \int_0^\infty g(t-s)\Delta u(s)ds = |u|^{p-2} u, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u_{tt}(t) = \Big[-\frac{\partial u}{\partial \nu} - \sigma(t) \int_0^\infty g(t-s) \frac{\partial u(s)}{\partial \nu} ds + \alpha \frac{\partial u_t}{\partial \nu} + \mu_1 |u|^{m-1} u_t & \\ \qquad + \mu_2 |u_t(t-\tau)|^{m-1} u_t(t-\tau) \Big] & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

Ils ont prouvé l'existence globale et la décroissance d'énergie des solutions pour ce système. Ferhat et Hakem [31] ont considéré une équation d'onde viscoélastique faible avec des conditions aux limites dynamiques et un amortissement de Kelvin Voigt et un terme de retard agissant sur la limite dans un domaine limité, et ont prouvé le comportement asymptotique en utilisant une fonction de Lyapunov appropriée. Récemment, Benaissa et Ferhat [12] ont considéré une équation d'onde viscoélastique avec des conditions limites dynamiques et une mémoire infinie.

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - \Delta u(t) + \int_0^\infty g(s)\Delta u(t-s)ds = 0, & sur\ \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & sur\ \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u_{tt}(t) = -\left[\frac{\partial u(t)}{\partial \nu} - \int_0^\infty g(s) \frac{\partial u}{\partial \nu}(t-s)ds \right], & sur\ \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0) = u_0(x), u_t(0) = u_1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

et établi un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie en exploitant la méthode du domaine fréquentiel qui consiste à combiner un argument de contradiction et une analyse spéciale pour le résolvant de l'opérateur sous l'hypothèse $-\zeta_0 g(t) \leq g'(t) \leq \zeta_0 g(t)$. Pour plus de résultats concernant l'équation d'onde avec stabilisation aux frontières, on peut se référer à Doronin et Larkin [27], $M\tilde{u}noz\ Rivera$ et Andrade [6], Gerbi et Said-Houari [35, 36], Liu et Yu[58, 59], etc. Puisqu'il existe peu de travaux sur l'équation d'onde avec des conditions aux limites dynamiques, un terme source et un faible amortissement non linéaire localisé sur une partie de la frontière et un historique, motivés par les traveaux ci-dessus, nous étudions dans le présent travail la stabilité des solutions au problème$(4.1.1) - (4.1.4)$. L'objectif principal de ce chapitre est d'établir un résultat de décroissance explicite et général en utilisant la méthode du multiplicateur et certaines propriétés des fonctions convexes. Notre résultat est obtenu sans imposer d'hypothèse de croissance restrictive sur le terme d'amortissement. Nous terminons cette section en établissant le cadre d'histoire habituel du problème $(4.1.1) - (4.1.4)$. En suivant les mêmes arguments de Dafermos [26] . Référez-vous aux références connexes suivantes[24, 26, 30, 36] .

4.2 Formulation du problème

Pour démontrer le résultat désiré sur la décroissance générale, on définit une nouvelle variable

$$\eta(x,t,s) = u(t) - u(t-s),$$

ce qui donne

$$\eta_t + \eta_s = u_t.$$

En supposant $\xi_0 - \int_0^\infty g(s)ds = l$ donc on peut obtenir un nouveau système,ce qui équivalent au problème$(4.1.1)-(4.1.3)$

$$\begin{aligned} u_{tt}(t) - \left(l + \xi_1 \|\nabla u\|^2 + \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\right)\Delta u(t) - \textstyle\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)ds \\ = 0, sur\ \Omega \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

$$u = 0, \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \tag{4.2.2}$$

$$\begin{aligned} u_{tt}(t) = -\left(l + \xi_1 \|\nabla u\|^2 + \sigma\left(\nabla u, \nabla u_t\right)\right)\tfrac{\partial u(t)}{\partial \nu} - \textstyle\int_0^\infty g(s)\tfrac{\partial \eta}{\partial \nu}(s)ds \\ -h(u_t) - f\left(u\right), \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

$$u(x,-t) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{4.2.4}$$

4.2.1 Hypothèses et résultats principaux

Dans cette section nous présentons quelques hypothèses utilisé dans ce travail ,$L^q(\Omega), (1 \leq q \leq \infty)$, et $H^1(\Omega)$ l'intégrale de lebesgue et l'espace de Sobolev, $\|.\|_q$ et$\|.\|_{q,\Gamma_1}$ sont des normes dans l'espace $L^q(\Omega)$ et $L^q(\Gamma_1)$, respectivement.
En dénote

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega) \colon u\backslash_{\Gamma_0} = 0\right\},$$

alors nous avons l'injection $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^2\left(\Gamma_1\right)$, en général nous utiliserons la formule de Green suivante

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)dx = -\int_\Omega \Delta u(x)w(x)dx + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)w(x)d\Gamma, \forall w \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Pour gérer la nouvelle variable η, on introduit dans l'espace L^2

$$M = L^2_g\left(\mathbb{R}^+; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right) = \left\{\zeta \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \colon \int_0^\infty g(s)\left\|\nabla\zeta(s)\right\|^2 ds < \infty\right\},$$

dans l'espace de Hilbert définit le produit scalaire et la norme comme suivant

$$\langle \zeta, \vartheta \rangle_M = \int_0^\infty g(s)\left(\int_\Omega \nabla\zeta\left(s\right)\nabla\vartheta\left(s\right)dx\right)ds,$$

et

$$\|\zeta\|_M^2 = \int_0^\infty g(s) \|\nabla\zeta(s)\|^2 ds.$$

La phase de l'espace $\hat{H}$ est définie par

$$\hat{H} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times L^2(\Omega) \times M.$$

Dans la suite, nous allons donner quelques hypothèses pour la fonction de relaxation g, on suppose

$(A1)\, g(t) \colon \mathbb{R}^+ \hookrightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction non croissante de classe C^1 qui satisfaite

$$g(0) > 0 \text{ et } \xi_0 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0. \tag{4.2.5}$$

en plus, il existe une fonction croissante strictement convexe $G \colon \mathbb{R}^+ \hookrightarrow \mathbb{R}^+$de classe $C^1(\mathbb{R}^+) \cap C^2(\mathbb{R}^+)$qui satisfaite

$$G(0) = G'(0) = 0 \text{ et } \lim_{t \hookrightarrow +\infty} G'(t) = +\infty \tag{4.2.6}$$

tel que

$$\int_0^\infty \frac{g(s)}{G^{-1}(-g'(s))} ds + \sup_{s\in\mathbb{R}^+} \frac{g(s)}{G^{-1}(-g'(s))} < +\infty \tag{4.2.7}$$

$(A2)$ $h \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non décroissante de classe C^0, tel qu'il existe une fonction strictement croissante $h_0 \in C^1(\mathbb{R}^+)$ avec $h_0(0) = 0$ avec se sont des constantes positives c_1, c_2 et ε tel que

$$\begin{cases} h_0(|s|) \le |h(s)| \le h_0^{-1}(|s|)\,; & \text{si } |s| \le \varepsilon \\ c_1|s| \le |h(s)| \le c_2|s| & \text{si } |s| > \varepsilon \end{cases}. \tag{4.2.8}$$

En outre, nous supposons que la fonction $H(s) = \sqrt{s}h_0(\sqrt{s})$ est une fonction de classe C^2strictement convexe sur$(0, r^2]$ pour certains $r > 0$ où h_0 est non linéaire.

$(A3)$ On suppose $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pour $c_0 > 0$,

$$|f(u) - f(v)| \le c_0 (1 + |u|^p + |v|^p) |u - v|, \forall u, v \in \mathbb{R}. \tag{4.2.9}$$

Où

$$0 < p < \frac{2}{n-2} \; if \; n \ge 3 \; and \; p > 0 \; if \; n = 1, 2.$$

En plus, on suppose que

$$f(u)u \ge F(u) \ge 0; \forall u \in \mathbb{R}. \tag{4.2.10}$$

Où $F(z) = \int_0^z f(s)$ les hypothèses $(4.2.9) - (4.2.10)$ inclure des termes non linéaires de la forme

$$f(u) \approx |u|^p u + |u|^\alpha u, \; 0 < \alpha < p.$$

$(A4)$ Il existe une constante positive m_0 telle que

$$\|\nabla u_0 (., s)\| \leq m_0 \tag{4.2.11}$$

Par des mêmes arguments appliqués dans $[12]$ et $[30], [17]$,nous pouvons prouver l'existence globale de la solution $(4.2.1) - (4.2.4)$ donné dans le théorème suivant

Théorème 4.1 *On suppose les hypothèses $(A1) - (A4)$ sont vérifiés. Si les données initiale $(u_0 (., 0), u_1, \eta_0) \epsilon \hat{H}$ alors le problème$(4.2.1) - (4.2.4)$a une solution faible unique telle que pour tout $T > 0$,*

$$u(t) \in L^\infty \left([0, T]; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right), u_t (t) \in L^\infty \left([0, T]; L^2(\Omega)\right) \text{ et } \eta \in L^\infty ([0, T]; M).$$

la fonctionnelle d'énergie du problème $(4.2.1) - (4.2.4)$ est défini par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|u_t (t)\|_2^2 + \|u_t (t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int_{\Gamma_1} F(u) d\Gamma + \|\eta\|_M^2 + l \|\nabla u\|_2^2 + \frac{b}{2} \|\nabla u\|_2^4 \right\}. \tag{4.2.12}$$

Ensuite, nous pouvons obtenir le résultat de la décroissance de l'énergie du problème $(4.2.1) - (4.2.4)$ donné dans le théorème suivant

Théorème 4.2 *On suppose les hypothèses $(A1) - (A4)$ sont vérifiés. Soit $(u_0 (., 0), u_1, \eta_0) \in \hat{H}$, alors il existe des constantes positives $k_2, k_3, k_4, \varepsilon_1, \varepsilon_0$ tels que l'énergie $E(t)$ définit par $(4.2.12)$ satisfait*

$$\begin{aligned} E(t) &\leq k_4 W_1^{-1} (k_2 t + k_3), \forall t \in \mathbb{R}^+, \\ \text{où } W_1(\tau) &= \int_\tau^1 \frac{1}{W_2 (s)} ds \text{ et } W_2(t) = t G' (\varepsilon_1 t) H' (\varepsilon_0 t). \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

4.3 Décroissance générale de l'énergie

Dans cette section, nous allons étudier la décroissance générale de l'énergie du problème $(4.2.1) - (4.2.4)$ pour prouver le théorème(4.2) on a besoin les lemmes suivants.

Lemme 4.1 *Sous les hypothéses de théorème4.2, la fonction d'énergie $E(t)$ est décroissante et pour tout $t \geq 0$ elle satisfaite*

$$E'(t) \leq -\sigma \left(\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u\|_2^2 \right)^2 - \int_{\Gamma_1} h(u_t) u_t d\Gamma + \frac{1}{2} \int_0^\infty g'(s) \|\nabla \eta (s)\|_2^2 ds. \tag{4.3.1}$$

Preuve. On considère l'équation suivante

$$u_{tt}(t)-\left(l+\xi_1\left\|\nabla u\right\|_2^2+\sigma\left(\nabla u,\nabla u_t\right)\right)\Delta u(t)-\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)ds=0,$$

en multipliant le problème ci-dessus par la fonction u_t, on obtient

$$\begin{array}{c}\left(u_{tt}(t),u_t\right)_{L^2(\Omega)}-\left(l\Delta u(t),u_t\right)_{L^2(\Omega)}-\left(\xi_1\left\|\nabla u\right\|_2^2\Delta u(t),u_t\right)_{L^2(\Omega)}\\-\left(\sigma\left(\nabla u,\nabla u_t\right)\Delta u(t),u_t\right)_{L^2(\Omega)}-\left(\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)ds,u_t\right)_{L^2(\Omega)}=0\end{array},\tag{4.3.2}$$

en utilisant l'intégration par parties pour chaque terme sur Ω successivement, avec l'utilisation des conditions au bord on trouve

$$\left(u_{tt}(t),u_t\right)_{L^2(\Omega)}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2,\tag{4.3.3}$$

$$-\left(l\Delta u(t),u_t\right)_{L^2(\Omega)}=-l\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}u_td\Gamma+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}l\left\|\nabla u\right\|_2^2,\tag{4.3.4}$$

$$-\left(\xi_1\left\|\nabla u\right\|_2^2\Delta u(t),u_t\right)_{L^2(\Omega)}=-\xi_1\left\|\nabla u\right\|_2^2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}u_td\Gamma+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^4\right],\tag{4.3.5}$$

On a

$$\left(\nabla u,\nabla u_t\right)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|_2^2,$$

si on l'utilise on obtient

$$\begin{aligned}-\left(\sigma\left(\nabla u,\nabla u_t\right)\Delta u(t),u_t\right)_{L^2(\Omega)}&=-\sigma\int_\Omega\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right)\Delta u(t)u_tdx\\&=-\int_{\Gamma_1}\sigma\left(\nabla u,\nabla u_t\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}u_td\Gamma\\&\quad+\left(\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right)^2\right)\end{aligned}\tag{4.3.6}$$

$$\begin{aligned}-\left(\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)ds,u_t\right)_{L^2(\Omega)}&=-\int_{\Gamma_1}u_t\int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta\left(s\right)}{\partial\nu}dsd\Gamma\\&\quad+\int_\Omega\nabla u_t\int_0^\infty g(s)\nabla\eta\left(s\right)dsdx.\end{aligned}\tag{4.3.7}$$

La substitution de$(4.3.3)-(4.3.7)$ dans$(4.3.2)$ donne

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2-l\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\eta}u_td\Gamma+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}l\left\|\nabla u\right\|_2^2\\&-\xi_1\left\|\nabla u\right\|_2^2\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}u_td\Gamma+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_1}{2}\left\|\nabla u\right\|_2^4\right)\\&-\int_{\Gamma_1}\sigma\left(\nabla u,\nabla u_t\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}u_td\Gamma+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla u\right\|_2^2\right)^2\right)\\&-\int_{\Gamma_1}u_t\int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta\left(s\right)}{\partial\nu}dsd\Gamma+\int_\Omega\nabla u_t\int_0^\infty g(s)\nabla\eta\left(s\right)dsdx\\=\;&0\end{aligned}\tag{4.3.8}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(l\|\nabla u\|_2^2\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|_2^4\right) \\
&\quad + \left(\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right) + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1}\left\{\left(-l-\xi_1\|\nabla u\|_2^2 - \sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\frac{\partial u}{\partial\nu} - \int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta(s)}{\partial\nu}ds\right\}u_t d\Gamma_1 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

On a dans la frontière Γ_1

$$
\begin{aligned}
&\left(-l-\xi_1\|\nabla u\|_2^2 - \sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\frac{\partial u}{\partial\nu} - \int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta(s)}{\partial\nu}ds \\
&= u_{tt} + h(u_t) + f(u),
\end{aligned}
$$

alors en trouve

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1}\left(u_{tt}+h(u_t)+f(u)\right)u_t d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma + \int_{\Gamma_1} f(u)u_t d\Gamma.
\end{aligned}
$$

On obtient la dérivée de la fonctionnelle de l'énergie sous la forme

$$
\begin{aligned}
E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{L^2(\Gamma)}^2 + l\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|_2^4\right] \\
&\quad + \left(\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right) + \int_\Omega \nabla u_t\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma + \int_{\Gamma_1} f(u)u_t d\Gamma \\
&= 0. \qquad (4.3.9)
\end{aligned}
$$

Nous supposons que $f(u)u \geq F(u) \geq 0$. On a

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} f(u)u_t d\Gamma &= \int_{\Gamma_1}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(2u)\,f(u)d\Gamma \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} 2uf(u)d\Gamma \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} 2F(u)d\Gamma \\
&\geq \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_1} F(u)d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{\Gamma_1}^2 + l\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|_2^4 + \int_{\Gamma_1} F(u)d\Gamma\right] \\ &+ \left(\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right) + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx \\ &+ \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

On note

$$\int_\Omega \nabla u_t \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta(t)\|_M^2 - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \qquad (4.3.10)$$

Où

$$M = \left\{\xi \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow H^1_{\Gamma_0}(\Omega) : \int_0^\infty g(s)\|\nabla\xi(s)\|^2 ds < \infty\right\}.$$

On remplace$(4.3.9)$ dans la formule $(4.3.10)$on trouve

$$\begin{aligned} E'(t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{\Gamma_1}^2 + l\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|_2^4 + \int_{\Gamma_1} F(u)d\Gamma + \|\eta(t)\|_M^2\right] \\ &+ \left(\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2\right) - \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\ &+ \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Donc pour $t \geq 0$ et comme $h(u_t)u_t \geq 0, E'(t) \leq 0,$ on trouve

$$\begin{aligned} E'(t) &\leq -\sigma\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 + \frac{1}{2}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\ &- \int_{\Gamma_1} h(u_t)u_t d\Gamma \end{aligned}$$

$$E(t) = \frac{1}{2}\left[\|u_t\|_2^2 + \|u_t\|_{\Gamma_1}^2 + l\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\xi_1}{2}\|\nabla u\|_2^4 + \int_{\Gamma_1} F(u)d\Gamma + \|\eta(t)\|_M^2\right].$$

■

Lemme 4.2 *Sous les hypothèses du théorème* (4.2) *, la fonction* $\phi(t)$ *définit par*

$$\phi(t) = \int_\Omega u_t(t)u(t)dx + \int_{\Gamma_1} u_t(t)u(t)d\Gamma + \frac{\sigma}{4}\|\nabla u\|_2^4, \qquad (4.3.11)$$

qui satisfait pour tout $t \geq 0$*,*

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\leq \|u_t(t)\|^2 + \|u_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 - (l - \delta_1(1+c))\|\nabla u\|^2 - \xi_1\|\nabla u\|^4 \\ &+C_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + C_2\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma \end{aligned} \qquad (4.3.12)$$

Preuve. La dérivée de la fonction $\phi(t)$ donnée par

$$\phi'(t) = \int_\Omega u_{tt}(t)u(t)dx + \int_{\Gamma_1} u_{tt}(t)u(t)d\Gamma + \frac{\sigma}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^4 + \int_\Omega (u_t(t))^2 dx + \int_{\Gamma_1} (u_t(t))^2 d\Gamma. \quad (4.3.13)$$

On a d'après$(4.2.10)$

$$\begin{aligned}
& \int_\Omega u_{tt}(t)u(t)dx + \int_{\Gamma_1} u_{tt}(t)u(t)d\Gamma \\
= & \int_\Omega \left[\left(l + \xi_1 \|\nabla u\|^2 + \sigma(\nabla u, \nabla u_t)\right)\Delta u(t) + \int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)\,ds\right] udx \\
& + \int_{\Gamma_1}\left[-\left(l + \xi_1 \|\nabla u\|^2 + \sigma(\nabla u, \nabla u_t)\right)\frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_0^\infty g(s)\frac{\partial \eta}{\partial \nu}(s)\,ds - h(u_t) - f(u)\right] ud\Gamma \\
= & -\left(l + \xi_1 \|\nabla u\|^2\right)\|\nabla u\|^2 - \left(\sigma(\nabla u, \nabla u_t)\right)\|\nabla u\|^2 - \int_\Omega \nabla u \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx \\
& - \int_{\Gamma_1} uh(u_t)d\Gamma - \int_{\Gamma_1} uf(u)d\Gamma. \qquad (4.3.14)
\end{aligned}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\sigma(\nabla u, \nabla u_t)\|\nabla u\|_2^2 &= \sigma\|\nabla u\|_2^2 \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx \\
&= \frac{\sigma}{2}\|\nabla u\|_2^2 \frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2 \\
&= \frac{\sigma}{4}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^4. \qquad (4.3.15)
\end{aligned}$$

D'après $(4.3.13)$ et $(4.3.14)$ on trouve $\phi'(t)$ sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \|u_t(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 - \left(l + \xi_1\|\nabla u\|^2\right)\|\nabla u\|_2^2 \\
& \quad - \int_\Omega \nabla u \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx - \int_{\Gamma_1} uh(u_t)d\Gamma - \int_{\Gamma_1} uf(u)d\Gamma. \qquad (4.3.16)
\end{aligned}$$

On utilise l'inégalité de Young et l'inégalité de Hôlder et l'inégalité de Poincaré, pour tout $\delta_1 > 0$ on trouve

$$\begin{aligned}
& -\int_\Omega \nabla u \int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx \\
\leq\ & \delta_1\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta_1}\int_\Omega\left[\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,ds\right]^2 dx \\
\leq\ & \delta_1\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta_1}\int_\Omega\left[\int_0^\infty g(s)ds\right]\left[\int_0^\infty g(s)\left|\nabla\eta(s)\right|^2 ds\right] dx \\
& \leq \delta_1\|\nabla u\|_2^2 + \frac{(\xi_0 - l)}{4\delta_1}\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|_2^2\,ds. \qquad (4.3.17)
\end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} -\int_{\Gamma_1} uh(u_t)d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_1} |uh(u_t)|\, d\Gamma \\ &\leq C_1 \|\nabla u\|_2 \left[\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_1\delta_1 \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{4\delta_1}\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma \end{aligned} \tag{4.3.18}$$

En remplaçant(4.3.16),(4.3.17) dans(4.3.15), pour tout $\delta_1 > 0$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \phi'(t) &\leq \|u_t(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 - (l - \delta_1(1+C_1))\|\nabla u\|_2^2 - \xi_1 \|\nabla u\|_2^4 \\ &\quad + \frac{(\xi_0 - l)}{4\delta_1}\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + \frac{1}{4\delta_1}\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma - \int_{\Gamma_1} uf(u)d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.3.19}$$

Maintenant on prend $\delta_1 > 0$ assez petit

$$l - \delta_1(1+C_1) > \frac{l}{2}.$$

Ainsi,$(4.3.12)$ à la suite de $(4.3.19)$ et $(4.2.10)$avec

$$C = \max\left\{\frac{1}{4\delta_1}, \frac{\xi_0 - l}{4\delta_1}\right\},$$

la preuve est terminé ■

Lemme 4.3 *On définit la fonctionnelle $\psi(t)$ comme suit*

$$\psi(t) = -\int_\Omega u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\, ds dx - \int_{\Gamma_1} u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\, ds d\Gamma.$$

Sous les hypothèses du théorème 4.2, alors pour tout $\delta_2 > 0$ la fonctionnelle $\psi(t)$ verifie,

$$\begin{aligned} \psi'(t) &\leq -\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\|u_t\|^2 - \frac{3}{4}(\xi_0 - l)\|u_t\|_{\Gamma_1}^2 + \delta_2\|\nabla u\|^2 \\ &\quad + \sigma^2 E(0)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 + K_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\ &\quad + K_2\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma \end{aligned} \tag{4.3.20}$$

Preuve. La dérivation de la fonctionnelle $\psi(t)$ par rapport à t

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \underbrace{-\int_\Omega u_{tt}(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\, ds dx - \int_{\Gamma_1} u_{tt}(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\, ds d\Gamma}_{:=I_1} \\ &\quad \underbrace{-\int_\Omega u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta_t(s)\, ds dx}_{:=I_2} \underbrace{- \int_{\Gamma_1} u_t(t)\int_0^\infty g(s)\eta_t(s)\, ds d\Gamma}_{:=I_3}. \end{aligned} \tag{4.3.21}$$

Clairement

$$\begin{aligned} I_1 &= -\int_\Omega u_{tt}(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,dsdx \\ &= \int_\Omega -\left(l+\xi_1\|\nabla u\|_2^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\Delta u(t) \\ &\quad -\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)\,ds\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)dx. \end{aligned}$$

On applique la formule de Green avec les conditions aux limites en trouve

$$\begin{aligned} &\int_\Omega -\left(l+\xi_1\|\nabla u\|_2^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\Delta u(t)\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)dx \\ =& -\int_{\Gamma_1}\left(l+\xi_1\|\nabla u\|_2^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}(t)\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)d\Gamma \\ &+\int_\Omega\left(l+\xi_1\|\nabla u\|_2^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\nabla u(t)\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,ds\right)dx \end{aligned} \tag{4.3.22}$$

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)\,ds\right)\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)dx \\ =& -\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta}{\partial\nu}(s)ds\right)\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)d\Gamma \\ &+\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,ds\right)^2dx \end{aligned} \tag{4.3.23}$$

En additionnant (4.3.22) et (4.3.23), nous obtenons

$$\begin{aligned} &-\int_\Omega u_{tt}(t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,dsdx \\ =& -\int_{\Gamma_1}\left(l+\xi_1\|\nabla u\|_2^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}(t)\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)d\Gamma \\ &+\int_\Omega\left(l+\xi_1\|\nabla u\|_2^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\nabla u(t)\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,ds\right)dx \\ &+\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,ds\right)^2dx \\ &-\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^\infty g(s)\frac{\partial\eta}{\partial\nu}(s)ds\right)\left(\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,ds\right)d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.3.24}$$

Si nous utilisons le résultat(4.3.24) on trouve

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_\Omega\left(l+\xi_1\|\nabla u\|_2^2+\sigma(\nabla u,\nabla u_t)\right)\nabla u(t)\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx \\ &\quad+\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,ds\right)^2dx+\int_{\Gamma_1}f(u)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,dsd\Gamma \\ &\quad+\int_{\Gamma_1}h(u_t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,dsd\Gamma \end{aligned} \tag{4.3.25}$$

Puisque $E(t)$ est décroissante on conclut de$(4.2.13)$ que

$$\frac{l}{2}\|\nabla u\|_2^2 \leq E(t) \leq E(0)$$

ce qui nous donne

$$\|\nabla u\|_2^2 \leq \frac{2}{l}E(0) \tag{4.3.26}$$

En appliquant l'inégalité de Hôlder et l'inégalité de Young $(4.2.9)$ et$(4.2.12)$, on conclut que pour tout $\delta_3 > 0$

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \left(l+\xi_1\|\nabla u\|_2^2\right)\nabla u(t)\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,dsdx \\
\leq\ & \left(l+\frac{2\xi_1}{l}E(0)\right)\int_\Omega |\nabla u(t)|\int_0^\infty g(s)\,|\nabla\eta(s)|\,dsdx \\
\leq\ & \delta_3\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{4\delta_3}\left(l+\frac{2\xi_1}{l}E(0)\right)^2\int_\Omega\left[\int_0^\infty g(s)\,|\nabla\eta(s)|\,ds\right]^2dx \\
\leq\ & \delta_3\|\nabla u\|_2^2+\frac{\xi_0-l}{4\delta_3}\left(l+\frac{2\xi_1}{l}E(0)\right)^2\left[\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds\right]
\end{aligned} \tag{4.3.27}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sigma(\nabla u,\nabla u_t)\nabla u(t)\int_0^\infty g(s)\Delta\eta(s)\,dsdx \\
\leq\ & \sigma^2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2E(0)+\frac{\xi_0-l}{2l}\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds
\end{aligned} \tag{4.3.28}$$

$$\int_\Omega\left(\int_0^\infty g(s)\nabla\eta(s)\,ds\right)^2dx \leq (\xi_0-l)\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds, \tag{4.3.29}$$

avec l'injection de $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$ on trouve

$$\int_{\Gamma_1} h(u_t)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,dsd\Gamma \leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma+\frac{\xi_0-l}{2}C_1\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds \tag{4.3.30}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1} f(u)\int_0^\infty g(s)\eta(s)\,dsd\Gamma \\
\leq\ & \delta_3C_1E^p(0)\,\|\nabla u\|^2+\frac{\xi_0-l}{4\delta_3}C_1\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds.
\end{aligned} \tag{4.3.31}$$

En remplaçant $(4.3.27)-(4.3.31)$ dans$(4.3.25)$, pour tout $\delta_3 > 0$ on trouve I_1 sous la forme suivante

$$\begin{aligned}
I_1 \leq\ & \left(\frac{\xi_0-l}{4\delta_3}\left(l+\frac{2b}{l}E(0)\right)^2+\frac{\xi_0-l}{2l}\right. \\
&\left.+(\xi_0-l)+\frac{\xi_0-l}{2}C_1+\frac{\xi_0-l}{4\delta_3}C_1\right)\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds \\
&+\sigma^2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2E(0)+\delta_3\|\nabla u\|_2^2+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.3.32}$$

On a

$$I_2 = -\int_\Omega u_t(t) \int_0^\infty g(s)\eta_t(s)\, dsdx.$$

Et d'après la relation $\eta_t + \eta_s = u_t$ on trouve

$$\eta_t = u_t - \eta_s \tag{4.3.33}$$

On remplace $(4.3.33)$ dans la formule de I_2 on trouve

$$\int_0^\infty g(s)\eta_t(s)\, dsdx = -\int_0^\infty g(s)\eta_s(s)\, ds + \int_0^\infty g(s)u_t(t)ds. \tag{4.3.34}$$

Maintenant on applique l'intégration par parties sur Ω on trouve

$$I_2 = -(\xi_0 - l)\|u_t\|_2^2 - \int_\Omega u_t(t) \int_0^\infty g'(s)\eta(s)\, dsdx,$$

avec l'utilisation de l'inégalité de Young et Poincaré on obtient

$$\begin{aligned} I_2 &\leq -\frac{3(\xi_0 - l)}{4}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{\xi_0 - l}\int_\Omega \left(\int_0^\infty -g'(s)ds\right)\left(\int_0^\infty -g'(s)\eta(s)\, ds\right) dx \\ &\leq -\frac{3(\xi_0 - l)}{4}\|u_t\|_2^2 - \frac{g(0)C_*^2}{\xi_0 - l}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds. \end{aligned} \tag{4.3.35}$$

De la même manière on trouve I_3 sous la forme

$$I_3 \leq -\frac{3(\xi_0 - l)}{4}\|u_t\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{g(0)C_*^2}{\xi_0 - l}\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \tag{4.3.36}$$

En substituant$(4.3.32)$ et $(4.3.35) - (4.3.36)$ dans $(4.3.21)$ devient

$$\begin{aligned} \psi'(t) \leq & -\frac{3(\xi_0 - l)}{4}\|u_t\|_2^2 - \frac{3(\xi_0 - l)}{4}\|u_t\|_{\Gamma_1}^2 \\ & +\sigma^2\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|_2^2\right)^2 E(0) + \delta_3\|\nabla u\|_2^2 \\ & +K_1\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + K_2\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\ & +\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma. \end{aligned} \tag{4.3.37}$$

Avec

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{\xi_0 - l}{4\delta_3}\left(l + \frac{2\xi_1}{l}E(0)\right)^2 + \frac{\xi_0 - l}{2l} \\ &\quad + (1 - l) + \frac{\xi_0 - l}{2}C_1 + \frac{\xi_0 - l}{4\delta_3}C_1 \\ K_2 &= \frac{2g(0)C_*^2}{\xi_0 - l}. \end{aligned}$$

Ce qui prouve le lemme ■

Maintenant on définit la fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$ par

$$\mathcal{L}(t) := E(t) + \varepsilon_1 \phi(t) + \varepsilon_2 \psi(t),$$

où ε_1 et ε_2 sont des constantes positives, sera choisi plus tard . C'est très facile de vérifier que pour $\varepsilon_1 > 0$ et $\varepsilon_2 > 0$ assez petit

$$\frac{1}{2}E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \frac{3}{2}E(t). \tag{4.3.38}$$

Lemme 4.4 *Il existe m constant positif, tel que pour tout $t \geq 0$,*

$$\mathcal{L}'(t) \leq -mE(t) + C\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + C\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma. \tag{4.3.39}$$

Preuve. Il suit de $(4.3.1)$, $(4.3.12)$ et $(4.3.20)$ pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq\; & -\left[\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right]\|u_t\|^2 - \left[\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right]\|u_t\|_{\Gamma_1}^2 \\
& - [l\varepsilon_1 + \delta_1(1+C)\varepsilon_1 - \delta_2\varepsilon_2]\|\nabla u\|^2 \\
& - \xi_1\varepsilon_1\|\nabla u\|^4 - \sigma(1 - \sigma E(0)\varepsilon_2)\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2\right)^2 \\
& + \left(\frac{1}{2} - K_2\varepsilon_2\right)\int_0^\infty g'(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\
& + \left(\left(\frac{\xi_0 - l}{4\delta_1}\right)\varepsilon_1 + K_2\varepsilon_2\right)\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \\
& + \left(\frac{1}{4\delta_1}\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma
\end{aligned} \tag{4.3.40}$$

À ce point on choisit $\delta_2 > 0$ satisfaisant

$$\delta_2 < \frac{3l}{8}(\xi_0 - l),$$

ce qui nous donne

$$\frac{2}{l}\delta_2\varepsilon_2 < \frac{3}{4}(\xi_0 - l)\varepsilon_2.$$

Pour tout $\delta_2 > 0$ fixés, on prend $\varepsilon_2 > 0$ assez petit pour que $(4.3.38)$ reste valide et en outre pour δ_2 et ε_2 sont fixé, nous choisissons $\varepsilon_1 > 0$ très petit que $(4.3.38)$ reste valide et en plus

$$\frac{2}{l}\delta_2\varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \min\left\{\frac{1}{2C}, \frac{3}{4}(\xi_0 - l)\varepsilon_2\right\},$$

ce qui nous donne

$$\frac{3}{4}(\xi_0 - l)\varepsilon_2 > 0, (\varepsilon_1 + \delta_1(1+C)\varepsilon_1 - \delta_2\varepsilon_2) > 0, \left(\frac{1}{2} - K_2\varepsilon_2\right) > 0.$$

Par conséquent, il existe un constant positif m tel que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{L}'(t) \leq -mE(t) + C\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds + C\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)d\Gamma.$$

qui complète la preuve. ■

Les mêmes arguments que dans [30], nous pouvons obtenir le lemme suivant.

Lemme 4.5 *Sous les hypothèses du théorème* 4.2,*il existe une constante positive*$\gamma > 0$ *telle que pour tout* $\varepsilon_0 > 0$

$$G'(\varepsilon_0 E(t))\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds \leq -\gamma_1 E'(t) + \gamma_1 E(t)G'(\varepsilon_0 E(t)) \tag{4.3.41}$$

Preuve. Du théorème 4.2. Nous distinguons les deux cas suivants pour prouver le théorème4.2

Cas 4.1 *La fonction linéaire* h_0,*il suivra de*$(A2)$ *que*

$$c_1|s| \leq |h(s)| \leq c_2|s|, \forall s \in \mathbb{R},$$

ce qui implique

$$h^2(s) \leq c_2 sh(s), \forall s \in \mathbb{R}^+. \tag{4.3.42}$$

On combine(4.3.1) *et*(4.3.39)*, on obtient pour tout* $t > 0$,

$$\mathcal{L}'(t) \leq -mE(t) + C\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds - CE'(t) \tag{4.3.43}$$

Soit $\epsilon(t) = \mathcal{L}(t) + CE(t)$ *en utilisant*(4.3.38)*, nous savons que* $\epsilon(t) \sim E(t)$ *alors* (4.3.43)*nous donne*

$$\epsilon'(t) \leq -mE(t) + C\int_0^\infty g(s)\|\nabla\eta(s)\|^2 ds. \tag{4.3.44}$$

On multiple (4.3.44) *par* $G'(\varepsilon_0 E(t))$ *et on utilise* (4.3.41)*, on obtient*

$$\begin{aligned} G'(\varepsilon_0 E(t))\epsilon'(t) &\leq -mG'(\varepsilon_0 E(t))E(t) - C\gamma_1 E'(t) \\ &\quad + C\gamma_1\varepsilon_0 E(t)G'(\varepsilon_0 E(t)) \\ &= -(m - C\gamma_1\varepsilon_0)E(t)G'(\varepsilon_0 E(t)) - C\gamma_1 E'(t). \end{aligned}$$

Maintenant on prend $\varepsilon_0 > 0$ *assez petit que* $m - C\gamma_1\varepsilon_0 > 0$ *, et on dénote* $\epsilon_1'(t) = G'(\varepsilon_0 E(t))\epsilon'(t) + C\gamma_1 E'(t)$ *on peut y, arrivé que pour tout* $K_1 > 0$ *tell que*

$$\epsilon_1(t) \sim E(t) \text{ et } \epsilon_1'(t) \leq -K_1 G'(\varepsilon_1\epsilon_1(t))\epsilon_1(t), \tag{4.3.45}$$

qui donne $(W_1(\epsilon_1))' \geq K_1$ *, Où*

$$W_1(\tau) = \int_\tau^1 \frac{1}{CsG'(\epsilon_1 s)}ds.$$

Pour $0 < \tau \leq 1$ *En intégrant la dernière inégalité dans*(4.3.45) *sur*$[0, t]$*, on a pour tout* $t > 0$*,*

$$\epsilon_1(t) \leq W_1^{-1}(K_1 t + K_2), \tag{4.3.46}$$

donc(4.2.13) *suivre de*(4.3.46), (4.2.12) *et* $\epsilon_1 \sim E$.

Cas 4.2 *La fonction* h_0*est non linéaire sur*$[0, \varepsilon]$.
Par les arguments comme dans [53]*, supposons que* $\max\{r, h_0(r)\} < \varepsilon$ *, d'autre part on choisit* r *petit. Soit* $\varepsilon_1 = \min\{r, h_0(r)\}$ *il suivra de* $(A2)$ *que pour* $\varepsilon_1 \leq |s| \leq \varepsilon$

$$|h(s)| \leq \frac{h_0^{-1}(|s|)}{|s|}|s| \leq \frac{h_0^{-1}(|\varepsilon|)}{|\varepsilon_1|}|s|,$$

et

$$|h(s)| \geq \frac{h_0(|s|)}{|s|}|s| \leq \frac{h_0(|\varepsilon_1|)}{|\varepsilon_1|}|s|.$$

Donc nous avons

$$\begin{cases} h_0(|s|) \leq |h(s)| \leq h_0^{-1}(|s|), for\ |s| < \varepsilon_1, \\ c_1|s| \leq |h(s)| \leq c_2|s|, for\ |s| \geq \varepsilon_1, \end{cases}. \tag{4.3.47}$$

Ce qui nous donne pour tous $|s| \leq \varepsilon_1$,

$$H\left(h^2(s)\right) = |h(s)|\, h_0(|h(s)|) \leq sh(s).$$

Alors

$$h^2(s) \leq H^{-1}(sh(s)), \forall |s| \leq \varepsilon_1. \tag{4.3.48}$$

Comme dans [54] , *On dénote*

$$\Gamma_{11} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t(t)| > \varepsilon_1\}, \Gamma_{12} = \{x \in \Gamma_1 : |u_t(t)| \leq \varepsilon_1\},$$

il suivra de(4.3.47) *que sur* Γ_{12}*,*

$$u_t h(u_t) \leq \varepsilon_1 h_0^{-1}(\varepsilon_1) \leq h_0(r)\, r = H^2(r). \tag{4.3.49}$$

On définit $J(t)$ *par*

$$J(t) = \frac{1}{|\Gamma_{12}|}\int_{\Gamma_{12}} u_t h(u_t)\, d\Gamma.$$

Puisque H^{-1} *est concave, nous déduisons de l'inégalité de Jensen que*

$$H^{-1}(J(t)) \geq C\int_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t))\, d\Gamma. \tag{4.3.50}$$

En utilisant(4.3.48) *et* (4.3.50),*on conclut que*

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} h^2(u_t)\,d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_{12}} H^{-1}(u_t h(u_t))\,d\Gamma + \int_{\Gamma_{11}} h^2(u_t)\,d\Gamma \\ &\leq CH^{-1}(J(t)) - CE'(t),\end{aligned}$$

avec (4.3.39), *donne pour tout* $t > 0$,

$$\mathbb{k}'(t) \leq -mE(t) + C\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds + CH^{-1}(J(t)).$$

Où $\mathbb{k}(t) = \mathcal{L}(t) + CE(t)$ *et* $\mathbb{k}(t) \sim E(t)$ *pour* $\varepsilon_0 \leq r^2$ *et* $C_0 > 0$ *et le fait* $E' < 0, H' > 0$ *et* $H'' > 0$ *, on obtient que la fonctionnelle* $\mathbb{k}_1(t)$ *définit par*

$$\mathbb{k}_1(t) = H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\mathbb{k}(t) + C_0E(t),$$

est équivalent à $E(t)$ *et*

$$\begin{aligned}\mathbb{k}_1'(t) &= \varepsilon_0\frac{E'(t)}{E(0)}H''\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\mathbb{k}(t) + H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\mathbb{k}'(t) + C_0E'(t) \\ &\leq -mE(t)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) + CH^{-1}(J(t))\,H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) + C_0E'(t) \\ &\quad + CH'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds. \qquad (4.3.51)\end{aligned}$$

Cas 4.3 *Maintenant, on dénote la fonction conjuguée de la fonction convexe* H *par* H^**.voir comme un exemple, Arnold* [10] *,et* [55] $(i.e)$

$$H^*(s) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}(st - H(t)).$$

Alors

$$H^*(s) = s(H')^{-1}(s) - H\left[(H')^{-1}(s)\right],$$

la transformation de Legendre de H *est satisfait*

$$AB \leq H^*(A) + H(B).$$

Pour $A = H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)$ *et* $B = H^{-1}(J(t))$ *, et on note* $H^*(s) \leq s(H')^{-1}(s)$ *et en utilisant* (4.3.51), *on verra que*

$$\begin{aligned}\mathbb{k}_1'(t) &\leq -mE(t)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) + C\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) - CE'(t) \\ &\quad + C_0E'(t) + CH'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds \\ &\leq -(mE(0) - C\varepsilon_0)\frac{E(t)}{E(0)}H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) - (C - C_0)E'(t) \\ &\quad + CH'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_0^\infty g(s)\,\|\nabla\eta(s)\|^2\,ds. \qquad (4.3.52)\end{aligned}$$

Dans(4.3.52),*nous choisissons* $\varepsilon_0 > 0$ *assez petit que* $mE(0) - C\varepsilon_0 > 0$ *et* C_0 *très grand que* $C - C_0 < 0$ *on obtient pour tout* $t > 0$,

$$\mathbb{k}_1'(t) \leq -K\frac{E(t)}{E(0)}H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) + CH'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right)\int_0^{\infty} g(s)\left\|\nabla\eta\left(s\right)\right\|^2 ds. \tag{4.3.53}$$

On multiple (4.3.53) *par* $G'\left(\varepsilon_0 E(t)\right)$ *et en utilisant* (4.3.41), *on obtient*

$$\begin{aligned} G'\left(\varepsilon_0 E(t)\right)\mathbb{k}_1'(t) &\leq -K\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\varepsilon_0 E(t)\right)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\quad -\gamma_2 E'(t)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\quad +\gamma_2\varepsilon_0 E(t)G'\left(\varepsilon_0 E(t)\right)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \\ &\leq -K\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\epsilon_0 E(t)\right)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) - CE'(t) \\ &\quad +\gamma_2\epsilon_0 E(t)G'\left(\epsilon_0 E(t)\right)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) \end{aligned} \tag{4.3.54}$$

Nous définissons la fonctionnelle $\mathbb{k}_2(t)$ *par*

$$\mathbb{k}_2(t) = G'\left(\epsilon_0 E(t)\right)\mathbb{k}_1(t) + CE(t).$$

C'est très facile de vérifier que $\mathbb{k}_2(t) \sim E(t)$ *i.e, il existe deux constantes positive* β_1*et* β_2 *telle que*

$$\beta_1\mathbb{k}_2(t) \leq E(t) \leq \beta_2\mathbb{k}_2(t). \tag{4.3.55}$$

On note le fait $E'(t) \leq 0$ *et* $G'' > 0$ *on conclut de* (4.3.54)*que*

$$\mathbb{k}_2'(t) \leq -\left(K - \gamma_2\epsilon_1\right)\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\epsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right). \tag{4.3.56}$$

Avec $\epsilon_1 = \epsilon_0 E(0)$ *et avec un bon choix de* ϵ_0,*on obtient de* (4.3.56) *que pour certaines constantes* $K_1 > 0$,

$$\mathbb{k}_2'(t) \leq -K_1\frac{E(t)}{E(0)}G'\left(\epsilon_1\frac{E(t)}{E(0)}\right)H'\left(\varepsilon_0\frac{E(t)}{E(0)}\right) = -K_1 W_2\left(\frac{E(t)}{E(0)}\right), \tag{4.3.57}$$

où $W_2\left(t\right) = tH'\left(\varepsilon_0 t\right)G'\left(\epsilon_1 t\right)$ *signifie* $R\left(t\right) = \frac{\beta_1\mathbb{k}_2(t)}{E(0)}$ *. Il découle de* (4.3.55)*que*

$$R(t) \sim E(t). \tag{4.3.58}$$

Par (4.3.57), *on obtient pour certaine* $\mathbb{k}_2(t) > 0$,

$$R'(t) \leq -K_2 W_2\left(R(t)\right). \tag{4.3.59}$$

Ce qui implique $(W_1(R(t)))' \geq K_2$, *où*

$$W_1(t) = \int_t^1 W_2(s)ds, \text{ for } t \in (0,1].$$

En intégrant (4.3.59) *sur* $[0,t]$ *nous avons pour tout* $t > 0$,

$$R(t) \leq W_1^{-1}(K_2 t + K_3). \tag{4.3.60}$$

Alors (4.2.13)*suivre de* (4.3.58) *et* (4.3.60). *La preuve est complète.*

■

Chapitre 5

Existence local de la solution d'un problème d'ondes viscoélastique non linéaire avec un terme de retard

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous considérons l'équation d'onde viscoélastique non linéaire suivante avec un terme de retard :

$$\begin{cases} u_{tt} + \Delta^2 u\,(t) - \Delta_p u - \int_0^t g(t-s)\Delta^2 u\,(s)\,ds - \mu_1 \Delta u_t(t) \\ -\mu_2 \Delta u_t(t-\tau) + f(u) = 0, \qquad\qquad x \in \Omega, t > 0, \end{cases} \tag{5.1.1}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \qquad\qquad x \in \partial\Omega, t > 0, \tag{5.1.2}$$

$$\begin{array}{ll} u\,(x,0) = u_0(x), u_t\,(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \\ u_t\,(x,t-\tau) = f_0\,(x,t-\tau)\,, & x \in \Omega, t \in (0,\tau) \end{array} \tag{5.1.3}$$

Où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ avec une frontière Lipschitzienne continue $\Gamma = \partial\Omega$, $\Delta_p u = \mathrm{div}\,(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u)$, $(p \geq 2)$est l'opérateur $p - Laplacien$.La constante μ_1 est positive et $\mu_2$est un nombre réel, $\tau > 0$représente le retard du temps, $g > 0$ est une fonction représente la mémoire kernel et f est un terme de force . En l'absence du terme viscoélastique et du terme de retard ($g = 0$ et $\mu_2 = 0$), et avec l'opérateur $p - Laplacien$ habituel, l'équation dans $(5.1.1)$ se réduit à l'équation d'onde du quatrième ordre.

$$u_{tt} + \Delta^2 u\,(t) + \mathrm{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\,\nabla u\right) - \epsilon\Delta u_t = f\,(x,t,u,u_t)\,, \tag{5.1.4}$$

qui décrit les flux de microstructures élastoplastiques. Le problème $(5.1.4)$ a été largement étudié dans les traveaux $([4, 5, 72])$ et les résultats concernant l'existence, le non-existence et le comportement à long terme des solutions ont été prouvés. Le problème $(5.1.4)$ sans termes d'amortissement ou de forçage, est lié aux modèles élastoplastiques-microstructures [5].

$$u_{tt} + u_{xxxx} = +a\left(u_x^2\right)_x + f\left(x\right),$$

où $a < 0$ est une constante. I. Lasiecka ont discuté dans [52] de

$$u_{tt} + \Delta^2 u\left(t\right) + \operatorname{div}\left(\left|\nabla u\right|^2 \nabla u\right) - ku_t = \sigma\Delta(u^2) + f\left(u\right),$$

et ont prouvé l'existence d'attracteurs globaux de dimension finie. Lorsque $\epsilon = 0$et en présence du terme viscoélastique ($g \neq 0$) dans $(5.1.4)$, Jorge Silva et Ma[45], ont établi la stabilité exponentielle des solutions sous la condition.

$$g'(t) \leq -cg(t),\ \forall t \geq 0,\ c > 0.$$

Andrade et al. [6] ont prouvé la stabilité exponentielle des solutions de l'équation des plaques avec mémoire finie et $p - Laplacien$. En présence de la dissipation de type Kelvin–Voigt ($\epsilon \neq 0$). Dans([8] , [32]), les auteurs ont amélioré les résultats de[6] en établissant l'existence locale et globale, ainsi que l'unicité de la solution faible $u(x, t)$ du problème $(5.1.1)$. Plus important encore, les auteurs de[8] et[32] ont établi l'existence locale et globale, l'unicité des solutions faibles et le comportement asymptotique des solutions. Les retards apparaissent si souvent dans de nombreux phénomènes physiques, chimiques, biologiques, thermiques et économiques que ces phénomènes dépendent non seulement de l'état actuel mais aussi de l'histoire passée du système d'une manière plus compliquée. Ces dernières années, de nombreux travaux ont été publiés concernant l'équation d'onde avec retard. Kafini et Messaoudi[46] ont considéré l'équation d'onde non linéaire avec retard suivante

$$u_{tt}(t) - div(|\nabla u(t)|^{m-2}\nabla u(t)) + \mu_1 u_t(t) + \mu_2 u_t(t-\tau) = b|u(t)|^{p-2}u(t).$$

Ils ont prouvé le résultat de l'explosion des solutions avec une énergie initiale négative et $p > m$. Récemment, Kafini [47]ont considéré l'explosion des solutions avec une énergie initiale négative pour le système d'évolution abstrait du second ordre avec retard.en 2011 Kirane et Said-Houari[50]ont étudié le problème viscoélastique non linéaire avec retard suivant

$$\left|u_t\right|^{\rho} u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} - \int_0^t g(t-s)\Delta u\left(s\right) ds + \mu_1 u_t(t) + \mu_2 u_t(t-\tau) = b|u|^{p-2}u.$$

Ils ont prouvé le résultat de l'explosion avec une énergie initiale positive et non positive en modifiant la méthode dans[47]. Motivés par les travaux précédents, nous citons quelques références connexes[41, 39]. Pour l'existence et l'unicité de la solution, nous posons quelques travaux, A.Benseghir dans[13] a étudié le caractère bien posé en utilisant la théorie des semi-groupes et la stabilité asymptotique d'un problème de transmission avec terme de retard de la forme

$$\begin{array}{ll} u_{tt}-au_{xx}\left(x,t\right)+\mu_1 u_t\left(x,t\right)+\mu_2 u_t\left(x,t-\tau\right)=0, & (x,t)\in\Omega\times(0.\infty) \\ v_{tt}-bv_{xx}=0, & (x,t)\in(L_1,L_2)\times(0.\infty) \end{array} \tag{5.1.5}$$

Dans $[7,14,21,22,32,33]$les auteurs prouvent l'existence et l'unicité de solution pour une forme différente de problème viscoélastique non linéaire avec différents types de conditions aux limites par la méthode des semi-groupes.

5.2 Formulation du problème

On considère l'équation d'onde non linéaire viscoélastique avec un terme de retard définit par $(5.1.1)-(5.1.3)$. Pour $N\in\mathbb{N}$, nous supposons que

$$2\leq p\leq\frac{2N-2}{N-2}; \text{si } N\geq 3 \text{ et } p\geq 2 \text{ si } N=1,2. \tag{5.2.1}$$

Ensuite

$$H^2(\Omega)\cap H_0^1\left(\Omega\right)\hookrightarrow W_0^{1,2(p-1)}\left(\Omega\right)\hookrightarrow H_0^1\left(\Omega\right)\hookrightarrow L^2\left(\Omega\right).$$

En utilisant les calculs directs, nous avons

$$\begin{aligned}\int_0^t g(t-s)\left(\Delta u_t\left(t\right),\Delta u\left(s\right)\right)ds &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(g\circ\Delta u\right)(t)-\left(\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\Delta u\right\|^2\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}g(t)\left\|\Delta u\right\|^2+\frac{1}{2}\left(g'\circ\Delta u\right)(t).\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Où

$$\left(g\circ\Delta u\right)(t)=\int_0^t g(t-s)\left\|\Delta u\left(s\right)-\Delta u\left(t\right)\right\|^2 ds.$$

Avec μ_1 et μ_2 sont satisfaits

$$|\mu_2|<\mu_1. \tag{5.2.3}$$

Pour la fonction de relaxation g, nous avons les hypothèses suivantes

(B_1) $g:[0,+\infty)\longrightarrow[0,+\infty)$ de classe C^1satisfaite

$$g(0)>0, 1-\gamma_1\int_0^\infty g(s)ds:=\gamma>0 \tag{5.2.4}$$

Où $\gamma_1>0$ est la plus petite constante de plongement qui satisfasse

$$\left\|\nabla u\right\|_{2,\Omega}^2\leq\gamma_1\left\|\Delta u\right\|_{2,\Omega}^2, \forall u\in H_0^2\left(\Omega\right).$$

(B_2) il existe une fonction différentiable non croissante

$$\begin{aligned} \xi &: [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty) \text{ telle que} \\ g'(t) &\leq -\xi g(t), \forall t \geq 0 \text{ et } \int_0^{+\infty} \xi(t)\, dt = +\infty. \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

et

$$0 < \eta \leq \frac{4}{n-4}; si\ n \geq 5\ et\ \eta > 0\ si\ 1 \leq n \leq 4. \tag{5.2.6}$$

(B_3) la fonction f satisfaite

$$\begin{array}{c} 0 \leq G(u) \leq uf(u); G(u) = \int_0^u f(s)ds \text{ pour tout } u \in \mathbb{R} \\ f(0) = 0; |f(u) - f(v)| \leq \gamma_2 \left(1 + |u|^\eta + |v|^\eta\right) ; \forall u, v \in \mathbb{R} \end{array}. \tag{5.2.7}$$

Où γ_2 est une constante positive.
Maintenant on introduise la nouvelle variable suivante [65]

$$z(x,\rho,t) = u_t(x, t - \tau\rho), x \in \Omega, \rho \in (0,1), t > 0. \tag{5.2.8}$$

Alors nous avons

$$\tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, x \in \Omega, \rho \in (0,1), t > 0. \tag{5.2.9}$$

En utilisant $(5.2.8)$ et $(5.2.9)$ on peut réécrire $(5.1.1) - (5.1.3)$ comme suit

$$\begin{array}{ll} u_{tt} + \Delta^2 u(t) - \Delta_p u - \int_0^t g(s)\Delta^2 u(s)\, ds - \mu_1 \Delta u_t(t) & \\ -\mu_2 \Delta z(1,t) + f(u) = 0, & sur\ \Omega \times (0,1) \times (0,\infty), \\ \tau z_t(x,\rho,t) + z_\rho(x,\rho,t) = 0, \quad sur\ (0,1) \times (0,\infty), & \end{array} \tag{5.2.10}$$

$$\begin{aligned} z(0,t) &= u_t(t), \quad sur\ (0,\infty), \\ z(\rho,0) &= f_0(x, -\tau\rho), \quad sur\ (0,1). \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Nous notons $U = (u, \phi, z)^T$ Alors on peut réécrire le problème $(5.2.10)$avec les conditions $(5.1.3)$sous la forme

$$\begin{cases} U' = AU \\ U(0) = (u_0, u_1, f_0(., -\tau))^T \end{cases}, \tag{5.2.12}$$

tel que $\phi = u_t$, et l'opérateur A défini par

$$A \begin{pmatrix} u \\ \phi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi \\ -\Delta^2 u(t) + \Delta_p u + \int_0^t g(s)\Delta^2 u(s)\, ds + \mu_1 \Delta\phi(t) + \mu_2 \Delta z(1,t) - f(u) \\ -\frac{1}{\tau} z_\rho(x,\rho,t) \end{pmatrix}. \tag{5.2.13}$$

Avec le domaine

$$D(A) = \left\{ (u, \phi, z)^T \in H, z(., 0) = \phi \text{ sur } \Omega \right\},$$

tels que

$$H = \left\{ u \in H^2(\Omega); \phi \in H_0^1(\Omega); z(., 1) \in L^2(\Omega); z, z_\rho \in L^2((0,1) \times \Omega) \right\}$$

L'espace de l'énergie est défini par

$$K = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2((0,1) \times \Omega),$$

tel que $H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert dont ses éléments sont des fonctions à valeurs dans $H^1(\Omega)$définies sur $(0, +\infty)$ cet espace est muni du produit scalaire

$$\langle \varphi, \varkappa \rangle_{L^2\left((0,+\infty) \times H_0^1(\Omega)\right)} = \int_\Omega \int_0^t g(s) \varphi_x(x,s) \varkappa_x(x,s) \, ds dx.$$

Soit $\left\{ U = (u, \phi, z)^T \text{ et } \tilde{U} = (\tilde{u}, \tilde{\phi}, \tilde{z})^T \right.$, alors pour une constante positive ζsatisfaisant

$$\tau |\mu_2| < \zeta < \tau (\mu_1 - |\mu_2|). \tag{5.2.14}$$

On définit le produit scalaire sur K comme suit

$$\begin{aligned} \left\langle U, \tilde{U} \right\rangle_K &= \int_\Omega \left\{ \phi\tilde{\phi} - u_{xx}\tilde{u}_{xx} \right\} dx + \int_\Omega \left(|\nabla u|^p |\nabla \tilde{u}|^p \right) dx \\ &\quad + \zeta \int_\Omega \int_0^1 z(x,\rho) \tilde{z}(x,\rho) \, dx d\rho + \int_\Omega \int_0^t g(s) \Delta u(s) \Delta \tilde{u}(s) ds dx. \end{aligned}$$

Le résultat d'existence et d'unicité est traité comme suit

Théorème 5.1 *Pour tout $U_0 \in K$ il existe une unique solution $U \in C([0, +\infty[, K)$ pour le problème* (5.2.12)*. De plus, si $U_0 \in D(A)$ alors $U \in C([0, +\infty[, D(A)) \cap C^1([0, +\infty[, K)$.*

Preuve. Pour prouver le résultat cité dans le Théorème 5.1, nous utilisons la théorie des semi-groupes, c'est-à-dire, nous montrons que l'opérateur A génère un C_0semi-groupe sur K. Dans cette phase, nous nous restreindrons de prouver que l'opérateur A est dissipatif. Effectivement, pour $U = (u, \phi, z)^T \in D(A)$ et une constante positive ζ, nous avons

$$\begin{aligned} \langle AU, U \rangle_K &= -\int_\Omega \Delta^2 u \phi(t) dx + \int_\Omega \Delta_p u \phi(t) dx + \int_\Omega \int_0^t g(s) \Delta^2 u(s) \phi(t) ds dx + \int_\Omega \mu_1 \Delta\phi(t)\phi(t) dx \\ &\quad + \int_\Omega \mu_2 \Delta z(x,1,t) \phi(t) \, dx - \int_\Omega f(u) \phi(t) \, dx - \frac{1}{\tau} \int_\Omega \int_0^1 z_\rho(x,\rho,t) \Delta z d\rho dx \\ &= 0. \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

En appliquant l'intégration par partie pour chaque terme de $(5.2.14)$on trouve les résultats comme suivant

$$-\int_{\Omega}\Delta^{2}u\phi(t)dx=-\int_{\Omega}\Delta u(x,t)\Delta\phi(t)dx \tag{5.2.16}$$

$$\int_{\Omega}\Delta_{p}u\phi(t)dx=-\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla\phi dx \tag{5.2.17}$$

$$\int_{\Omega}\int_{0}^{t}g(s)\Delta^{2}u\left(s\right)\phi(t)dsdx=\int_{\Omega}\int_{0}^{t}g(s)\Delta u\left(s\right)\Delta\phi(t)dsdx \tag{5.2.18}$$

$$\mu_{1}\int_{\Omega}\Delta\phi(t)\phi(t)dx=-\mu_{1}\left\|\nabla\phi\left(t\right)\right\|_{2}^{2} \tag{5.2.19}$$

$$\mu_{2}\int_{\Omega}\Delta z\left(x,1,t\right)\phi\left(t\right)dx=-\mu_{2}\int_{\Omega}\nabla z\left(x,1,t\right)\nabla\phi\left(t\right)dx \tag{5.2.20}$$

$$-\frac{1}{\tau}\int_{\Omega}\int_{0}^{1}z_{\rho}\left(x,\rho,t\right)\Delta zd\rho dx=-\frac{1}{2\tau}\left\|\nabla z\left(x,1,t\right)\right\|_{2}^{2}+\frac{1}{2\tau}\left\|\nabla\phi\left(t\right)\right\|_{2}^{2}. \tag{5.2.21}$$

En substituant $(5.2.16)-(5.2.21)$ dans $(5.2.15)$ on trouve

$$\begin{aligned}\left\langle AU,U\right\rangle_{K} &= -\int_{\Omega}\Delta u(x,t)\Delta\phi(t)dx-\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla\phi dx+\int_{\Omega}\int_{0}^{t}g(s)\Delta u\left(s\right)\Delta\phi(t)dsdx\\ &\quad -\mu_{1}\left\|\nabla\phi\left(t\right)\right\|_{2}^{2}-\mu_{2}\int_{\Omega}\nabla z\left(x,1,t\right)\nabla\phi\left(t\right)dx\\ &\quad -\frac{1}{2\tau}\left\|\nabla z\left(x,1,t\right)\right\|_{2}^{2}+\frac{1}{2\tau}\left\|\nabla\phi\left(t\right)\right\|_{2}^{2}-\int_{\Omega}f(u)\phi\left(t\right)dx\\ &= 0.\end{aligned} \tag{5.2.22}$$

On applique l'inégalité de young sur la formule $(5.2.20)$

$$-\mu_{2}\int_{\Omega}\nabla z\left(x,1,t\right)\nabla\phi\left(t\right)dx\leq-\frac{|\mu_{2}|}{2}\left\|\nabla z\left(x,1,t\right)\right\|_{2}^{2}-\frac{|\mu_{2}|}{2}\left\|\nabla\phi\left(t\right)\right\|_{2}^{2}, \tag{5.2.23}$$

et comme

$$u_{t}\left(x,t\right)=\phi\left(t\right)$$

Maintenant en utilisant $(5.2.2)$ pour $(5.2.18)$ on obtient le résultat suivant

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}\int_{0}^{t}g(s)\Delta u\left(s\right)\Delta\phi(t)dsdx &= \frac{1}{2}\left(g'\circ\Delta u\right)(t)-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(g\circ\Delta u\right)(t)-\left(\int_{0}^{t}g(s)ds\right)\left\|\Delta u\right\|_{2}^{2}\right\}\\ &\quad -\frac{1}{2}g(t)\left\|\Delta u\right\|_{2}^{2}\end{aligned} \tag{5.2.24}$$

Si on remplace les résultats obtenue dans(5.2.23) et (5.2.24) dans(5.2.22) on trouve

$$\begin{aligned}
\langle AU,U\rangle_K \leq & -\int_\Omega \Delta u(x,t)\Delta\phi(t)dx - \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla\phi dx + \frac{1}{2}\left(g'\circ\Delta u\right)(t) \\
& -\left(\mu_1 + \frac{|\mu_2|}{2} + \frac{1}{2\tau}\right)\|\nabla\phi(t)\|_2^2 - \left(\frac{|\mu_2|}{2} + \frac{1}{2\tau}\right)\|\nabla z(x,1,t)\|_2^2 \\
& -\int_\Omega f(u)\phi(t)\,dx - \frac{1}{2}g(t)\|\Delta u\|_2^2 \\
& -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\Delta u)(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u\|_2^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle AU,U\rangle_K \leq & -\int_\Omega \Delta u(x,t)\Delta\phi(t)dx - \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)\nabla\phi dx - \int_\Omega f(u)\phi(t)\,dx \\
& -\frac{1}{2}g(t)\|\Delta u\|_2^2 - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(g\circ\Delta u)(t) - \left(\frac{\zeta+1}{2\tau}\right)\|\nabla z(x,1,t)\|_2^2 \\
& +\frac{1}{2}\left(g'\circ\Delta u\right)(t) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u\|_2^2 \\
& -\left(\mu_1 + \frac{\zeta-1}{2\tau}\right)\|\nabla\phi(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Alors, en gardant à l'esprit le fait que

$$g'(t) \leq -\xi g(t).$$

Donc on obtient

$$\langle AU,U\rangle_K \leq 0$$

L'opérateur$A$ est dissipatif.Maintenant on montre que l'opérateur A est surjectif.
Soient $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in H$ nous montrons qu'il existe $V = (u,\phi,z)^T \in D(A)$ tels que

$$(\lambda I - A)V = F, \tag{5.2.25}$$

qui est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{c}
\lambda u - \phi = f_1 \\
\lambda\phi - \left(-\Delta^2 u(t) + \Delta_p u + \int_0^t g(s)\Delta^2 u(s)\,ds\right. \\
\left.+\mu_1\Delta\phi(t) + \mu_2\Delta z(1,t) - f(u)\right) = f_2 \\
\lambda z + \frac{1}{\tau}z_\rho(x,\rho,t) = f_3
\end{array}\right. . \tag{5.2.26}$$

On a

$$\phi = \lambda u - f_1, \tag{5.2.27}$$

il est clair que $\phi \in H_0^1(\Omega)$ .En outre, en utilisant la troisième équation de(5.2.26) nous trouvons z telles que

$$z(x,0) = \phi, \text{ pour } x \in \Omega. \tag{5.2.28}$$

Utilisons la même approche comme dans Nicaise et Pignotti [69], en utilisant la troisième équation de (5.2.26) on trouve

$$z(x,1,t)=\phi(x)e^{-\lambda\tau}+\tau e^{-\lambda\tau}\int_0^1 e^{\lambda\tau\sigma}f_3(x,\sigma)\,d\sigma.$$

De (5.2.27) on obtient

$$\begin{aligned} z(x,1,t) &= \lambda u(x)e^{-\lambda\tau}-f_1(x)e^{-\lambda\tau}+ \\ &\quad \tau e^{-\lambda\tau}\int_0^1 e^{\lambda\tau\sigma}f_3(x,\sigma)\,d\sigma \\ &= \lambda u(x)e^{-\lambda\tau}+z_0(x). \end{aligned} \tag{5.2.29}$$

Où

$$z_0(x)=\tau e^{-\lambda\tau}\int_0^1 e^{\lambda\tau\sigma}f_3(x,\sigma)\,d\sigma-f_1(x)e^{-\lambda\tau}. \tag{5.2.30}$$

Donc on trouve la deuxième équation de (5.2.26) sous la forme

$$\begin{array}{c} \lambda u(x)-\left(-\Delta^2u(x)+\Delta_pu+\int_0^t g(s)\Delta^2u(s)\,ds\right. \\ \left.-\lambda f_1+\mu_1\Delta z(.,0)+\mu_2\Delta z(1,t)-f(u)\right)=f_2. \end{array} \tag{5.2.31}$$

tels que

$$\begin{aligned} z(.,0) &= \lambda u(x) \\ z(1,t) &= \lambda u(x)e^{-\lambda\tau}+z_0(x), \end{aligned}$$

alors le système (5.2.26)devient le problème suivant

$$\begin{array}{c} \lambda u(x)+\Delta^2u(x)-\Delta_pu-\int_0^t g(s)\Delta^2u(s)\,ds \\ -\lambda\mu_1\Delta u(x)-\lambda e^{-\lambda\tau}\mu_2\Delta u(x)+f(u)=f_2+\lambda f_1+\mu_2\Delta z_0. \end{array} \tag{5.2.32}$$

Nous devons maintenant prouver que (5.2.32) admet une solution $u\in H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$ et en la remplaçant dans(5.2.27) , (5.2.28) avec(5.2.30) pour obtenir $V=(u,\phi,z)^T\in D(A)$, Pour résoudre le problème (5.2.26) nous considérons

$$\Phi(u,v)=\Psi(v),\forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{5.2.33}$$

telle que la forme bilinéaire $\Phi:(H_0^1(\Omega))^2\longrightarrow\mathbb{R}$ défini comme suit

$$\Phi(u,v)=\int_\Omega\left(\begin{array}{c}\lambda u(x)+\Delta^2u(x)-\Delta_pu(x)-\int_0^t g(s)\Delta^2u(s)\,ds \\ -\lambda\mu_1\Delta u(x)-\lambda e^{-\lambda\tau}\mu_2\Delta u(x)+f(u)\end{array}\right)vdx,\forall v\in H_0^1(\Omega).$$

Et la forme linéaire $\Psi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$ défini par

$$\Psi(v) = \int_\Omega (f_2 + \mu_2 \Delta z_0 + \lambda f_1)\, v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Il est clair que Φest continu et coercive, et Ψest continue.Alors en appliquant le Théorème de Lax-Migram $théorème 1.12$on déduit que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ le problème(5.2.33)admet une solution unique $u \in H_0^1(\Omega)$ .En appliquant la régularité elliptique classique, il s'ensuit de(5.2.32) que $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ .Donc l'opérateur $\lambda I - A$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$. Alors le résultat cité dans le $théorème$ 5.1 est vérifié d'après le Théorème de Hill-Yosida. ■

Chapitre 6

Décroissance générale de l'energie d'un problème d'ondes viscoélastique non linéaire avec un terme de retard

Ce chapitre est une suite de l'étude dans le chapitre cinq, on va prouver la Comportement asymptotique de la solution du problème $(5.1.1)-(5.1.3)$. L'outil principal utilisé repose sur les techniques de Liu, Li et Hong dans $[59]$.

6.1 Comportement asymptotique de la solution

Lemme 6.1 *Soit* (u, ϕ, z) *la solution du problème* $((5.1.1)-(5.1.3))$. *Supposons que*$(5.2.3)$ *est vérifiée. Alors nous avons*

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{p}\|\nabla u\|^p \\ &+\frac{1}{2}\int_\Omega G(u)\,dx + \frac{\zeta}{2}\int_0^1 \|\nabla z(x,\rho,t)\|^2\,d\rho \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Démonstration. Multiplions la première équation du système$(5.2.10)$ par u_t, la deuxième équation du système $(5.2.10)$ par $-\zeta\Delta z(x,\rho,t)$, on trouve

$$\begin{aligned} & (u_{tt}, u_t)_{L^2(\Omega)} + \left(\Delta^2 u, u_t\right)_{L^2(\Omega)} \\ & - (\Delta_p u, u_t)_{L^2(\Omega)} - \mu_1 (\Delta u_t, u_t)_{L^2(\Omega)} \\ & - \left(\int_0^t g(t-s)\,\Delta^2 u(s)\,ds, u_t\right)_{L^2(\Omega)} \\ & -\mu_2 (\Delta z(1,t), u_t)_{L^2(\Omega)} + (f, u_t)_{L^2(\Omega)} \\ = {} & 0. \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

Et

$$\tau\left(z_t,\ -\zeta\Delta z\right)_{L^2(\Omega\times(0,1))}+\left(z_\rho,\ -\zeta\Delta z\right)_{L^2(\Omega\times(0,1))}=0 \tag{6.1.3}$$

Utilisation des conditions $(5.1.2)$, et des intégrations par partie successive sur Ω, on obtient

$$\left(u_{tt},\, u_t\right)_{L^2(\Omega)}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|u_t\right\|_2^2 \tag{6.1.4}$$

$$\left(\Delta^2 u,\, u_t\right)_{L^2(\Omega)}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\Delta u\right\|_2^2 \tag{6.1.5}$$

$$-\left(\Delta_p u,\, u_t\right)_{L^2(\Omega)}=-\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\left\|\Delta u\right\|^p \tag{6.1.6}$$

$$-\mu_1\left(\Delta u_t,\, u_t\right)_{L^2(\Omega)}=-\mu_1\left\|\nabla u_t\right\|_2^2 \tag{6.1.7}$$

$$-\mu_2\left(\Delta z\left(1,t\right),\, u_t\right)_{L^2(\Omega)}=-\mu_2\int_\Omega \nabla u_t\nabla z\left(1,t\right)dx. \tag{6.1.8}$$

En utilisant $(5.2.7)$ on obtient

$$\left(f,\, u_t\right)_{L^2(\Omega)}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega G(u)dx \tag{6.1.9}$$

En utilisant $(5.2.2)$ on obtient

$$\begin{aligned} &-\left(\int_0^t g\left(t-s\right)\Delta^2 u\left(s\right)ds,\, u_t\right)_{L^2(\Omega)}\\ =\ &-\frac{1}{2}\left(g'\circ\Delta u\right)(t)+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\left\|\Delta u\right\|_2^2\\ &-\frac{1}{2}g(t)\left\|\Delta u\right\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(g\circ\Delta u\right)(t). \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

D'autre part en utilisant les conditions $(5.2.11)$, et des intégrations par partie successive sur $\Omega\times(0,1)$, on obtient

$$\begin{aligned} \tau\left(z_t,\ -\zeta\Delta z\right)_{L^2(\Omega\times(0,1))} &= \zeta\int_\Omega\int_0^1 \nabla z_t\left(x,\rho,t\right)\nabla z\left(x,\rho,t\right)dxd\rho\\ &= \frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\left\|\nabla z\left(x,\rho,t\right)\right\|^2 d\rho. \end{aligned} \tag{6.1.11}$$

$$\left(z_\rho,\ -\zeta\Delta z\right)_{L^2(\Omega\times(0,1))}=\frac{\zeta}{2\tau}\int_\Omega\left|\nabla z\left(x,1,t\right)\right|^2 dx-\frac{\zeta}{2\tau}\left\|\nabla u_t\right\|_2^2. \tag{6.1.12}$$

La substitution de $(6.1.4)-(6.1.10)$ et $(6.1.11)-(6.1.12)$ dans $(6.1.2)$ et $(6.1.3)$ respectivement, donne

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2-\frac{1}{p}\|\Delta u\|^p\right.\\
&+\frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u\|_2^2+\frac{\zeta}{2}\int_0^1\|\nabla z(x,\rho,t)\|^2 d\rho\\
&\left.+\frac{1}{2}(g\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}\int_\Omega G(u)dx\right\}\\
=\;&\mu_1\|\nabla u_t\|_2^2+\mu_2\int_\Omega \nabla u_t\nabla z(1,t)\,dx\\
&-\frac{\zeta}{2\tau}\int_\Omega|\nabla z(x,1,t)|^2dx+\frac{\zeta}{2\tau}\|\nabla u_t\|_2^2\\
&+\frac{1}{2}(g'\circ\Delta u)(t)+\frac{1}{2}g(t)\|\Delta u\|^2. \qquad (6.1.13)
\end{aligned}$$

Donc, nous montrons que $(6.1.1)$ est vérifiée. La demonstration est complété.
En suite, nous formulons le théorème suivant

Théorème 6.1 *Supposons que* $(B_1)-(B_3)$ *et* $(5.1.3)$ *sont vérifiés, si les données initiales* $U_0\in H$, *alors l'énergie* $E(t)$ *du problème* $(5.2.13)$ *satisfait pour deux constantes* $C,k>0$ *l'estimation générale*

$$E(t)\leq CE(0)\,e^{-k\int_0^t\xi(s)ds}, t\geq 0.$$

Pour prouver la propriété de la décroissance des solutions faibles u *du problème*$(5.2.13)$*, nous définissons, comme dans* [6] *et* [55]*, l'énergie modifiée*

$$\begin{aligned}
F(t)\;=\;&\frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{p}\|\nabla u\|^p\\
&+\frac{1}{2}\int_\Omega G(u)\,dx+\frac{\zeta}{2}\int_0^1\|\nabla z(x,\rho,t)\|^2 d\rho\\
&-\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\,\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\Delta u)(t).
\end{aligned}$$

Où

$$(g\circ\Delta u)(t)=\int_0^t g(t-s)\|\Delta u(s)-\Delta u(t)\|^2 ds$$

En utilisant $(5.2.7)$ *et*$(5.2.10)$ *on obtient*

$$\begin{aligned}
F(t)\;&=\;E(t)-\frac{1}{2}\int_0^t g(s)ds\,\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{2}(g\circ\Delta u)(t)\\
&\geq\;\gamma E(t).
\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$E(t) \leq \frac{1}{\gamma} F(t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

En outre, F est décroissante puisque

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{2}(g' \circ \Delta u)(t) - \frac{1}{2} g(t) \|\Delta u\|_2^2 - \mu_1 \|\nabla u_t\|_2^2 \\ &\quad - \mu_2 \int_\Omega \nabla u_t \nabla z(1,t)\, dx - \frac{\xi}{2\tau} \int_\Omega (\nabla z(x,1,t))^2\, dx \\ &\quad + \frac{\xi}{2\tau} \|\nabla u_t\|_2^2 . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} F'(t) &\leq -\frac{\gamma_1}{2}(g \circ \Delta u)(t) - \left(\mu_1 + \frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2\tau}\right) \|\nabla u_t\|_2^2 \\ &\quad - \left(\frac{|\mu_2|}{2} + \frac{\xi}{2\tau}\right) \|\nabla z(x,1,t)\|_2^2 \\ &\leq 0. \end{aligned} \tag{6.1.14}$$

On observe que la décroissance uniforme de $E(t)$ est une conséquence de la décroissance de $F(t)$. Nous définissons également l'énergie perturbée par

$$F_\varepsilon(t) = F(t) + \varepsilon \Psi(t); \forall \varepsilon > 0. \tag{6.1.15}$$

Où

$$\Psi(t) = \int_\Omega u_t u dx.$$

Lemme 6.2 *Il existe* $C_1 > 0$

$$|F_\varepsilon(t) - F(t)| \leq \varepsilon C_1 F(t), \forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0.$$

Preuve. Si en utilisant l'inégalité de Young , on déduit

$$\begin{aligned} |\Psi(t)| &\leq \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{\gamma_1 C_\Omega^2}{2} \|\Delta u\|_2^2 \\ &\leq \max\left(1, \gamma_1 C_\Omega^2\right) \left[\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2\right] \\ &\leq \max\left(1, \gamma_1 C_\Omega^2\right) E(t) \leq \frac{1}{\gamma} \max\left(1, \gamma_1 C_\Omega^2\right) F(t) \\ &\leq C_1 F(t), \end{aligned}$$

donc on trouve

$$|F_\varepsilon(t) - F(t)| \leq \varepsilon C_1 F(t).$$

Où

$$C_1 = \frac{1}{\gamma} \max\left(1, \gamma_1 C_\Omega^2\right).$$

■

Lemme 6.3 *Il existe des constantes* $C_2, C_3, C_4, C_5 > 0$ *telles que*

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\leq -F(t) + C_2 \|\nabla u_t\|_2^2 + C_3 (g \circ \Delta u)(t) \\ &\quad + C_4 \int_0^1 \|\nabla z(x, \rho, t)\|_2^2 \, d\rho + C_5 \|\nabla z(x, 1, t)\|_2^2. \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

Preuve. En utilisant le problème (5.2.13) on trouve

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= \|u_t\|_2^2 - \|\Delta u\|_2^2 - \|\nabla u\|^p \\ &\quad + \int_0^t g(t-s)\left(\Delta u(s), \Delta u(t)\right) ds - \mu_1 \int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx \\ &\quad - \mu_2 \int_\Omega \nabla z(x, 1, t) \nabla u dx - \int_\Omega f(u) u dx. \end{aligned}$$

En utilisant (5.2.8), en ajoutant et en soustrayant $F(t)$, on obtient

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= -F(t) + \frac{3}{2}\|u_t\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\Delta u\|_2^2 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)\|\nabla u\|^p \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\int_0^t g(s) ds\right)\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2}(g \circ \Delta u)(t) \\ &\quad + \frac{\xi}{2}\int_0^1 \|\nabla z(x, \rho, t)\|^2 d\rho + \sum_{i=1}^3 l_i. \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

Avec

$$\begin{aligned} l_1 &= \int_\Omega \left(\frac{1}{2} G(u) - f(u) u\right) dx \\ l_2 &= \int_0^t g(t-s)\left(\Delta u(s), \Delta u(t)\right) ds \\ l_3 &= -\mu_1 \int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx - \mu_2 \int_0^1 \nabla z(x, 1, t) \nabla u dx. \end{aligned}$$

En rappelant (5.2.10), nous avons $l_1 \leq 0$. Ensuite, nous estimons l_2 et l_3 de la manière suivante

$$\begin{aligned} |l_2| &\leq \left| \int_0^t g(t-s) \Delta u(t) \left(\Delta u(s), \Delta u(t)\right) ds \right| \\ &\quad + \int_0^t g(t-s) \left(\Delta u(t)\right)^2 ds \\ &\leq \left(\int_0^t g(s) ds\right) \|\Delta u\|^2 + \left| \int_0^t g(t-s) \Delta u(t) \left(\Delta u(s), \Delta u(t)\right) ds \right|, \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

on applique Young sur $(6.1.18)$ on obtient

$$\begin{aligned} |l_2| &\leq \left(\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u\|_2^2+\eta\|\Delta u\|_2^2\right.\\ &\left.+\frac{1}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-s)\|\Delta u(s),\Delta u(t)\|\,ds\right)^2\right)\\ &\leq \left(\left(\int_0^t g(s)ds\right)\|\Delta u\|_2^2+\eta\|\Delta u\|_2^2\right.\\ &\left.+\frac{1}{4\eta}\left(\int_0^t g(t-s)\right)\left(\int_0^t g(t-s)\|\Delta u(s),\Delta u(t)\|^2 ds\right)\right.\\ &\left(\left(\int_0^t g(s)ds\right)+\eta\right)\|\Delta u\|_2^2+\frac{1}{4\eta}\left(\|g\|_{L^1}(g\circ\Delta u)(t)\right)\Bigg) \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

Et

$$\begin{aligned} |l_3| &\leq \frac{\mu_1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2+\frac{|\mu_2|}{4\eta}\|\nabla z(x,1,t)\|_2^2\\ &+\left(\frac{\mu_1\gamma_1}{2}+\eta\gamma_1|\mu_2|\right)\|\Delta u\|_2^2 \end{aligned} \tag{6.1.20}$$

Où η est une constante positive à fixer.On remplace les derniers résultats $(6.1.19)-(6.1.20)$ dans $(6.1.17)$ on trouve

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &\leq -F(t)+C_2\|\nabla u_t\|_2^2+C_3(g\circ\Delta u)(t)\\ &+C_4\int_0^1\|\nabla z(x,\rho,t)\|^2 d\rho+C_5\|\nabla z(x,1,t)\|_2^2. \end{aligned}$$

Où

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{3}{2}\gamma_2+\frac{\mu_1}{2}>0\\ C_3 &= \frac{1}{2}+\frac{1}{4\eta}\|g\|_{L^1}>0\\ C_4 &= \frac{\xi}{2}>0\\ C_5 &= \frac{|\mu_2|}{4\eta}>0. \end{aligned}$$

Donc le lemme est prouvé ■

Preuve. **Du théorème 6.1**, en utilisant $(6.1.14)-(6.1.16)$ on obtient

$$\begin{aligned} F_\varepsilon'(t) &\leq -\varepsilon F(t)+\left(\varepsilon C_3-\frac{\gamma_1}{2}\right)(g\circ\Delta u)(t)\\ &+\left(\varepsilon C_2-\left(\mu_1+\frac{|\mu_2|}{2}-\frac{\xi}{2\tau}\right)\right)\|\nabla u_t\|_2^2\\ &+\left(\varepsilon C_5-\left(\frac{|\mu_2|}{2}+\frac{\xi}{2\tau}\right)\right)\|\nabla z(x,1,t)\|_2^2\\ &+\varepsilon C_4\int_0^1\|\nabla z(x,\rho,t)\|^2 d\rho. \end{aligned}$$

On choisit alors ε assez petit pour que

$$\frac{1}{2}F(t) \leq F_{\varepsilon}(t) \leq \frac{3}{2}F(t), t \geq 0. \tag{6.1.21}$$

Maintenant pour $\eta > 0$ est assez petit que ε pour vérifier

$$(\varepsilon - 2\eta) > 0, \tag{6.1.22}$$

et aussi on prend $\tau > 0$ assez grand on trouve

$$\frac{|\mu_2| (\varepsilon - 2\eta)}{4\eta} > \frac{\xi}{2\tau}. \tag{6.1.23}$$

À partir de $(6.1.22)$, $(6.1.23)$ on obtient

$$\varepsilon C_5 - \left(\frac{|\mu_2|}{2} + \frac{\xi}{2\tau}\right) > 0.$$

Si en utilisant $(5.2.6)$ et on choisit γ_2 assez grand on trouve

$$\varepsilon C_2 - \left(\mu_1 + \frac{|\mu_2|}{2} - \frac{\xi}{2\tau}\right) > 0. \tag{6.1.24}$$

Ainsi, nous arrivons à la seconde inégalité dans $(6.1.21)$ et le *lemme* 6.2 implique que

$$\begin{aligned} F_{\varepsilon}'(t) &\leq -\varepsilon F(t) + \left(\varepsilon C_3 - \frac{\gamma_1}{2}\right)(g \circ \Delta u)(t) \\ &\leq -\frac{2}{3}\varepsilon F_{\varepsilon}(t) + \left(\varepsilon C_3 - \frac{\gamma_1}{2}\right)(g \circ \Delta u)(t). \end{aligned} \tag{6.1.25}$$

On multiple $(6.1.25)$ par la fonction $\xi(t)$ on trouve

$$\xi(t) F_{\varepsilon}'(t) \leq -\frac{2}{3}\xi(t)\varepsilon F_{\varepsilon}(t) + \left(\varepsilon C_3 - \frac{\gamma_1}{2}\right)\xi(t)(g \circ \Delta u)(t).$$

Maintenant en utilisant$(5.2.8)$ et $(6.1.21)$ on obtient

$$\begin{aligned} \xi(t) F_{\varepsilon}'(t) &\leq -\frac{2}{3}\xi(t)\varepsilon F_{\varepsilon}(t) - \left(\varepsilon C_3 - \frac{\gamma_1}{2}\right)(g' \circ \Delta u)(t) \\ &\leq -\frac{2}{3}\xi(t)\varepsilon F_{\varepsilon}(t) - 2\left(\varepsilon C_3 - \frac{\gamma_1}{2}\right)F'(t). \end{aligned}$$

On définit maintenant

$$L(t) = \xi(t) F_{\varepsilon}(t) + 2\left(\varepsilon C_3 - \frac{\gamma_1}{2}\right)F(t).$$

Si on applique la dérivation sur $L(t)$et en utilisant $(6.1.25)$ on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) &= \xi(t) F_{\varepsilon}'(t) + \xi'(t) F_{\varepsilon}(t) + 2\left(\varepsilon C_3 - \frac{\gamma_1}{2}\right)F'(t) \\ &\leq -\frac{2}{3}\xi(t)\varepsilon F_{\varepsilon}(t) \\ &\leq -k\xi(t) L(t), k > 0. \end{aligned}$$

Par l'intégration simple

$$L(t) \leq L(0)\, e^{-k\int_0^t \xi(s)ds}, \forall t \geq 0.$$

Ce qui prouve le théorème. ■

6.2 Conclusion et perspectives

Dans cette partie de la thèse, nous avons étudié l'existence de solutions et la stabilitée de certains problèmes aux limites générés par des EDP non linéaires du second ordre : problème de membrane élastique et équation des ondes viscoélastique avec un terme de retard, avec différents types des conditions aux limites : dynamique, Dirichlet, Newman. Pour l'équation de membrane élastique, sous certaines hypothèses appropriées sur la fonction de relaxation, la décroissance générale de l'énergie a été établie. De plus, pour le cas de l'équation d'ondes viscoélastique non linéaire, sous des conditions appropriées sur g et $f(u)$, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de la solution par la méthode des semi-groupes. Ensuite, nous avons montré que la solution de ce problème se décroît vers le zéro.

Nous comptons, dans le futur chercher à améliorer ces résultats, en raffinant nos hypothèses et nos données initiales. Dans ce contexte nous pouvons suggestionner quelques idées comme suivant

- Nous appliquerons quelque méthode numérique (les éléments finis) pour trouver la solution approchée et la simulation numérique de ce type des problèmes qui contient des termes d'amortissement un peu compliqués.
- Pour le problème de la membrane élastique, nous verrons si nous pouvons vérifier l'explosion de la solution en temps fini avec ce type de terme mémoire en présence d'un terme source.
- Pour le problème étudié dans les deux derniers chapitres, nous verrons l'explosion de la solution en temps fini avec un opérateur laplacien de type $\vec{p}(x,t)$.

Bibliographie

[1] M.Aassila, Nonlinear Boundary Stabilization of an Inhomogeneous and Anisotropic Thermoelasticity System. Applied Math. Letters(2000),13, 71–76.

[2] R.A. Adams, Sobolev space.Academic Press, London(1975).

[3] M.S. Alves, P. Gamboa, G.C. Gorain, A. Rambaud, and O. Vera, "Asymptotic behavior of aflexible structure with Cattaneo type ofthermal effect," Indagationes Mathematicae, vol. 27, no. 3, pp. 821–834, 2016.

[4] L.J. An, A. Peirce, The effect of microstructure on elastic-plastic models, SIAM J. Appl. Math. 54(1994) 708-730.

[5] L.J. An, A. Peirce, A weakly nonlinear analysis of elastoplastic-microstructure models, SIAM J. Appl. Math. 55 (1995), 136-155.

[6] D. Andrade, M.A. Jorge Silva, T.F. Ma, Exponential stability for a plate equation with p-Laplacian and memory terms, Math. Methods Appl. Sci. 35 (2012)417–426.

[7] S. Antontsev and J. Ferreira, Existence, uniqueness and blow up for hyperbolic equations with nonstandard growth conditions, Nonlinear Analysis Series A : Theory, Methods, Applications, 93 (2013), pp. 62-77.

[8] S. Antontsev, J. Ferreira, On a Viscoleastic plate equation with strong damping and perturbation of ∼p(x,t) Laplacian existence, and uniqueness, Differential Integral Equations (2013) submitted for publication.

[9] TA.Apalara ,SA Messaoudi, An exponential stability result of a Timoshenko system with thermoelasticity with second sound and in the presence of delay. Appl Math Optim.(2015) ;71(3) :449–472.

[10] V.I.Arnold, Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer,NewYork(1989).

[11] R. W. Bass and D. Zes, Spillover, nonlinearity and flexible structures, in The Fourth NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems, NASA Conference Publication 10065 (ed. L.W.Taylor), 1991, 1-14.

[12] A. Benaissa, M. Ferhat, Stability results for viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions.arXiv :1801.02988v1.

[13] A. Benseghir, Existence and Exponential Decay of Solutions For Transmission Problems with delay. Electronic J. Diff. Equ. Vol. 2014(2014), No. 212, pp.1-11.

[14] S.Berrimi, S.A. Messaoudi, Existence and decay of solution of a viscoelastic equation with a nonlinear viscoelastic source. Nonl. Anal. 64 :2314-2331, 2006.

[15] I. Bialynicki-Birula ,J. Mycielski, Wave equations with logarithmic nonlinearities. Bull Acad Polon Sci Sér Sci Math Astron Phys.1975 ;23 :461–466.

[16] S. Boulaaras, A. Zarai and A. Draifia, Galerkien method for nonlocal mixed boundary value problem for the Moore-Gibson-Thompson equation with integral condition, Mathematical Methods in the Applied Sciences, https//doi.org/10.1002/mma.5540.

[17] S. Boulaaras, A well-posedness and exponential decay of solutions for a coupled Lamé system with viscoelastic term and logarithmic source terms, Applicable Analysis (2019) DOI : 10.1080/00036811.2019.1648793.

[18] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations. New York : Springer ;2010.

[19] M.M. Cavalcanti,V.N. Domingos Cavalcanti, J.S. Prates Filho, J.A. Soriano : Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. Differ. Integr. Equ. 14, 85–116 (2001).

[20] M.M. Cavalcanti, V.N. Domengos Cavalcanti, J. Ferreira, existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping. Math. Meth. Appl.Sci. 24 :1043-1053,2001.

[21] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J.A. Soriano, Exponentian decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping. Electron. J. Differ. Equ. 44, 1–14 (2002).

[22] M.M. Cavalcanti, H. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation. SIAM J. Control Optim. 42(4), 1310–1324 (2003).

[23] M.M. Cavalcanti, V.N. Domengos Cavalcanti, P. Martinez, Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and sourceterm. J. Differ.Equ. 203(1) :119-158, 2004.

[24] M.M. Cavalcanti,V.N. Domingos Cavalcanti, P. Martinez, General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems. Nonlinear Anal. TMA 68,177–193 (2008).

[25] C.M. Dafermos, L. Hsiao, Development of Singularities in Solutions of the Equations of Nonlinear Thermoelasticity. Q. Appl. Math.1986,44, 463–474.

[26] C.M.Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity. Arch. Ration. Mech.Anal. 37, 297–308 (1970).

[27] G.G. Doronin, N.A. Larkin, Global solvability for the quasilinear damped wave equation with nonlinear second-order boundary conditions. Nonlinear Anal. TMA 8, 1119–1134 (2002).

[28] E. H. Dowell, Aeroelasticity of plates and shells, Groninger, NL, Noordhoff Int. Publishing Co. (1975).

[29] M. Fabrizio, S. Polidoro, Asymptotic decay for some differential systems with fading memory. Appl. Anal. 81(6), 1245–1264 (2002).

[30] Feng, Baowei, General decay rates for a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions and past history. Mediterr. J. Math. 15 (2018), no. 3, Art. 103, 17 pp.

[31] M. Ferhat, A. Hakem,On convexity for energy decay rates of aviscoelastic wave equation with adynamic boundary and nonlinear delay term.FactaUniv.Ser.Math.Inform.30,67-87(2015).

[32] Ferreira, J. ; Messaoudi, S. A. On the general decay of a nonlinear viscoelastic plate equation with a strong damping and ~p(x ; t)-Laplacian. Nonlinear Anal. 104(2014), 40-49.

[33] Gang Li, Danhua wang, Biqing Zhu. Well-posedness and decay of solutions for a transmission problem with history and delay. Electronoc Journal of Differential Equations Vol. 2016 (2016), No. 23, pp. 1-21.

[34] Gang Li, Yue Luan, Jiangyong Yu and Feida Jiang, Well-posedness and exponential stability of a flexible structure with second sound and time delay, Applicable Analysis, Doi : 10.1080/00036811.2018.1478081,(2018).

[35] S. Gerbi, B. Said-Houari, Existence and exponential stability of a damped wave equation with dynamic boundary conditions and a delay term. Applied Mathematics and Computation 218 :11900–11910, 2012.

[36] S.Gerbi , B.Said-Houari, Global existence and exponential growth for a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions. Adv. Nonlinear Anal. 2, 163–193 (2013).

[37] G. C. Gorain, Exponential stabilization of longitudinal vibrations of an inhomogeneous beam.Non-linear Oscillation. 16(2013) 157-164.

[38] V, Georgiev, G. Todorova, Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping andsource terms, J. Differential Equations, 109 (1994), 295-308.

[39] P. Górka, Logarithmic quantum mechanics : existence of the ground state. Found Phys Lett.2006 ;19 :591–601.

[40] A.Guesmia, Asymototic stability of abstract dissipative systems with infinite memory. J. Math. Anal. Appl. 382, 748–760 (2011).

[41] A. Guesmia. Well-posedeness and exponential stability of an abstract evolution equation with infnite memory and time delay. IMA J. Math. Control Inform, 30 :507-526.(2013).

[42] P. Holmes, Bifurcations to divergence and flutter in flow-induced oscillations-a fnite dimensional analysis, Journal of Sound and Vibration, 53(1977), pp. 471-503.

[43] P. Holmes, J.E. Marsden, Bifurcation to divergence and flutter flow induced oscillations ; an infinite dimensional analysis, Automatica, Vol. 14 (1978).

[44] W.J. Hrusa, S.A. Messaoudi, On Formation of Singularities on OneDimensional Nonlinear Thermoelasticity. Arch. Rational mech. Anal.1990, 3, 135–151.

[45] M.A. Jorge Silva,T.F. Ma, On a viscoelastic plate equation with history setting and perturbation of p-Laplacian type. IMA J. Appl. Math. 78, 1130–1146 (2013).

[46] M. Kafini, S.A. Messaoudi, A blow-up result in a nonlinear wave equation with delay. MediterrJ Math. 2016 ;13(1) :237-247.

[47] M. Kafini , S.A. Messaoudi , S.A. Nicaise, blow-up result in a nonlinear abstract evolution system with delay. Nonlinear Differ Equ Appl.(2016) ;23(2) :13.

[48] M. Kafini, M.I. Mustafa, On the stabilization of a non-dissipative Cauchy viscoelastic problem. Mediterr. J. Math. 13, 5163–5176 (2016).

[49] M Kafini, S Messaoudi, Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay.Applicable analysis.(2018).

[50] M. Kirane, B. Said-Houari, Existence and asymptotic stability of a viscoelastic wave equation with a delay. Z. Angew. Math. Phys. 62 :1065-1082, 2011.

[51] T. Kato, Linear evolution equations of “hyperbolic” type, J. Fac.Sci. Univ. Tokyo, 17 (1970), 241–258.

[52] V. Komornik, Exact Controllability and Stabilization, the Multiplies Method.RMA, vol. 36. Masson, Paris (1994).

[53] I. Lasiecka, D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping. Differ. Integr. Equ. 6, 507–533(1993).

[54] H. A. Levine, Nonexistence of global weak solutions to some properly and improperly posed problems of mathematical physics : the method of unbounded Fourier coefficients, Math. Ann. 214(1975),205-220.

[55] H. A. Levine, The role of critical exponents in blow up theorems. Society for Industrial and Applied Mathematics .Vol. 32, No. 2, pp. 262-288, June 1990.

[56] H.A. Levine, Some nonexistence and instability theorems for solutions offormally parabolic equations of the form $Pu_t = -Au + F(u)$, Arch. Rational. Mech. Anal., 51 (1973), pp.371-386.

[57] H.A. Levine, Instability and nonexistence of global solutions of nonlinear wave equations of the form $Pu_{tt} = -Au + F(u)$, Trans. Amer. Math. Soc., 192 (1974), pp. 1-21.

[58] W.J. Liu , J.Yu, On decay and blow-up of the solution for a viscoelastic wave equation with boundary damping and source terms. Nonlinear Anal. 2011 ; 74(6) :2175-2190.

[59] W. Liu, G. Li, L. Hong, Decay of solutions for a plate equation with p-Laplacian and memory term, Electron. J. Differential Equations 129 (2012) 1–5.

[60] W.A.J. Luxemburg, "Banach function spaces", T.U. Delft (1955) (Thesis).

[61] H. Medekhel, S. Boulaaras, Existence of positive solutions for a class of Kirchhoff parabolic systems with multiple parameters Appl. Math. E-Notes, 18(2018), 295-306.

[62] S.A. Messaoudi, Blow-up of positive initial energy solutions of a nonlinear viscoelastic hyperbolic equation. J Math Anal Appl.(2006) ;320(2) :902-915.

[63] A. Merah , F. Mesloub, Elastic Membrane Equation with Dynamic Boundary Conditions and Infinite Memory, Bol. Soc. Paran. Mat ; https ://doi.org/10.5269/bspm.47621.

[64] A. Merah, F. Mesloub, S. Mahmoud Boulaaras ,and Bahri-Belkacem, A New Result for a Blow-up of Solutions to a Logarithmic Flexible Structure with Second Sound, Advances in Mathematical Physics Volume (2021), Article ID 5555930.

[65] A. Merah , F. Mesloub, Well-posedness and energy decay of nonlinear viscoelastic plate equation in the presence of delay. AJEAU. Vol.5 ; Nr. 2 (2021)

[66] S. Misra, M. Alves, G. Gorain and O. Vera, Stability of the vibrations of an inhomogeneous flexible structure with thermal effect. International Journal of Dynamics and Control. (2014).DOI 10.1007/s40435-014-0113-6.

[67] Mohammad Kafini and Salim Messaoudi, Local existence and blow up of solutions to alogarithmic nonlinear wave equation with delay,Applicable Analysis, DOI :10.1080/00036811.2018.1504029.

[68] A. Munnier, Élie Cartan, Espaces de Sobolev et introduction aux équations aux dérivées partielles,Université Henri Poincaré,(2008).

[69] S. Nicaise and C. Pignotti, Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks. SIAM J. Control Optim.,45(5) :1561–1585,(2006).

[70] S. Otmani, S. Boulaaras, A. Allahem, The maximum norm analysis of a nonmatching grids method for a class ofparabolic $p(x)$-$Laplacien$ equation, Boletim Sociedade Paranaense de Matemàtica , (2019) doi :10.5269/bspm.45218.

[71] A. Pazy, Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. New York : SpringerVerlag ;1983.

[72] R. Racke, Thermoelasticity with second sound- Exponential stability in linear and nonlinear 1d. (2001).

[73] R.T. Rockafellar, Convex Analysis, Princeton Landmarks in Mathematics and Physics. A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983

[74] Salim.A Messaoudi, Local existence and Blow up in nonlinear thermoelasticity with second sound, commun in partial differential equations, 27(7&8), 1681–1693 (2002).

[75] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov and A. P. Mikhailov, "Blow-up in Quasi-linear Parabolic Equations" (Michael Grinfeld, Trans.), Walter de Gruyter, Berlin, 1995.doi : 10.1515/9783110889864.

[76] S. G. Samko, Density $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ in the generalized Sobolev spaces$W^{m,p(x)}(\mathbb{R}^n)$, Dokl. Akad. Nauk, 369 (1999), pp. 451–454.

[77] I. Segal, Non-linear semigroups, Ann. of Math., 78 (2) (1963),339–364

[78] Z.Yang, Longtime behavior for a nonlinear wave equation arising in elasto-plastic flow. Math. Methods Appl. Sci. 32, 1082-1104 (200).

[79] A. Zaraï and N-e. Tatar, Non-solvability of Balakrishnan-Taylor equation with memory term in RN. In : Anastassiou G., Duman O. (eds) Advances in Applied Mathematics and Approximation Theory, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, vol 41. Springer, New York, NY 2013.

[80] A. Zaraï and N-e. Tatar and S. Abdelmalek, Elastic membrance equation with memory term and nonlinear boundary damping : global existence, decay and blowup of the solution. Acta Math. Sci. 33B (2013), 84-106.

[81] S Zheng (Zheng Songmu), Remarks on global existence for nonlinear parabolic equations, Nonlinear Analysis, 1 (1986), 107–114.

[82] S Zheng (Zheng, Songmu) and Yunmei Chen (Chen, Yunmei), On the blowing-up of solutions to the initial boundary value problems for nonlinear evolution equations, Journal of Fudan University,1 (1987), 9–27.

[83] S Zheng (Zheng Songmu), Global existence of solution to initial boundary value problem for nonlinear parabolic equations, Acta Mathematica Scintia, 4 (1987), 361–374

[84] S Zheng, Asymptotic behavior for strong solutions of theNavier-Stokes equations with external forces, Nonlinear Analysis,45 (4) (2001), 435–446.

[85] V.V. Zhikov, On Lavrentiev's phenomenon, Russian J. Math. Phys.,3 (1994), pp. 249–269.

[86] V. Zhikov, On Lavrentiev's effect, Dokl., Ross. Akad. Nauk, 345 (1995).