



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'enseignement supérieur et de la  
recherche scientifique

Université Larbi Tébessi - Tébessa

Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie  
Département: Mathématiques et Informatique



Mémoire de fin d'études  
Pour l'obtention du diplôme de MASTER  
Domaine: Mathématiques et Informatique  
Filière: Mathématiques

Option: Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

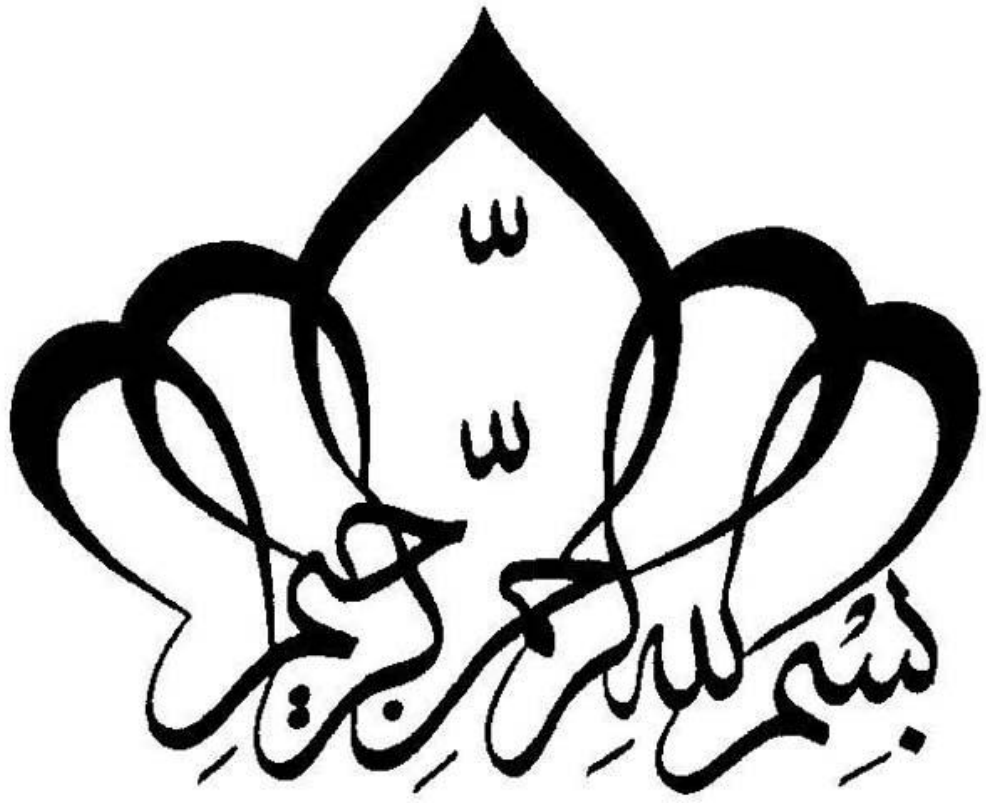
# La stabilité globale d'un modèle de dynamique structuré en âge avec diffusion

Présenté Par:  
Soundes DJAFFALI  
Sara SAIDANE

Devant le jury :

Mr, Hanachi FAREH	MCA	Université Larbi Tébessi	Président
Mr, Khaled BERRAH	MCB	Université Larbi Tébessi	Examinatrice
Mr, Abderrazak NABTI	MCA	Université Larbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 20/06/2021



## *Remerciements*

*A l'issue de ce modeste travail, nous tenons tout d'abord à remercier "Dieu" Qui nous donné le courage, la patience a fini notre travail. Nous voudrions dans un premier temps à remercier notre encadrant [Mr:"ABDERRAZAK Nabti"](#), pour son aide, ses précieux conseils qui ont été nécessaires pour la réalisation de ce travail. Je remercie également tous les membres du jury [Mr:"Fareh Hanachi"](#), [Mr:"Berrah Khaled"](#), d'avoir accepté d'assister à la présentation de ce travail. Nous adressons nos sincères remerciements à tous les enseignants et toutes les personnes qui par leurs paroles, conseils et leurs critiques ont guidé nos réflexions au long de nos études de notre parcours universitaire. Nous tenons à remercier nos chers collègues qui m'ont apporté leurs soutiens moral et leurs agréables moments au long de nos chemins. "Un grand merci également à tous ceux qui nous soutiennent de près ou de loin pour la réalisation de ce modeste travail."*

## *Dédicace*

Je dédie ce modeste travail premièrement a mon dieu, qui ma donne le courage pour fini ce travail. Je suis très heureux de dédier cet humble travail en signe de ma gratitude et de mes profonds remerciements pour ce qui suit:

Pour mon héros, le capitaine du navire familial, mon père que Dieu le garde.

" Mon père Amor"

À la bonne dame que toutes les familles souhaitent avoir une maman, le pilier de notre maison.

"Ma mère Saliha"

À mes chères sœurs Hadjer et son fiancé Hicham Amal, Malak que Dieu vous protège. À mes frères chamssedine .

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers ma belle - sœur , Yasmine , Karima, Nadjwa et ma belle Soundes ma binôme. À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible je vous dis merci

*Sara SAIDANE*

## *Dédicace*

Je dédie ce modeste travail premièrement a mon dieu, qui ma donne le courage pour fini ce travail

Je suis très heureux de dédier cet humble travail en signe de ma gratitude et de mes profonds remerciements pour ce qui suit:

Pour mon héros, le capitaine du navire familial, mon père que Dieu le garde.

" Mon père Lkhmissi"

À la bonne dame que toutes les familles souhaitent avoir une maman, le pilier de notre maison.

"Ma mère nasira"

À mes chères sœurs chahinda et nesrine et Djihen mon fiancé Brahim que Dieu vous protège. À mes frères Abdou et ma grand-mère .

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers ma belle - sœur, ouala et mounia et ma belle sara ma binôme. À tous ceux qui ont contribué de près ou de loin pour que ce travail soit possible je vous dis merci

*Soundes DJAFFALI*

# Resumé

*Dans ce travail, a fin de comprendre l'influence du traitement et le mouvement des individus à la propagation de l'Héroïne dans une population ciblée, on propose un modèle d'épidémie structuré en âges avec diffusion.*

*Après, à partir du nombre de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  on étudie la stabilité des points d'équilibres du système proposé.*

*Si  $\mathcal{R}_0 < 1$ , le point d'équilibre sans épidémie est globalement asymptotiquement stable. D'autre part, si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le système admet un seul point d'équilibre avec épidémie et il est globalement asymptotiquement stable.*

# Abstract

*In this paper, to understand the impact of spatial heterogeneity of treatment and movement of individuals on the persistence and extinction of heroin spread, we propose a new diffusive heroin transmission model with treatment-dependent age-structure. The basic reproduction number in heterogenous environment  $\mathcal{R}_0$  of the system is defined, which is consistent with the one deduced from the next generation operator approach  $\mathcal{R}(x)$ . if  $\mathcal{R}_0 \leq 1$ , the drug-free steady state is globally asymptotically stable and  $\mathcal{R}_0 > 1$ , our system has a unique space-independent drug spread steady state and it is globally asymptotically stable. Finally, some numerical simulations are carried out to illustrate.*

# ملخص

في هذا العمل, لفهم تأثير العلاج وحركة الأشخاص في عملية إنتشار و إستهلاك "مادة الهيروين" في مجتمع ما, نقتراح نموذجاً رياضياتي يعتمد على المعادلات التفاضلية الجزئية بحساب قيمة  $\mathcal{R}_0$  , يتم تحديد و دراسة إستقرار النقاط الثابتة للنموذج المقترح. إذا كان  $\mathcal{R}_0 < 1$ , فإن النقطة الثابتة "بدون إدمان" للنموذج تكون مستقرة بشكل مقارب. إذا كان  $\mathcal{R}_0 > 1$ , فإن النموذج الوبائي يملك نقطة ثابتة وحيدة و تكون أيضاً مستقرة بشكل تقاربي.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Préliminaire</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Analyse mathématiques du modèle</b>	<b>11</b>
2.1	Formulation du modèle . . . . .	11
2.2	Number de reproduction de base . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Stabilité locale</b>	<b>31</b>
3.1	Stabilité de l'état d'équilibre sans épidémie . . . . .	31
3.2	Persistence uniforme . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Stabilité globale</b>	<b>46</b>
4.1	Étude de la stabilité globale du point d'équilibre avec épidémie . . . . .	46

# Introduction

Au cours des deux dernières décennies, la Chine a été confrontée à une augmentation spectaculaire de l'abus de drogues illicites croissance économique et développement. En 2000, l'héroïne était encore le premier choix des toxicomanes (passant de 83,4 % en 1993 à 95,9 % en 2000). L'héroïne est une substance présente extraite de la morphine, un substance présente extraite de la gousse de la plante asiatique de pavot à opium. L'héroïne apparaît généralement sous forme de poudre blanche ou brune ou de substance collante noire, appelée «héroïne de goudron noir». L'héroïne est la plus les voies d'administration fréquentes sont l'injection intraveineuse (25 %) et l'inhalation . Il traverse le cerveau du sang barriéré en 15 à 20 s, atteignant rapidement un syndrome de haut niveau dans le cerveau et le système nerveux central ce qui provoque à la fois la ( ruée) ressentie par les utilisateurs et la toxicité .

Les utilisateurs d'héroïne courent un risque élevé de toxicomanie et on estime qu'environ 23 % des personnes qui consomment de l'héroïne en deviennent dépendantes. Cette entraînent d'énormes pressions et des dommages à la société et à la santé publique.

En fait, la propagation de l'accoutumance et de la dépendance à l'héroïne peut être bien modélisée par des modèles du type épidémique comme la «transmission» se produit sous la forme de pression des pairs où les utilisateurs établis recrutent des individus sensibles à essayer et à utiliser le médicament. En conséquence, la modélisation mathématique peut fournir un aperçu général dans la dynamique des classes d'usagers de drogues, et en tant que tel, pourraient devenir un instrument utile pour aider les spécialistes des équipes dans l'élaboration de stratégies de traitement. Modéliser la dépendance à l'héroïne et se propager de manière épidémique n'est pas nouvelle . La plupart des modèles d'héroïne sont des modèles ODE et



la population est divisée en trois classes, à savoir le nombre de susceptibles,  $S(t)$ , le nombre d'usagers de drogues non en traitement,  $U_1(t)$  et le nombre de drogues utilisateurs en traitement,  $U_2(t)$ , respectivement. Plus récemment, pour révéler le rôle de l'âge de traitement dans la propagation de l'héroïne dynamique, Fang et al. A proposé un modèle de transmission d'héroïne structuré selon l'âge et établi sa dynamique.

Les modèles épidémiques de réaction-diffusion avec un environnement spatialement hétérogène peuvent également jouer un rôle important rôle dans la modélisation de la propagation de la maladie. Allen et coll. ont proposé un modèle d'épidémie de SIS diffusif et étudié les rôles de l'hétérogénéité spatiale sur la persistance et l'extinction de la maladie dans . Récemment le l'auteur dont prouvait les résultats de stabilité globale des états stationnaires pour un modèle épidémique de SIS diffusif avec population totale variable. Pour plus d'informations sur ces modèles, on peut se référer aux références et littératures connexes. À l'heure actuelle, il y a peu de travaux sur la modélisation de la transmission diffusive de l'héroïne.

A noter que les toxicomanes sous traitement ne peuvent pas se déplacer librement et que le taux de traitement peut varier selon à l'emplacement. Il est nécessaire de formuler un modèle diffusif de transmission de l'héroïne et d'étudier son dynamique comportement Tenir compte du temps écoulé depuis le traitement des individus traités  $U_2(t)$  et du mouvement des particuliers, dans cet article, nous présentons un modèle diffusif de transmission de l'héroïne avec un âge de traitement. Dans ce système, nous supposons que les individus dans  $S(t)$  et  $U_1(t)$  peuvent se déplacer librement et les individus en traitement ne peut pas bouger, le taux de rechute d'héroïne dépend de la durée du traitement et un taux de traitement dépend de la localisation spatiale.

Ce travail est composé par quatre chapitre, organisés comme suit :

Le premier chapitre concerne à rappeler des notions de bases et concepts sur la stabilité, la fonctionnelle de Lyapunove, le principe de maximum et le principe de comparaison.

Le deuxième chapitre traite l'existence et l'unicité des solution du modèle proposé.

Le troisième chapitre consacré à l'étude de la stabilité locale et la persistance des solutions

Le quatrième chapitre considère la stabilité globale en utilisant la fonctionnelle de Lyapunov et le théorème de LaSalle.

# Chapitre 1

## Préliminaire

Dans ce chapitre, on rappelle quelques notions et concepts de base d'analyse fonctionnelle et de la stabilité du système dynamique. pour plus de détails voir [4],[9],[32].

### Equilibre et stabilité

L'analyse de la stabilité est une étape nécessaire et cruciale dans la conception de lois de commande pour les systèmes dynamiques. En effet, si on veut imposer à un processus des trajectoires données, ou tout au moins modifier ses dynamiques, il faut s'assurer que les rétroactions que l'on élabore ne le déstabilisent pas. La solution ou la trajectoire que l'on impose doit être rendue stable, c'est-à-dire qu'une perturbation autour de cette trajectoire ne doit pas conduire le système à s'écarter énormément de celle-ci. Ainsi l'analyse de la stabilité apparaît comme un préliminaire à la commande des systèmes dynamique.

On considère le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} u'(t) = \mathcal{A}u(t) + f(t, u(t)), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $\mathcal{X}$  est un espace de Banach,  $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$  est un opérateur linéaire et  $f : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$  une fonction non-linéaire.

Une fois que l'on a existence et unicité des solutions, on s'intéresse à leur comportement asymptotique. Pour cela, on peut regarder s'il existe des solutions indépendantes du temps, que l'on appelle équilibres de (1.1). On a besoin également de la notion de semi-flot qui donne la solution du problème de Cauchy à tout  $t$  et pour toute condition initiale.

**Définition 1.1.** On appelle semi-flot continu du problème (1.1) l'application

$$\begin{aligned}\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{X} &\longrightarrow \mathcal{X} \\ (t, z) &\longmapsto \Phi_t(z) := u_z(t)\end{aligned}$$

où  $u_z \in \mathcal{X}$  est l'unique solution de (1.1) de condition initiale  $u_z(0) = z$ .

On a besoin aussi de la définition suivante

**Définition 1.2.** Soit  $D \subset \mathcal{X}$  un sous-espace fermé de  $\mathcal{X}$ . Une fonction  $L : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}$  est dite de Lyapunov  $D$  si

1.  $L$  est continue sur  $D$ ,
2. la fonction  $t \longmapsto L(\Phi_t(z))$  est décroissante pour tout  $z \in D$ .

Maintenant, on donne les différents types de la stabilité dans la définition suivante

**Définition 1.3.** Soit  $S \subset \mathcal{X}$  un sous-espace fermé de  $\mathcal{X}$ . On dit que le point d'équilibre  $E$  est :

1. Stable (au sens de Lyapunov) si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $z \in \mathcal{X}$  on a

$$\|z - E\| \leq \eta \implies \|\Phi_t(z) - E\| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0;$$

2. localement attractif dans  $S$  s'il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $z \in S$  satisfaisant  $\|z - E\|_{\mathcal{X}} \leq \eta$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|\Phi_t(z) - E\| = 0 \tag{1.2}$$

3. localement asymptotiquement stable dans  $S$  si  $E$  est à la fois stable et localement attractif dans  $S$ ;
4. globalement attractif dans  $S$  si pour tout  $z \in S$ , l'équation dessus est vérifiée;

5. globalement asymptotiquement stable dans  $S$  si  $E$  est stable et globalement attractif dans  $S$  ;  
 6. instable s'il n'est pas stable.

**Théorème 1.1.** (Principe d'invariance de La Salle)

Soit  $L$  une fonction de Lyapunov pour  $\Phi_t$ ,  $t \geq 0$  et soit  $u(t) \in S \subset X$  tel que  $\{\Phi_t(u)_{t \geq 0}$  soit relativement compact dans  $S$ . Alors :

- i)  $c = \lim_{t \rightarrow \infty} L(\Phi_t(u))$  existe,  
 ii)  $L(y) = c$ , pour tout  $y \in \omega(u)$ ,  $t \geq 0$ .

En particulier : pour tout  $y \in \omega(u)$ ,  $L(\Phi_t(y)) = L(y)$ ,  $t \geq 0$ .

**Définition 1.4.** (Attracteur) [7]

Une partie  $A$  de  $X$  est appelée attracteur si est seulement si les conditions suivantes sont réalisées

- i)  $A$  est fermée.  
 ii)  $A$  est positivement invariante.  
 iii)  $A$  est attractive

**Définition 1.5.** (Attracteur globale)

Un attracteur globale est un attracteur dont le bassin d'attraction est l'espace des phases  $M$  tout entier. Il contient donc l'ensemble de la dynamique asymptotique et aussi l'ensemble des trajectoires invariantes comme les points d'équilibre les trajectoires périodiques, les cycles limites.  $A$  est appelée un attracteur compact de  $X$  si  $A$  en plus est compact.

**Définition 1.6.** (Persistance uniforme)

Soit  $\Phi$  le semi-flot associé au système (1.1) et soit  $d$  une métrique. On note par  $\partial\Phi$  la restriction de  $\Phi$  à  $\partial\Phi$  où  $\partial\Phi$  n'est pas nécessairement positivement invariant et

soit  $N$  l'ensemble invariant maximal de  $\partial\Phi$  dans  $\partial E$ , de plus  $N$  est fermé il existe un recouvrement  $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $N$  où  $A$  est un ensemble d'index non vide et  $N_\alpha \subset \partial E$ ,  $N \subset \cup_{\alpha \in A} N_\alpha$  sont des ensembles invariants fermés disjoints deux. Nous proposons les hypothèse suivantes

- i) Tous les  $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$  sont des ensembles invariants isolés du flot  $\Phi$ .  
 ii) tout sous ensemble compact de  $E$  contient de nombreux recouvrements  $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ .

**Définition 1.7.** (Uniformément forte persistence)

Le semi-flot  $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  est appelée  $\rho$  forte persistence, si

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \rho(U(t, x)) > 0 \quad \forall x \in X \quad \rho(x) > 0.$$

**Définition 1.8.** (Uniformément faible persistence)

Le semi-flot  $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$  est appelé  $\rho$  faible persistence, si :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \rho(U(t, x)) > 0 \quad \forall x \in X \quad \rho(x) > 0.$$

### Principe de maximum et principe de comparaison.

**Définition 1.9.** Une fonction  $\tilde{u} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$  est dite sur-solution du problème parabolique, si

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta \tilde{u} \geq f(\tilde{u}), & (x, t) \in Q_T \\ \tilde{u}(x, t) \geq g(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

De même, une fonction  $\underline{u} \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\overline{Q}_T)$  est dite sous-solution du problème parabolique, si

$$\begin{cases} \underline{u}_t - \Delta \underline{u} \leq f(\underline{u}), & (x, t) \in Q_T \\ \underline{u} \leq g(x, t), & (x, t) \in \partial_p Q_T \end{cases}$$

$\underline{u}, \tilde{u}$  sont dites ordonnées si  $\underline{u}(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), (x, t) \in \overline{Q}_T$ .

**Définition 1.10.** Pour toute sous et sur-solution ordonnées nous définissons le  $[\underline{u}, \tilde{u}]$  secteur comme un intervalle fonctionnel :

$$[\underline{u}, \tilde{u}] = \left\{ u \in C(\overline{Q}_T); \underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), (x, t) \in \overline{Q}_T \right\}$$

**Définition 1.11.** Pour toute sous et sur-solution ordonnées nous définissons le  $[\underline{u}, \tilde{u}]$  secteur comme un intervalle fonctionnel :

$$[u, \tilde{u}] = \left\{ u \in C(\overline{Q}_T); \underline{u}(x, t) \leq u(x, t) \leq \tilde{u}(x, t), (x, t) \in \overline{Q}_T \right\}$$

### Principe de maximum parabolique

#### **Théorème 1.2.** :

Soit  $U \in C(\overline{\Omega})$  sous-harmonique sur ou  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert bornée. Alors :

(i)  $\max_{\overline{\Omega}} U = \max_{\partial(\Omega)} U,$

(ii) Si  $\Omega$  est en plus connexe et s'il existe  $x_0 \in \Omega$  tel que  $U(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} U$ , alors  $U$  est constante.

### Principe de comparaison

#### **Théorème 1.3.** :

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  ouvert, bornée régulier. Pour  $T > 0$  on définit  $\Omega_T := (0, T) \times \Omega$  et  $\Gamma_T := \{0\} \times \Omega \cup [0, T] \times \partial(\Omega)$  Des fois  $\Gamma_T$  est appelée la frontière parabolique de  $\Omega_T$  et  $f \in C(\mathbb{R})$  une fonction lipschitzienne et soient  $U^1, U^2 \in C^{1,2}(\Omega^T)$  (une fois continument partiellement dérivable par rapport  $t$  et deux fois continument partiellement dérivable par rapport  $x$ ) deux solutions de l'équation de la chaleur semi-linéaire

$$U_t - \Delta U + f(U) = 0 \quad (t, x) \in \Omega_T$$

si

$$U_1|_{\Gamma_T} \leq U_2|_{\Gamma_T},$$

alors

$$U_1 \leq U_2 \text{ dans } \Omega_T.$$

### Différentiabilité au sens de Fréchet :

**Définition 1.12.** Soit  $x \in \Omega$  on dit que  $f$  est Fréchet-dérivable (ou simplement dérivable ou différentiable) en  $x$  ssi il existe  $L \in L_c(E; F)$  et une fonction affiner sur un voisinage de 0 dans  $E$  et a valeurs

dans  $F$  tels que :

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + \|h\|_E \varepsilon(h) \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \|\varepsilon(h)\|_F = 0. \quad (1.3)$$

Sous forme quantifiée (1.3) signifie exactement  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $h \in E$ . On a

$$\|h\|_E \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E.$$

### Le taux de reproduction de base

Est le nombre moyen de cas secondaires généré par une personne durant la période où elle est infectieuse symptomatique ou non. Lorsque de l'introduction d'une infection dans une population entièrement susceptible, on parle de taux de reproduction de base ( $\mathcal{R}_0$ ). Si ce taux est inférieur 1 chaque cas donne naissance en moyenne moins d'un cas secondaire, le nombre de cas diminue chaque génération et la chaîne de transmission finit par s'interrompre. Inversement, si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le nombre de cas s'accroît chaque génération créant une situation épidémique.



# Chapitre 2

## Analyse mathématiques du modèle

### 2.1 Formulation du modèle

Soit le modèle d'épidémie structuré en âge et en espace suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \delta \Delta S + \Lambda - \mu S(x, t) - \beta S(x, t) U_1(x, t), \\ \frac{\partial U_1}{\partial t} = \delta \Delta U_1 + \beta S(x, t) U_1(x, t) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x)) U_1(x, t) + \int_0^\infty k(\theta) U_2(x, \theta, t) d\theta, \\ \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta)) U_2(x, \theta, t), \end{cases} \quad (2.1)$$

pour  $t > 0$ ,  $x \in \Omega$  avec les conditions initiales et limites suivantes

$$\begin{cases} U_2(x, 0, t) = \gamma(x) U_1(x, t), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ S(x, 0) = S_0(x), \quad U_1(x, 0) = U_{10}(x), \quad U_2(x, \theta, 0) = U_{20}(x, \theta), \quad x \in \bar{\Omega}, \end{cases}$$

et les conditions aux limites homogènes de Neumann

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (2.2)$$

où  $S_0, U_{10} \in \Omega$ , et les paramètres  $\Lambda, \delta, \mu, \nu_1, \nu_2, \beta$ , sont des quantités positives telles que

$\Lambda$  : représente le recrutement des susceptibles.

$\mu$  : est le taux de mortalité naturelle de la population générale.

$\beta$  : est le taux de transmission (contact entre susceptible et toxicomane) de l'épidémie.

$\nu_1$  : le taux de mortalité lié à l'utilisation de la drogue (Héroïne).

$\nu_2$  : le taux de mortalité des individus toxicomanes sans traitement .

$\delta$  : représente le coefficient de diffusion .

$\theta$  : représente l'âge du traitement (le temps qui s'est écoulé depuis que les toxicomanes sont entréer traitement).

$\gamma(x)$  : est le taux d'accès au traitement.

$k(\theta)$  : représente la probabilité qu'un toxicomane en traitement avec l'âge du traitement  $\theta$ .

$U_{20}(x, \theta)$  : représente la condition initiale est uniformément bornée pour  $\theta \in (0, +\infty)$  pour chaque  $x$  fixe.

$S(x, t)$  : le nombre d'individus susceptible d'être toxicomane en temps  $t$ , et emplacement  $x$ .

$U_1(x, t)$  : est la densité des toxicomanes hors traitement, jamais traité.

$U_2(x, \theta, t)$  : est la densité des toxicomanes en traitement avec une période de traitement  $\theta$  au lieu  $x$  et en temps  $t$ .

## Equation de transport

Soit l'équation de transport suivante

$$\frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))U_2(x, \theta, t), \quad (2.3)$$

avec la condition initiale suivante

$$U_2(x, \theta, 0) = U_{20}(x, \theta), \quad x \in \bar{\Omega},$$

et la condition aux limites

$$U_2(x, 0, t) = \gamma(x)U_1(x, t), \quad x \in \overline{\Omega}.$$

On a

$$\frac{dU_2}{dr} = \frac{d\theta}{dr} \frac{\partial U_2}{\partial \theta} + \frac{dt}{dr} \frac{\partial U_2}{\partial t},$$

alors

$$\frac{dU_2}{dr} = a(\theta, t) \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial \theta} + b(\theta, t) \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

en faisant correspondre (2.3) et (2.4), on obtient

$$\begin{cases} \frac{dU_2}{dr} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))U_2(x, \theta, t), \\ \frac{d\theta}{dr} = 1, \\ \frac{dt}{dr} = 1. \end{cases}$$

Si  $t(0) = 0$ , on trouve donc

$$\frac{dt}{dr} = 1, \quad \text{et } t = r,$$

et pour  $\theta(0) = \theta_0$ , on a

$$\frac{d\theta}{dr} = 1, \quad \text{et } \theta = r + \theta_0.$$

Par conséquent

$$\theta = t + \theta_0, \quad \text{et } \theta_0 = \theta - t.$$

L'Edp devient

$$\frac{dU_2}{dt} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))U_2(x, \theta, t), \quad \text{donc } U_2(x, \theta, t) = Ce^{-\int_0^t (\mu + \nu_1 + k(\theta)) d\theta}.$$

Si  $t = 0$ ,  $\theta_0 = \theta$  et  $U_2(x, \theta_0, 0) = U_{20}(x, \theta - t) = C$ , par conséquent

$$\begin{aligned} U_2(x, \theta, t) &= U_{20}(x, \theta - t) e^{-\int_0^t (\mu + \nu_1 + k(\theta - t)) d(\theta - t)} \\ &= U_{20}(x, \theta - t) e^{-\int_0^\theta (\mu + \nu_1 + k(\tau)) d\tau} \\ &= U_{20}(x, \theta - t) \left[ e^{-\int_0^{\theta-t} (\mu + \nu_1 + k(\tau)) d\tau} \times e^{-\int_{\theta-t}^\theta (\mu + \nu_1 + k(\tau)) d\tau} \right]. \end{aligned}$$

D'autre part, si  $\theta(0) = 0$ , alors

$$\frac{d\theta}{dr} = 1, \quad \text{et } \theta = r.$$

Si  $t(0) = t_0$ , on a

$$\frac{dt}{dr} = 1, \quad \text{et } t = r + t_0.$$

Par conséquent

$$t = \theta + t_0, \quad \text{et } t_0 = t - \theta.$$

L'Edp devient

$$\frac{dU_2}{dt} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))U_2(x, \theta, t), \quad \text{alors } U_2(x, \theta, t) = C e^{-\int_0^t (\mu + \nu_1 + k(\theta)) d\theta}.$$

Si  $\theta = 0$ ,  $t_0 = t$  et  $U_2(x, 0, t_0) = \gamma(x)U_1(x, t - \theta) = C$ , par conséquent

$$\begin{aligned} U_2(x, \theta, t) &= \gamma(x)U_1(x, t - \theta) e^{-\int_0^t (\mu + \nu_1 + k(t - \theta)) d(t - \theta)} \\ &= \gamma(x)U_1(x, t - \theta) e^{-\int_0^\theta (\mu + \nu_1 + k(\tau)) d\tau}. \end{aligned}$$

On pose  $\Pi(\theta) = e^{-\int_0^\theta (\mu + \nu_1 + k(\tau)) d\tau}$  et  $\Pi(\theta - t) = e^{-\int_0^{\theta-t} (\mu + \nu_1 + k(\tau)) d\tau}$ , on arrive à

$$U_2(x, \theta, t) = \begin{cases} \gamma(x)U_1(x, t - \theta)\Pi(\theta), & \text{si } \theta \leq t; \\ U_{20}(x, \theta - t) \frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta-t)}, & \text{si } \theta \geq t. \end{cases} \quad (2.5)$$

**Lemme 2.1.** *Il existe une constante positive  $C_1$  indépendante des données initiales telles que la solution*

$(S, U_1, U_2)$  du système (2.1) satisfait

$$\|S(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \|U_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega)} + \left\| \int_0^\infty U_2(\cdot, \theta, t) d\theta \right\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1. \quad (2.6)$$

**Preuve 1.** Soient

$$N(x, t) := S(x, t) + U_1(x, t) + \int_0^\infty U_2(\cdot, \theta, t) d\theta$$

le nombre total d'individus à la position  $x \in \Omega$  au temps  $t$ , et

$$\widehat{N}(t) := \int_\Omega \left( S(x, t) + U_1(x, t) + \int_0^\infty U_2(x, \theta, t) d\theta \right) dx$$

le nombre total d'individus dans  $\Omega$  au temps  $t$ . En ajoutant nombre à nombre l'équation du système

(2.1), puis en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\widehat{N}}{dt} &= \int_\Omega \frac{\partial}{\partial t} \left( S(x, t) + U_1(x, t) + \int_0^\infty U_2(x, \theta, t) d\theta \right) dx \\ &= \int_\Omega \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial U_1}{\partial t} + \int_0^\infty \frac{\partial U_2}{\partial t} d\theta \right) dx \\ &= \int_\Omega (\delta\Delta + \Lambda - \mu S - \beta S U_1) + \delta\Delta U_1 + \beta S U_1 \\ &\quad - (\mu + \nu_1 + \gamma(x)) U_1(x, t) + \int_0^\infty k(\theta) U_2 d\theta \\ &\quad - \int_0^\infty \left( (\mu + \nu_2 + k(\theta)) U_2(x, \theta, t) + \frac{\partial U_2}{\partial \theta}(x, \theta, t) d\theta \right) dx \\ &= \int_\Omega (\delta\Delta S + \delta\Delta U_1) dx + \int_\Omega \left( \Lambda - \mu \left( S(x, t) + U_1(x, t) + \int_0^\infty U_2(x, \theta, t) d\theta \right) \right) dx \\ &\quad - \int_\Omega \left( \gamma(x) U_1(x, t) + U_2(x, \theta, t) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\infty} \right) dx - \int_\Omega \left( \nu_1 U_1(x, t) + \nu_2 \int_0^\infty U_2(x, \theta, t) d\theta \right) dx \\ &\leq \int_\Omega \Delta(\delta S + \delta U_1) dx + \int_\Omega (\Lambda - \mu N(x, t)) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} (\delta S + \delta U_1) dx + \Lambda |\Omega| - \mu \widehat{N}(t) \\ &= \Lambda |\Omega| - \mu \widehat{N}(t). \end{aligned}$$

Il s'ensuit alors que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega} N(x, t) dx = \limsup_{t \rightarrow \infty} \widehat{N}(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} |\Omega|,$$

qui est indépendant des données initiales. D'autre part si  $\widehat{N}(t) \leq \frac{\Lambda}{\mu} |\Omega|$  pour certains  $t = t_0 \in \mathbb{R}$ , alors il est satisfait pour tout  $t \geq t_0$ . Le système est (2.1) donc point dissipative.

**Lemme 2.2.** Pour la fonction continue  $S_0(x)$  donnée en (2.2), on note

$$S_0^* = \max_{x \in \overline{\Omega}} S_0(x). \quad (2.7)$$

Alors la solution  $(S, U_1, U_2)$  du (2.1) satisfait à

$$S(x, t) \leq \Lambda^+, \text{ pour tout } x \in \Omega, t > 0. \quad (2.8)$$

**Preuve 2.** Il résulte de la première équation du (2.1) que

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \delta \Delta S = \Lambda - \mu S(x, t) - \beta S(x, t) U_1(x, t) \leq \Lambda - \mu S(x, t),$$

donc

$$\frac{\partial S}{\partial t} - \delta \Delta S - \Lambda + \mu S(x, t) \leq 0.$$

Observer que les solutions  $S(t)$  du système (2.1) et  $\max \{ \Lambda/\mu, S_0^* \}$  sont une paire de sous et sur solutions au problème des valeurs initiales et aux limites suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \Delta v + \Lambda - \mu v(x, t) & , x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, & , x \in \Omega, t > 0, \\ v(x, 0) = S_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2.9)$$

Puisque  $\frac{\Lambda}{\mu}$  est un point d'équilibre du (2.9), alors le principe maximum implique que  $v(x, t) \leq$

$\max \left\{ \frac{\Lambda}{\mu}, S_0^* \right\}$  et le principe de comparaison donne

$$S(x, t) \leq v(x, t) \leq \max \left\{ \frac{\Lambda}{\mu}, S_0^* \right\} = \Lambda^+.$$

Nous définissons l'ensemble

$$\mathcal{D} := \left\{ (S, U_1, U_2) \in \int_{\Omega} \left( S + U_1 + \int_0^{\infty} U_2 d\theta \right) dx \leq \frac{\Lambda}{\mu} |\Omega| \text{ et } S \leq \Lambda^+ \right\}. \quad (2.10)$$

**Proposition 2.1.** [15]

L'ensemble  $\mathcal{D}$ . Et on écrit (2.10) est positivement invariant pour la solution semi-flot  $\Psi(t)$  du système (2.1)- (2.2),

$$\Psi(t)\psi \in \mathcal{D}, \text{ pour tout } t \geq 0, \psi \in \mathcal{D}.$$

Dans ce qui suit, nous reformulons le système (2.1)- (2.2) sous la forme d'un problème de Cauchy non homogène afin d'appliquer la théorie des semi-groupes. Considérons l'espace

$$\widehat{X} := C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \times C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \times \mathbb{C} \times L^1((0, \infty), \mathbb{C}),$$

muni de la norme

$$\|\chi\|_{\widehat{X}} = \|S\|_{C^2} + \|U_1\|_{C^2} + \sup_x \int_0^{\infty} |U_2(x, \theta)| d\theta,$$

pour  $\chi \in \widehat{X}$ , où

$$\|S\|_{C^2} = \sup_x |S| + \sup_x |S_x| + \sup_x |S_{xx}|, \quad \|U_1\|_{C^2} = \sup_x |U_1| + \sup_x |U_{1x}| + \sup_x |U_{1xx}|.$$

Posons

$$\widehat{X}_0 := C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \times C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \times \{0_{\mathbb{C}}\} \times L^1((0, \infty), \mathbb{C}),$$

$$\widehat{X}_+ := C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+) \times C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_+) \times \mathbb{C}_+ \times L^1_+((0, \infty), \mathbb{C}_+),$$

$$\widehat{X}_{0+} := \widehat{X}_0 \cap \widehat{X}_+.$$

Soient le vecteur  $\mathcal{U} = \left( S(\cdot), U_1(\cdot), \begin{pmatrix} 0 \\ U_2(\cdot, \cdot) \end{pmatrix} \right)^T \in \widehat{X}_0$  et l'opérateur linéaire  $A : \text{Dom}(A) \rightarrow \widehat{X}$

défini comme suit

$$A\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \delta\Delta S - \mu S \\ \delta\Delta U_1 - (\mu + \nu_1)U_1 \\ \begin{pmatrix} -U_2(0) \\ -\frac{\partial U_2}{\partial \theta} - (\mu + \nu_2 + k(\theta))U_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

avec  $Dom(A) = C^2(\overline{\Omega}) \times C^2(\overline{\Omega}) \times \{0\} \times W^{1,1}((0, +\infty), UC) \subset \widehat{X}, W^{1,1}$ . Est L'espace de Sobolev des fonctions dont la première dérivée en  $\theta$  est intégrable. Pour tout  $\mathcal{U}_0 \in X_+, \mathcal{U}(t) = S(t)\mathcal{U}_0$  l'unique continue solution de  $\frac{d\mathcal{U}}{dt} = A\mathcal{U}, \mathcal{U}(0) = 0$ , est  $\mathcal{U}(t) = 0$ . Nous pouvons prouver que la solution de

$$\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = A\mathcal{U}(t), \mathcal{U}(0) = \psi \in X_+,$$

avec les conditions aux limites de Neumann (2.2) vérifiée  $\|\mathcal{U}(t)\|_{\widehat{X}} \leq c(t)\|\mathcal{U}(0)\|_{\widehat{X}}$  avec  $c(t) > 0$  indépendante de  $\mathcal{U}(0)$ .

En fait, il suffit de prouver que  $\|S\| \leq C_1(t)\|S_0\|_{C^2}$ ,  $C_1(t)$  est une fonction de  $t$ , sera déterminé plus tard. Maintenant, nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \delta\Delta S - \mu S, & 0 < x < L, \\ S(x, 0) = S_0(x), & 0 \leq x \leq L, \\ S_x(0, t) = 0, S_x(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

On pose  $S(x, t) = e^{-\mu t}\widehat{S}(t, x)$ . Alors  $\widehat{S}(x, t)$  devrait satisfaire le problème suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial \widehat{S}}{\partial t} = \delta\Delta \widehat{S}, & 0 < x < L, \\ \widehat{S}(x, 0) = S_0(x), & 0 \leq x \leq L, \\ \widehat{S}_x(0, t) = 0, \widehat{S}_x(L, t) = 0. \end{cases} \quad (2.12)$$



Par la méthode de séparation de variable, on pose  $\widehat{S}(x, t) = X(x).T(t)$  avec  $X(x)$  est fonction dépend de  $x$  et  $T(t)$  est fonction dépend de  $t$ , on obtient

$$\widehat{S}_x(0, t) = X'(0).T(t) = 0, \text{ et } X'(0) = 0.$$

$$\widehat{S}_x(L, t) = T'(t).X(L) = 0, \text{ et } X'(L) = 0.$$

$$\widehat{S}(x, 0) = T(0).X(x) = \widehat{S}_0.$$

On a  $\widehat{S}(x, t) = X(x).T(t)$ , alors

$$\frac{\partial \widehat{S}}{\partial t} = X(x).T'(t),$$

$$\frac{\partial^2 \widehat{S}}{\partial x^2} = X''(x).T(t).$$

Comme  $X(x).T'(t) = \delta.X''(x).T(t)$ , alors  $\frac{T'}{\delta T} = \frac{X''}{X} = C$ .

$$\frac{T'}{\delta T} = C, \text{ alors } T' = C.\delta.T,$$

et

$$T' = C.\delta.T.$$

De même, on a  $\frac{X''}{X} = C$ , alors  $X'' = C.X$  et

$$X'' - C.X = 0. \tag{2.13}$$

Résoudre l'équation (2.13)

$$X'' - C.X = 0$$

$$\text{si } \delta = -\lambda^2 < 0, \lambda > 0$$

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)$$

$$X'(x) = -A \sin(\lambda x) + B \cos(\lambda x)$$

$$X'(0) = 0 \text{ alors } B = 0$$

$$X'(L) = 0 \text{ alors } A \sin(\lambda L) = 0 \text{ alors } \lambda L = n\pi \text{ alors } \lambda = \frac{n\pi}{L},$$

donc  $X(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ .

D'autre part on a  $T' = C.\delta.T$  tel que  $\delta = -\lambda^2$ , alors  $\delta = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ ,

$$\text{et } T'(t) = C_1 e^{-ct\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}.$$

Finalement

$$\widehat{S}(x, t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

où

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_0^L S_0 dx, \quad a_n = \frac{2}{L} \int_0^L S_0 \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$|S(x, t)| = e^{-\mu t} \left[ a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

$$|S_x(x, t)| = e^{-\mu t} \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} \right],$$

$$|S_{xx}(x, t)| = e^{-\mu t} \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right].$$

On définit  $|a_n| \leq 2 \sup_x S_0$ , on obtient

$$|S(x, t)| \leq e^{-\mu t} \left[ 2 \sup_x S_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sup_x S_0 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

$$|S(x, t)| \leq e^{-\mu t} 2 \sup_x S_0 \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

$$|S(x, t)| \leq e^{-\mu t} \frac{L}{\sqrt{\pi \delta t}} \sup_x S_0,$$

$$|S(x, t)_x| \leq e^{-\mu t} \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sup_x S_0 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} \right],$$

$$|S(x, t)_x| \leq e^{-\mu t} 2 \sup_x S_0 \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

$$|S(x, t)_x| \leq e^{-\mu t} \frac{L}{\pi \delta t} \sup_x S_0,$$

et

$$|S(x, t)_{xx}| \leq e^{-\mu t} \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} 2 \sup_x S_0 e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \frac{n\pi}{L} \right],$$

$$|S(x, t)_{xx}| \leq e^{-\mu t} 2 \sup_x S_0 \left[ - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \delta t} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right],$$

$$|S_{xx}(x, t)| \leq e^{-\mu t} \frac{L}{\sqrt{\pi \delta t}} \frac{1}{2\delta t} \sup_x S_0.$$

Il s'ensuit alors que

$$|S(x, t)| + |S_x(x, t)| + |S_{xx}(x, t)| \leq c_1(t) \sup_x S_0,$$

et donc  $\|S_x(x, t)\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq C_1(t) \|S_0\|_{C^2(\bar{\Omega})}$ , où

$$C_1(t) = e^{-\mu t} \left[ \frac{L}{\sqrt{\pi \delta t}} + \frac{L}{\pi \delta t} + \frac{L}{\sqrt{\pi \delta t}} \frac{L}{2\delta t} \right],$$

$$C_1(t) = e^{-\mu t} \frac{L}{\sqrt{\pi \delta t}} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi \delta t}} + \frac{1}{2\delta t} \right) > 0.$$

On peut obtenir l'inégalité suivante pour  $\|U_1\|_{C^2} \leq C_2(t) \|U_{10}\|_{C^2}$ . Il découle alors de (2.5)

que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |U_2(x, \theta, t)| d\theta &\leq \int_0^t \gamma(x) |U_1(x, t - \theta)| \Pi(\theta) d\theta + \int_t^\infty |U_{20}(x, \theta - t)| \frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t)} d\theta \\ &\leq \gamma^* C_2(t) \|U_{10}\|_{C^2} \int_0^t \Pi(\theta) d\theta + \int_t^\infty |U_{20}(x, \theta - t)| d\theta \\ &\leq \gamma^* \mathcal{K}_1 C_2(t) \|U_{10}\|_{C^2} + \int_0^\infty |U_{20}(x, \theta)| d\theta, \end{aligned}$$

où  $\gamma^* = \max_x \gamma(x)$  et donc

$$\sup_x \int_0^\infty |U_2(x, \theta, t)| d\theta \leq \gamma^* \mathcal{K}_1 C_2(t) \|U_{10}\|_{C^2} + \sup_x \int_0^\infty |U_{20}(x, \theta)| d\theta.$$

En utilisant la norme habituelle de  $\widehat{X}$  et après quelques calculs directs nous pouvons obtenir que  $\|U(t)\|_{\widehat{X}} \leq C(t) \|U(0)\|_{\widehat{X}}$  pour  $U(0) = \psi \in X_+$  et  $t \leq 0$  il s'ensuit que l'opérateur linéaire  $A$  est un générateur d'un semi-groupe.

On définit  $F := \widehat{X}_0 \rightarrow \widehat{X}$  par

$$F(\mathcal{U})(x) = \begin{pmatrix} \Lambda - \beta S(x)U_1(x) \\ \beta S(x)U_1(x) + \int_0^\infty K(\theta)U_2(x, \theta) d(\theta) - \gamma(x)U_1(x) \\ \begin{pmatrix} \gamma(x)U_1(x) \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

Alors nous pouvons écrire le système (2.1)- (2.2) sous la forme d'un problème de Cauchy non homogène

$$\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = A\mathcal{U}(t) + F(\mathcal{U}(t)), t > 0, \quad (2.15)$$

avec  $\mathcal{U}(0) = \mathcal{U}_0 \in \widehat{X}_{0+}$ .

**Lemme 2.3.** Supposons que  $F$  est défini dans (2.14) pour  $\phi \in \widehat{X}_0$ , alors on a

$$F'[\psi](x) = \begin{pmatrix} -\beta\psi_1(x)\phi_1(x) - \beta\psi_2(x)\phi_2(x) \\ \beta\psi_2(x)\phi_1(x) + \beta\psi_1(x)\phi_2(x) + \int_0^{+\infty} k(\theta)\phi_3(x,\theta)d\theta - \gamma(x)\phi_2(x) \\ \gamma(x)\phi_2(x) \end{pmatrix},$$

et  $F$  est Fréchet différentiable sur  $\widehat{X}_0$ .

**Preuve 3.** On a

$$F(\mathcal{U})(x) = \begin{pmatrix} \Lambda - \beta S(x)U_1(x) \\ \beta S(x)U_1(x) + \int_0^{+\infty} k(\theta)U(x,\theta) - \gamma(x)U_1(x) \\ \begin{pmatrix} \gamma(x)U_1(x) \\ 0_{L^1} \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

On définit l'opérateur non linéaire  $F : \widehat{X}_0 \longrightarrow \widehat{X}_0$  par

$$F(\phi)(x) = \begin{pmatrix} \Lambda - \beta\phi_1(x)\phi_2(x) \\ \beta\phi_1(x)\phi_2(x) + \int_0^{+\infty} k(\theta)\phi_3(x,\theta)d\theta - \gamma(x)\phi_2(x) \\ \gamma(x)\phi_2(x) \end{pmatrix}$$

et  $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) \in \widehat{X}_0$ , alors

$$F'[\psi](x) = \begin{pmatrix} -\beta\psi_2(x) & -\beta\psi_1(x) & 0 \\ \beta\psi_2(x) & \beta\psi_1(x) & \int_0^{+\infty} k(\theta)d\theta - \gamma(x) \\ 0 & \gamma(x) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix},$$

donc

$$F'[\psi](x) = \begin{pmatrix} -\beta\psi_2(x)\phi_1(x) - \beta\psi_1(x)\phi_2(x) \\ \beta\psi_2(x)\phi_1(x) + \beta\psi_1(x)\phi_2(x) + \int_0^{+\infty} k(\theta)\phi_3(x,\theta)d\theta - \gamma(x)\phi_2(x) \\ \gamma(x)\phi_2(x) \end{pmatrix}$$

et  $F$  est continuellement Fréchet différentiable sur  $\widehat{X}_0$ .

**Proposition 2.2.** Pour tout  $\mathcal{U}_0$  dans  $\text{Dom}(A)$ , le système (2.15) a une solution unique, différentiable et continu  $\mathcal{U} : [0, T_0) \rightarrow \widehat{X}_0$  telle que

$$\mathcal{U}(t) = e^{tA}\mathcal{U}_0 + \int_0^t e^{t-s}F(\mathcal{U}(s))ds.$$

Soit  $T_0 = \infty$  alors la solution est dite globale, soit  $T < +\infty$ , alors la solution explose, en temps fini.

**Lemme 2.4.** Soit  $\mathcal{U}(t, x; \mathcal{U}_0)$  une solution du système (2.15). Si  $\mathcal{U}_0$  est positif, alors  $\mathcal{U}(t, x; \mathcal{U}_0)$  est positif sur  $\Omega \times [0, T_0]$ . A partir des résultats ci-dessus et de la proposition 2.1, nous pouvons conclure que la solution  $\Psi(t)(\mathcal{U}_0) = \mathcal{U}(t, x; \mathcal{U}_0)$  est une solution globale pour tout  $t \geq 0$  lorsque  $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}$ .

**Lemme 2.5.** La solution semi-flot  $\Psi(t)$  est  $\mathcal{K}$ -contractante au sens où  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{K}(\Psi(t)(B)) = 0$  pour tout ensemble bornée  $B \subset X_+$ .

**Preuve 4.** [18]/[19]

Rappelons la mesure de Kuratowski de la non-compacité, qui est définie par

$$\mathcal{K}(B) := \inf \{r : B \text{ a une couverture finie de diamètre } < r\} \quad (2.16)$$

pour tout ensemble bornée  $B$ . Soit  $\mathcal{K}(B) = +\infty$  chaque fois que  $B$  est illimité Il est facile de voir que  $B$  est précompact (c'est-à-dire que  $\overline{B}$  est compact) si et seulement si  $\mathcal{K}(B) = 0$ . Soit  $B$  un sous-ensemble bornée dans  $X_+$ , il suffit de montrer que  $\Psi(t)$  est asymptotiquement compact sur  $B$  en ce sens que pour toute séquence  $\phi_n \in B$  et  $t_n \rightarrow \infty$ , il existe des sous-séquences  $\phi_{n_k} \in B$  et  $t_{n_k} \rightarrow \infty$  tel que  $\Psi(t_{n_k})(\phi_{n_k})$  converge dans  $X_+$  comme  $k \rightarrow \infty$ . Soit  $(S_n(x, t_n), U_{1n}(x, t_n), U_{2n}(x, \cdot, t_n)) = \Psi(t)(\phi_n)(x)$ ,

$\forall \phi_n \in X_+, t \geq 0, x \in \overline{\Omega}$ . Puisque  $S_n(x, t_n)$  et  $U_{1n}(x, t_n)$  sont deux fois continuellement différentiables par rapport à  $x$  et  $(S_n, U_{1n}, U_{2n}) \in B$ , on a que  $\{S_n(x, t_n)\}_{n \geq 1}$  et  $\{U_{1n}(x, t_n)\}_{n \geq 1}$  sont équicontinues sur  $\overline{\Omega}$ .

à partir du système (2.1) nous avons la première équation

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \delta \Delta S + \Lambda - \mu S(x, t) - \beta S(x, t) U_1(x, t), \quad (2.17)$$

On utilise le changement de variable suivante

$$\bar{S}_n(x, t) = S_n(x, t + t_n), \quad \bar{U}_{1n}(x, t) = U_1(x, t + t_n).$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t))^2 = 2(\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)) \frac{\partial}{\partial t} (\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)),$$

En remplacement dans la première équation du système (2.1) on trouve

$$\begin{aligned} &= 2(\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)) (\delta \Delta \bar{S}_n(x, t) + \Lambda - \mu \bar{S}_n(x, t) - \beta \bar{S}_n(x, t) \bar{U}_{1n}(x, t)) \\ &\quad - (\delta \Delta \bar{S}_n(y, t) - \Lambda + \mu \bar{S}_n(y, t) + \beta \bar{S}_n(y, t) \bar{U}_{1n}(y, t)). \end{aligned}$$

Par un simple calcul, nous avons que

$$\begin{aligned} &(\delta \Delta \bar{S}_n(x, t) \mu \bar{S}_n(x, t) - \beta \bar{S}_n(x, t) \bar{U}_{1n}(x, t) - (\delta \Delta \bar{S}_n(y, t) + \mu \bar{S}_n(y, t) + \beta \bar{S}_n(y, t) \bar{U}_{1n}(y, t))) \\ &= \bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t) (\delta \Delta - \delta \Delta - \beta (\bar{U}_{1n}(x, t) - \bar{U}_{1n}(y, t)) - \mu + \mu) + \underbrace{\beta \bar{S}_n(y, t) (\bar{U}_{1n}(y, t) - \bar{U}_{1n}(x, t))}_{h_n(x, t, y)}. \end{aligned}$$

Soit

$$h_n(x, t, y) = \beta \bar{S}_n(y, t) (\bar{U}_{1n}(y, t) - \bar{U}_{1n}(x, t)).$$

On remarque que  $\bar{S}_n(x, t) \bar{U}_{1n}(x, t)$  est uniformément bornée pour tout :  $n \geq 1$ ,  $t \geq 0$ , et  $x \in \Omega$ . Alors, il exist  $M > 0$  telle que

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)\|^2 \leq -2\mu \|\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)\| + M h_n(x, t, y).$$

En échangeant la position de  $x$  et  $y$ , Nous avons que

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)\|^2 \leq -2\mu \|\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)\| + Mh_n(t, x, y).$$

Définir  $H_n(t, x, y) = h_n(t, x, y) + h_n(x, t, y)$ , il s'ensuit alors que

$$\frac{\partial}{\partial t} \|\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)\|^2 \leq -2\mu \|\bar{S}_n(x, t) - \bar{S}_n(y, t)\| + MH_n(t, x, y),$$

pour tous  $t > 0, t, x \in \bar{\Omega}$ .

Notons que  $\{U_{1n}(x, t_n)_{n \geq 1}\}$  est équicontinu sur  $\bar{\Omega}$  pour tout  $n \geq 1$ . Ainsi, il suffit à démontrer que  $\{S_n(x, t_n)_{n \geq 1}\}$  est équicontinu sur  $\bar{\Omega}$  pour tout  $n \geq 1$ .

Il découle de (2.5) et d'arguments similaires à ceux que nous avons suivis que  $U_{2n}(x, \theta, t_n)_{n \geq 1}$  est équicontinu sur  $\bar{\Omega}$ . En fait, à partir de (2.5), nous avons que

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} |U_{2n}(x, \theta, t_n) - U_{2n}(y, \theta, t_n)| d\theta \\ & \leq \int_0^{t_n} \gamma(x) \Pi |U_{1n}(x, t_n - \theta) - U_{1n}(y, t_n - \theta)| d\theta \\ & + \int_{t_n}^{+\infty} |U_{2n}(x, \theta - t_n, 0) - U_{2n}(y, \theta - t_n, 0)| \frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t_n)} d\theta. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Puisque  $U_{2n}(x, \theta, 0)$  est uniformément borné, le dernier terme converge clairement vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Il découle de hypothèse (A4) que  $\gamma(x)$  est continu. Il s'ensuit en outre que  $U_{1n}(x, t_n)_{n \geq 1}$  est équicontinu et nous avons que les deux derniers termes de (2.18) convergent vers 0 lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Nous pouvons en déduire que le semi-flot de solution  $\Psi(t)$  est  $\mathcal{K}$ -contractant par rapport à la mesure de Kuratowski définie dans (2.16), c'est à dire

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathcal{K}(\Psi(t)(B)) = 0,$$

pour tout ensemble bornée  $B \subset X_+$ .

Proposition 2.1 indique que le semi-flot  $\Psi(t)$  est ponctuellement dissipatif ou dissipatif point par point. Alors, on a



**Théorème 2.1.** *La solution semi-flot  $\Psi(t)$  admet un attracteur global  $A$ , qui attire tous les sous-ensembles bornés de  $X_+$ .*

## 2.2 Nombre de reproduction de base

Pour étudier la dynamique de notre système, nous devons introduire le nombre de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$ . nous définissons le nombre de base constitue le nombre de cas secondaires produits par un individu infectieux moyen au cours de sa période d'infectiosité dans une population entièrement constituée de personnes sensibles (non immunisées).

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , l'épidémie peut s'installer.

Si  $\mathcal{R}_0 < 1$ , il y a peu de chances d'avoir une épidémie.

**Lemme 2.6.** *Le Nombre de reproduction  $\mathcal{R}_0$  du système (2.1), et*

$$\mathcal{R}_0 = \sup_{0 \neq \phi \in H^1(\Omega)} \frac{\beta \frac{\Lambda}{\mu}}{(\mu + \nu_1) + ((1 - \mathcal{K}) \int_{\Omega} \gamma(x) \phi^2(x) dx + \int_{\Omega} \delta |\nabla \phi(x)|^2 dx)}. \quad (2.19)$$

**Preuve 5.** *Soit*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} = \delta \Delta y + \beta \frac{\Lambda}{\mu} y(x, t) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x)) y(x, t) + \int_0^{\infty} k(\theta) z(x, \theta, t) d\theta, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \theta} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta)) z(x, \theta, t), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ z(x, 0, t) = \gamma(x) y(x, t), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial y(x, t)}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad x \in \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (2.20)$$

*Résoudre la deuxième et troisième équations, on obtient*

$$z(x, \theta, t) = \begin{cases} \gamma(x) y(x, t - \theta) \Pi(\theta), & \text{si } t \leq \theta, \\ z(x, \theta - t, 0) \frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t)}, & \text{si } \theta \leq t. \end{cases} \quad (2.21)$$

En remplaçant (2.21) dans la première équation de (2.20), ce qui donne

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \delta\Delta y - c(x)y(x, y) + \int_0^t k(\theta)\gamma(x)y(x, t - \theta)\Pi(\theta)d\theta + \int_t^\infty k(\theta)z(x, \theta - t, 0)\frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t)}d\theta. \quad (2.22)$$

Posant

$$c(x) := \mu + \nu_1 + \gamma(x) - \beta\frac{\Lambda}{\mu}. \quad (2.23)$$

Résoudre (2.22), nous avons

$$y(x, t) = f(x, t) + \int_0^t \int_0^\infty k(\theta)\gamma(x)y(x, s - \theta)\Pi(\theta)d\theta \times e^{(\delta\Delta - c(x))(t-s)} ds,$$

où

$$f(x, t) = y(x, 0)e^{(\delta\Delta - c(x))t} + \int_0^t \int_s^\infty k(\theta)z(x, \theta - s, 0)\frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - s)}d\theta ds.$$

En échangeant l'ordre des intégrales, nous avons

$$\begin{aligned} y(x, t) &= f(x, t) + \gamma(x) \int_0^t k(\theta)\Pi(\theta) \times \int_0^t y(x, s - \theta)e^{(\delta\Delta - c(x))(t-s)} ds d\theta \\ &= f(x, t) + \gamma(x) \int_0^t k(\theta)\Pi(\theta) \times \int_0^{t-\theta} y(x, s)e^{(\delta\Delta - c(x))(t-s-\theta)} ds d\theta \\ &= f(x, t) + \gamma(x) \int_0^t k(\theta)\Pi(\theta) \times \int_0^t y(x, t - s)e^{(\delta\Delta - c(x))(s-\theta)} ds d\theta \\ &= f(x, t) + \gamma(x) \int_0^t \int_0^s k(\theta)\Pi(\theta)e^{(\delta\Delta - c(x))(s-\theta)} d\theta \times y(x, t - s) ds. \end{aligned}$$

Alors l'opérateur de la prochaine génération est donné par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(x) &= \gamma(x) \int_0^\infty \int_0^s k(\theta)\Pi(\theta)e^{(\delta\Delta - c(x))(s-\theta)} d\theta ds \\ &= \gamma(x) \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta) \times \int_\theta^\infty e^{(\delta\Delta - c(x))(s-\theta)} ds d\theta \\ &= \gamma(x) \int_0^\infty k(\theta)\Pi(\theta)d\theta \times \int_0^\infty e^{(\delta\Delta - c(x))s} ds \\ &= K\gamma(x)(c(x) - \delta\Delta)^{-1} \\ &= K\gamma(x) \left( \mu + \nu_1 + \gamma(x) - \beta\frac{\Lambda}{\mu} - \delta\Delta \right)^{-1} \\ &:= PL, \end{aligned}$$

où  $P = \frac{\mathcal{K}\gamma(x)}{\mu + \nu_1 + \gamma(x) - \beta \frac{\Lambda}{\mu}}$ ,  $L = \left( \mu + \nu_1 + \gamma(x) - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \right) \left( \mu + \nu_1 + \gamma(x) - \beta \frac{\Lambda}{\mu} - \delta \Delta \right)^{-1}$ ,  $\mathcal{R}(x)$  est strictement positif. Par le théorème de Krein Rutman, la compacité et la positivité de  $\mathcal{R}(x)$  montre que  $\tilde{\mathcal{R}}_0 = r(PL)$  est la seule valeur propre de  $\mathcal{R}(x)$  avec une fonction propre positive,  $\tilde{\mathcal{R}}_0$  à une variation formulaire de caractérisation

$$\tilde{\mathcal{R}}_0 = \sup_{0 \neq \phi \in H^1(\Omega)} \left\{ \frac{1}{\int_{\Omega} \left[ \delta |\nabla \phi|^2 + \left( \mu + \nu + 1 + \gamma(x) - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \right) \phi^2 \right] dx} \int_{\Omega} \mathcal{K}\gamma(x) \phi^2 dx \right\}.$$

De plus, à partir du Nombre de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  défini dans (2.19), on a facilement l'équivalence suivante  $\mathcal{R}_0$  et  $\tilde{\mathcal{R}}_0$  :

$$\tilde{\mathcal{R}}_0 > 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 > 0, \quad \tilde{\mathcal{R}}_0 = 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 = 0, \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{R}}_0 < 1 \Leftrightarrow \mathcal{R}_0 < 1.$$

**Exemple 2.1.** Le  $\mathcal{R}_0$  du Covid-19 était estimé début 2020, d'après les données de l'épidémie en Chine, à 3,28 en moyenne, un chiffre calculé d'après douze estimations différentes dans une revue de la littérature publiée dans le Journal du médecine. Cela signifie qu'en Chine, une personne infectée par le covid 19 aurait infecté en moyenne 3,28 nouvelle personnes.

Il est bien connue que le problème elliptique

$$-\delta \Delta_x S = \Lambda - \mu S, \quad x \in \Omega, \quad \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial \Omega. \quad (2.24)$$

admet une solution unique positive  $S^0 = \frac{\Lambda}{\mu}$ . Alors  $E^0 = (S^0, 0, 0)$  est un état stationnaire spatialement homogène de (2.1), que nous appelons l'état d'équilibre sans épidémie. Dans ce travail, la stabilité de  $E^0$  est complètement déterminé par  $\mathcal{R}_0$ .

**Lemme 2.7.** (i)  $\mathcal{R}_0$  est une fonction décroissante de  $\delta$ , avec

$$\mathcal{R}_0 \longrightarrow \max_{x \in \bar{\Omega}} \frac{\beta \frac{\Lambda}{\mu}}{\mu + \nu_1 + (1 - \mathcal{K})\gamma(x)} \quad \delta \longrightarrow 0,$$

et

$$\mathcal{R}_0 \longrightarrow \frac{\beta \frac{\Lambda}{\mu}}{\mu + \nu_1 + (1 - \mathcal{K})\bar{\gamma}} \text{ lorsque } \delta \longrightarrow \infty \text{ avec } \bar{\gamma} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \gamma(x) dx.$$

(ii) Si  $\beta \frac{\Lambda}{\mu} < \mu + \nu_1 + (1 - \mathcal{K})\bar{\gamma}$ , alors il existe une valeur seuil  $\delta^*$  telle que  $\mathcal{R}_0 < 1$  pour  $\delta > \delta^*$  et  $\mathcal{R}_0 > 1$  pour tous  $\delta < \delta^*$ .

(iii) Si  $\beta \frac{\Lambda}{\mu} > \mu + \nu_1 + (1 - \mathcal{K})\bar{\gamma}$ , alors  $\mathcal{R}_0 > 1$  pour tous  $\delta > 0$ .

# Chapitre 3

## Stabilité locale

### 3.1 Stabilité de l'état d'équilibre sans épidémie

Pour étudier la stabilité du point d'équilibre sans épidémie, nous allons d'abord considérer un problème aux valeurs propres associé au système (2.1). Le comportement à long terme du système (2.1) est déterminé par les trajectoires totales sur les Attracteurs compacts globaux du système (2.1). Nous linéarisons lorsque le système (2.1) autour **Problème de valeurs propres**. L'état d'équilibre  $E^0 = (S^0, 0, 0)$  on obtient.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \delta \Delta \eta - \mu \eta(x, t) - \beta \frac{\Lambda}{\mu} y(x, t), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial t} = \delta \Delta y + \beta \frac{\Lambda}{\mu} y(x, t) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x)) y(x, t) + \int_0^\infty k(\theta) z(x, \theta, t) d\theta, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial \theta} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta)) z(x, \theta, t), \quad x \in \bar{\Omega}, \\ z(x, 0, t) = \gamma(x) y(x, t) \quad x \in \bar{\Omega}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial y}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

où  $\eta(x, t) = S(x, t) - \frac{\Lambda}{\mu}$ ,  $y(x, t) = U_1(x, t)$  et  $z(x, \theta, t) = U_2(x, \theta, t)$ . Supposons que  $\eta(x, t) = e^{\lambda t} \phi(x)$ ,  $y(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x)$  et  $z(x, \theta, t) = e^{\lambda t} \psi(x, \theta)$  avec  $\lambda \in \mathcal{R}$ . En Remplaçant cette solution dans les équations linéaires du système (3.1), on obtient le problème aux valeurs propres

suisant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda\phi(x) = \delta\Delta\phi - \mu\phi(x) - \beta\frac{\Lambda}{\mu}\phi(x), \quad x \in \Omega, \\ \lambda\phi(x) = \delta\Delta\phi + \beta\frac{\Lambda}{\mu}\phi(x) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x))\phi(x) + \int_0^\infty k(\theta)\psi(x, \theta)d\theta, \quad x \in \Omega, \\ \lambda\psi(x, \theta) + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))\psi(x, \theta), \\ \psi(x, 0) = \gamma(x)\phi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

Remarquer que la première équation due (3.2) indépendantes des autres équations suivantes dues (3.2). Nous considérons donc le système à compartiments liés

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} = \delta\Delta y + \beta\frac{\Lambda}{\mu}y(x, t) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x))y(x, t) + \int_0^\infty k(\theta)z(x, \theta, t)d\theta, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial\theta} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))z(x, \theta, t), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ z(x, 0, t) = \gamma(x)y(x, t), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial y}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad x \in \overline{\Omega}. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Ensuite, la version généralisée du système (3.3) est obtenue comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial t} = \delta\Delta y + \beta T(x)y(x, t) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x))y(x, t) + \int_0^\infty k(\theta)z(x, \theta, t)d\theta, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial\theta} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))z(x, \theta, t), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ z(x, 0, t) = \gamma(x)y(x, t), \quad x \in \overline{\Omega}, \\ \frac{\partial y}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

où  $T(x) > 0$ , pour tous  $x \in \overline{\Omega}$ . Il est facile de voir que (3.4) est un système coopératif. Il s'ensuit de la forme (3.4) que le problème de valeur propre associée

$$\begin{cases} \lambda\varphi(x) = \delta\Delta\varphi + \beta T(x)\varphi(x) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x))\varphi(x) + \int_0^\infty k(\theta)\psi(x,\theta)d\theta, & x \in \Omega, \\ \lambda\psi(x,\theta) + \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))\psi(x,\theta), & x \in \overline{\Omega}, \\ \psi(x,0) = \gamma(x)\varphi(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.5)$$

Le lemme suivant présente l'existence de la valeur propre principale du (3.5).

**Lemme 3.1.** *Pour  $T(x) > 0$ , pour tous  $x \in \overline{\Omega}$ , le problème aux valeurs propres (3.5) a une valeur propre principale, notée  $\lambda(T)$  qui est associé à une fonction propre positive.*

**Preuve 6.** [26]

Notons  $\mathbb{Y} := C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}) \times L^1((0, \infty), \mathbb{C})$ . Pour chaque fonction initiale  $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in \mathbb{Y}$  la solution  $\Phi_t : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$  associée au système linéaire (3.4) est définie par

$$\Phi_t(\phi) = (y(\cdot, t; \phi), z(\cdot, \cdot, t; \phi)), \text{ pour tous } \phi \in \mathbb{Y}, t \geq 0.$$

En suivant le même raisonnement que dans la démonstration due lemme 2.5, on peut obtenir que pour chaque  $t > 0$ ,  $\Phi_t$  est une  $\mathcal{K}$ -contraction sur  $\mathbb{Y}$  au sens où

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{K}(\Phi_t(B)) = 0.$$

Pour toute ensemble bornée  $B$  dans  $\mathbb{Y}$  et  $\mathcal{K}$ , défini dans (2.16). Sur la base des discussions ci-dessus, il est facile de voir que la carte de solution  $\Phi_t$  généré par (3.4) est  $\mathcal{K}$ -condensante dans le sens où

$$\mathcal{K}(\Phi_t(B)) < \mathcal{K}(B), \text{ pour tout ensemble borné } B \text{ dans } \mathbb{Y} \text{ avec } \mathcal{K}(B) > 0, t > 0.$$

Par le théorème généralisé de Krein-Rutman on a :

Soit  $\Phi_t : \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{Y}$  un opérateur linéaire fortement positif est borné. Supposons que le rayon spectral principal  $r_e(\Phi_t)$  de  $\Phi_t$  est inférieur rayon spectral  $r(\Phi_t)$  de  $\Phi_t$  : alors  $r(\Phi_t)$  est une simple valeur propre de  $\Phi_t$  avec un vecteur propre  $\vartheta^* = (\varphi^*, \psi^*)$ ; et toutes les autres valeurs propres de  $\Phi_t$  valeurs absolues inférieures à  $\lambda(t)$ .

et on dit que  $\lambda$  est une valeur propre s'il y a une solution non triviale (fonction propre); on recherche en particulier une valeur propre  $\lambda$  ayant une valeur positive fonction propre, donc Eq. (3.5) À une valeur propre principale, notée  $\lambda(T)$  avec un vecteur propre associé ou  $\vartheta^* = (\varphi^*, \psi^*) \gg 0$ .

Choisir  $T(x) = \frac{\lambda}{\mu}$ , par le lemme 3.1, Nous avons que la valeur propre principale de (3.5) Peut-être notée

$$\lambda^* := \lambda(T)|_{T=\frac{\lambda}{\mu}}. \quad (3.6)$$

Après la préparation ci-dessus, nous tournons maintenant vers le problème des valeurs propres (3.2) pour prouver la stabilité locale de Eq. À partir des deux dernières équations de (3.2), on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} &= -(\lambda + \mu + \nu_2 + k(\theta))\psi(x, \theta), \\ \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\psi(x, \theta)} &= -(\lambda + \mu + \nu_2 + k(\theta))\partial \theta, \\ \int \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\psi(x, \theta)} &= - \int (\lambda + \mu + \nu_2 + K(\theta))\partial \theta, \\ \ln |\psi(x, \theta)| &= - \int \lambda \partial \theta - \int (\mu + \nu_2 + K(\theta))\partial \theta + \ln(c), \\ \psi(x, \theta) &= e^{-\lambda \theta} \cdot e^{- \int (\mu + \nu_2 + k(\theta))\partial \theta} \cdot C. \end{aligned}$$

alors la solution est :

$$\psi(x, \theta) = \gamma(x)e^{-\lambda^* \theta} \Pi(\theta) \varphi(x). \quad (3.7)$$

En substituant (3.7) à la seconde équation de (3.2), il découle du

$$\begin{aligned} \delta \Delta \varphi^* + \beta \frac{\Delta}{\mu} \varphi^*(x) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x))\varphi^*(x) + \int_0^\infty k(\theta)\psi(x, \theta)d\theta &= \lambda^* \varphi^*(x), \\ \delta \Delta \varphi^* + \beta \frac{\Delta}{\mu} \varphi^*(x) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x))\varphi^*(x) + \gamma(x) \int_0^\infty k(\theta)e^{-\lambda^* \theta} \Pi(\theta)d\theta &= \lambda^* \varphi^*. \end{aligned} \quad (3.8)$$



pour  $x \in \Omega$  et  $\frac{\partial \varphi^*}{\partial \mathbf{n}} = 0$  pour  $x \in \partial\Omega$ .

De l'expression du nombre de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  dans (2.19), nous avons qu'il existe un fonction positif  $\Phi(x) \in C^2(\overline{\Omega})$  telle que

$$-\delta\Delta\Phi(x) + (\mu + \nu_1 + (1 - K)\gamma(x))\Phi(x) - \frac{\beta\Lambda/\mu}{\mathcal{R}_0}\Phi(x) = 0, \quad x \in \Omega. \quad (3.9)$$

avec  $\frac{\partial \Phi(x)}{\partial \mathbf{n}} = 0$ ,  $x \in \partial\Omega$ . Rappelez-vous que  $\varphi^*$  et  $\Phi$  sont tous les deux positifs  $\Omega$  et que  $\frac{\partial \varphi^*(x)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial \mathbf{n}} = 0$  sur  $\partial\Omega$ . On multiplie (3.8) par  $\Phi$  et (3.9) par  $\varphi^*$ , on les additionne et intègre par pièces sur  $\Omega$  pour obtenir :

$$(-K\gamma(x))\varphi^*\Phi + \beta\frac{\Lambda}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)\varphi^*\Phi + \gamma(x)\int_0^\infty k(\theta)e^{-\lambda^*\theta}\Pi(\theta)d\theta\varphi^*\Phi = \lambda^*\varphi^*\Phi$$

$$\beta\frac{\Lambda}{\mu}\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0}\right)\int_\Omega \varphi^*(x)\Phi(x)dx + \hat{p}\int_\Omega \gamma(x)\varphi^*\Phi(x)dx = \lambda^*\int_\Omega \varphi^*\Phi(x)dx.$$

où

$$\hat{p} = \int_0^\infty k(\theta)e^{-\lambda^*\theta}\Pi(\theta)d\theta - K.$$

Puisque  $\int_\Omega \gamma(x)\varphi^*\Phi(x)dx$  et  $\int_\Omega \varphi^*(x)\Phi(x)dx$  sont tous deux positifs, nous concluons que  $\mathcal{R}_0 - 1$  et  $\lambda^*$  ont le même signe. En fait, si nous supposons que  $\lambda^* > 0$  lorsque  $\mathcal{R}_0 - 1 < 0$ , alors  $\hat{p} < 0$  et donc  $\lambda^* < 0$  ce qui conduit à une contradiction. Si nous supposons que  $\lambda^* < 0$  lorsque  $\mathcal{R}_0 - 1 > 0$ , alors  $\hat{p} > 0$  et donc  $\lambda^* > 0$  ce qui conduit à une contradiction. Si nous supposons en outre que  $\lambda^* \neq 0$  lorsque  $\mathcal{R}_0 - 1 = 0$ , nous obtenons également une contradiction. En conclusion, nous avons le résultat suivant.

**Lemme 3.2.**  $\mathcal{R}_0 - 1$  et  $\lambda^*$  ont le même signe.

Nous montrons maintenant que la stabilité du point d'équilibre sans épidémie  $E^0 = (S^0, 0, 0)$  est entièrement déterminée par  $\mathcal{R}_0$ .

**Lemme 3.3.** Le point d'équilibre sans épidémie  $E^0$  est localement stable si  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

**Preuve 7.** [27]

Supposons d'abord que  $\mathcal{R}_0 < 1$ . Nous montrerons que point d'équilibre sans épidémie le est linéairement stable. Autrement dit, si  $(\lambda, \phi, \varphi)$  est une solution de (3.2), avec au moins un de  $\phi$  ou  $\varphi$  non identiquement nul sur  $\Omega$ , alors  $\text{Re}(\lambda)$  doit être négatif. (i) Si  $\varphi \equiv 0$  et  $\phi \neq 0$ , il découle alors de la première équation de (3.2) que nous avons :

$$\lambda\phi(x) = \delta\Delta\phi - \mu\phi(x), \quad x \in \Omega, \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.10)$$

Il existe un nombre incalculable de valeurs propres  $\lambda^n, n \geq 0$ , qui sont tous réels et satisfont  $\lambda^n \rightarrow \infty$  comme  $n \rightarrow \infty$ . Ils peuvent être commandés comme suit

$$\dots < \lambda^{n+1} < \lambda^n < \dots < \lambda^1 < \lambda^0$$

donc le problème des valeurs propres (3.10) À une valeur propre principale, noté  $\lambda^0$ , avec un vecteur propre associé  $\phi^0 \gg 0$  et  $\lambda^0 < 0$ . (ii) Si  $\phi \equiv 0$  et  $\varphi \neq 0$ , alors (3.2) n'a pas de solution. (iii) Si  $\phi \neq 0$  et  $\varphi \neq 0$ , il découle également de (3.8) que  $\text{Re}(\lambda) \leq \lambda^* < 0$ . La fonction propre  $\phi$  est une solution de la équation suivante

$$\lambda^*\phi(x) = \delta\Delta\phi - \mu\phi(x) - \beta\frac{\Lambda}{\mu}\varphi^*(x), \quad x \in \Omega, \text{ et } \frac{\partial\phi}{\partial\mathbf{n}} = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.11)$$

Si  $\lambda^* = \lambda^0$ , Eq. (3.11) n'a pas de solution, alors la valeur propre principale de (3.10)  $\lambda^0$  est aussi la valeur principale valeur propre de (3.2). Si  $\lambda^* \neq \lambda^0$ , Eq. (3.11) Peut-être résolu et la valeur propre principale de (3.2) est  $\max\{\lambda^*, \lambda^0\}$ . Nous concluons que le point d'équilibre sans épidémie  $E^0$  est localement asymptotiquement stable si  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

L'objectif principal de cette section est d'établir la dynamique du seuil de (2.1), qui stipule que l'horosphère l'utilisation disparaîtra de la population si  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

**Théorème 3.1.** Soit  $(S, U_1, U_2)$  l'unique solution du (2.1). Si  $\mathcal{R}_0 < 1$ , alors

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (S(x, t) - S^0) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} U_1(x, t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty U_2(x, \theta, t) d\theta = 0$$

uniformément pour tous  $x \in \overline{\Omega}$ .

**Preuve 8.** [10]

Supposons que  $\mathcal{R}_0 < 1$ . En s'appuyant sur le principe de comparaison on obtient

$$U_1(\cdot, t) \longrightarrow 0, \text{ uniformément sur } \overline{\Omega} \text{ quand } t \longrightarrow \infty.$$

Maintenant, nous concentrons sur les deux dernières équations du système (2.1). Nous avons à

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\delta \Delta U_1 + \beta S(x, t) U_1(x, t) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x)) U_1(x, t) + \int_0^\infty k(\theta) U_2(x, \theta, t) d\theta, \\ \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \nu_1 + k(\theta)) U_2(x, \theta, t), \quad x \in \Omega, \\ U_2(x, 0, t) = -\gamma(x) U_1(x, t), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad t > 0 \quad x \in \partial \Omega, \\ U_1(x, 0) = U_{10}, U_2(x, \theta, 0) = U_{20}(x, \theta). \end{array} \right. \quad (3.12)$$

Ensuite, il découle de  $S(x, t) \leq \frac{\Lambda}{\mu}$  dans (2.8) que

$$U_1(x, t) \leq I_1(x, t) \text{ et } U_2(x, \theta, t) \leq I_2(x, \theta, t), \quad (3.13)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_1}{\partial t} = \delta \Delta I_1 + \beta \frac{\Lambda}{\mu} I_1(x, t) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x)) I_1(x, t) + \int_0^\infty k(\theta) I_2(x, \theta, t) d\theta, \\ \frac{\partial I_2(x, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial I_2(x, \theta, t)}{\partial t} = (\mu + \nu_1 + k(\theta)) I_2(x, \theta, t), \quad x \in \Omega, \\ I_2(x, 0, t) = \gamma(x) I_1(x, t), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial \Omega, \\ I_1(x, 0) = I_{10} \geq U_{10}(x), I_2(x, \theta, 0) = U_{20}(x, \theta). \end{array} \right. \quad (3.14)$$

Soit  $I_1(x, t) = e^{\lambda t} \varphi(x)$ ,  $I_2(x, \theta, t) = e^{\lambda t} \psi(x, \theta)$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nous substituons cette solution dans

(3.14), on obtient le problème aux valeurs propres linéaire suivant

$$\begin{cases} \lambda\varphi(x) = \delta\Delta\varphi + \beta\frac{\Lambda}{\mu}\varphi(x) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x))\varphi(x) + \int_0^\infty k(\theta)\psi(x,\theta)d\theta, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\psi(x,\theta)}{\partial\theta} = -(\lambda + \mu + \nu_2 + k(\theta))\psi(x,\theta), & x \in \Omega, \\ \psi(x,0) = \gamma(x)\varphi(x,t), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3.15)$$

En vue de (2.2), nous devons avoir que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}, \quad x \in \partial\Omega.$$

En résolvant les deuxième et troisième équations de (3.15), nous avons

$$\psi(x,\theta) = \gamma(x)\varphi(x)e^{-\lambda\theta}\Pi(\theta). \quad (3.16)$$

En substituant (3.16) à la deuxième équation du (3.15), nous avons le problème aux valeurs propres suivantes

$$\begin{cases} \lambda\varphi(x) = \delta\Delta\varphi + \beta\frac{\Lambda}{\mu}\varphi(x) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x))\varphi(x) \\ \quad + \gamma(x) \int_0^\infty k(\theta)e^{-\lambda\theta}\Pi(\theta)d\theta\varphi(x), & x \in \Omega, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (3.17)$$

ce qui confirme (3.8). On peut alors définir  $I_1(x,t) = Me^{\lambda^*t}\varphi^*(x)$ , ou  $\lambda^* < 0$  par le Lemme 3.2,  $\varphi^* > 0$  sur  $\Omega$ , et  $M$  est choisi assez grand que

$U_1(x,0) \leq I_1(x,0)$  pour tout  $x \in \Omega$ . Depuis  $\lambda^* < 0$  nous avons  $I_1(x,t) = Me^{\lambda^*t}\varphi^*(x) \rightarrow 0$  quand  $t \rightarrow \infty$  pour tout  $x \in \Omega$ . D'après (3.13), tel que  $U_1(x,t) \rightarrow 0$  comme  $t \rightarrow \infty$  pour tous  $x \in \Omega$ . Ensuite, on montre que  $S(x,t) \rightarrow \Lambda/\mu$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  pour tout  $x \in \Omega$ . étant donnée tout petit constant  $\epsilon > 0$ , il existe un  $T > 0$  et suffisamment grand, tel que  $0 \leq U_1(x,t) \leq \epsilon$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $t > T$ . À partir de la première équation de (2.1) et Lemme 2.2, il est facile d'observer que  $U_1$

est une sur solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \Delta v + \Lambda - \mu v(x, t) - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \epsilon, & x \in \Omega, t > T, \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial \Omega, t > T, \\ v(x, T) = S(x, T), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.18)$$

et une sous-solution de

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \delta \Delta v + \Lambda - \mu v(x, t), & x \in \Omega, t > T, \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial \Omega, t > T, \\ v(x, T) = S(x, T), & x \in \Omega, \end{cases} \quad (3.19)$$

Soient  $v_1(\epsilon, x, t)$  et  $v_2(x, t)$  les solutions des problèmes (3.18) Et (3.19), respectivement. Alors, ont a

$$v_1(\epsilon, x, t) \longrightarrow \frac{\Lambda - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \epsilon}{\mu}, \quad v_2(x, t) \longrightarrow \frac{\Lambda}{\mu}, \quad \text{lorsque } t \longrightarrow \infty.$$

Puisque  $v_1(\epsilon, x, t) \leq S(x, t) \leq v_2(x, t)$ , nous avons

$$\frac{\Lambda - \beta \frac{\Lambda}{\mu} \epsilon}{\mu} \leq S(x, t) \leq \frac{\Lambda}{\mu},$$

pour tout  $t$  assez grand et tout  $\epsilon$ . On peut donc obtenir que  $S(x, t) \longrightarrow \frac{\Lambda}{\mu} = S^0$  quand  $t \longrightarrow \infty$ .

## Existence de l'état d'équilibre de la propagation du épidémie

### 3.2 Persistance uniforme

Dans cette section, nous prouverons l'existence de l'état d'équilibre de la propagation du épidémie sur la base des résultats de persistance

**Lemme 3.4.** Supposons que  $\mathcal{U}(x, t; \phi)$  est la solution du système (2.1) avec  $\mathcal{U}(\cdot, 0; \phi) = \phi \in X_+$ .

(i) S'il existe  $t_0 \geq 0$ , tel que  $S(\cdot, t_0; \phi) \neq 0, U_1(\cdot, t_0; \phi) \neq 0$ , alors  $S(\cdot, t; \phi) > 0, U_1(x, t_0; \phi) > 0$ , pour tout  $x \in \bar{\Omega}, t > t_0$ ,

(ii) S'il existe  $t_0 \geq 0$ , tel que  $U_1(\cdot, t_0; \phi) \neq 0$ , alors  $U_2(\cdot, \cdot, t; \phi) > 0$ , pour tout  $x \in \bar{\Omega}, t > t_0$ ,

(iii) Pour tout  $\phi \in X_+$ , on a toujours  $S(\cdot, t; \phi) > 0$ , pour tout  $x \in \bar{\Omega}, t > t_0$  et

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(\cdot, t; \phi) \geq \frac{\Lambda}{\mu + 2\beta S^0},$$

où  $S^0 = \Lambda/\mu$ .

**Preuve 9.** Il est facile d'établir que  $S$  et  $U_1$  satisfont à

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \geq \delta \Delta S(x, t) - \mu S(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \bar{\Omega}, t > 0, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{\partial U_1(x, t)}{\partial t} \geq \delta \Delta U_1(x, t) - (\mu + v_1 + \gamma_*) U_1(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}}, & x \in \partial \Omega, t > 0. \end{cases}$$

cette partie (i) est valide. où partir de (2.5), nous avons

$$U_2(x, \theta, t) = \gamma(x) U_1(x, t - \theta) \Pi(\theta) + U_2(x, \theta - t, 0) \frac{\Pi(\theta)}{\Pi(\theta - t)}.$$

Cela indique que la partie (ii) est valide.

De la proposition 2.1, il s'ensuit qu'il existe  $t_1 > 0$  tel que  $U_1(x, t) \leq 2S^0$ , pour tout  $t > t_1$ . de la première équation du (2.1), on obtient

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} \geq \delta \Delta S(x, t) + \Lambda - \mu S(x, t) - 2\beta S^0 S(x, t), & x \in \Omega, t > 0, \\ -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} = 0, & x \in \partial \Omega, t > 0. \end{cases}$$

Ainsi, nous avons

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(\cdot, t; \phi) \geq \frac{\Lambda}{\mu + 2\beta S^0}.$$

Nous prouvons maintenant la persistance uniforme du système (2.1). Défini

$$\partial \mathcal{D}_0 = \{U \in \mathcal{D} \mid U_{10}(\cdot) = 0\},$$

et

$$\mathcal{D}_0 = \{U \in \mathcal{D} \mid U_{10}(\cdot) \neq 0\}$$

lemme 2.4 montre que  $\Psi(t)\mathcal{D}_0 \subset \mathcal{D}_0$ ,  $\forall t \geq 0$  et que  $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D} \setminus \partial \mathcal{D}_0$ . Le semi-flot  $\Psi(t)$  est appelé persistance par rapport à  $(\mathcal{D}_0, \partial \mathcal{D}_0)$  s'il existe une constante  $\epsilon > 0$  telle que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \text{dist}(\Psi(t)U, \partial \mathcal{D}_0) > \epsilon$  pour tout  $U \in \mathcal{D}_0$ .

**Lemme 3.5.** Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , alors le système (2.1) est uniformément faiblement persistant dans le sens qu'il existe une constante  $\epsilon > 0$  telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(\cdot, t) > \epsilon, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} U_1(\cdot, t) > \epsilon, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} U_2(\cdot, \theta, t) > \epsilon \Pi(\theta) \gamma(\cdot),$$

pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ .

**Preuve 10.** Supposons  $U_0 \in \partial \mathcal{D}_0$ , pour  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $\theta, t \in \mathbb{R}_+$ . Le système (2.1) peut être réécrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial t} = \delta \Delta S(x, t) + \Lambda - \mu S(x, t), \\ U_1(x, t) = 0, \\ \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial t} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta))U_2(x, \theta, t), \\ U_2(x, 0, t) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Il s'ensuit que  $S(x, t)$  converge uniformément vers  $S^0$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  pour tout  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $U_1(x, t)$  et  $U_2(x, \theta, t)$  convergent uniformément vers  $0_{L^1}$ . Ainsi l'ensemble "oméga-limit" des orbites  $\Psi(t)U(t) \geq 0$

est l'ensemble singleton  $E^0$ . Supposons  $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}_0$ . Ensuite, nous pouvons prouver que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Psi(t)U_0(\cdot) - E^0\|_\infty \geq \epsilon,$$

pour tout  $\epsilon > 0$  et  $W^S(E^0) \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$  où  $W^S(E^0)$  est le collecteur de  $E^0$ . Supposons par contradiction qu'il existe  $\mathcal{U}_0^{(n)} \in \mathcal{D}_0$  telle que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|\Psi(t)\mathcal{U}_0^{(n)}(\cdot) - E^0\|_\infty < \frac{1}{n}.$$

Alors, il existe  $t_0$  telle que

$$S^0 - \frac{1}{n} \leq S^{(n)}(x, t) \leq S^0 + \frac{1}{n}, \quad U_1^{(n)}(x, t) \leq \frac{1}{n},$$

pour tout  $t > t_0$ . À partir de la première équation du système (2.1) pour  $t > t_0$  et  $x \in \bar{\Omega}$ , on a

$$\partial_t S^{(n)}(x, t) \geq \delta \Delta S^{(n)}(x, t) + \Lambda - \epsilon_0 - \mu S^{(n)}(x, t) \quad (3.21)$$

avec  $\epsilon_0 = \beta \frac{1}{n} \left( S^0 + \frac{1}{n} \right)$ . En intégrant l'équation (3.21) on obtient

$$S^{(n)}(x, t) \geq \int_0^t e^{-\mu\theta} \int_\Omega \Gamma_1(x, y, \theta) (\Lambda - \epsilon_0) d\theta dy = \frac{\Lambda - \epsilon_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t}) \geq \frac{\Lambda - \epsilon_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t_0}),$$

où  $\int_\Omega \Gamma_1(x, y, \theta) = 1$  où  $\Gamma_1$  est la Noyau de la chaleur. De la deuxième et la troisième équation du



système (2.1) on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial t} \geq \delta \Delta U_1^{(n)} + \beta \frac{\Lambda - \varepsilon_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t_0}) U_1^{(n)}(x, t) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x)) U_1^{(n)}(x, t) \\ \quad + \int_0^\infty k(\theta) U_2^{(n)}(x, \theta, t) d\theta, \\ \frac{\partial U_2^{(n)}(x, \theta, t)}{\partial \theta} + \frac{\partial U_2^{(n)}(x, \theta, t)}{\partial t} = (\mu + \nu_1 + k(\theta)) U_2^{(n)}(x, \theta, t), \quad x \in \Omega, \\ U_2^{(n)}(x, 0, t) = \gamma(x) U_1^{(n)}(x, t), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad t > 0 \quad x \in \partial\Omega, \\ U_1^{(n)}(x, 0) = U_{10}(x), \quad U_2^{(n)}(x, \theta, 0) = U_{20}(x, \theta). \end{array} \right. \quad (3.22)$$

En choisissant  $m > 0$  assez petit tel que  $U_1^{(n)}(\cdot, t_0) \geq m\varphi(x)$ ,  $U_2^{(n)}(x, \theta, t) \geq m\psi(x, \theta)$ , où  $\varphi(x)$  et  $\psi(x, \theta)$  sont des solutions du système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda \varphi(x) = \delta \Delta \varphi + \beta \frac{\Lambda - \varepsilon_0}{\mu} (1 - e^{-\mu t_0}) \varphi(x) - (\mu + \nu_1 + \gamma(x)) \varphi(x) \\ \quad + \int_0^\infty k(\theta) \psi(x, \theta) d\theta, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \psi(x, \theta)}{\partial \theta} = -(\lambda + \mu + \nu_2 + k(\theta)) \psi(x, \theta), \quad x \in \Omega, \\ \psi(x, 0) = \gamma(x) \varphi(x), \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , alors il existe  $\lambda_m > 0$  correspondant au vecteur propre positif  $(\varphi^{(m)}(x), \psi^{(m)}(x, \theta))$ . En réalité  $me^{\lambda_m t}(\varphi^{(m)}(x), \psi^{(m)}(x, \theta))$  est une sous-solution du système (3.22). En appliquant le principe de comparaison, on trouve

$$U_1^{(n)}(x, t) \geq me^{\lambda_m t} \varphi^{(m)}(x), \quad U_2^{(n)}(x, \theta, t) \geq me^{\lambda_m t} \psi^{(m)}(x, \theta), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad \theta, t \in \mathbb{R}_+.$$

Ensuite  $U_1^{(n)}(x, t)$  et  $U_2^{(n)}(x, \theta, t)$  tendent vers l'infini lorsque  $t \rightarrow \infty$ , ce qui est en contradiction avec

la bornitude de la solution. Donc, il existe  $\epsilon > 0$  tel que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} S(\cdot, t) > \epsilon, \quad \limsup_{t \rightarrow \infty} U_1(\cdot, t) > \epsilon, \quad \text{pour tout } x \in \overline{\Omega}.$$

Il découle du (2.5) que  $U_2(\cdot, \theta, t) > \epsilon \Pi(\theta) \gamma(\cdot)$ , pour tout  $x \in \overline{\Omega}$ .

À partir du lemma 2.5 et du Théorème 3.1, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.2.** Si  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le système (2.1) a au moins un stable positif  $E^* = (S^*(x), U_1^*(x), U_2^*(x, \theta))$ , le système (2.1) est uniformément forte persistence dans  $\mathcal{D}_0$ , en ce sens qu'il existe  $\epsilon > 0$ , tel que

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(\cdot, t) > \epsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} U_1(\cdot, t) > \epsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} U_2(\cdot, \theta, t) > \epsilon \Pi(\theta) \gamma(\cdot).$$

De plus, le système (2.1) a un attracteur globale  $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ .

**Preuve 11.** Définir une fonction continue

$$\begin{aligned} \rho : X_+ &\rightarrow [0, +\infty) \\ \rho(\mathcal{U}_0) &:= \min_{x \in \overline{\Omega}} U_1(x, 0), \mathcal{U}_0 \in X_+. \end{aligned}$$

Il découle du lemme 3.4 que  $\rho^{-1}(0, +\infty) \subseteq \mathcal{D}_0$  et a la propriété que  $\rho$  si  $\rho(\mathcal{U}_0) > 0$  au alors  $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}_0$  avec  $\rho(\mathcal{U}_0) = 0$ , Ensuite  $\rho(\Psi_t(\mathcal{U}_0)) > 0, \forall t > 0, \rho(x) = d(\mathcal{U}_0, \partial \mathcal{D}_0)$ , Cela signifie que  $\rho$  est une fonction de distance pour le semi-flot  $\Psi_t$ .  $E^0$  est isolé et  $W^S(E^0) \cap \mathcal{D}_0 = \emptyset$ . En conséquence il n'y a pas de cycle de  $E^0$  'il existe une constante positive  $\epsilon_u$  telle que pour tout  $\mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}_0$

$$\min_{\phi \in \omega(\mathcal{U}_0)} \rho(\phi) > \epsilon_u, \forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}_0,$$

où  $\omega(\mathcal{U}_0)$  est l'ensemble limite oméga de l'orbite  $\{\Psi(t)\mathcal{U} : t \geq 0\}$ . Donc

$\liminf_{t \rightarrow \infty} U_1(\cdot, x) > \epsilon_u, \forall \mathcal{U}_0 \in \mathcal{D}_0$ . On obtient du Lemme 3.5 qu'il existe une constante positive  $0 < \epsilon < \epsilon_u$  telle que pour tout  $x \in \Omega$

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} S(\cdot, t) > \epsilon, \quad \liminf_{t \rightarrow \infty} U_1(\cdot, t) > \epsilon.$$

Eq. 2.5 on obtient

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} U_2(\cdot, \theta, t) > \epsilon \Pi(\theta) \gamma(\cdot).$$

Il découle de la proposition 2.1 que  $\Psi(t)$  n'est point dissipative, montre qu' existe un attracteur global attraction tous les points de  $\mathcal{D}_0$ . Puisque l'ensemble  $\mathcal{D}_0$ , puisque l'ensemble  $\mathcal{A}_0$  est convexe et la solution de l'application  $\Psi(t)$  est K-contacting (lemma 2.5),  $\Psi(t)$  est état stable  $E^*(\cdot) \in \mathcal{D}_0$ . De plus, le lemme 3.4 implique que  $E^*(\cdot)$  est un état stable positif du système (2.1).

# Chapitre 4

## Stabilité globale

### 4.1 Étude de la stabilité globale du point d'équilibre avec épidémie

Dans cette section, nous étudions la stabilité globale du point d'équilibre (2.1) lorsque le taux de traitement est supposé un constante positive  $\gamma$ , i.e.,  $\gamma(x) \equiv \gamma$ . Le Théorème 3.1 implique que le système (2.1) n'admet pas du point d'équilibre avec épidémie si  $\mathcal{R}_0 < 1$ . Ainsi, il est facile de voir que  $(S^0, 0, 0)$  est l'unique du point d'équilibre sans épidémie de (2.1) et  $E^* = (S^*, U_1^*, U_2^*(\theta))$  est l'unique du point d'équilibre avec épidémie si et seulement si  $\beta \frac{\Lambda}{\mu} > (\mu + \nu_1 + \gamma(1 - \bar{K}))$ , i.e.,

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta \frac{\Lambda}{\mu}}{\mu + \nu_1 + \gamma(1 - \bar{K})} > 1. \quad (4.1)$$

qui vérifie le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = \Lambda - \mu S^* - \beta S^* U_1^*, \\ 0 = \beta S^* U_1^* - (\mu + \nu_1 + \gamma) U_1^* + \int_0^\infty K(\theta) U_2^*(\theta) d\theta, \\ \frac{\partial U_2^*(\theta)}{\partial \theta} = -(\mu + \nu_2 + k(\theta)) U_2^*(\theta), \\ U_2^*(x, 0) = \gamma U_1^*. \end{array} \right. \quad (4.2)$$

S'ensuit alors que

$$S^* = \frac{1}{\mathcal{R}_0} \frac{\Lambda}{\mu}, \quad U_1^* = \frac{\mu}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1), \quad U_2^*(\theta) = \gamma U_1^* \Pi(\theta).$$

Dans ce qui suit, nous construirons des fonctionnelle de Lyapounov appropriées pour étudier la stabilité globale de l'unique point d'équilibre avec épidémie.

**Théorème 4.1.** Soit  $\mathcal{R}_0$  défini dans (4.1). Si  $\mathcal{R}_0 > 1$  alors le point d'équilibre avec épidémie indépendant de l'espace  $\delta = 0, E^*$  est globalement asymptotiquement stable.

**Preuve 12.** Il découle de la troisième et quatrième équations du (4.2) que

$$U_2^*(\theta) = \gamma U_1^* \Pi(\theta). \quad (4.3)$$

Pour prouver la stabilité globale de  $E^*$ , on définit

$$\alpha(\theta) = \int_{\theta}^{\infty} k(\sigma) e^{-\int_{\theta}^{\sigma} (\mu + \nu_2 + k(\tau)) d\tau} d\sigma = \int_{\theta}^{\infty} k(\sigma) \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\theta)} d\sigma.$$

Noter que  $\alpha(\theta) > 0$  pour tout  $\theta \in (0, \infty)$  et  $\alpha(0) = \mathcal{K}$ . On définit

$$\begin{aligned} V_S(x, t) &= S^* g\left(\frac{S(x, t)}{S^*}\right), \\ V_{U_1}(x, t) &= U_1^* g\left(\frac{U_1(x, t)}{U_1^*}\right), \\ V_{U_2}(x, t) &= \int_0^{\infty} \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g\left(\frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)}\right) d\theta. \end{aligned}$$

La fonction  $g(x) = x - 1 - \ln x$  est une fonction de type Volterra et  $g(x) > 0$  et  $g(1) = 0$  pour  $x > 0$

On a

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_S}{dS} &= \frac{d}{ds} \left[ S^* \left[ \frac{S(x,t)}{S^*} - 1 - \ln \left( \frac{S}{S^*} \right) \right] \right], \\
 &= 1 - \frac{d}{dS} \left[ S^* \ln \left( \frac{S}{S^*} \right) \right], \\
 &= 1 - \left[ \frac{\frac{S^*}{(S^*)^2}}{\frac{S}{S^*}} \right] S^*, \\
 &= 1 - \left[ \frac{1}{\frac{S}{S^*}} \right] S^*,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_S}{dS} &= 1 - \frac{S^*}{S(x,t)}. \\
 \frac{dV_{U_1}}{dU_1} &= \frac{d}{dU_1} \left[ U_1^* \left[ \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} - 1 - \ln \left( \frac{U_1}{U_1^*} \right) \right] \right], \\
 &= 1 - \frac{d}{dU_1} \left[ U_1^* \ln \left( \frac{U_1}{U_1^*} \right) \right], \\
 &= 1 - \left[ \frac{\frac{U_1^*}{(U_1^*)^2}}{\frac{U_1}{U_1^*}} \right] U_1^*, \\
 &= 1 - \left[ \frac{1}{\frac{U_1}{U_1^*}} \right] U_1^*,
 \end{aligned}$$

alors

$$\frac{dV_{U_1}}{dU_1} = 1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)}.$$

Posons

$$f_1(x,t) = \Lambda - \mu S(x,t) - \beta S(x,t)U_1(x,t),$$

$$f_2(x,t) = \beta S(x,t)U_1(x,t) - (\mu + \nu_1 + \gamma)U_1(x,t) + \int_0^\infty k(\theta)U_2(x,\theta,t)d\theta.$$

En utilisant l'expression suivante  $\Lambda = \beta S^* U_1^* + \mu S^*$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{dV_S}{dS} f_1 &= \left(1 - \frac{S^*}{S(x,t)}\right) (\Lambda - \beta S(x,t)U_1(x,t) - \mu S(x,t)), \\
&= \left(1 - \frac{S^*}{S(x,t)}\right) ((\beta S^* U_1^* + \mu S^*) - \beta S(x,t)U_1(x,t) - \mu S(x,t)), \\
&= \left(1 - \frac{S^*}{S(x,t)}\right) [\mu(S^* - S(x,t)) + (\beta S^* U_1^* - \beta S(x,t)U_1(x,t))], \\
&= \left(1 - \frac{S^*}{S(x,t)}\right) (\mu(S^* - S(x,t)) + \left(1 - \frac{S^*}{S(x,t)}\right) (\beta S^* U_1^* - \beta S(x,t)U_1(x,t))), \\
&= \left(\frac{S - S^*}{S(x,t)}\right) (\mu(S^* - S(x,t)) + \beta S^* U_1^* \left(1 - \frac{S^*}{S(x,t)}\right) \left(1 - \frac{S(x,t)}{S^*} \frac{U_1(x,t)}{U_1^*}\right)), \\
&= -\frac{\mu(S(x,t) - S^*)^2}{S(x,t)} + \beta S^* U_1^* \left(1 - \frac{S^*}{S(x,t)}\right) \left(1 - \frac{S(x,t)}{S^*} \frac{U_1(x,t)}{U_1^*}\right).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Ensuite, nous avons

$$\frac{\partial V_{U_1}}{\partial U_1} f_2 = \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)}\right) \left\{ \beta S(x,t)U_1(x,t) - (\mu + \nu_1 + \gamma)U_1(x,t) + \int_0^\infty k(\theta)U_2(x,\theta,t)d\theta \right\}.$$

De la deuxième équation de (4.2), on obtient

$$\mu + \nu_1 + \gamma = \frac{1}{U_1^*} \left( \beta S^* U_1^* + \int_0^\infty K(\theta)U_2^*(\theta)d\theta \right).$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{U_1}}{\partial U_1} f_2 &= \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)}\right) \left\{ \beta S(x,t) U_1(x,t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} \left( \beta S^* U_1^* + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) d\theta \right) + \int_0^\infty k(\theta) U_2(x,\theta,t) d\theta \right\} \\
&= \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)}\right) \left\{ \beta S(x,t) U_1(x,t) \right. \\
&\quad \left. - \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} \beta S^* U_1^* - \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) d\theta + \int_0^\infty k(\theta) U_2(x,\theta,t) d\theta \right\} \\
&= \left(1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)}\right) \left\{ \beta S^* U_1^* \left( \frac{s(x,t) U_1(x,t)}{s^* U_1^*} - \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} \right) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} - \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} \right) d\theta \right\} \\
&= \beta S(x,t) U_1(x,t) - \beta S^* U_1(x,t) - \beta S(x,t) U_1^* + \beta S^* U_1^* \\
&\quad + \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} - \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} + 1 \right) d\theta.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

On a

$$V_{U_2}(x,t) = \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} g \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*} - 1 - \ln \left( \frac{U_2}{U_2^*} \right) \right], \\
&= \left[ \frac{1}{U_2^*} - \frac{1}{U_2(x,\theta,t)} \right] \frac{\partial U_2(x,\theta,t)}{\partial t}.
\end{aligned}$$



Passons maintenant aux dérivées de  $V_{U_2}(x, t)$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial V_{U_2}}{\partial t} \Big|_{(2.1)} \\
&= \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^* \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{G} \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta \\
&= \int_0^\infty \alpha(\theta) \left( 1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(x, \theta, t)} \right) \frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial t} d\theta \\
&= \int_0^\infty \alpha(\theta) \left( 1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(x, \theta, t)} \right) \left\{ -\frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial \theta} - (\mu + \nu_2 + k(\theta)) U_2(x, \theta, t) \right\} d\theta \quad (4.6) \\
&= - \int_0^\infty \alpha(\theta) \left( 1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(x, \theta, t)} \right) U_2(x, \theta, t) \left\{ \frac{\partial_\theta U_2(x, \theta, t)}{U_2(x, \theta, t)} + (\mu + \nu_2 + k(\theta)) \right\} d\theta \\
&= - \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^*(\theta) \cdot \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} - 1 \right) \left\{ \frac{\partial_\theta U_2(x, \theta, t)}{U_2(x, \theta, t)} + (\mu + \nu_2 + k(\theta)) \right\} d\theta.
\end{aligned}$$

Observer que

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \theta} \mathcal{G} \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \\
&= \left( 1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(x, \theta, t)} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \\
&= \left( 1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(x, \theta, t)} \right) \cdot \frac{\frac{\partial U_2(x, \theta, t)}{\partial \theta} U_2^*(\theta) - U_2(x, \theta, t) \frac{\partial U_2^*(\theta)}{\partial \theta}}{(U_2^*(\theta))^2} \\
&= \left( 1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(x, \theta, t)} \right) \cdot \frac{\partial_\theta U_2(x, \theta, t) U_2^*(\theta) - U_2(x, \theta, t) [-(\mu + \nu_2 + k(\theta)) U_2^*(\theta)]}{U_2^*(\theta)^2} \quad (4.7) \\
&= \left( 1 - \frac{U_2^*(\theta)}{U_2(x, \theta, t)} \right) \cdot \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*} \cdot \frac{U_2^*}{U_2(x, \theta, t)} \\
&\quad \cdot \frac{\partial_\theta U_2(x, \theta, t) U_2^*(\theta) - U_2(x, \theta, t) [-(\mu + \nu_2 + k(\theta)) U_2^*(\theta)]}{U_2^*(\theta)^2} \\
&= \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} - 1 \right) \cdot \left\{ \frac{\partial_\theta U_2(x, \theta, t)}{U_2(x, \theta, t)} + (\mu + \nu_2 + k(\theta)) \right\}.
\end{aligned}$$

Nous remplaçons (4.7) dans (4.6) et en utilisant l'intégration par partie nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{U_2}}{\partial t} \Big|_{(2.1)} &= - \int_0^\infty \alpha(\theta) U_2^* \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} g \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta \\
&= -\alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=0}^{\theta=\infty} \\
&\quad + \int_0^\infty g \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \frac{\partial}{\partial t} (\alpha(\theta) U_2^*(\theta)) d\theta \\
&= -\alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} + \alpha(0) U_2^*(x, 0) g \left( \frac{U_2(x, 0, t)}{U_2^*(x, 0)} \right) \\
&\quad + \int_0^\infty g \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha(\theta) U_2^*(\theta)) d\theta.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Remarquer

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} (\alpha(\theta) U_2^*(\theta)) &= \frac{d}{d\theta} \alpha(\theta) \cdot U_2^*(\theta) + \alpha(\theta) \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} U_2^*(\theta) \\
&= [\alpha(\theta) (\mu + \nu_2 + k(\theta)) - k(\theta)] \cdot U_2^*(\theta) \\
&\quad + \alpha(\theta) \cdot [ -(\mu + \nu_2 + k(\theta)) U_2^* ] \\
&= -k(\theta) U_2^*(\theta),
\end{aligned} \tag{4.9}$$

et

$$\alpha(0) = \int_0^\infty K(\theta) \Pi(\theta) d\theta, \quad U_2^*(x, 0) = \gamma U_1^*, \quad U_2(x, 0, t) = \gamma U_1(x, t). \tag{4.10}$$

Nous remplaçons (4.9) et (4.10) dans (4.8), nous obtenons

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{U_2}}{\partial t} \Big|_{(1,1)} &= -\alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} \\
&\quad + \gamma U_1^* \int_0^\infty K(\theta) \Pi(\theta) d\theta \cdot g \left( \frac{U_1(x, t)}{U_1^*} \right) \\
&\quad - \int_0^\infty g \left( \frac{U_2(x, \theta, t)}{U_2^*(\theta)} \right) K(\theta) U_2^*(\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_S}{\partial t} \Big|_{(2.1)} = \frac{dV_S}{dS} \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{dV_S}{dS} (\delta \Delta S + f_1) = \left( 1 - \frac{S^*}{s(x, t)} \right) \delta \Delta S + \frac{dV_S}{dS} f_1.$$

$$\frac{\partial V_{U_1}}{\partial t} \Big|_{(2.1)} = \frac{dV_{U_1}}{dU_1} \frac{\partial U_1}{\partial t} = \frac{dV_{U_1}}{dU_1} (\delta \Delta U_1 + f_2) = \left( 1 - \frac{U_1^*}{U_1(x, t)} \right) \delta \Delta U_1 + \frac{dV_{U_1}}{dU_1} f_2.$$

En ajoutant ces termes ensemble, on obtient

$$\begin{aligned}
& \left( \frac{\partial V_S}{\partial t} + \frac{\partial V_{U_1}}{\partial t} + \frac{\partial V_{U_2}}{\partial t} \right) \Big|_{(2.1)} \\
&= \left( 1 - \frac{S^*}{S(x,t)} \right) \delta \Delta S(x,t) - \frac{\mu(S(x,t) - S^*)^2}{S(x,t)} + \beta S^* U_1^* \left( 1 - \frac{S^*}{S(x,t)} \right) \left( 1 - \frac{S(x,t)}{S^*} \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} \right) \\
&+ \left( 1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \right) \delta \Delta U_1(x,t) + \beta S(x,t) U_1(x,t) - \beta S^* U_1(x,t) - \beta S(x,t) U_1^* + \beta S^* U_1^* \\
&+ \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} - \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} + 1 \right) d\theta. \\
&- \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} + \gamma U_1^* \int_0^\infty K(\theta) \Pi(\theta) d\theta \cdot g \left( \frac{U_1(x,t)}{U_1^*} \right) \\
&- \int_0^\infty g \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} \right) K(\theta) U_2^*(\theta) d\theta, \\
&= \left( 1 - \frac{S^*}{S(x,t)} \right) \delta \Delta S(x,t) - \frac{\mu(S(x,t) - S^*)^2}{S(x,t)} \\
&- \beta S^* U_1^* \left[ \left( \frac{S^*}{S} - 1 \right) \left( 1 - \frac{S}{S^*} \frac{U_1}{U_1^*} \right) \cdot - \frac{S}{S^*} \frac{U_1}{U_1^*} + \frac{U_1}{U_1^*} + \frac{S}{S^*} - 1 \right] \\
&+ \left( 1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \right) \delta \Delta U_1(x,t) - \alpha(\theta) U_2^*(\theta) \cdot g \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} \\
&- \int_0^\infty K(\theta) U_2^*(\theta) g \left( \frac{U_2}{U_2^*} \right) g \left( \frac{U_1}{U_1^*} \right) \cdot \left( \frac{U_2}{U_2^*} - \frac{U_1}{U_1^*} - \frac{U_1^*}{U_1} \frac{U_2}{U_2^*} + 1 \right) \cdot \\
&= \left( 1 - \frac{S^*}{S(x,t)} \right) \delta \Delta S(x,t) + \left( 1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \right) \delta \Delta U_1(x,t) \\
&- \frac{\mu(S(x,t) - S^*)^2}{s(x,t)} - \beta S^* U_1^* \left( \frac{S^*}{s(x,t)} - 2 + \frac{S(x,t)}{s^*} \right) \\
&- \int_0^\infty k(\theta) U_2^*(\theta) g \left( \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} \right) d\theta \\
&- \alpha(\theta) U_2^*(\theta) g \left( \frac{U_2(x,\theta,t)}{U_2^*(\theta)} \right) \Big|_{\theta=\infty} \\
&\leq \delta \left[ \left( 1 - \frac{S^*}{S(x,t)} \right) \Delta S(x,t) + \left( 1 - \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \right) \Delta U_1(x,t) \right] dx.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

On définit

$$V(t) = \int_{\Omega} (V_S(x,t) + V_{U_1}(x,t) + V_{U_2}(x,t)) dx. \tag{4.12}$$

Ensuite

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} \Big|_{(2.1)} &= \int_{\Omega} \left( \frac{\partial V_S}{\partial t} + \frac{\partial V_{U_1}}{\partial t} + \frac{\partial V_{U_2}}{\partial t} \right) dx \\
&\leq \int_{\Omega} \delta \left[ \left( 1 - \frac{S^*}{S(x,t)} \right) \Delta S(x,t) + \left( 1 - \frac{U^*}{U_1(x,t)} \right) \Delta U_1(x,t) \right] dx. \\
&\leq \delta \left[ \int_{\Omega} \Delta S(x,t) - \int_{\Omega} \frac{S^*}{S(x,t)} \Delta S(x,t) + \int_{\Omega} \Delta U_1(x,t) - \int_{\Omega} \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \Delta U_1(x,t) \right]. \\
&\leq \delta \left[ \int_{\partial\Omega} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} - \int_{\Omega} \frac{S^*}{S(x,t)} \Delta S(x,t) + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}} - \int_{\Omega} \frac{U_1^*}{U_1(x,t)} \Delta U_1(x,t) \right].
\end{aligned}$$

On a la condition de Neumann  $\frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} \equiv 0$ , donc

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} \Big|_{(2.1)} &\leq -\delta \int_{\Omega} \left[ \left( \frac{S^*}{S(x,t)} \right) \Delta S(x,t) + \left( \frac{U^*}{U_1(x,t)} \right) \Delta U_1(x,t) \right] \\
&\leq -\delta \int_{\Omega} \left[ S^* \left( \frac{1}{S(x,t)} \right) \Delta S(x,t) + U_1^* \left( \frac{1}{U_1(x,t)} \right) \Delta U_1(x,t) \right].
\end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie on peut écrire

$$\begin{aligned}
\frac{dV(t)}{dt} \Big|_{(2.1)} &\leq -\delta \left[ \frac{1}{S(x,t)} \cdot \frac{\partial S}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} + S^* \int_{\Omega} \Delta S(x,t) \cdot \frac{1}{(S(x,t))^2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{U_1(x,t)} \cdot \frac{\partial U_1}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\partial\Omega} + U_1^* \int_{\Omega} \Delta U_1(x,t) \cdot \frac{1}{(U_1(x,t))^2} \right] dx.
\end{aligned}$$

On a  $\Delta S(x,t) = \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_j} \right)^2$  donc

$$\frac{dV(t)}{dt} \Big|_{(2.1)} \leq -\delta \int_{\Omega} \left[ \frac{S^*}{(S(x,t))^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial S(x,t)}{\partial x_j} \right)^2 dx + \frac{U_1^*}{(U_1(x,t))^2} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial U_1(x,t)}{\partial x_j} \right)^2 \right] dx \leq 0 \quad (4.13)$$

et  $\frac{dV(t)}{dt} \leq 0$  et de (4.11) et (4.13), L'égalité est valable si et seulement si

$$S(x,t) = S^*, \quad U_1(x,t) = U_1^* \quad \text{et} \quad U_2(x,\theta,t) = U_2^*(\theta).$$

il s'ensuit alors que le plus grand sous-ensemble positif de  $\{(S, U_1, U_2) \in A_0 : dV(t)/dt = 0\}$  est le

singleton  $\{E^*\}$ , on obtient que  $E^*$  attire toutes les solutions de (2.1). et donc l'état stationnaire  $E^*$  est globalement asymptotiquement stable.

# Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié un modèle d'épidémie structuré en âge avec diffusion.

Dans ce modèle, la propagation de héroïne sont déterminées par le coefficient de diffusion  $\delta$ , et la probabilité qu'un toxicomane en traitement  $k(\theta)$  avec l'âge du traitement  $\theta$ . Le nombre de reproduction de base  $\mathcal{R}_0$  de notre modèle (2.1) a été trouvé par sa définition. Si  $\mathcal{R}_0 < 1$ ; le système (2.1) à une unique point d'équilibre sans épidémie  $E^0 = (S^0, 0, 0)$ . En prouvant sa stabilité locale et son attractivité globale, nous avons donc établi la stabilité globale de  $E^0$ , ce qui implique que l'épidémie disparaîtra finalement lorsque  $\mathcal{R}_0 < 1$ .

Quand  $\mathcal{R}_0 > 1$ , le système (2.1) a une unique point équilibre  $E^* = (\frac{1}{\mathcal{R}} \frac{\Lambda}{\mu}, \frac{\mu}{\beta} (\mathcal{R}_0 - 1), \gamma U_1^* \Pi(\theta))$ . En appliquant la théorie du semi-groupe intégrale et en construisant une fonction de Lyapunov, et calculer  $\frac{dV(t)}{dt}$  et appliques le principe d'invariance de laSalle il s'ensuit alors que le plus grand sous-ensemble positif de  $\{(S, U_1, U_2) \in A_0 : dV(t)/dt = 0\}$  est le singleton  $\{E^*\}$ . on obtient cette  $E^*$  attire toutes les solutions de modèle. l'état stationnaire  $E^*$  est globalement asymptotiquement stable.

# Bibliographie

- [1] A. Kelly, M. Carvalho, C. Teljeur, *Prevalence of Opiate Use in Ireland 2000-2001. A 3-Source Capture Recapture Study, A Report to the National Advisory Committee on Drugs, Subcommittee on Prevalence, Small Area Health Research Unit, Department of Public,*
- [2] B. Fang, X.-Z. Li, M. Martcheva, L.-M. Cai, *Global asymptotic properties of a heroin epidemic model with treat-age, Appl. Math. Comput.* 263 (2015) 315–331
- [3] C. Comiskey, *National Prevalence of Problematic Opiate Use in Ireland, EMCDDA Tech. Report, 1999,*
- [4] Chow, S. N., and Hale, J. K. *Methods of bifurcation theory.* Springer-Verlag, New York, (1982),
- [5] D.R. Mackintosh, G.T. Stewart, *A mathematical model of a heroin epidemic : implications for control policies, J. Epidemiol. Community Health* 33 (4) (1979) 299–304.
- [6] European monitoring centre for drugs and drug addiction (EMCDDA), : *Annual report, 2005, <http://annualreport.emcdda.eu.int/en/homeen.html>.*
- [7] Françoise., J.-P. *Oscillations en biologie. analyse qualitative et modèles. Laboratoire J.-L. Lions, UMR 7598 CNRS. Université P.-M. Curie, Paris VI. (2000).*
- [8] G.F. Webb, *Theory of Nonlinear Age-Dependent Population Dynamics, CRC Press, 1985.*
- [9] Guckenheimer, J., and Holmes., *P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. Springer-Verlag, New York, (1983).*
- [10] H. Li, R. Peng, F.-B, *Varying total population enhances disease persistence : Qualitative analysis on a diffusive SIS epidemic model, J. Differential Equations* 262 (2017) 885–913.

- [11] H.R. Thieme, *Integrated semigroups and integrated solutions to abstract Cauchy problems*, *J. Math. Anal. Appl.* 152 (1990) 416–447.
- [12] H. Smith, H.R. Thieme, *Dynamical System and Population Persistence*, AMS, Providence, RI, 2010
- [13] H.L. Smith, *Monotone dynamical systems : An introduction to the theory of competitive and cooperative systems*, in : *Math. Surveys Monogr*, vol. 41, American Mathematical Society Providence, RI, 1995.
- [14] H.L. Smith, X.Q. Zhao, *Robust persistence for semidynamical systems*, *Nonlinear Anal.* 47 (2001) 6169–6179
- [15] J. Yang, X. Wang, *Dynamics and asymptotical profiles of an age-structured viral infection model with spatial diffusion*, *Appl. Math. Comput.* 360 (2019) 236–254.
- [16] J. Jiang, X. Liang, X.-Q. Zhao, *Saddle point behavior for monotone semiflows and reaction-diffusion models*, *J. Differential Equations* 203 (2004) 313–330.
- [17] K.A. Sporer, *Acute heroin overdose*, *Ann. Intern. Med.* 130 (1999) 584–590.,
- [18] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [19] L.J.S. Allen, B.M. Bolker, Y. Lou, A.L. Nevai, *Asymptotic profiles of the steady states for an SIS epidemic reaction-diffusion model*, *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 21 (2008) 1–20.
- [20] NIDA InfoFacts : *Heroin*, <http://www.nida.nih.gov/infofacts/heroin.html>,
- [21] M.H. Protter, H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Corrected Reprint of the 1967 Original, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [22] O. Diekmann, J.A.P. Heesterbeek, J.A.J. Metz, *On the definition and the computation of the basic reproduction ratio  $\mathcal{R}_0$  in models for infectious diseases in heterogeneous populations*, *J. Math. Biol.* 28 (4) (1990) 365–382.
- [23] P. Magal, X.-Q. Zhao, *Global attractors and steady states for uniformly persistent dynamical systems*, *SIAM J. Math. Anal.* 37 (2005) 251–275.



- [24] P. Hess, *Periodic-parabolic boundary value problem and positivity*, in : *Pitman Res. Notes Math.*, vol. 247, Longman Scientific ; Technical, Harlow, 1991, copublished in the United States with John Wiley Sons, Inc., New York.
- [25] R. Cui, K.-Y. Lam, Y. Lou, *Dynamics and asymptotic profiles of steady states of an epidemic model in advective environments*, *J. Differential Equations* 263 (2017) 2343–2373.
- [26] R. Cui, Y. Lou, *A spatial SIS model in advective heterogeneous environments*, *J. Differential Equations* 261 (2016) 3305–3343
- [27] R. Peng, X. Zhao, . Zhao, *A reaction-diffusion SIS epidemic model in a time-periodic environment*, *Nonlinearity* 25 (2012) 1451–1471.
- [28] S.B. Hsu, F.B. Wang, X.-Q. Zhao, *Dynamics of a periodically pulsed bio-reactor model with a hydraulic storage zone*, *J. Dynam. Differential Equations* 23 (2011) 817–842.
- [29] S.-B. Hsu, J. Jiang, F.-B. Wang, *On a system of reaction-diffusion equations arising from competition with internal storage in an unstirred chemostat*, *J. Differential Equations* 248 (2010) 2470–2496.
- [30] W. Hao, Z. Su, S. Xiao, *et al.*, *Longitudinal surveys of prevalence rates and use patterns of illicit drugs at selected high-prevalence areas in China from 1993 to 2000*, *Addiction* 99 (2004) 1176–1180,
- [31] W.-D. Wang, X.-Q. Zhao, *Basic reproduction numbers for reaction-diffusion epidemic models*, *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.* 11 (4) (2012) 1652–1673.
- [32] Wiggins., S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos.*, SpringerVerlag, NewYork, second edition, (2003).
- [33] X. Li, Y.Zhou, B.Stanton, *Illicit drug initiation among institutionalized drug users in China*, *Addiction* 97 (2002) 575–582..
- [34] X. Duan, S. Yuan, K. Wang, *Dynamics of a diffusive age-structured HBV model with saturating incidence*, *Math. Biosci. Eng.* 13 (2016) 935–968