République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème

L'existence et l'explosion dans certain équation hyperbolique non-linéaire.

Présenté Par :
Bakhouche Liliane
Safi Hadil

Devant le jury :

Mezhoud Rachida	MAA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Présidente
Zediri Sounia	MAA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Examinatrice
Dghaichia Hakima	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi	Encadreur

Date de soutenance : 19/06/2021

Remerciements

*Je remercie en premier lieu **ALLAH** le tout-puissant de nous avoir accordé la puissance et la volonté, la chance pour suivre pour terminer ce travail.*

*Je tiens vivement à exprimer ma profonde reconnaissance à Madame **Dghaichia Hakima**, maître de conférences A à l'université de Tébessa, d'avoir veillé et assurer l'encadrement de ce travail..*

Je la remercie pour son soutien, son orientation, son suivi permanent, et l'aide constante qu'il ma prodiguée au cours de l'élaboration de ce travail.

*J'exprime mes remerciements à **Mazhoud Rachida**, maître-assistant A a l'université de Tébessa pour l'honneur qu'elle me fait en présidante le jury de mon mémoire.*

*Je remercie vivement Madame **Zdiri Sonia**, maître-assistant A à l'université de Tébessa, qui a accepté de juger ce mémoire.*

*Sans oublier de remercier tous nos enseignants pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement **Dharaifia Alaa Eddine** et **Dridi Hanni** qui ont enrichi nos connaissances.*

Enfin, J'adresse mes vifs remerciements à ma famille et mes relatives pour son soutien moral et son encouragement ainsi à toutes mes amies pour leur présence et leur aide.

Dédicace:

Je dédie ce modeste travail:

*-À mon père **Rachid**, pour qui je vois des millions de raisons pour lesquelles j'ai besoin de réussir quand je le regarde.*

*-Pour la grande femme que je vois dans ma vie ma mère **Salha.** Je suis toujours fière qu'elle soit ma mère.*

*-À mon frère **Ayoub** et mes sœurs **Tinhinen** et **Aya** symbole d'amour et de don.*

*-À ma meilleure amie **Chaima** merci de m'avoir donné l'impulsion supplémentaire dont j'avais besoin.*

*-À mon binôme **Hadil** à qui j'ai partagé ce travail.*

-À tous mes amis qui sont toujours à mes côtés m'encouragent et me donnent la force et l'espoir.

-À toutes mes familles pour leur aide et leur soutien.

A tous, je souhaite tout le meilleur

Bakhouche Liliane

Dédicace

*Merci au Noble « **Allah** » Dieu le tout puissant qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.*

*À la lumière de mes jours, ma belle **Mère** <<**Zakia**>>. qu'Allah la protège,*

*À mon cher **père** <<**Mohamed** >> pour leur sacrifice, qu'Allah le protège,*

*À mes frères **Oussama**, **Dia Eddine** et **Saouba**,*

*À mes sœurs **Nada**, **Salsabil** et **Batoula**,*

*J'adresse également mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire. Entre autre <<**Dhikra**>>et <<**Ahlem**>>, ainsi que tous les autres, à qui je souhaite une vie pleine d'exploits et de réussite.*

*À mon binôme <<**Liliane**>> à qui j'ai participé avec elle ce travail.*

SAFI HADIL

Résumé

L’objectif de ce travail est d’étudier l'existence locale de la solution d'un problème non linéaire de type hyperbolique, en utilisant la méthode Faedo-Galerkin, l'existence d'une solution faible unique est établie sous des hypothèses appropriées sur les exposants variables. Nous preuvons également l'explosion en temps fini des solutions.

Mots clés : équations des ondes, existence et unicité, Faedo-Galerkin, explosion.

Abstract

The objective of this work is to study the local existence of the solution of a nonlinear problem of hyperbolic type, using the Faedo-Galerkin method, the existence of a unique weak solution is established under appropriate assumptions on the variable exponents. We also prove the explosion in over time of solutions.

Key words: Wave equation, existence and uniqueness, Faedo–Galerkin, blow-up.

ملخص

الهدف من هذا العمل هو دراسة الوجود المحلي لحل مشكلة غير خطية من النوع القطعي، باستخدام طريقة Faedo-Galerkin، يتم إنشاء حل ضعيف وحيد من خلال الافتراضات المناسبة على الأس المتغير .نثبت أيضًا الانفجار في الحلول بمرور الوقت.

الكلمات المفتاحية : معادلة الامواج, الوجود والوحدانية, فايدو قلاركينج, الانفجار.

Table des matières

Introduction

Ces dernières années, une grande attention a été accordée à l'étude de modèles mathématiques non linéaires d'équations hyperboliques, paraboliques et elliptiques avec des exposants variables de non-linéarité. Par exemple, modélisation de phénomènes physiques tels que les écoulements de fluides électro-rhéologiques ou à viscosité dépendante de la température, viscoélasticité non linéaire, procédés de filtration grâce à un support poreux et un traitement d'image.
Il y a quelques travaux concernant les équations avec des exposants variables de non-linéarité. Mentionnons certains de ces problèmes.
Par exemple, Antontsev [7] a étudié le problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt} = \operatorname{div}(a(x,t)|\nabla u|^{p(x,t)-2}\nabla u) + \alpha\Delta u_t + b(x,t)|u|^{\sigma(x,t)-2}u + f(x,t), & \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \\ u(x,t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T)\,, \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

et a prouvé l'existence et l'explosion de solutions faibles avec une énergie initiale négative dans des conditions appropriées sur les fonctions a, b, f, p, σ. Alaoui et autres [22] ont considéré l'équation de la chaleur non linéaire suivante

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{m(x)-2}\nabla u) = |u|^{p(x)-2}u + f, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T)\,, \\ u(x,t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T)\,, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$. Dans des conditions appropriées sur m et p et pour $f = 0$, ils ont montré que toute solution avec une donnée initiale non triviale explose en un temps fini. Ils ont également donné un exemple numérique à deux dimensions pour illustrer leur résultat. Yunzhu Gao et Wenjie Gao [18] ont étudié une équation viscoélastique non linéaire à variable exposants. Ils ont prouvé l'existence de solutions faibles en utilisant la méthode Faedo-Galerkin sous des hypothèses appropriées.
Autuori et autres [10] ont examiné un système de Kirchhoff non linéaire en présence de l'opérateur $\overrightarrow{p}(x,t)$ Laplace, une force non linéaire $f(t,x,u)$ et un terme d'amortissement non linéaire $Q = Q(t,x,u,u_t)$. Ils ont établi un résultat global de non-existence sous des conditions sur f, Q, p. Nous renvoyons le lecteur à Antontsev [6, 7] et Galaktionov [19] pour plus de problèmes impliquant les non-linéarités à exposants variables.
Par exemple, Guo et Gao [17] ont examiné le même problème d'Antontsev [8] et ont établi plusieurs résultats d'explosion pour certaines solutions associées à une énergie initiale négative. Précisément, ils ont pris $\sigma(x,t) = r > 2$ une constante, et ont établi un résultat d'explosion en temps

fini. Pour le cas $\sigma(x,t) = r(x)$, ils ont revendiqué le même résultat d'explosion, mais aucune preuve n'a été donnée. Ce travail est considéré comme une amélioration de celui d'Antontsev [8]. Dans les travaux de Sun et autres, [36] ils se sont penchés sur l'équation suivante

$$u_{tt} - \operatorname{div}(a(x,t)\nabla u) + c(x,t)\,u_t\,|u_t|^{q(x,t)-1} = b(x,t)\,u\,|u|^{p(x,t)-1}.$$

Dans un domaine borné, avec des conditions aux limites de Dirichlet, et a établi un résultat d'explosion pour des solutions à énergie initiale positive. Ils ont également donné des limites inférieures et supérieures pour le temps d'explosion et ont fourni des illustrations numériques pour leur résultat.

Ferreira et Messaoudi [16] ont étudié une équation de plaque viscoélastique non linéaire avec une perturbation d'ordre inférieur d'un opérateur $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplacien de la forme

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \Delta_{\overrightarrow{p}(x,t)}u + \int_0^t h(t-s)\,\Delta u(s)\,ds - \Delta u_t + f(u) = 0.$$

où

$$\Delta_{\overrightarrow{p}(x,t)}u = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p_i(x,t)-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right), \quad \overrightarrow{p} = (p_1, p_2, ..., p_n)^T.$$

et $h \geq 0$ est un noyau mémoire qui décroît à une vitesse générale et f est une fonction non linéaire. Ils ont prouvé un résultat général de décroissance sous des hypothèses appropriées sur h, f et l'opérateur variable-exposant $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplacien.

Récemment, Messaoudi et Talahmeh [32] ont étudié

$$u_{tt} - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{m(x)-2}\nabla u\right) + \mu u_t = |u|^{p(x)-2}u, \tag{P}$$

avec des conditions aux limites de Dirichlet et pour $\mu \geq 0$. Ils ont prouvé un résultat d'explosion pour certaines solutions avec une énergie initiale positive arbitraire. Ce résultat généralise celui de Korpusov [24] établi pour (P), avec des constantes m et p. Gao Y et Gao W [18] ont étudié une équation viscoélastique non linéaire avec des exposants variables et ont prouvé l'existence de solutions faibles en utilisant la méthode Faedo-Galerkin sous des hypothèses appropriées.

Autuori et autres [10] se sont penchés sur un système de Kirchhoff non linéaire en présence de l'opérateur $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplace, d'une force non linéaire $f(t,x,u)$, et d'un terme d'amortissement non linéaire

$Q = Q(t,x,u,u_t)$.Ils ont établi un résultat global de non-existence dans des conditions convenables sur f, Q, p. Pour plus de résultats concernant l'explosion des problèmes hyperboliques, nous renvoyons le lecteur aux travaux d'Antontsev et Ferreira [2] et au livre d'Antontsev et Shmarev [3].

Position de notre problème

Dans ce travail nous avons traité le problème hyperbolique non linéaire suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a u_t \left|u_t\right|^{m(.)-2} = bu \left|u\right|^{p(.)-2}, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$, où $a, b \geq 0$ sont des constantes et les exposants $m(.)$ et $p(.)$ des fonctions mesurables sur Ω satisfaisant

$$2 \leqslant q_1 \leqslant q(x) \leqslant q_2 \leqslant \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{2}$$

avec

$$q_1 := ess \inf_{x\in\Omega} q(x), \quad q_2 := ess \sup_{x\in\Omega} q(x).$$

et la condition de continuité de log-Hölder :

$$\begin{cases} |q(x) - q(y)| \leqslant -\frac{A}{\log|x-y|}, \\ \text{pour p.p. } x, y \in \Omega, \quad \text{avec } |x-y| < \delta, \quad A > 0, \quad 0 < \delta < 1. \end{cases} \tag{3}$$

Dans le cas où m, p sont des constantes, l'existence locale, globale et le comportement pour long-temps ont été considérés par de nombreux auteurs. Par exemple en l'absence du terme d'amortissement $au_t \left|u_t\right|^{m-2}$, le terme de source $bu \left|u\right|^{p-2}$ provoque l'explosion en temps fini des solutions avec une énergie initiale négative [11, 27]. Pour $b = 0$ il est connu que le terme d'amortissement $au_t \left|u_t\right|^{m-2}$ assure l'existence globale des données initiales arbitraires [21, 23].

L'interaction entre l'amortissement et les termes sources a d'abord été considérée par Levine [27, 38]. Il a discuté sur le cas où $m = 2$ et a établi l'explosion en temps fini pour les solutions d'énergie initiale négative. Georgiev et Todorova [20] a généralisé le résultat de Levine sur le cas situation où $m > 2$ en introduisant une technique différente. Levine et autres [26] a prolongé le travail précédent à des domaines illimités. Ils ont prouvé que toute solution à énergie initiale négative explose en un temps fini, si $p > m$. Messaoudi [31] a prouvé que toute solution d'énergie initiale négative explose en un temps fini.

Notre mémoire se compose de trois chapitres :

Chapitre 1 : Dans ce chapitre nous rappelons les principaux notions dont nous aurons besoin ; commençons par les espaces topologiques, les espaces de Lebesgue et espace de sobolev, les espace de sobolev avec des exposants variables et finalement nous présentons les inégalités nécessaires qui sont utilisées dans ce mémoire avec quelques théorèmes utiles.

Chapitre 2 : Dans ce chapitre nous étudions l'existence locale de la en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et la méthode de point fixe.

Nous considère le problème de valeur limite initiale suivant :

$$u_{tt} - \Delta u + a u_t \left| u_t \right|^{m(.)-2} = b u \left| u \right|^{p(.)-2}, \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) .$$

avec la condition initiale

$$u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), \quad \text{dans } \Omega.$$

et la condition aux bords

$$u(x, t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) .$$

Et nous allons montrer que le problème admet une solution locale unique u par la méthode de Faedo-Galerkin, cette méthode consiste à une approximation de la solution, ensuite on obtient une estimation à priori nécessaire pour garantir la convergence de cette approximation. Comme la solution existe pour le problème (2.2), nous allons utiliser le théorème de l'application contractante pour montrer l'existence locale des solutions faibles pour le problème (1) .

Chapitre 3 : Nous allons montrer l'explosion de la solution en temps fini.

Notations

Ω : Ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

$\partial\Omega$: Frontière régulière.

∇u : Gradient de u.

Δu : Laplacien de u.

m, p : Fonctions mesurables.

m : $m(x)$.

u : $u(x,t)$.

v_j : $v_j(x)$.

$\frac{\partial u}{\partial \eta}$: La dérivée normale de u sur $\partial\Omega$.

$\frac{\partial u}{\partial t}$: Le dérivé partiel de u par rapport à t.

p.p.: La convergence presque partout.

$\rightarrow$: La convergence forte.

$\rightharpoonup$: La convergence faible.

$D(\Omega)$: Espace des fonctions différentiables avec support compact Ω.

$D'(\Omega)$: Espace de distribution.

$C^k(\Omega)$: Espace des fonctions différentiables continûment k fois dans Ω.

$C_0(\Omega)$: Espace des fonctions continues nulles sur la frontière de Ω.

H : Espace de Hilbert.

$H_0^1 = W_0^{1,2}$.

$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega)$.

$H^{-m}(\Omega) = (H_0^m(\Omega))' = W^{-m,2}(\Omega)$.

$L^{p(.)}(\Omega)$: *Espace de Lebesgue avec un exposant variable* $p(.)$.

$W^{-1,p'(.)}(\Omega)$: Dual de $W^{1,p(.)}(\Omega)$.

X_T : Espace de Banach.

$E(t)$: Ènergie.

T^* : Temps d'explosion.

$\varrho_{p(.)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)}\, dx$.

Chapitre 1

Préliminaires

Ce chapitre est consacré aux rappels, nous avons introduit les notions essentielles nécessaires à la compréhension des énoncés qui forment le thème de notre mémoire. Ces rappels concernent les espaces topologiques, les espaces fonctionnels et les espaces sobolev Lebesgue et sobolev avec des exposants variables et quelques inégalités et des théorèmes importants.

Notons par $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ le point générique d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$. Soit u une fonction définie de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, on désigne par $D^i u(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ la dérivée partielle de la fonction u par rapport à x_i.Définissons aussi le gradient et le Laplacien de u, respectivement comme suit

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^T \text{ et } |\nabla u|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2,$$

$$\Delta u(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right)(x).$$

On notera par $C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$; $(C(\Omega))^m$ est l'espace des fonctions continues de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, Pour $k \geq 1$ entier, $C^K(\Omega)$ est l'espace des fonctions u qui sont K fois dérivables et dont la dérivée d'ordre K est continue sur Ω.

1.1 Espaces Topologique

Espace normé

Définition 1.1 [39] *On appelle norme sur un espace vectorielle E une application de E dans $\mathbb{R}^+$ telle que : (si on note $\|u\|$ la nome de u).*
1) $\|u\| = 0 \iff u = 0$.

2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$, $\forall u, v \in E$ *(inégalité triangulaire).*
3) $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$, $\forall u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$.

Remarque 1.1 [39] $(E, \|.\|)$ *est un espace normé.*

Remarque 1.2 [39] *Une application de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *appelée une semi norme si elle satisfait les propriétés* (2) *et* (3).

Définition 1.2 [39] $\left(\underline{Equivalence\ des\ normes}\right)$
Soit $\|.\|_1$*et* $\|.\|_2$ *deux normes sur* V *on dit que ces deux normes sont équivalentes s'il existe deux constantes* c_1,c_2 *strictement positives telles que :*

$$\forall u \in V, \ c_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq c_2 \|u\|_1 .$$

Proposition 1.1 [39] *Soit* $\|.\|_1$ *et* $\|.\|_2$ *deux normes équivalentes sur* V, *on a l'équivalence*
u_n *converge vers* u *pour la norme* $\|.\|_1 \iff u_n$ *converge vers* u *pour la norme* $\|.\|_2$.

Définition 1.3 [39] $\left(\underline{Suite\ de\ Cauchy}\right)$
Soit $(E, \|.\|)$ *espace normé et* u_n *une suite d'éléments de* E *telle que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \, n_0 \left(\varepsilon\right), \ \forall n, m \geq n_0 \Longrightarrow \|u_n - u_m\| < \varepsilon.$$

La suite u_n *s'appelle une suite de Cauchy.*

Définition 1.4 $\left(\underline{Espace\ complet}\right)$
Soit E *un espace vectorielle, on dit que* E *est un espace complet si toute suite de Cauchy* u_n *de l'espace* E *est convergent vers un élément* u *de* E.

Espace de Banach

Définition 1.5 *(Espace de Banach).*
Soit $(E, \|.\|)$ *un espace Normé, on dit que* E *est un espace de Banach si* E *est un espace complet c-à-d toute suite de Cauchy de l'espace* E *est convergente vers un élément* u *de* E.

Espace de Hilbert

Définition 1.6 [39] $(\underline{Produit\ scalaire})$
Soit E *un espace vectoriel, on appelle application de* $E \times E$ *dans le corps* $K = \mathbb{C}$ *définit par* $\langle .,. \rangle$ *est un produit scalaire si :*
1) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$ *pour tout* $u, v \in E$.

2) $\langle \lambda u_1 + u_2, v \rangle = \lambda \langle u_1, v \rangle + \langle u_2, v \rangle$ *pour tout* u_1, u_2 *et* $v \in E$*, et* $\lambda \in \mathbb{C}$.

3) $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$.

4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ *et* $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$.

Définition 1.7 ($\underline{Espace\ de\ Hilbert}$)
Un espace de Hilbert est un espace de Banach ($(E, \|.\|_E)$ espace normé complet) muni d'un produit scalaire pour la norme associée :

$$\|u\|_E = \langle u, u \rangle^{1/2} \text{ (i.e) } \|u\|_E^2 = \langle u, u \rangle .$$

Définition 1.8 [39] ($\underline{Système\ orthonormé}$)
Soit E un espace de Hilbert, la suite $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est appelée un système orthonormé si

$$\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{n,m} = \begin{cases} 1, & si\ n = m, \\ 0, & si\ n \neq m. \end{cases}$$

1) *Si $e_n \perp e_m$ on dit que le système $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est orthogonal.*

2) *Si le système $\{e_n\}_{n\geq 1}$ est orthogonal alors le système $\left\{\frac{e_n}{\|e_n\|}\right\}_{n\geq 1}$ est orthonormé.*

Définition 1.9 ($\underline{Base\ hilbertienne}$)
Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$ On appelle base Hilbertienne (dénombrable) de E une famille dénombrable $\{e_n\}_{n\geq 1}$ d'éléments de E qui est orthonormée pour le produit scalaire et telle que l'espace vectoriel engendré par cette famille est dense dans E.

Définition 1.10 ($\underline{Espace\ Séparable}$)
Un espace vectorielle normé qui contient une partie dénombrable dense est dit espace Séparable.

Théorème 1.1 *Toute espace de Hilbert Séparable admet une base Hilbertienne.*

Proposition 1.2 *Soit E un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle ., . \rangle$, soit $(e_n)_{n\geq 1}$une base Hilbertienne de E, il existe une suite unique $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par*

$$u_n = (u, e_n),$$

telle que la somme partielle $\sum_{n=1}^{p} u_n e_n$ converge vers u quand p tends vers l'infinie.
De plus on a

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = \sum_{n\geq 1} |(u, e_n)|^2 .$$

alors, on écrit

$$u = \sum_{n\geq 1} (u, e_n)\, e_n.$$

1.2 Espaces fonctionnels

Dérivée faible

Définition 1.11 [35] ($\underline{Dérivée\ faible}$)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et $1 \leq i \leq n$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ une fonction à une i-ème dérivée faible dans $L^1_{loc}(\Omega)$ s'il existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait :

$$\int_\Omega u(x)\, \partial_i \varphi(x)\, dx = -\int_\Omega f_i(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

Cela revient à dire que f_i est la i-ème dérivée de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ au sens des distributions ;on écrira :

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i.$$

Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 1.12 [35] ($\underline{Espace\ W^{1,p}(\Omega)}$)
Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^n$, et $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq +\infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \text{tel que } \partial_i u \in L^p(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

où ∂_i est est la i-ème dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

Définition 1.13 [35] ($\underline{Espace\ H_0^1(\Omega)}$)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$,
1) *On appelle $H_0^1(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, ce qu' on note aussi*

$$H_0^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}.$$

2) *Pour $m > 0$ et $1 \leq p < +\infty$, on définit le sous espace $W_0^{m,p}(\Omega)$ de $W^{m,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ dans*

$$W^{m,p}(\Omega) : W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)}.$$

et le produit scalaire de $W_0^{1,2}(\Omega)$ est défini par

$$\begin{aligned}(u,v)_{W^{1,2}(\Omega)} &= \int_\Omega (uv + \nabla u \nabla v)\, dx,\\ &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 1.14 [35] ($\underline{Espace\ W^{m,p}}(\Omega)$)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \geq 2$ et $p \in \mathbb{R}$, $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega), \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega), \quad \forall \alpha, \ |\alpha| \leq m\}.$$

Où $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N) \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ et $D^\alpha u = \partial_1^{\alpha_1} ... \partial_n^{\alpha_n}$ est la dérivée faible de $u \in L^1_{loc}(\Omega)$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{0<|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Définition 1.15 [35] *On note par $W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'espace fermé de $D(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Définition 1.16 [35] *Si $p = 2$, on note par $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ et $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$ muni par la norme*

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \left(\|\partial^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

tel que $H^m(\Omega)$ espace de Hilbert, avec le produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_{L^2(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx, \quad \text{pour tout } u, v \in H^m(\Omega).$$

Proposition 1.3 [35]

1) *Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach.*
2) *Si $m \geq m'$, $H^m(\Omega) \hookrightarrow H^{m'}(\Omega)$, avec injection continue.*
3) *Si $m = 0$ on a $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.*

Lemme 1.1 *Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^m(\Omega)$, nous identifions un dual $H^{-m}(\Omega)$ de $H_0^m(\Omega)$ dans un sous-espace fermé sur Ω, on trouve*

$$D(\Omega) \hookrightarrow H_0^m(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega).$$

Définition 1.17 [35] ($\underline{Intégration\ par\ partie}$)
Soit $(u, v) \in H^1(\Omega)$, pour tout $1 \leq i \leq n$ on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} uv\eta_i d\sigma,$$

où $\eta_i(x) = \cos(\eta, xi)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à $\partial\Omega$ au point et l'axe des x_i.

Lemme 1.2 [35] ($\underline{formule\ de\ Green}$)
Pour tout $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$ *on a :*

$$\int_\Omega \Delta uv dx = \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds.$$

où est $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ *la dérivée normale de* u *sur* $\partial\Omega$.

1.3 Espaces de Lebesgue L^p, L^∞ et L^2

Définition 1.18 [35] ($\underline{Espace\ } L^p(\Omega)$)
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* $1 \leq p < \infty$.
On définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ *par*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

est muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Lorsque $p = \infty$, on a la définition suivante :

Définition 1.19 [35] ($\underline{Espace\ } L^\infty(\Omega)$)
Soit Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$.*On définit aussi l'espace* $L^\infty(\Omega)$ *par*

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \exists c > 0,\ \text{telle que } |u(x)| < c, \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Il sera muni de la norme du sup-essentiel

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty = ess \sup_{x \in \Omega} |u(x)| = \inf c : \{ |u(x)| < c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Proposition 1.4 [35] $L^p(\Omega)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^p(\Omega)}$ *est un espace de Banach, pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

Proposition 1.5 [35] $L^\infty(\Omega)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^\infty(\Omega)}$ *est un espace de Banach.*

pour $p = 2$, on a le lemme suivante :

Lemme 1.3 [35] *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$,
l'espace $L^2(\Omega)$ *est définit par*

$$L^2(\Omega) := \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R},\ u \text{ mesurable sur } \Omega \text{ et } \left(\int_\Omega |u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

est un espace de Hilbert muni de la norme suivante

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

et de produit Scalaire

$$\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega u\bar{v}dx\right) \quad \textit{pour tout } u, v \in L^2(\Omega).$$

Remarque 1.3 [35] *$L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Définition 1.20 *Soit E un espace de Banach $1 \leq p \leq \infty$ et $[0,T]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans E et on note $L^p((0,T);E)$ l'espace des fonctions $u:]0,T[\to E$, mesurable qui vérifient :*
$i)$ Si $1 \leq p \leq \infty$, $\|u\|_{L^p((0,T);E)} = \left(\int_0^T \|u(x)\|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$.
$ii)$ Si $p = \infty$, $\sup ess_{x\in]0,T[} |u(x)| < \infty$.

Définition 1.21 *Nous fixons*

$$L^\infty((0,T);E) = \left\{ \begin{array}{c} u:]0,T[\to E,\ u \textit{ est mesurable et il y a une constante } C \\ \textit{tel que } \sup ess_{x\in]0,T[} \|u(x)\|_E \leq C. \end{array} \right\}$$

1.4 Les espaces Sobolev Lebesgue et Sobolev avec des exposants variables

Soit $P: \Omega \to [1,\infty]$ une fonction mesurable. Où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^n$.
$1)$ *Nous définissons l'espace de Lebesgue avec un exposant variable p par*

$$L^{p(x)}(\Omega) := \left\{u: \Omega \to \mathbb{R}, \quad \text{mesurable dans } \Omega: \ \varrho_{p(x)}(\lambda u) < \infty, \quad \text{pour certains } \lambda > 0\right\}.$$

où

$$\varrho_{p(x)}(u) = \int_\Omega |u(x)|^{p(x)} \, dx.$$

equipé de la norme de type luxembourg suivante :

$$\|u\|_{p(x)} := \inf\left\{\lambda > 0: \int_\Omega \left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} dx \leq 1\right\}.$$

$L^{p(x)}(\Omega)$ est un espace de Banach [25].

2) *Nous définissons l'espace de Sobolev à exposant variable* $W^{1,p}(\Omega)$ *comme suit :*

$$W^{1,p(x)}(\Omega) := \left\{ u \in L^{p(x)}(\Omega) \quad \text{tels que } \nabla u \text{ existe et } |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega) \right\}.$$

Cet espace est un espace de Banach par rapport à la norme :

$$\|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{p(x)} + \|\nabla u\|_{p(x)}.$$

on pose $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ à soit la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{1,p(x)}(\Omega)$. De plus, nous définissons $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ est généralement définie d'une manière différente pour le cas d'exposant variable. Le dual de $W^{1,p(x)}(\Omega)$ est défini comme $W^{-1,p'(x)}(\Omega)$.

Lemme 1.4 [25].*Soit* Ω *un domaine borné de* $\mathbb{R}^n$ *et* $p(.)$ *vérifie* (3), *alors*

$$\| u \|_{p(x)} \leq C \| \nabla u \|_{p(x)}, \quad \textit{pour tout } u \in W_0^{1,p(x)}(\Omega).$$

où la constante positive dépend de Ω, p_1, p_2. *En particulier, l'espace* $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$ *a une norme équivalente donnée par*

$$\|u\|_{W_0^{1,p(x)}(\Omega)} = \|\nabla u\|_{p(x)}.$$

Lemme 1.5 [25]. *Si* $p : \Omega \to [1, \infty)$ *est une fonction mesurable et*

$$2 \leq p_1 \leq p(x) \leq p_2 < \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3.$$

puis l'injection $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p(.)}(\Omega)$ *est continue et compacte.*

Lemme 1.6 [25].*Si* $p(x) : \Omega \to [1, \infty)$ *est une fonction mesurable avec* $p_2 < \infty$, *alors* $C_0^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

Lemme 1.7 (*L'inégalité de Hölder* [25]). *Soit* $p, q, s \geq 1$ *des fonctions mesurables définies sur* Ω *telles que*

$$\frac{1}{s(y)} = \frac{1}{p(y)} + \frac{1}{q(y)}, \quad \textit{pour p.p. } y \in \Omega.$$

Si $f \in L^{p(.)}(\Omega)$ *et* $g \in L^{q(.)}(\Omega)$, *alors* $fg \in L^{s(.)}(\Omega)$ *et*

$$\|fg\|_{s(x)} \leq 2 \|f\|_{p(x)} \|g\|_{q(x)}.$$

Lemme 1.8 (*Propriété de la boule d'unité* [25]). *Soit* p *une fonction mesurable sur* Ω. *Puis*

$$\|f\|_{p(x)} \leq 1 \textit{ si et seulement si } \varrho_{p(x)}(f) \leq 1.$$

Lemme 1.9 [25].*Si* p *est une fonction mesurable sur* Ω *satisfaisant* (2), *alors pour p.p* $x \in \Omega$, *nous avons :*

$$\min \left\{ \|u\|_{p(x)}^{p_1}, \|u\|_{p(x)}^{p_2} \right\} \leq \varrho_{p(.)}(u) \leq \max \left\{ \|u\|_{p(x)}^{p_1}, \|u\|_{p(x)}^{p_2} \right\}.$$

pour tout $u \in L^{p(.)}(\Omega)$.

1.5 L'injection continue et compacte

Application linéaire

Définition 1.22 *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach tels qu'il existe une application linéaire injective de E dans F, cette application permet de considérer E comme un sous espace vectoriel de F et on notera $E \hookrightarrow F$ ou $E \subset F$.*
On dira que cette inclusion est :
1) ***Continue :*** *S'il existe une constante $C > 0$ telle que $\|u\|_F \leq C \|u\|_E$ et on notera $E \hookrightarrow_{continue} F$.*
2) ***Compact :*** *Si pour toute suite bornée dans E (pour la norme de E) on peut extraire une sous-suite qui converge dans F (pour la norme de F) et on notera $E \hookrightarrow_{compact} F$.*
3) ***Dense :*** *Si pour tout $u \in E$ il existe une suite $(u_n)_{n\in N} \subset E$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = u$(la convergence étant pour la norme de F).*

Théorème 1.2 *Si E est injecte continue de F alors F^* injecte continue de E^**

$$E \hookrightarrow_{continue} F \Rightarrow F^* \hookrightarrow_{continue} E^*.$$

Théorème 1.3 *Une injection est compacte alors elle est aussi continue.*

Quelques définitions de la convergence

Définition 1.23 *Soit u_n une suite dans $\mathcal{L}(E, F)$ et soit $u \in\mathcal{L}(E, F)$, on dit que la suite u_n converge vers u,*
1) *Uniformément (en norme) si : $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n - u\| = 0$, est on écrit $u_n \longrightarrow u$.*
2) *Fortement si : $\forall x \in E$, $\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n x - ux\| = 0$, est on écrit $u_n \longrightarrow (s)\, u$.*
3) *Faiblement si : $\forall x \in E$, $\forall \mathcal{L} \in F^*$ $\lim_{n\longrightarrow\infty} \mathcal{L}(u_n x) = \mathcal{L}(ux)$ est on écrit $u_n \longrightarrow (w)\, u$ ou F^* est le dual de F.*

Proposition 1.6 *La convergence uniforme entraine la convergence forte, et la convergence forte entraine la convergence faible.*

Définition 1.24 $\left(\underline{Convergence\ faible\ dans\ un\ espace\ de\ Hilbert}\right)$
Soit E une espace de Hilbert, une suite $(u_n)_{n\in N}$ de E converge faiblement vers u si :

$$\forall y \in E, \quad \lim_{n\longrightarrow\infty} \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle\,.$$

Théorème 1.4 *Toute suite bornée de E, on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

1.6 Quelques Inégalités utiles

Lemme 1.10 [35](*Inégalité de Cauchy-Schwartz*)
Soit Ω *une ouvert de* $\mathbb{R}^n$ $(\Omega \subset \mathbb{R}^n)$:

$$\forall u, v \in L^2(\Omega) \left| \int_\Omega uvdx \right| \leq \int_\Omega |uv|\, dx \leq \left(\int_\Omega |u|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$(i.e) : \|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Lemme 1.11 $\left(\textit{Inégalité de Hölder}\right)$
Soit p *un nombre avec* $1 \leq p \leq \infty$ *et soient* $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$, $|fg| \in L^1(\Omega)$ *et* $p, q > 0$ *telle que :*$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
alors on a :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Lemme 1.12 $\left(\textit{Inégalité de Young}\right)$ $(\textit{généralisé})$
Soit $\varepsilon > 0$ *alors* $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$ *on a :*

$$|ab| \leq \varepsilon |a|^p + c_\varepsilon |b|^q.$$

où p *et* q *sont strictement positifs liés par la relations :*$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ *et* $c(\varepsilon) = \frac{1}{q}(\varepsilon p)^{\frac{-q}{p}}$.

Lemme 1.13 $\left(\textit{Inégalité de Young avec } \varepsilon\right)$
Pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *on a :*

$$\varepsilon > 0 \quad ab \leq \frac{a^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon b^2}{2}.$$

D'autre écriture de inégalité Young avec ε
Pour tout $\varepsilon > 0$ *et* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ *on a :*

$$|ab| \leq \frac{1}{p} |\varepsilon a|^p + \frac{p-1}{p} \left| \frac{b}{\varepsilon} \right|^{\frac{p}{p-1}}, \quad \forall p > 1.$$

Lemme 1.14 [35] $\left(\textit{Inégalité de Poincaré}\right)$
Si Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$*, il existe une constante* c *telle que pour toute* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

En particulier $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ *est une norme équivalente à celle de* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

1.7 Méthodes d'existence

Ici, on énonce le théorème du point fixe qui s'appelle le théorème de l'application contractante. On utilise ce théorème pour prouver l'existence et l'unicité de la solution de notre problème non linéaire.

Définition 1.25 *Soit $f : E \to E$ est une application d'un espace métrique E : Le point u est un point fixe de f si*

$$f(u) = u.$$

Définition 1.26 *Soit (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques. L'application $\varphi : E \to F$ est appelée contraction s'il existe une constante positive $C < 1$ telle que :*

$$d_F(\varphi(u), \varphi(v)) \leq C d_E(u, v).$$

Théorème 1.5 *[39]* $\left(\underline{Théorème\ de\ point\ fixe\ pour\ application\ contractante}\right)$
Soit (E, d) un espace métrique complet. Si $\varphi : E \to E$ est un contraction, alors φ admet un point fixe unique.

Théorème 1.6 *[39]* $\left(\underline{Théorème\ de\ point\ fixe\ de\ Banach}\right)$
Soit (E, d) un espace métrique complet, et $f : E \to E$ une application contractante, c'est-à-dire qu'il existe $k \in [0, 1[$ tq pour tout $(x, y) \in E$,

$$d\left(f\left(x\right), f\left(y\right)\right) \leq kd\left(x, y\right).$$

alors f possède un unique point fixe l.

Chapitre 2

Existence et unicité de de solution d'une équation hyperbolique non-linéaire

Dans ce chapitre, nous allons démontrer l'existence locale, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et le théorème de l'application contractante.
Nous avons traité le problème hyperbolique non linéaire suivant

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a u_t \left| u_t \right|^{m(.).-2} = bu \left| u \right|^{p(.)-2}, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), u_t(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$, où $a, b \geq 0$ sont des constantes et les exposants $m(.)$ et $p(.)$ des fonctions mesurables sur Ω satisfaisant

$$2 \leqslant q_1 \leqslant q(x) \leqslant q_2 \leqslant \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{2.2}$$

avec

$$q_1 := ess \inf_{x \in \Omega} q(x), \quad q_2 := ess \sup_{x \in \Omega} q(x).$$

et la condition de continuité de log-Hölder :

$$\begin{cases} \left| q(x) - q(y) \right| \leqslant -\frac{A}{\log|x-y|}, \\ \text{pour p.p. } x, y \in \Omega, \quad \text{avec } |x - y| < \delta, \quad A > 0, \quad 0 < \delta < 1. \end{cases} \tag{2.3}$$

2.1 Méthode de Faedo-Galerkin

Définition 2.1 *Soit V un espace de Hilbert séparable et $\{V_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$une famille d'espace vectoriel de dimension finie vérifiant les axiomes :*

1) $V_k \subset V$, $\dim V < \infty$.
2) V_k *quand* $k \to \infty$. V_k *sont consédéré aux sens suivant : il existe* k *sous-espace dense de* V*, tel que pour tout* $u \in k$*, on peut trouver une suite* $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ *vérifiant :*
Pour tout k *,* $u_k \in V_k$ *et* $u_k \to u$ *dans* V *lorsque* $k \to \infty$.

L'espace V_k s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre k.

2.2 Le schéma de la méthode de Galerkin

Soit (P) le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de fonction construit sur un espace de Hilbert séparable V. Soit u la solution unique du problème (P).
Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin V_k de V, il convient de définir un problème approché (P_k) dans l'espace de dimension finie (V_k) ayant une unique solution (u_k).
Le déroulement de l'étude est alors le suivant :
Étape $n^0 1$: On définit la solution u_k du problème (P_k).
Étape $n^0 2$: On établit des estimations sur u_k (dites $\ll estimation\ apriori \gg$ sur u) qui traduisent que u_k et uniformément bornée.
Étape $n^0 3$: Par utilisation des résultats que u_k est uniformément bornée, il est alors possible d'extraire de $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ une sous suite $\{u_k'\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ qui a une limite dans la topologie faible des espaces qui interviennent dans les estimations de l'étape $n^0 2$.
Soit alors u la limite obtenue.
Étape $n^0 4$: On montrer que u est solution du problème (P).
Étape $n^0 5$: Résultats de convergences fortes.
Notre objectif est de construire un procédé d'approximation qui nous fournit à la limite une démonstration de l'existence de la solution, ce procédé revient à approcher $u(x,t)$ comme combinaison linéaire de $\ll$fonctions de bases$\gg$ $v_j(x)$ telle que :

$$u_k\left(x,t\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{jk}\left(t\right) v_j\left(x\right), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]\,.$$

2.3 Existence et l'unicité de solution faible

Dans cette section, nous prouvons l'existence des solutions faibles de notre problème.

D'abord, nous considérons le problème de valeur limite initiale :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a u_t |u_t|^{m(.)-2} = f(x,t), \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \text{dans } \Omega, \\ u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.4}$$

où $a > 0$ est une constante, $f \in L^2(\Omega \times (0,T)), (u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, l'exposant $m(.)$ est une fonction mesurable donnée satisfaisant (2.2) et (2.3), et Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$.

Théorème 2.1 *[33] Dans les conditions ci-dessus, problème (2.4) a une solution locale unique.*

$$\begin{cases} u \in L^\infty((0,T), H_0^1(\Omega)), \\ u_t \in L^\infty((0,T), L^2(\Omega)) \cap L^{m(.)}(\Omega \times (0,T)), \\ u_{tt} \in L^2((0,T), H^{-1}(\Omega)). \end{cases}$$

Preuve.

Unicité :

Supposons que (2.4) a deux solutions u et v. Alors, $w = u - v$ satisfait :

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + a u_t |u_t|^{m(.)-2} - a v_t |v_t|^{m(.)-2} = 0, \quad \textit{dans } \Omega \times (0,T), \\ w(x,t) = 0, \quad \textit{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ w(x,0) = 0, w_t(x,0) = 0 \quad \textit{dans } \Omega. \end{cases}$$

Multiplier par w_t et intégrer sur Ω

$$\int_\Omega w_{tt} w_t dx - \int_\Omega \Delta w w_t dx + \int_\Omega a u_t |u_t|^{m(.)-2} w_t dx - \int_\Omega a v_t |v_t|^{m(.)-2} w_t dx = 0. \tag{2.5}$$

en utilisant

$$w_t w = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(w^2\right).$$

$$\int_\Omega (w_t)_t w_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(w_t^2(x,t)\right) dx. \tag{2.6}$$

en utilisant

$$\int_\Omega (\Delta w).w dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta} w ds - \int_\Omega \nabla w.\nabla w dx.$$

en utilisant la condition aux limites $w = 0$, on obtient :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \eta} w ds = \frac{\partial w}{\partial \eta} w\backslash_\Omega = 0.$$

$$-\int_{\Omega}\Delta w w_t dx=\int_{\Omega}\nabla w.\left(\nabla w\right)_t dx=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\left|\nabla w\left(x,t\right)\right|^2 dx.$$

en remplacent (2.6) *et* (**??**) *dans* (2.5), *on obtenir :*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[\int_{\Omega}w_t^2 dx+\int_{\Omega}\left|\nabla w\right|^2 dx\right]+a\int_{\Omega}\left(u_t\left|u_t\right|^{m(x)-2}w_t-v_t\left|v_t\right|^{m(x)-2}\right)\left(u_t-v_t\right)dx=0.$$

Intégrez sur $(0,t)$, *pour obtenir :*

$$\int_{\Omega}\left(w_t^2+\left|\nabla w\right|^2\right)dx+2a\int_0^t\int_{\Omega}\left(u_t\left|u_t\right|^{m(x)-2}-v_t\left|v_t\right|^{m(x)-2}\right)\left(u_t-v_t\right)dx=0.$$

En utilisant l'inégalité

$$\left(\left|a\right|^{m(x)-2}a-\left|b\right|^{m(x)-2}b\right).\left(a-b\right)\geq 0.$$

pour tout $a,b\in\mathbb{R}^n$ *et p.p.* $x\in\Omega$, *nous avons*

$$\int_{\Omega}\left(w_t^2+\left|\nabla w\right|^2\right)dx=0.$$

on a

$$\int_{\Omega}\left|w\right|^2 dx=\left\|w\right\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

$$\left\|w\right\|_{L^2(\Omega)}=0\Leftrightarrow w=0\ p.p.$$

ce qui implique $w=c=0$, *puis que* $w=0$ *sur* $\partial\Omega$.

Existence :

Pour prouver l'existence d'une solution faible on utilise les trois étapes suivantes :

1) *construction de la solution approchée* u_n.

2) *estimation à priori de la solution approchée.*

3) *convergence de la solution approchée* u_n *vers la solution* u, *lorsque* $n\to\infty$.

Approximation de dimension finie

Soit $\{v_j\}_{j=1}^{\infty}$ *une base orthonormée de* $H_0^1(\Omega)$.

On note par $\{\lambda_j\}_{j=1}^{n}$ *les coefficients de combinaison linéaire, où* v_j *sont les solutions du problème :*

$$-\Delta v_j=\lambda_j v_j,\quad \text{dans }\Omega,\ v_j=0\quad \text{sur }\partial\Omega. \tag{2.7}$$

et définir le sous-espace de dimension finie $v_k=\textit{générateur}\,\{v_1...v_k\}$. *Par normalisation, nous avons* $\left\|v_j\right\|_2=1$.

D'après $(Th\acute{e}or\grave{e}me 1.1)$, *on a :*

Nous recherchons des fonctions

$$u^k\left(x,t\right)=\sum_{j=1}^{k}a_j\left(t\right)v_j\left(x\right). \tag{2.8}$$

qui satisfirent les problèmes d'approximations suivants :

$$\begin{cases} \int_\Omega u_{tt}^k(x,t)\,v_j(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u^k(x,t).\nabla v_j(x)\,dx \\ +a\int_\Omega \left|u_t^k(x,t)\right|^{m(x)-2} u_t^k v_j(x)\,dx = \int_\Omega f(x,t)\,v_j(x)\,dx \\ u^k(x,0) = u_0^k, \\ u_t^k(x,0) = u_1^k, \quad \forall j = 1,2,...k. \end{cases} \tag{2.9}$$

Où

$$u_0^k = \sum_{i=1}^k (u_0, vi)\,vi\,,\ u_1^k = \sum_{i=1}^k (u_1, vi)\,vi.$$

sont deux suites dans $H_0^1(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$, respectivement, tel que :

$$u_0^k \to u_0 \quad \textit{dans } H_0^1(\Omega) \ \textit{et } u_1^k \to u_1 \quad \textit{dans } L^2(\Omega).$$

Ceci génère le système de k équations différentielle ordinaires

$$\begin{cases} a_j''(t) + \lambda_j a_j(t) = g_j(t) + G_j(a_1'(t),...,a_k'(t)), \\ a_j(0) = (u_0, v_j), \\ a_j'(0) = (u_1, v_j), \quad \forall j \in 1,2,...,k. \end{cases} \tag{2.10}$$

où

$$g_j(t) = \int_\Omega f(x,t)\,v_j(x)\,dx.$$

et

$$G_j(a_1'(t),...,a_k'(t)) = -a\int_\Omega \left|\sum_{i=1}^k a_i'(t)\,v_i(x)\right|^{m(x)-2} \times a_i'(t)\,v_i(x)\,v_j(x)\,dx.$$

Car

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{tt}^k(x,t)\,dx - \int_\Omega \Delta u^k(x,t)\,dx + a\int_\Omega |u_t(x,t)|^{m(x)-2} u_t^k(x,t)\,dx \\ &= \int_\Omega f(x,t)\,dx. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Multiplier (2.11) *par* $v_j(x)$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{tt}^k(x,t)\,v_j(x)\,dx - \int_\Omega \Delta u^k(x,t) v_j(x)\,dx \\ &+a\int_\Omega \left|u_t^k(x,t)\right|^{m(x)-2} u_t^k(x,t)\,v_j(x)\,dx \\ &= \int_\Omega f(x,t)\,v_j(x)\,dx. \end{aligned}$$

en utilisant (2.8) *et en applique formule de green, on obtient :*

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \sum_{i=1}^k a_j''(t)\,v_j(x)\,v_j(x)\,dx - \int_{\partial\Omega} \nabla u^k(x,t)\,v_j(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u^k(x,t).\nabla v_j(x)\,dx \\ &+a\int_\Omega \left|u_t^k(x,t)\right|^{m(x)-2} u_t^k(x,t)\,v_j(x)\,dx \\ &= \int_\Omega f(x,t)\,v_j(x)\,dx. \end{aligned}$$

le terme $\int_{\partial\Omega} \nabla u^k(x,t)\, v_j(x)\, dx$ *égale à zéro car* $v_j(x) = 0$ *sur* $\partial\Omega$*, donc nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{i=1}^{k} a_j''(t)\, v_j(x)\, v_j(x)\, dx + \int_\Omega \nabla u^k(x,t)\,.\nabla v_j(x)\, dx \\
&+a \int_\Omega \left|u_t^k(x,t)\right|^{m(x)-2} u_t^k(x,t)\, v_j(x)\, dx \\
&= \int_\Omega f(x,t)\, v_j(x)\, dx.
\end{aligned}$$

puis, en utilise formule de Green :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{i=1}^{k} a_j''(t)\, v_j(x)\, v_j(x)\, dx - \int_\Omega \Delta v_j(x)\, u^k(x,t)\, dx + \int_{\partial\Omega} \nabla v_j(x)\, u^k(x,t)\, dx \\
&+a \int_\Omega \left|u_t^k(x,t)\right|^{m(x)-2} u_t^k(x,t)\, v_j(x)\, dx \\
&= \int_\Omega f(x,t)\, v_j(x)\, dx.
\end{aligned}$$

donc en utilise (2.7) *et* (2.8)*, nous obtenons :*

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \sum_{i=1}^{k} a_j''(t)\, v_j(x)\, v_j(x)\, dx - \int_\Omega \lambda_j v_j(x) \sum_{i=1}^{K} a_j(t)\, v_j(x)\, dx + \int_{\partial\Omega} \nabla vj(x)\, u^k(x,t)\, dx \\
&+a \int_\Omega \left|u_t^k(x,t)\right|^{m(x)-2} u_t^k(x,t)\, v_j(x)\, dx = \int_\Omega f(x,t)\, v_j(x)\, dx.
\end{aligned}$$

donc, par conséquent

$$a_j''(t) + \lambda_j a_j(t) = g_j(t) + G_j\left(a_1'(t), ..., a_k'(t)\right).$$

où

$$g_j(t) = \int_\Omega f(x,t)\, v_j(x)\, dx.$$

et

$$\begin{aligned}
G_j\left(a_1'(t), ..., a_k'(t)\right) &= -a \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{k} a_i'(t)\, v_i(x)\right|^{m(x)-2} \times \sum_{i=1}^{k} a_i'(t)\, v_i(x)\, v_j(x)\, dx \\
&\quad - \int_{\partial\Omega} \nabla v_j(x) \sum_{i=1}^{k} a_i(t)\, v_i dx.
\end{aligned}$$

maintenant, si nous avons $v_j = 0$ *sur* $\partial\Omega$ *donc* $\nabla v_j = 0$ *également sur* $\partial\Omega$*, et nous obtenons que :*

$$G_j\left(a_1'(t), ..., a_k'(t)\right) = -a \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^{k} a_i'(t)\, v_i(x)\right|^{m(x)-2} \times \sum_{i=1}^{k} a_i'(t)\, v_i(x)\, v_j(x)\, dx.$$

Ce système peut être résolu par la théorie ODE standard.

Estimation à priori :

Par conséquent, nous obtenons des fonctions :

$$a_j : [0, t_k) \to \mathbb{R}, \quad 0 < t_k < T.$$

Ensuite, nous devons montrer que $t_k = T$, $\forall k \geqslant 1$.*On multiplie* (2.9) *par* $a'_j(t)$ *et on somme en* j, *il vient*

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u^k_{tt}(x,t)\sum_{j=1}^{k} a'_j(t)\, v_j(x)\,dx + \int_\Omega \nabla u^k(x,t)\sum_{j=1}^{k} a'_j(t)\,\nabla v_j(x)\,dx \\ &+a\int_\Omega \left|u^k_t(x,t)\right|^{m(x)-2} u^k_t(x,t)\sum_{j=1}^{k} a'_j(t)\, v_j(x)\,dx \\ &= \int_\Omega f(x,t)\sum_{j=1}^{k} a'_j(t)\, v_j(x)\,dx\end{aligned} \tag{2.12}$$

on a

$$u^k_t(x,t) = \sum_{j=1}^{k} a'_j(t)\, v_j(x)\,. \tag{2.13}$$

$$u_t u = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^2\right). \tag{2.14}$$

en utilisant (2.13) *et* (2.14) *dans* (2.12), *on obtient :*

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left[\int_\Omega\left(\left|u^k_t(x,t)\right|^2+\left|\nabla u^k(x,t)\right|^2\right)dx\right] + a\int_\Omega\left|u^k_t(x,t)\right|^{m(x)}dx \\ &= \int_\Omega f(x,t)\,u^k_t(x,t)\,dx.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Intégration (2.15) *sur* $(0,t)$ *donne pour tout* $t\in[0,t_k)$. *On trouve*

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int_\Omega\left(\left|u^k_t(x,t)\right|^2+\left|\nabla u^k(x,t)\right|^2\right)dx + a\int_0^t\int_\Omega\left|u^k_t(x,s)\right|^{m(x)}dxds \\ &= \tfrac{1}{2}\int_\Omega\left(\left|u^k_1\right|^2+\left|\nabla u^k_0\right|^2\right)dx + \int_0^t\int_\Omega f(x,s)\,u^k_t(x,s)\,dxds.\end{aligned} \tag{2.16}$$

On appliquant l'inégalité de Young $(généralisé)$ *sur le* $2^{\text{ème}}$ *terme du membre de droit de l'équation* (2.16), *on obtient :*

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int_\Omega\left(\left|u^k_1\right|^2+\left|\nabla u^k_0\right|^2\right)dx + \int_0^t\int_\Omega f(x,s)\,u^k_t(x,s)\,dxds. \\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\int_\Omega\left(u_1^2+\left|\nabla u_0\right|^2\right)dx + \varepsilon\int_0^t\int_\Omega\left|u^k_t\right|^2dxds + c_\varepsilon\int_0^t\int_\Omega f^2dxds \\ &\leqslant C_\varepsilon + \varepsilon\sup_{(0,t_k)}\int_\Omega\left|u^k_t(x,t)\right|^2dx, \quad \forall t\in[0,t_k)\,.\end{aligned} \tag{2.17}$$

où

$$C_\varepsilon = \frac{1}{2}\int_\Omega\left(u_1^2+\left|\nabla u_0\right|^2\right)dx + c_\varepsilon\int_0^t\int_\Omega f^2dxds.$$

en remplaçant (2.17) *dans* (2.16), *on obtient*

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\sup_{(0,t_k)}\int_\Omega\left|u^k_t(x,t)\right|^2dx + \tfrac{1}{2}\sup_{(0,t_k)}\int_\Omega\left|\nabla u^k(x,t)\right|^2dx + a\int_0^{t_k}\int_\Omega\left|u^k_t(x,s)\right|^{m(x)}dxds \\ &\leqslant C_\varepsilon + \varepsilon\sup_{(0,t_k)}\int_\Omega\left|u^k_t(x,t)\right|^2dx.\end{aligned}$$

Choisir $\varepsilon = \frac{1}{4}$, *nous avions à*

$$\frac{1}{4}\sup_{(0,t_k)}\int_\Omega\left|u^k_t(x,t)\right|^2dx + \frac{1}{2}\sup_{(0,t_k)}\int_\Omega\left|\nabla u^k(x,t)\right|^2dx + a\int_0^{t_k}\int_\Omega\left|u^k_t(x,s)\right|^{m(x)}dxds \leqslant C.$$

Ainsi, la solution peut être étendue à $[0,T)$ *et en plus, on a :*

$$\begin{cases} \left(u^k\right) \text{ est un borné dans } L^\infty\left((0,T), H_0^1\right), \\ \left(u_t^k\right) \text{ est un borné dans } L^\infty\left((0,T), L^2(\Omega)\right) \cap L^{m(.)}\left(\Omega \times (0,T)\right). \end{cases}$$

La convergence :

D'après $(Th\acute{e}or\grave{e}me 1.4)$

Par conséquent, nous pouvons extraire une sous-suite $\left(u^l\right)$ *tel que :*

$$u^l \to u \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right).$$

$$u_t^l \to u_t \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty\left((0,T), L^2(\Omega)\right) \text{ et faiblement dans } L^{m(.)}\left(\Omega \times (0,T)\right).$$

Nous pouvons conclure par le lemme de Lion [29] que $u \in C\left([0,T], L^2(\Omega)\right)$ *pour que* $u(x,0)$ *ait une signification. De puis* $\left(u_t^l\right)$ *est borné dans* $L^{m(.)}\left(\Omega \times (0,T)\right)$ *alors* $\left|u_t^l\right|^{m(x)-2} u_t^l$ *est borné dans* $L^{\frac{m(.)}{m(.)-1}}\left(\Omega \times (0,T)\right)$ *; par conséquent, jusqu'à une sous suite,*

$$\left|u_t^l\right|^{m(x)-2} u_t^l \to \psi \text{ faiblement dans } L^{\frac{m(.)}{m(.)-1}}\left(\Omega \times (0,T)\right).$$

Nous devons montrer que $\psi = \left|u_t\right|^{m(.)-2} u_t$*. Dans* (2.9) *nous utilisons* u^l *au lieu de* u^k *et intégrer sur* $(0,t)$ *, pour obtenir :*

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega u_t^l v_j dx - \int_\Omega u_1^l v_j dx + \int_0^t \int_\Omega \nabla u^l . \nabla v_j dx dt + a \int_0^t \int_\Omega \left|u_t^l\right|^{m(x)-2} u_t^l v_j dx dt \\ &= \textstyle\int_0^t \int_\Omega f v_j dx dt, \quad \forall j < l. \end{aligned}$$

Comme l *tends vers* $+\infty$*, nous vérifions facilement que :*

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega u_t v_j dx - \int_\Omega u_1 v_j dx + \int_0^t \int_\Omega \nabla u . \nabla v_j dx dt + a \int_0^t \int_\Omega \psi v_j dx dt \\ &= \textstyle\int_0^t \int_\Omega f v_j dx, \quad \forall j \geq 1. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} &\textstyle\int_\Omega u_t v dx - \int_\Omega u_1 v dx + \int_0^t \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx dt + a \int_0^t \int_\Omega \psi v dx dt \\ &= \textstyle\int_0^t \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Tous les termes définissent des fonctions continues absolues ; donc on obtient, pour p.p $t \in [0,T]$

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega u_t v dx + \int_\Omega \left(\nabla u . \nabla v + a \psi v\right) dx = \int_\Omega f v \, dx, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \tag{2.18}$$

Cela implique que

$$u_{tt} - \Delta u + \psi = f, \quad \textit{dans } D'(\Omega \times (0,T)). \tag{2.19}$$

Pour simplifier, soit $A(v) = |v|^{m(x)-2} v$ *et définir :*

$$X^l = \int_0^T \int_\Omega \left(A\left(u_t^l\right) - A(v)\right)\left(u_t^l - v\right) dt \geqslant 0, \quad \forall v \in L^{m(.)}\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right).$$

Donc, en utilisant (2.16) *et en remplacent* u^k *par* u^l*, nous obtenons :*

$$X^l = \int_0^T \int_\Omega f u_t^l dx dt + \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(\left|u_1^l\right|^2 + \left|\nabla u_0^l\right|^2\right) dx - \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left|u_t^l(x,T)\right| dx - \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u^l(x,T)\right|^2 dx$$
$$- \int_0^T \int_\Omega A\left(u_t^l\right) v dx dt - \int_0^T \int_\Omega A(v)\left(u_t^l - v\right) dx dt.$$

En prenant, $l \to \infty$*, on obtient :*

$$\begin{aligned}
&0 \leq \limsup X^l \\
&\leq \int_0^T \int_\Omega f u_t dx dt + \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_1|^2 + |\nabla u_0|^2\right) dx \\
&-\tfrac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,T)|^2 dx - \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,T)|^2 dx \\
&-\int_0^T \int_\Omega \psi u dx dt - \int_0^T \int_\Omega A(v)(u_t - v) dx dt.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

En remplaçant de v *par* u_t *dans* (2.18)

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u_t u_t dx + \int_\Omega (\nabla u . \nabla u_t + a\psi u_t) dx = \int_\Omega f u_t dx \quad \forall u_t \in H_0^1(\Omega).$$

en utilisant

$$u_t u = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}u^2.$$

et intégrant sur $(0,T)$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^2 dx dt + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\int_0^T \int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 dx dt + a\int_0^T \int_\Omega \psi u_t(x,t) dx dt \\
&= \textstyle\int_0^T \int_\Omega f u_t(x,t) dx dt.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t(x,T)|^2 - |u_t(x,0)|^2\right) dx + \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,T)|^2 dx \\
&-\tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,0)|^2 dx + a\int_0^T \int_\Omega \psi u_t(x,t) dx dt \\
&= \textstyle\int_0^T \int_\Omega f u_t(x,t) dx
\end{aligned}$$

on arrive à

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_\Omega f u_t dx dt = \tfrac{1}{2}\int_\Omega |u_t(x,T)|^2 dx \\
&-\tfrac{1}{2}\int_\Omega u_1^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(x,T)|^2 dx \\
&-\tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx + a\int_0^T \int_\Omega \psi u_t(x,t) dx dt.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Par addition de (2.20) *et* (2.21)*, donne*

$$0 \leq \limsup_{l} X^l \leq \int_0^T \int_\Omega \psi u_t dxdt - \int_0^T \int_\Omega \psi v dxdt - \int_0^T \int_\Omega A(v)(u_t - v)\, dxdt.$$

Donc

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(v))(u_t - v)\, dxdt \geq 0, \quad \forall v \in L^{m(.)}\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right).$$

Par conséquent

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(v))(u_t - v)\, dxdt \geq 0, \quad \forall v \in L^{m(.)}(\Omega \times (0,T)).$$

par densité de $H_0^1(\Omega)$ *dans* $L^m(\Omega)$ $(lemme 1.6)$*.*

Soit $v = \lambda w + u_t$*,* $w \in L^m(\Omega \times (0,T))$*. Donc, nous obtenir*

$$-\lambda \int_0^T \int_\Omega (\psi - A(\lambda w + u_t))\, w dxdt \geq 0, \quad \forall \lambda \neq 0, \quad \forall w \in L^{m(.)}(\Omega \times (0,T)).$$

Pour $\lambda > 0$*, on a*

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(\lambda w + u_t))\, w dxdt \leq 0, \quad \forall w \in L^{m(.)}(\Omega \times (0,T)).$$

Comme $\lambda \to 0$*, et en utilisant la continuité de* A *par rapport à* λ*, on obtient*

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(u_t))\, w dxdt \leq 0, \quad \forall w \in L^{m(.)}(\Omega \times (0,T)).$$

De même $\lambda < 0$*, on obtient :*

$$\int_0^T \int_\Omega (\psi - A(u_t))\, w dxdt \geq 0, \quad \forall w \in L^{m(.)}(\Omega \times (0,T)).$$

Cela implique $\psi = A(u_t)$*. Donc* (2.18) *devient*

$$\int_\Omega \left(u_{tt} v + \nabla u.\nabla v + a\,|u_t|^{m(x)-2} u_t v\right) dx = \int_\Omega f v dx, \quad \forall v \in L^{m(.)}\left((0,T) \times H_0^1(\Omega)\right).$$

qui donne

$$u_{tt} - \Delta u + a\,|u_t|^{m(x)-2} u_t = f \quad \textit{dans } D'(\Omega \times (0,T)).$$

Pour gérer les conditions initiales, nous notons que :

$$\begin{cases} u^l \rightharpoonup u \textit{ faiblement * dans } L^\infty(0,T), H_0^1(\Omega), \\ u_t^l \rightharpoonup u_t \textit{ faiblement * dans } L^\infty((0,T), L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.22}$$

Ainsi, en utilisant le lemme des Lions [29]*, nous obtenons,*

$$u^l \to u \quad \textit{dans } C\left([0,T], L^2(\Omega)\right). \tag{2.23}$$

Par conséquent, $u^l(x,0)$ *a du sens et* $u^l(x,0) \to u(x,0)$ *dans* $L^2(\Omega)$*. Nous avons aussi ça :*

$$u^l(x,0) = u_0^l(x) \to u_0(x) \quad \textit{dans } H_0^1(\Omega).$$

Par conséquent

$$u(x,0) = u_0(x). \tag{2.24}$$

Comme dans [30]*, soit* $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ *et en remplaçant* (u^k) *par* (u^l)*, on obtient de* (2.9) *et pour tout* $j \leq l$ *que*

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega u_t^l(x,t) v_j(x)\, \phi'(t)\, dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u^l(x,t)\, \nabla v_j(x)\, \phi(t)\, dxdt \\
&-a\int_0^T \int_\Omega \left|u_t^l(x,t)\right|^{m(x)-2} u_t^l(x,t)\, v_j(x)\, \phi(t)\, dxdt \\
&+\int_0^T \int_\Omega f(x,t)\, v_j(x)\, \phi(t)\, dxdt.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Comme $l \to \infty$*, on obtient que :*

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t) v_j(x)\, \phi'(t)\, dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \nabla u(x,t)\, \nabla v_j(x)\, \phi(t)\, dxdt \\
&-a\int_0^T \int_\Omega |u_t(x,t)|^{m(x)-2} u_t(x,t)\, v_j(x)\, \phi(t)\, dxdt \\
&+\int_0^T \int_\Omega f(x,t)\, v_j(x)\, \phi(t)\, dxdt.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

pour tout $j \geq 1$*, cela implique*

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t) v(x)\, \phi'(t)\, dxdt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \left[\Delta u - a\,|u_t(x,t)|^{m(x)-2} u_t(x,t) + f(x,t)\right] v(x)\, \phi(t)\, dxdt.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$ *. Cela signifie* $u_{tt} \in L^{\frac{m(.)}{m(.)-1}}([0,T), H^{-1}(\Omega))$ *et* u *résoudre l'équation*

$$u_{tt-}\Delta u + a\,|u_t|^{m(.)-2} u_t = f. \tag{2.28}$$

Donc

$$u_t \in L^\infty\left([0,T], L^2(\Omega)\right).$$
$$u_{tt} \in L^{\frac{m(.)}{m(.)-1}}\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right).$$

Par conséquent,

$$u_t \in C\left([0,T], H^{-1}(\Omega)\right). \tag{2.29}$$

Donc, $u_t^l(x,0)$ *a du sens [30]. Il s'ensuit que :*

$$u_t^l(x,0) \to u_t(x,0) \quad \textit{dans } H^{-1}(\Omega).$$

Mais

$$u_t^l(x,0) = u_1^l(x) \to u_1(x) \quad \textit{dans } L^2(\Omega).$$

Par conséquent

$$u_t(x,0) = u_1(x). \tag{2.30}$$

Ceci met fin à la preuve du théorème 2.1. ■

2.4 Existence locale

Dans cette section, nous allons démontrer l'existence locale du problème (2.1).
Comme la solution existe pour le problème (2.4), nous allons utiliser le théorème de l'application contractante pour montrer l'existence locale de solutions faibles pour le problème (2.1).

Lemme 2.1 *Pour* $x \in \Omega$ *p.p. et* p *satisfaisant :*

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < +\infty.$$

la fonction $g(s) = b|s|^{p(x)-2}s$ *est différentiable et*

$$|g'(s)| = |b|\,|p(x)-1|\,|s|^{p(x)-2}.$$

Maintenant, le résultat de bonne position de notre problème est le suivant

Théorème 2.2 *[33] Supposons que* $m(.)$ *vérifie* (2.2), (2.3) *et* $p(.)$ *satisfait* (2.3) *et*

$$2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 < 2\frac{n-1}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{2.31}$$

Supposons aussi

$$(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{2.32}$$

Alors le problème (2.1) *a une solution locale unique.*

$$\begin{cases} u \in L^\infty((0,T), H_0^1(\Omega)), \\ u_t \in L^\infty((0,T), L^2(\Omega)) \cap L^m(\Omega \times (0,T)), \\ u_{tt} \in L^2((0,T), H^{-1}(\Omega)). \end{cases} \tag{2.33}$$

Preuve. Soit $v \in L^{\infty}\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$ .Puis

$$\begin{aligned} \|g(v)\|_2^2 &= |b|^2 \int_\Omega |v|^{2(p(x)-1)}\, dx \\ &\leq |b|^2 \left[\int_\Omega |v|^{2(p_2(x)-1)}\, dx + \int_\Omega |v|^{2(p_1(x)-1)}\, dx\right] \\ &< +\infty. \end{aligned}$$

puisque

$$2(p_1-1) \leq 2(p_2-1) \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Donc, dans ce cas,

$$g(v) \in L^{\infty}\left((0,T), L^2(\Omega)\right) \subset L^2\left(\Omega \times (0,T)\right).$$

Par conséquent, pour chaque $v \in L^{\infty}\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right)$, là existe un unique

$$\begin{aligned} u &\in L^{\infty}\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right), \\ u_t &\in L^{\infty}\left((0,T), L^2(\Omega)\right) \cap L^{m(.)}\left(\Omega \times (0,T)\right). \end{aligned}$$

satisfaire le problème non linéaire

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a u_t |u_t|^{m(.)-2} = g(v), & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x),\, u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{2.34}$$

On définit une application $G : X_T \to X_T$ par $G(v) = u$, où

$$X_T = \left\{w \in L^{\infty}\left((0,T), H_0^1(\Omega)\right) \text{ tel que } w_t \in L^{\infty}\left((0,T), L^2(\Omega)\right)\right\}.$$

X_T est l'espace de Banach par rapport à la norme.

$$\|w\|_{X_T} = \|w\|_{L^{\infty}\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right)} + \|w_t\|_{L^{\infty}((0,T),L^2(\Omega))}.$$

Multiplions l'équation de (2.34) par $u_t(x,t)$ et intégrons sur $\Omega\times$ $(0,t)$, on obtient

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega u_t^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx + a\displaystyle\int_0^t \textstyle\int_\Omega |u_t|^{m(x)}\, dxdt \\ &= \tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega u_1^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_0|^2\, dx + b\displaystyle\int_0^t \textstyle\int_\Omega |v|^{p(x)-2}\, v u_t dxdt. \end{aligned} \tag{2.35}$$

En utilisant l'inégalité de Young avec ε, nous avons

$$\begin{aligned} \int_\Omega |v|^{p(x)-2}\, v u_t dx &\leq \frac{\varepsilon}{4}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega |v|^{2p(x)-2}\, dx \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{1}{\varepsilon}\left[\int_\Omega |v|^{2p_2-2}\, dx + \int_\Omega |v|^{2p_1-2}\, dx\right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{4}\int_\Omega u_t^2 dx + \frac{C_e}{\varepsilon}\left[\|\nabla v\|_2^{2p_2-2} + \|\nabla v\|_2^{2p_1-2}\right]. \end{aligned}$$

Ainsi (2.35) devient

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int_\Omega u_t^2dx+\tfrac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\\&\leq \lambda_0+\tfrac{|b|\varepsilon T}{4}\sup_{(0,T)}\int_\Omega u_t^2dx+\tfrac{|b|c_e}{\varepsilon}\left[\int\limits_0^T \|\nabla v\|_2^{2p_2-2}\,dt+\int\limits_0^T \|\nabla v\|_2^{2p_1-2}\,dt\right].\end{aligned}$$

d'où nous avons

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\sup_{(0,T)}\int_\Omega u_t^2dx+\tfrac{1}{2}\sup_{(0,T)}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\\&\leq 2\lambda_0+\tfrac{|b|\varepsilon T}{2}\sup_{(0,T)}\int_\Omega u_t^2dx+Tc_\varepsilon\left[\|v\|_{X_T}^{2p_2-2}+\|v\|_{X_T}^{2p_1-2}\right].\end{aligned}$$

où

$$\lambda_0=\frac{1}{2}\|u_1\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u_0\|_2^2.$$

et c_e est la constante d'intégration.
Choisir ε tel que $\frac{|b|\varepsilon T}{2}=\frac{1}{4}$, on a

$$\|u\|_{X_T}^2\leq \lambda+T\beta\left[\|v\|_{X_T}^{2p_2-2}+\|v\|_{X_T}^{2p_1-2}\right].$$

Supposons que $\|v\|_{X_T}\leq M$, pour certains M grands. Puis

$$\|u\|_{X_T}^2\leq \lambda+T\beta M^{2p_2-2}\leq M^2.$$

si

$$M^2>\lambda \quad \text{et} \quad T\leq T_0\leq \frac{M^2-\lambda}{\beta M^{2p_2-2}}.$$

Nous concluons que $G: B\longrightarrow B$, où

$$B=\left\{w\in L^\infty\left((0,T),H_0^1(\Omega)\right),\ w_t\in L^\infty\left((0,T),L^2(\Omega)\right)\ \text{tel que}\ \|w\|_{X_{T_0}}\leq M\right\}.$$

Ensuite, nous montrons que, pour T_0 (encore plus petit), G est une contraction.
Pour cela, soit $u_1=G(v_1)$ et $u_2=G(v_2)$ et posez $u=u_1-u_2$ alors u satisfait

$$\begin{cases} u_{tt}-\Delta u+a\left[u_{1t}|u_{1t}|^{m(x)-2}-u_{2t}|u_{2t}|^{m(x)-2}\right]\\ =b\left[|v_1|^{p(x)-2}v_1-|v_2|^{p(x)-2}v_2\right], \quad \text{dans } \Omega\times(0,T),\\ u(x,t)=0, \quad \text{sur } \partial\Omega\times(0,T),\\ u(x,0)=u_0(x), u_t(x,0)=u_1(x), \quad \text{dans } \Omega.\end{cases} \tag{2.36}$$

Multiplions (2.36) par u_t et intégration sur $\Omega\times(0,T)$, donne

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\int_\Omega u_t^2dx+\tfrac{1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx+a\int_0^t\int_\Omega\left[|u_{1t}|^{m(x)-2}u_{1t}-|u_{2t}|^{m(x)-2}u_{2t}\right](u_{1t}-u_{2t})\,dxdt\\&=b\int_0^t\int_\Omega(g(v_1)-g(v_2))\,u_tdxds.\end{aligned}$$

d'où nous avons :

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\leq b\int_0^t\int_{\Omega}\left(g\left(v_1\right)-g\left(v_2\right)\right)u_tdxds. \tag{2.37}$$

Maintenant, nous évaluons

$$I=\int_{\Omega}|g\left(v_1\right)-g\left(v_2\right)|\,|u_t|\,dx=\int_{\Omega}|g'\left(\xi\right)|\,|v|\,|u_t|\,dx.$$

où $v=v_1-v_2$ et $\xi=\alpha v_1+(1-\alpha)\,v_2,\quad 0\leq\alpha\leq 1.$

L'inégalité de Young implique :

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{\delta}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx+\frac{2}{\delta}\int_{\Omega}|g'\left(\xi\right)|^2\,|v|^2\,dx\\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx+\frac{2a^2\left(p_2-1\right)^2}{\delta}\int_{\Omega}|\alpha v_1+(1-\alpha)\,v_2|^{2(p(x)-2)}\,|v|^2\,dx\\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx+c_\delta\left(\int_{\Omega}|v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\right)^{\frac{n-2}{n}}\\
&\quad\times\left[\left(\int_{\Omega}|\alpha v_1+(1-\alpha)\,v_2|^{n(p_2-2)\frac{2}{n}}\,dx\right)+\left(\int_{\Omega}|\alpha v_1+(1-\alpha)\,v_2|^{n(p_1-2)\frac{2}{n}}\,dx\right)\right].
\end{aligned}$$

En rappelant (2.31), on arrive à

$$\begin{aligned}
I &\leq \frac{\delta}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx+c_\delta c_e\,\|\nabla v\|_2^2\left[\|\nabla v_1\|_2^{2(p_2-2)}+\|\nabla v_1\|_2^{2(p_1-2)}+\|\nabla v_2\|_2^{2(p_2-2)}+\|\nabla v_2\|_2^{2(p_1-2)}\right]\\
&\leq \frac{\delta}{2}\int_{\Omega}u_t^2dx+4c_\delta c_eM^{2(p_2-2)}\,\|\nabla v\|_2^2\,.
\end{aligned}$$

Par conséquent, (2.37) prend la forme

$$\frac{1}{2}\,\|u\|_{X_T}^2\leq\frac{\delta}{2}T_0b\,\|u\|_{X_T}^2+4C_\delta M^{2(p_2-2)}T_0b\,\|v\|_{X_T}^2\,.$$

En choisissant δ assez petit, on arrive à

$$\|u\|_{X_T}^2\leq 4C_\delta M^{2(p_2-2)}T_0b\,\|v\|_{X_T}^2=\gamma T_0\,\|v\|_{X_T}^2\,.$$

En prenant T_0 assez petit, nous obtenons

$$\|u\|_{X_T}^2\leq d\,\|v\|_{X_T}^2\,,\quad\text{pour } 0<d<1.$$

Ainsi G est une contraction. Le théorème fixe de Banach implique l'existence d'un unique $u\in B$ satisfaisant $G\left(u\right)=u$. Ainsi, u est une solution locale de (2.1).

Unicité

Supposons que nous ayons deux solutions u et v. Alors $w = u - v$ satisfait :

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + a u_t \left|u_t\right|^{m(.)-2} - a\ v_t \left|v_t\right|^{m(.)-2} = bu\left|u\right|^{p(.)-2} - bv\left|v\right|^{p(.)-2}, & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ w(x,t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ w(x,0) = w_t(x,0) = 0, \quad \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Multiplier par w_t et intégrer sur $\Omega \times (0,t)$ pour obtenir

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\textstyle\int_\Omega w_t^2 dx + \tfrac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla w\right|^2 dx + a\displaystyle\int_0^t \textstyle\int_\Omega \left(u_t \left|u_t\right|^{m(x)-2} - \ v_t\left|v_t\right|^{m(x)-2}\right)(u_t - v_t)\, dxdt \\ &= b\int_0^t \textstyle\int_\Omega \left(u\left|u\right|^{p(x)-2} - v\left|v\right|^{p(x)-2}\right) w_t dxdt. \end{aligned}$$

Cela implique

$$\frac{1}{2}\int_\Omega w_t^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla w\right|^2 dx \leq b\int_0^t \int_\Omega \left(u\left|u\right|^{p(x)-2} - v\left|v\right|^{p(x)-2}\right) w_t dxdt.$$

En répétant les mêmes estimations que ci-dessus, on arrive à

$$\int_\Omega \left(w_t^2 + \left|\nabla w\right|^2\right) dx \leq C\int_0^t \int_\Omega \left(w_t^2(x,s) + \left|\nabla w(x,s)\right|^2\right) dxds.$$

L'inégalité de Gronwall produit

$$\int_\Omega \left(w_t^2 + \left|\nabla w\right|^2\right) dx = 0.$$

Ainsi, $w \equiv 0$. Cela montre l'unicité. La preuve du $(théorème 2.1)$ est terminée. ∎

Chapitre 3

Explosion de la solution dans certain équation hyperbolique non-linéaire

Dans ce chapitre, nous allons étudier l'explosion de la solution en temps fini de le problème suivante

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a u_t \left| u_t \right|^{m(.)-2} = b u \left| u \right|^{p(.)-2}, \quad \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ u(x,t) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x), \quad \text{dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$ avec une frontière régulière $\partial\Omega$, où $a, b \geq 0$ sont des constantes et les exposants $m(.)$ et $p(.)$ des fonctions mesurables sur Ω satisfaisant

$$2 \leqslant q_1 \leqslant q(x) \leqslant q_2 \leqslant \frac{2n}{n-2}, \quad n \geq 3. \tag{3.2}$$

avec

$$q_1 := ess \inf_{x\in\Omega} q(x), \quad q_2 := ess \sup_{x\in\Omega} q(x).$$

et la condition de continuité de log-Hölder :

$$\begin{cases} |q(x) - q(y)| \leqslant -\frac{A}{\log|x-y|}, \\ \text{pour p.p. } x, y \in \Omega, \quad \text{avec } |x-y| < \delta, \quad A > 0, \quad 0 < \delta < 1. \end{cases} \tag{3.3}$$

Nous montrons que la solution (2.33) explose dans un temps fini si :

$$2 \leq m_1 \leq m(x) \leq m_2 < p_1 \leq p(x) \leq p_2 \leq \frac{2n}{n-2}. \tag{3.4}$$

et $E(0) < 0$, où

$$E(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right) dx - b \int_\Omega \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx. \tag{3.5}$$

Nous écrivons $\varrho(u)$ au lieu de $\varrho_p(u)$ pour simplifier.
Pour étudier l'explosion de solution en temps fini, il faut présente les lemmes et les corollaires au-dessous :

Lemme 3.1 *Supposons que les conditions du* $lemme 1.5$ *soient vérifiées. Alors il existe un positif* $C > 1$, *dépendant sur* Ω *seulement, tel que*

$$\varrho^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u)\right). \tag{3.6}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ *et* $2 \leq s \leq p_1$.

Corollaire 3.1 *Soit les hypothèses du* $lemme 3.1$ *valables. Ensuite nous avons*

$$\|u\|_{p_1}^s \leq C\left(\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_{p_1}^{p_1}\right). \tag{3.7}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ *et* $2 \leq s \leq p_1$.

Nous fixons

$$H(t) := -E(t).$$

avec C désigner une constante positive générique dépendant de Ω. En conséquence de (3.5) et (3.6), on a

Corollaire 3.2 *Soit les hypothèses du* $lemme 3.1$ *valables. Ensuite nous avons :*

$$\varrho^{\frac{s}{p_1}}(u) \leq C\left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \varrho(u)\right). \tag{3.8}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ *et* $2 \leq s \leq p_1$.
Et dans le cas particulier nous avons

Corollaire 3.3 *Soit les hypothèses du* $lemme 3.1$ *valables ensuite nous avons*

$$\|u\|_{p_1}^s \leq C\left(|H(t)| + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p_1}^{p_1}\right). \tag{3.9}$$

pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$ *et* $2 \leq s \leq p_1$.

Lemme 3.2 *Soit les hypothèses du* $lemme 3.1$ *valables et soit* u *la solution de* (3.1). *Donc,*

$$\varrho(u) \geq C\|u\|_{p_1}^{p_1}. \tag{3.10}$$

Lemme 3.3 *Supposons que* (3.4) *valables et soit* u *la solution de* (3.1). *Donc,*

$$\int_\Omega |u|^{m(x)}\, dx \leq \left((\varrho(u))^{\frac{m_1}{p_1}} + (\varrho(u))^{\frac{m_2}{p_1}}\right). \tag{3.11}$$

3.1 Résultat d'explosion pour $E_0 < 0$

Dans cette section, nous établissons l'explosion pour certaines solutions à énergie négatif.

Lemme 3.4 *Soit u solution faible du problème (3.1), alors l'énergie définir par (3.5) est dissipatif*

$$(i.e.) \quad \frac{d}{dt}E(t) \leq 0. \tag{3.12}$$

Preuve. Nous multiplions (3.1) par u_t et intégrons à Ω pour obtenir

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx + a\int_\Omega u_t \left|u_t(x,t)\right|^{m(x)-2} u_t dx = b\int_\Omega u\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2} u_t dx.$$

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx - b\int_\Omega u\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2} u_t dx = a\int_\Omega -\left|u_t(x,t)\right|^{m(x)} dx.$$

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{\textstyle\int_\Omega u_t dx - \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx\right\} - b\textstyle\int_\Omega u(x,t)\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2} u_t(x,t)\,dx \\ &= -\textstyle\int_\Omega a\left|u_t(x,t)\right|^{m(x)} dx.\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned} u(x,t)\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2} u_t(x,t) &= u(x,t)\,u_t(x,t)\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u(x,t)\right|^2\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2}. \end{aligned}$$

en utilisant

$$f'g = (fg)' - fg'.$$

on obtient

$$\begin{aligned} u(x,t)\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2} u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2}\left|u(x,t)\right|^2\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2}\right\}\left|u(x,t)\right|^2. \end{aligned}$$

en utilisant

$$\left(f^n(t)\right)' = nf'(t)\,f^{n-1}(t).$$

$$\begin{aligned} u(x,t)\left|u(x,t)\right|^{p(x)-2} u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left|u(x,t)\right|^{p(x)}\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}\left(p(x)-2\right)\left(\left|u(x,t)\right|\right)_t\left|u(x,t)\right|^{p(x)-3}\left|u(x,t)\right|^2. \end{aligned}$$

en utilisant

$$\frac{d}{dt}\left\{\left|f(t)\right|\right\} = \frac{f'(t)\,f(t)}{\left|f(t)\right|}.$$

$$\begin{aligned} u(x,t)\,|u(x,t)|^{p(x)-2}\,u_t(x,t) &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u(x,t)|^{p(x)}\right\} \\ &\quad -\frac{1}{2}(p(x)-2)\,\frac{u_t(x,t)\,u(x,t)}{|u(x,t)|}\,|u(x,t)|^{p(x)-1}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_t(x,t)\,u(x,t)\,|u(x,t)|^{p(x)-2} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u(x,t)|^{p(x)}\right\} \\ &\quad -\frac{(p(x)-2)}{2}u_t(x,t)\,u(x,t)\,|u(x,t)|^{p(x)-2}. \end{aligned}$$

$$\left(1+\frac{p(x)}{2}-1\right)u_t(x,t)\,u(x,t)\,|u(x,t)|^{p(x)-2} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{|u(x,t)|^{p(x)}\right\}.$$

on obtient

$$u_t(x,t)\,u(x,t)\,|u(x,t)|^{p(x)-2} = \frac{1}{p(x)}\frac{d}{dt}\left\{|u(x,t)|^{p(x)}\right\}. \tag{3.14}$$

en remplaçant (3.14) dans (3.13) donc, on obtient

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\int_\Omega u_t dx - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - b\int_\Omega \frac{|u(x,t)|^{p(x)}}{p(x)}dx\right\} = -a\int_\Omega |u(x,t)|^{m(x)}\,dx.$$

on obtient

$$E'(t) = -a\int_\Omega |u_t(x,t)|^{m(x)}\,dx \le 0. \tag{3.15}$$

■

Théorème 3.1 *[33] Supposons que les conditions du* $théorème$2.2 *et qui d'autre* (3.4)*soient satisfaites et*

$$E(0) < 0. \tag{3.16}$$

Alors la solution du problème (3.1) *de la forme* (2.19) *explose en temps fini.*

Preuve. Nous multiplions (3.1) par u_t et intégrons à Ω pour obtenir (3.15) p.p. dans $[0,T)$ car $E(t)$ est absolument continue [20];

Nous fixons $H(t) = -E(t) < 0$ d'où $H'(t) = -E'(t) \ge 0$ et

$$0 < H(0) \le H(t) \le \frac{b}{p_1}\varrho(u), \tag{3.17}$$

pour tout $t \in [0,T)$ telle que (3.16). Nous définissons alors

$$L(t) := H^{1-\alpha}(t) + \varepsilon\int_\Omega u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx. \tag{3.18}$$

pour ε petit à choisir plus tard et

$$0 < \alpha \le \min\left\{\frac{p_1-2}{2p_1}, \frac{p_1-m_2}{p_1(m_2-1)}\right\}. \tag{3.19}$$

En prenant la dérivée de (3.18) et en utilisant l'équation (3.1) , on obtient

$$\begin{aligned} &L'(t) = (1-\alpha)\,H^{-\alpha}(t)\,H'(t) + \varepsilon\int_\Omega \left[u_t^2 - |\nabla u|^2\right] dx \\ &+\varepsilon b\int_\Omega |u(x,t)|^{p(x)}\,dx - a\varepsilon\int_\Omega u(x,t)\,u_t(x,t)\,|u_t(x,t)|^{m(x)-2}\,dx. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Additionner et soustraire $\varepsilon(1-\eta)\,p_1 H(t)$, pour $0<\eta<1$, du côté droit de (3.20), pour arriver à

$$\begin{aligned} &L'(t) = (1-\alpha)\,H^{-\alpha}(t)\,H'(t) + \varepsilon(1-\eta)\,p_1 H(t) + \varepsilon b\eta\int_\Omega |u|^{p(x)}\,dx \\ &+\varepsilon\left(\tfrac{(1-\eta)p_1}{2}+1\right)\|u_t\|_2^2 + \varepsilon\left(\tfrac{(1-\eta)p_1}{2}-1\right)\|\nabla u\|_2^2 \\ &-a\varepsilon\int_\Omega u(x,t)\,u_t(x,t)\,|u_t(x,t)|^{m(x)-2}\,dx. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Pour η assez petit, on voit que

$$\begin{aligned} &L'(t) = (1-\alpha)\,H^{-\alpha}(t)\,H'(t) + \varepsilon\beta\left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u)\right] \\ &-a\varepsilon\int_\Omega u(x,t)\,u_t(x,t)\,|u_t(x,t)|^{m(x)-2}\,dx. \end{aligned} \tag{3.22}$$

où

$$\beta = \min\left\{(1-\eta)\,p_1, b\eta, \frac{(1-\eta)\,p_1}{2}+1, \frac{(1-\eta)\,p_1}{2}-1\right\} > 0.$$

Puis on exploite l'inégalité de Young, pour tout $\delta>0$, $\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=1$.

$$XY \le \frac{\delta^r}{r}X^r + \frac{\delta^{-q}}{q}Y^q, \quad X,Y\ge 0.$$

avec $r=m$ et $q=m/(m-1)$ pour estimer le dernier terme dans (3.22) , comme suit

$$\int_\Omega |u_t|^{m(x)-1}|u|\,dx \le \frac{1}{m_1}\int_\Omega \delta^{m(x)}|u|^{m(x)}\,dx + \frac{m_2-1}{m_2}\int_\Omega \delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}}|u_t|^{m(x)}\,dx, \quad \forall\delta>0. \tag{3.23}$$

Donc en prenant δ pour que

$$\delta^{-\frac{m(x)}{m(x)-1}} = kH^{-\alpha}(t),$$

pour une grande constante k à spécifier plus tard, et en remplaçant dans (3.23) , on obtient

$$\int_\Omega |u_t|^{m(x)-1}|u|\,dx \le \frac{1}{m_1}\int_\Omega k^{1-m(x)}|u|^{m(x)}\,H^{\alpha(m(x)-1)}dx + \frac{(m_2-1)}{am_2}kH^{-\alpha}(t)\,H'(t). \tag{3.24}$$

La combinaison de (3.22) et (3.24) donne

$$\begin{aligned} &L'(t) \ge \left[(1-\alpha) - \varepsilon\left(\tfrac{m_2-1}{m_2}\right)k\right] H^{-\alpha}(t)\,H'(t) \\ &+\varepsilon\beta\left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u)\right] \\ &-\varepsilon\tfrac{k^{1-m_1}}{m_1}aH^{\alpha(m_2-1)}(t)\int_\Omega |u|^{m(x)}\,dx. \end{aligned} \tag{3.25}$$

En utilisant *lemme* 3.3 et (3.17), on obtient

$$H^{\alpha(m_2-1)}(t)\int_\Omega |u|^{m(x)}\,dx \le C\left[(\varrho(u))^{\frac{m_1}{p_1}+\alpha(m_2-1)} + (\varrho(u))^{\frac{m_2}{p_1}+\alpha(m_2-1)}\right]. \tag{3.26}$$

On utilise alors $lemme 3.1$ et (3.19), pour

$$s = m_2 + \alpha p_1 (m_2 - 1) \leq p_1 \text{ et } s = m_1 + \alpha p_1 (m_2 - 1) \leq p_1.$$

déduire, de (3.26),

$$H^{\alpha(m_2-1)}(t) \int_\Omega |u|^{m(x)} dx \leq C \left(\|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right). \tag{3.27}$$

Selon (3.25) et (3.28), on obtient

$$\begin{aligned} L'(t) \geq &\left[(1-\alpha) - \varepsilon \left(\tfrac{m_2-1}{m_2} \right) k \right] H^{-\alpha}(t) H'(t) \\ &+ \varepsilon \left(\beta - \tfrac{k^{1-m_1} a}{m_1} C \right) \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \varrho(u) \right]. \end{aligned} \tag{3.28}$$

À ce stade, nous choisissons k assez grand pour que

$$\gamma = \beta - \frac{k^{1-m_1} a}{m_1} C > 0.$$

Une fois k fixé (donc γ), on prend ε assez petit pour que

$$(1-\alpha) - \varepsilon \left(\frac{m_2 - 1}{m_2} \right) k \geq 0 \text{ et } L(0) = H^{1-\alpha}(0) + \varepsilon \int_\Omega u_0(x) u_1(x) dx > 0.$$

Par conséquent (3.28) prend la forme

$$L'(t) \geq \gamma\varepsilon \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \varrho(u) \right] \geq \gamma\varepsilon \left[H(t) + \|u_t\|_2^2 + \|u\|_{p1}^{p_1} \right]. \tag{3.29}$$

en vertu de (3.10).Par conséquent, nous avons

$$L(t) \geq L(0) > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

Ensuite, nous avons montré que

$$L'(t) \geq \Gamma L^{\frac{1}{1-\alpha}}(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.30}$$

où Γ est une constante positive dépendant de $\varepsilon\gamma$ et C (la constante du $corollaire 3.3$). Si (3.30) est satisfaite, on obtient l'explosion en temps fini de $L(t)$.
Pour prouver (3.30), nous notons d'abord que

$$\left| \int_\Omega u(x,t) u_t(x,t) dx \right| \leq \|u\|_2 \|u_t\|_2 \leq C \|u\|_{p_1} \|u_t\|_2.$$

ce qui implique

$$\left| \int_\Omega u(x,t) u_t(x,t) dx \right|^{\frac{1}{1-\alpha}} \leq C \|u\|_{p1}^{\frac{1}{1-\alpha}} \|u_t\|_2^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Encore si, l'inégalité de Young donne

$$\left| \int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx \right|^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \leq C \left[\|u\|_{p_1}^{\mu/(1-\alpha)} + \|u_t\|_2^{\theta/(1-\alpha)} \right]. \tag{3.31}$$

pour $\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\theta} = 1$ .On prend $\theta = 2(1-\alpha)$, pour obtenir $\mu/(1-\alpha) = 2/(1-2\alpha) \leq p_1$ par (3.19). Par conséquent (3.28) devient

$$\left| \int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx \right|^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \leq C \left[\|u\|_{p1}^{s} + \|u_t\|_2^2 \right].$$

où $s = 2/(1-2\alpha) \leq p_1$. En utilisant $corollaire$3.3, nous obtenons

$$\left| \int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx \right|^{\frac{1}{(1-\alpha)}} \leq C \left[H(t) + \|u\|_{P_1}^{P_1} + \|u_t\|_2^2 \right], \quad \forall t \geq 0. \tag{3.32}$$

Enfin, en notant que

$$\begin{aligned} L^{1/(1-\alpha)}(t) &= \left[H^{(1-\alpha)}(t) + \varepsilon \int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx \right]^{1/(1-\alpha)} \\ &\leq 2^{1/(1-\alpha)} \left[H(t) + \left| \int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx \right|^{1/(1-\alpha)} \right]. \end{aligned}$$

et en le combinant avec (3.29) et (3.32), l'inégalité (**??**) est satisfaite.Une simple intégration de (3.29) sur $(0,t)$ alors

$$L^{\alpha/(1-\alpha)}(t) \geq \frac{1}{L^{-\alpha/(1-\alpha)}(0) - \Gamma t\alpha/(1-\alpha)}. \tag{3.33}$$

Donc (3.33) montre que $L(t)$ explose en temps fini

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\Gamma\alpha\, [L(0)]^{\alpha/(1-\alpha)}}. \tag{3.34}$$

où Γ et α sont des constantes positives avec $\alpha < 1$ et L est donné par (3.18) ci-dessus. ∎

3.2 Résultat d'explosion pour $E_0 > 0$

Dans cette section, nous établissons l'explosion pour certaines solutions à énergie positive.
Pour énoncer et prouver notre résultat, soit B le meilleur constante du l'injection de Sobolev $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ et se

$$B_1 = \max\left\{1, B, (\frac{1}{b})^{1/2}\right\}, \alpha_1 = \left(\frac{1}{bB_1^{p_1}}\right)^{2/(p_1-2)}, \alpha_0 = \|\nabla u_0\|_2^2, E_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p_1}\right)\alpha_1.$$

$$H(t) = E_1 - E(t). \tag{3.35}$$

$$F(t) = H^{1-\lambda}(t) + \varepsilon \int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx. \tag{3.36}$$

où $\varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1$.

Théorème 3.2 *[34] Soit les conditions de $théorème$2.1 et* (3.4) *remplies. Supposons en outre que*

$$E(0) < E_1, \quad \alpha_1 \leq \alpha_0 \leq B_1^{-2}.$$

Alors la solution de (3.1) *explose en un temps fini.*
Pour prouver le théorème précédant, on annonce les deux lemmes suivants.

Lemme 3.5 *Soit les hypothèses du $théorème$3.2 satisfaites, alors il existe une constante telle que*

$$\|\nabla u\,(.,t)\|_2^2 \geq \alpha_2 \quad \forall t \geq 0. \tag{3.37}$$

Preuve. En rappelant (3.5), on a

$$\begin{aligned}
E\,(t) &\geq \frac{1}{2}\varrho_2\,(\nabla u) - \frac{b}{p_1}\varrho_p\,(u) \\
&\geq \frac{1}{2}\min\left\{\|\nabla u\|_2^2, \|\nabla u\|_2^2\right\} - \frac{b}{p_1}\max\left\{\|u\|_{p(.)}^{p_1}, \|u\|_p^{p_2}\right\} \\
&\geq \frac{1}{2}\min\left\{\|\nabla u\|_2^2, \|\nabla u\|_2^2\right\} - \frac{b}{p_1}\max\left\{(B_1\|\nabla u\|_2)^{p_1}, (B_1\|\nabla u\|_2)^{p_2}\right\} \\
&\geq \frac{1}{2}\min\{\alpha,\alpha\} - \frac{b}{p_1}\max\left\{\left(B_1^2\alpha\right)^{\frac{p_1}{2}}, \left(B_1^2\alpha\right)^{\frac{p_2}{2}}\right\} := g\,(\alpha)\,, \quad \forall\alpha \in [0,\infty)\,,
\end{aligned}$$

où $\alpha = \|\nabla u\|_2^2$. Soit

$$h\,(\alpha) = \frac{1}{2}\alpha - \frac{b}{p_1}\left(B_1^2\alpha\right)^{\frac{p_1}{2}}.$$

Remarquons que $h(\alpha) = g(\alpha)$, pour $0 < \alpha \leq B_1^{-2}$. Il est facile de vérifier que la fonction $h\,(\alpha)$ est croissante pour $0 < \alpha < \alpha_1$ et décroissant pour $\alpha_1 < \alpha \leq +\infty$.
Comme $E(0) < E_1 = h(\alpha_1)$, il existe une constante positive $\alpha_2 \in (\alpha_1, \infty)$ telle que $h(\alpha_2) = E(0)$.
Ensuite nous avons $h(\alpha_0) = g(\alpha_0) \leq E(0) = h(\alpha_2)$. Cela implique que $\alpha_0 \geq \alpha_2$.
Maintenant, pour prouver (3.37), on suppose au contraire que $\|\nabla u(t_0)\|_2^2 < \alpha_2$, pour un certain $t_0 > 0$. Alors il existe$t_1 > 0$ tel que $\alpha_1 < \|\nabla u(t_1)\|_2^2 < \alpha_2$. En utilisant la monotonie de $h(\alpha)$, on a

$$E\,(t_1) \geq h\left(\|\nabla u\,(t_1)\|_2^2\right) > h\,(\alpha_2) = E\,(0)\,,$$

ce qui contredit $E(t) < E(0)$, pour tout $t \in (0,T)$. Ainsi, (3.37) est établi. ■

Lemme 3.6 *Soit les hypothèses du $théorème$3.2 satisfaites, alors on a*

$$0 < H\,(0) \leq H\,(t) \leq \frac{b}{p_1}\varrho_{p(.)}\,(u)\,.$$

Preuve. En utilisant (3.5), (3.15), et (3.35), nous obtenons

$$\begin{aligned} 0 &< H(0) \leq H(t) \\ &\leq E_1 - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right) dx - b\int_\Omega \frac{|u|^{p(x)}}{p(x)} dx. \end{aligned}$$

et, à partir de (3.37), on obtient

$$\begin{aligned} E_1 - \frac{1}{2}\int_\Omega \left(u_t^2 + |\nabla u|^2\right) dx &\leq E_1 - \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\ &\leq E_1 - \frac{1}{2}\min\left\{\|\nabla u\|_2^2, \|\nabla u\|_2^2\right\} \\ &\leq E_1 - \frac{1}{2}\min\{\alpha_2, \alpha_2\} \\ &\leq E_1 - \frac{1}{2}\min\{\alpha_1, \alpha_1\} \\ &= E_1 - \frac{1}{2}\alpha_1 = -\frac{\alpha_1}{p_1} < 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

D'où

$$0 < H(0) \leq H(t) \leq \frac{b}{p_1}\varrho_{p(.)}(u), \quad \forall t \geq 0.$$

■

Preuve du théorèmeé3.2

Soit $H(t) = E_1 - E(t)$ et $F(t) = H^{1-\lambda}(t) + \varepsilon \int_\Omega u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx$,
où $\varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1$.
En utilisant $lemme$3.5, $lemme$3.6 et en répétant les étapes (3.18) à (3.32) de la preuve du $théorème$3.1 on trouve

$$T^* \leq \frac{1-\alpha}{\Gamma\alpha\,[L(0)]^{\alpha/(1-\alpha)}}.$$

cela montre fin de le preuve du $théorème$3.2.

Conclusion

Ce travail a permis d'apporter une contribution assez importante à l'étude les problèmes hyperbolique non linéaire avec d'exposantes variables. En se basant sur la méthode de Faedo-Galerkin et de point fixe, nous avons analysé l'existence et l'unicité du problème hyperbolique.
Ensuite, nous avons terminé pour présenter des conditions suffisantes d'explosion en temps fini des solutions. Comme perspective, après la réalisation de ce travail notre vision est consacrée à la réalisation d'objectif pour illustrer les résultats numérique des applications sous le $théorème$ 3.1.

Bibliographie

[1] R. Aboulaich, D. Meskine, A. Souissi, New diffusion models in image processing, Comput. Math. Appl. $56(4)(2008)874-882$.

[2] Antontsev S, Ferreira J. Existence, uniqueness and blowup for hyperbolic equations with nonstandard growth conditions. Nonlinear Anal Theory Methods Appl. $2013; 93 : 62-77$.

[3] Antontsev S, Shmarev S. Evolution PDEs with Nonstandard Growth Conditions : Existence, Uniqueness, Localization, Blow-up, Atlantis Studies in Differential Equations, vol. 4.Atlantis Press, Paris, France ;2015.

[4] S. Antontsev, S. Shmarev, Elliptic equations with anisotropic nonlinearity and nonstandard growth conditions, HandBook of Differential Equations,Stationary Partial Differential Equations, Vol. 3, Elsevier/North Holland, Amsterdam, $20061-100$.

[5] S. Antontsev, S. Shmarev, Blow-up of solutions to parabolic equations with nonstandard growth conditions, J. Comput. Appl. Math. $234(9)(2010)2633-2645$.

[6] S. Antontsev, S. Shmarev, Evolution PDEs With Nonstandard Growth Conditions, Existence, Uniqueness, Localization, Blow-Up, Atlantis Studies in Differential Equations, vol. 4, Atlantis Press, Paris, 2015, p. xviii+409.

[7] S. Antontsev, Wave equation with p(x, t)-Laplacian and damping term : Existence and blow-up, J. Difference Equ. Appl. 3 $(4)(2011)503-525$.

[8] Antontsev S. Wave equation with p(x, t)-Laplacian and damping term : blow-up of solutions. CR Mecanique. $2011; 339(12) : 751-755$.

[9] S. Antontsev, V. Zhikov, Higher integrability for parabolic equations of p(x, t)-Laplacian type, Adv. Differential Equations $10(9)(2005)1053-1080$.

[10] G. Autuori, P. Pucci, M. Salvatori, Global non existence for nonlinear Kirchhoff systems, Arch. Ration. Mech. Anal. 196 $(2)(2010)489-516$.

[11] J. Ball, Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations, Q. J. Math. 28 (4) (1977) $473-486$.

[12] Y. Chen, S. Levine, M. Rao, Variable exponent, linear growth functionals in image restoration, SIAM J. Appl. Math. 66 $(2006)1383-1406$.

[13] D. Edmunds, J. Rakosnik, Sobolev embeddings with variable exponent, Stud. Math.$143(3)(2000)267-293$.

[14] D. Edmunds, J. Rakosnik, Sobolev embeddings with variable exponent. II, Math. Nachr. $246(1)(2002)53-67$.

[15] X. Fan, D. Zhao, On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$, J. Math. Anal. Appl. $263(2)(2001)424-446$.

[16] Ferreira J, Messaoudi SA. On the general decay of a nonlinear viscoelastic plate equation with a strong damping and $\overrightarrow{p}(x,t)$-Laplacian. Nonlinear Anal Theory Methods Appl.$2014; 104:40-49$.

[17] Guo B, Gao W. Blow-up of solutions to quasilinear hyperbolic equations with $p(x,t)$-Laplacian and positive initial energy. CR Mecanique.$2014; 342(9):513-519$.

[18] Gao Y, Gao W. Existence of weak solutions for viscoelastic hyperbolic equations with variable exponents. Bound Value Probl. $2013; 2013(1):1-8$.

[19] V.A. Galaktionov, S.I. Pohozaev, Blow-up and critical exponents for nonlinear hyperbolic equations, Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. $53(3)(2003)453-466$.

[20] V. Georgiev, G. Todorova, Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms, J. Differential Equations $109(2)(1994)295-308$.

[21] A. Haraux, E. Zuazua, Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems, Arch. Ration. Mech. Anal. $150\ (1988)191-206$.

[22] A.M. Kbiri, S.A. Messaoudi, H.B. Khenous, A blow-up result for nonlinear generalized heat equation, Comput. Math. Appl. $68(12)(2014)1723-1732$.

[23] M. Kopackova, Remarks on bounded solutions of a semilinear dissipative hyperbolic equation, Comment. Math. Univ. Carolin. $30(4)(1989)713-719$.

[24] Korpusov MO. Non-existence of global solutions to generalized dissipative Klein-Gordon equations with positive energy. Electron J Differ Equ.$2012; 2012(119):1-10$.

[25] D. Lars, P. Harjulehto, P. Hasto, M. Ruzicka, Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lecture Notes in Mathematics, vol.$2017, 2011$.

[26] H.A. Levine, J. Serrin, Global nonexistence theorems for quasilinear evolution equations with dissipation, Arch. Ration. Mech. Anal. $137(4)(1997)341-361$.

[27] H.A. Levine, Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations, SIAM J. Math. Anal.$5(1)(1974)138-146$.

[28] S. Lian, W. Gao, C. Cao, H. Yuan, Study of the solutions to a model porous medium equation with variable exponent of nonlinearity, J. Math. Anal. Appl.$342(1)(2008)27-38$.

[29] J.L. Lions, Quelques Methodes De Resolution Des Problemes Aux Limites Nonlineaires, second ed., Dunod, Paris, 2002.

[30] Marie-Therese Lacroix-Sonrier, Distrubutions, Espace de Sobolev, Applications, Ellipses/Edition Marketing S.A 1998.

[31] S.A. Messaoudi, Blow up in a nonlinearly damped wave equation, Math. Nachr. $231(1)(2001)1-7$.

[32] Messaoudi SA, Talahmeh AA. A blow-up result for a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. Appl Anal.$2017; 96(9) \ : \ 1509-1515$. https ://doi.org/10.1080/00036811.2016.1276170.

[33] Messaoudi, S. A., Talahmeh, A. A., & Al-Smail, J. H. (2017). Nonlinear damped wave equation : Existence and blow-up. Computers & Mathematics with Applications, $74(12), 3024-3041$.

[34] Messaoudi, S. A., & Talahmeh, A. A. (2017). Blowup in solutions of a quasilinear wave equation with variable-exponent nonlinearities. Mathematical Methods in the Applied Sciences, $40(18), 6976-6986$.

[35] Masloub, F. (2020). Analyse fonctionnelle appliquée. (cours d'études supérieures, university larbi tebessi de tebessa).

[36] Sun L, Ren Y, Gao W. Lower and upper bounds for the blow-up time for nonlinear wave equation with variable sources. Comput Math Appl.$2016; 71(1) : 267-277$.

[37] Tebba, Z., Boulaaras, S., Degaichia, H., & Allahem, A. (2020). Existence and blow-up of a new class of nonlinear damped wave equation. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, $38(3), 2649-2660$.

[38] E. Vitillaro, Global nonexistence theorems for a class of evolution equations with dissipation, Arch. Ration. Mech. Anal. $149(2)(1999)155-182$.

[39] Zdiri, S. (2016). Introduction à la topologie. (cours d'études supérieures, university larbi tebessi de tebessa).