République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université de Tébessa

Faculté des Sciences Exactes

et Sciences de la Nature et de la Vie

Département des mathématiques et informatique

Mémoire

Présenté en vue de l'obtention du diplôme de MASTER

Filière : (Mathématiques/Informatique)

Option : Mathématiques Appliquées

Par

MAHCENE Sarhouda

HAOUAM IMANE

بعض نتائج عدم وجود حلول معادلات تفاضلية كسرية باستعمال مفهوم الاسس الحرجة

Date de soutenance : *19/6/2021*

Devant :

Belgacem Rebiai	Prof.	Université de Tébessa	Président
Kamel Haouam	Prof.	Université de Tébessa	Rapporteur
Abderrahmane ZARAI	Prof.	Université de Tébessa	Examinateur

Année Universitaire: 2020/2021


بسم الله الرحمن الرحيم

الاهداء

إلى المعلم الأول في شفاعته نأمل رسول الرحمة محمد صلى الله عليه وسلم.

إلى الذي رباني وأفنى جهده لرعايتي وتعليمي، إلى من غرس فينا حب العلم والتعلم إلى الذي علمني معنى الكفاح

أبي العزيز.

إلى التي روحي من روحها، إلى التي حملتني وهن على وهن، إلى التي علمتني كيف يكون النجاح مع الصبر، إلى التي عانت كل الصعاب لأصل إلى ما أنا فيه

أمي الغالية شافها الله وعافها وأدامها.

إلى سندي وقوتي بعد الله.. إلى من تذوقت معهم أجمل اللحظات وعلموني علم الحياة

إخوتي: عيسى، دنيا، نسرين، شيماء، موسى، سعاد وابنتها عائشة.

إلى جداي وجميع أعمامي وأخوالي وأزواجهم وأبنائهم.

إلى صديقتي ورفيقة الدرب التي جمعتني بها ذكريات جميلة في مشوارنا الجامعي

مريم الوافي.

إلى زميلتي التي تقاسمت معها تعب وشقاء البحث لإنجاز هذه المذكرة

صرهودة محسن.

إلى كل أساتذة قسم الرياضات والإعلام الآلي وخاصة الأساتذة الذين بدأوا معنا مشوار تخصص رياضيات مني كل التقدير والاحترام لكم.

أهدي هذا العمل.

الاهداء

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات وفقنا في إتمام هذا البحث العلمي ومنا علينا بفضله وألهمنا الصحة والعافية والعزيمة

فالحمد لله حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه والصلاة والسلام على أشرف الخلق محمد صلى الله عليه وسلم وعلى اله وصحبه ومن تبعهم بإحسان إلى يوم الدين

أهدي ثمرة جهدي هذا إلى

إلى من رباني على المبادئ والقيم وعلمني معنى التحدي رمز العطاء والتفاني أبي العزيز

إلى التي سهرت الليالي لراحتي واطمئناني إلى التي سعت جاهدة على تربيتي وغرس حسن الخلق في والمبادئ النبيلة أمي العزيزة

إلى أخواتي وأخي وزوجته وخالاتي وبناتي خالاتي الأعزاء

إلى كل من أوقد لنا مشعل الحياة

وحملنا على سفينة النجاة

إلى كل من صرنا بفضله نكتب ونقرأ و

إلى كل من علمنا علما به ينتفع وأدب به يرتفع

بدأ من معلمي الإبتدائي وصولا إلى أساتذتنا الكرام في جامعة الشيخ العربي التبسي

إلى شيخي الفاضل معلمي في القران الكريم الذي بعلمه القويم أنار الله دربي وفتح بصيرة قلبي

إلى من تحلو بالإخاء وتميزوا بالوفاء والعطاء إلى ينابيع الصدق الصافي الى من برفقتهم سرت في دروب الحياة الحلوة والحزينة إلى من كانوا معي على طريق النجاح والخير أصدقائي في المدرسة القرانية وأخص بالذكر سمية جداي ورفيقاتي دربي في الجامعة نجاة عبد اللطيف عزي سكينة بوعلي سارة هوام إيمان ولاء نسرين دنيا حنان وإلى كل الأصدقاء و الأحباب دون استثناء

نحمد الله حمدا كثيرا طيبا مباركا فيه إذ هو خالقنا ومعيننا فهو الأولى بالشكر في كل الأوقات والظروف

ونحمده عز وجل أن وفقنا لإتمام هذا العمل وعلى تسهيله لنا الطريق لجنينا ثمرة جهودنا ونسأله أن يجعل هذا كله خالصا لوجهه الكريم وأن ينفعنا به وينتفع به من بعدنا

فاعترافا لنا بأهل الفضل من بعد فضل الله نتقدم بكل احترام وتقدير بشكرنا الخاص وعرفاننا للأستاذ المشرف" كمال هوام" الذي له الفضل الكبير في شق الطريق نحو النجاح وعلى كل النصائح والتوجيهات طيلة إنجاز هذه المذكرة

كما نتقدم بأسمى عبارات الشكر والتقدير إلى كل من أوقد لنا مشعل الحياة

وحملنا على سفينة النجاة ونخص منهم أساتذتنا الكرام في جامعة الشيخ العربي التبسي

وتحية طيبة إلى أعضاء اللجنة التي تكرمت بمناقشة هذه المذكرة البروفيسور زارعي عبد الرحمان والبروفيسور ربيعي بلقاسم لقبولهم مناقشة هذه المذكرة

وفي الأخير نشكر كل من ساهم في مساعدتنا لإنجاز هذا العمل المتواضع

من قريب أو من بعيد .

الملخص

هذا العمل مخصص للتذكير ببعض نتائج عدم وجود الحلول لبعض أنماط المعادلات التفاضلية العادية وكذا المعادلات التفاضلية ذات رتب كسرية وذلك باستعمال مفهوم الأسس الحرجة وطريقة الدوال الإختبارية .

كلمات مفتاحية :

الحساب الكسري – حساب التفاضل والتكامل الكسري – الأس الحرج – عدم الوجدانية – المشتق الكسري – لابلاس الكسري – دالة الاختبار.

Résumé

Ce travail vise à rappeler certains résultats de non existences à certains modèles d'équation différentielle partielle et d'équation différentielle fractionnaires, en utilisant le concept d'exposant critique et la méthode des fonctions tests.

Mots clés : calcul fractionnaire - Dérivée fractionnaire -Exposant critique – Non existence – Laplace fractionnaire - fonction test

Abstract

This work is intended as a reminder some results of non-existence solutions for some PDE and PDE fractional, using the concept of critical exponent and method of the test functions.

Key words: fractional calculus - Fractional derivative - Critical exponent - Evolution equation - non existence - Fractional Laplace - test fonction.

فهرس المحتويات

الترميز

الرمز	معناه
$\Gamma(n)$	الدالة غاما
$\beta(m,n)$	الدالة بيتا
$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}$	الدالة ميتاغ –ليفلور بوسطين
$\langle\cdot,\cdot\rangle$	جداء سلمي معرف على $L^2(\Omega)$
$H = L^2(0,1)$	فضاء هيلبار
$\lVert\cdot\rVert_2$ ، $\lVert\cdot\rVert_{L^2}$	نظيم على $L^2(\Omega)$
$\lvert.\rvert$	القيمة المطلقة
${}_{t}^{R}D_{b}^{l}f(t)$	الإشتقاق الكسري لريمان – ليوفيل اليميني
${}_{a}^{R}D_{t}^{\alpha}f(t)$	الإشتقاق الكسري لريمان – ليوفيل اليساري
${}^{c}D^{\alpha}f(t)$	الإشتقاق الكسري لكابوتو
$I^{\alpha}f(t)$	التكامل الكسري لريمان – ليوفيل
${}_{a}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-\alpha}f(t)$	التكامل الكسري لريمان – ليوفيل اليساري
${}_{t}^{R}D_{b}^{-\beta}f(t)$	التكامل الكسري لريمان – ليوفيل اليميني
$\mathcal{F}$	تحويلات فورييه
$\mathcal{F}^{-1}$	التحويل العكسي لفورييه
$(-)\Delta^{\beta/2}$	مؤثر لابلاسيان الكسري
Ω	مفتوح محدود في $\mathbb{R}^n$
$D'(\Omega)$	فضاء التوزيعات على $\Omega \subseteq \mathbb{R}$
p_c	القيمة الحرجة
$w^{m,p}(\Omega)$	فضاء(سوبولف)
$\mathrm{D}\ \ (\Omega)$	فضاء الدوال الإختبارية

مقدمة

الحساب الكسري فرع من فروع الرياضيات يهتم بدراسة المشتقات أو التكاملات ذات الرتب الكسرية ويعد من أكثر أحد الأعمال حداثة له تاريخ طويل وتعود بديات الحساب الكسري إلى العالم "ليبنيز" للمشتقة من الرتبة n إذ تساءل " ليبنيز " في رسالة وجهها إلى العالم "اوبيتال"سنة 1695م عن إمكانية إيجاد مشتقة من الرتبة $\frac{1}{2}$ وازداد اهتمام الرياضيين بالحساب الكسري أمثال "اولر " سنة 1730م و "لابلاس" سنة 1812م و "ريمان " سنة 1876م و" كابوتو " (يمكن الإطلاع على تاريخ الحساب الكسري) [2،1] .

وعلى مدى القرون الأخيرة. تم التعامل مع هذا الموضوع من قبل علماء الرياضيات والفيزياء وذلك بتصميم نماذج رياضيتية غالبا ما تؤدي إلى صياغة مسائل على شكل معادلات تفاضلية ذات رتب كسرية ، بحيث تعد أداة من الأدوات الأساسية في حقول علمية مختلفة .

كما أن هناك أنظمة ومسائل تخص معادلات تفاضلية **(EDPs)** ذات رتب كسرية لا تمتلك حلول هذا الأمر أدى إلى ظهور دراسات أكثر تعمقا من قبل الباحثين ومن بين هذه الدراسات :

الحالة الحرجة $p = p_c$ تمت دراستها من طرف "حياكاوا" [3] من أجل $n = 1،2$ **و** "كوبياشي **و**كاناكا **و** سيراو"[4] من أجل n>3

لا حقا درس كل من "ناقسوا"و " سيراو "[5] و سيجتاني [6] و"غادة " و" كيران" [7] المسألة

$$\begin{cases} u_t + (-\Delta)^{\beta/2}(u) = c(x,t)|u|^{1+\tilde{p}} & \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = u_0(\mathrm{x}) \geq 0 & \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R}^n \end{cases}$$

"ناجفاوا ، سيجتاني، سيراو" أخذو $c(x,t) = c(x)$ بينما أخذ " سيجتاني " $c(x,t) = 1$ ، بينما "غادة" و [8] "كيران "درسا الحالة $c(x,t) = c(t)$ ، طريقة البرهان إحتمالية [9] بينما في [10،11] التحليل تقريبي.

في مقالة أحدث ل"غادة و" كيران" [12] وسع كل منهما النتائج السابقة إلى معادلة:

$$u_t + (-\Delta)^{\beta/2}(u) = h(x,t)|u|^{1+p} \quad \text{في} \quad \mathbb{Q}$$

حيث $h(x,t) = O\,(t^{\sigma}\,|x|^{\rho})$ من أجل $|x|$ كبير .

في الأخير " كيران"و"كافساوي " [13] تعاملا مع المعادلة بعمومية :

$$u_t + (-\Delta)^{\beta/2}(u^m) + \alpha(x,t)\nabla u^q = f(x,t)|u|^{1+p} \quad \text{في} \quad \mathbb{Q}$$

والذي يغطي على وجه الخصوص المعادلة سابقا التي تمت دراستها من طرف "كي"[14]

$$u_t + \Delta(u^m) = |x|^{\sigma} t^{s} |u|^{1+\tilde{p}} \quad \epsilon \quad \mathbb{Q}$$

للتأكد من أن المسألة (STFE) مطروحة بشكل جيد، يجب تفسير المشتق الكسري بمفهوم " كابوتو"[15] ، لتبرير إختيار مشتقات كابوتو لمعادلة تفاضلية عادية غير خطية مع المشتقات الكسرية ، النظريات المدروسة عبارة على نتائج عدم وجود الحلول تم إستعمال فيها طريقة الدوال الإختبارية للبحث عن الأس الحرج من نوع فوجيتا.

وقد قسمت المذكرة كالتالي :

الفصل الأول : تضمن تقديم لبعض النتائج حول التحليل الدالي و الحساب الكسري المشتقات الكسرية و التكامل الكسري (تعرف التابع غاما وبيتا ومتاق ليفلور ...) وكذلك مشتقة ريمان وكابتو وتكامل كلاهما وبعض الخواص الحسابية المستخدمة

(كمساوات هولدر ويونغ ...).

أما الفصل الثاني: تضمن التذكير بتعريف القيمة الحرجة ودراسة نتائج عدم وجود حلول للمعادلات التفاضلية العادية باستعمال مفهوم الأس الحرج لفويجتا

تقديم نتائج عدم وجود حلول للمعادلات التفاضلية ذات الرتب الكسرية وإبراز طريقة الدوال الاختبارية واستعمال مفهوم الأس الحرج .

الفصل الثالث: إبراز النتائج العامة لعدم وجود حلول لمسألة كوشي من نوع (hyperbolique) باستخدام مفهوم الأس الحرج ووضع مقارنة بين الدراسات وكيفية معالجة المسائل بطريقة الدوال الاختبارية واستعمال مفهوم الأس الحرج .

الفصل الأول

مفاهيم أساسية و دراسات تمهدية

1 بعض النتائج حول التحليل الدالي:

1.1. تعاريف وخصائص فضاء L^p: [16]

تعريف1:

لتكن $p\epsilon\mathbb{R}$ حيث $1 < p < \infty$ نجد:

$$L^p(\Omega) = \left\{f: \Omega \to \mathbb{R};\quad \text{قابلة للقياس } f \text{ و } |f|^p \epsilon L^1(\Omega)\right\}$$

حيث

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \, d\mu\right]^{\frac{1}{p}}$$

مع $\|.\|_p$ نظيم.

تعريف2:

لدينا :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{f: \Omega \to \Re;\quad \text{ثابت } c \text{ و قابلة للقياس } f \text{ و } |f| \le c\right\}$$

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = inf\{c|f(x)| \le c \quad p.p\ \Omega\}$$

حيث $\|.\|_\infty$ نظيم .

ملاحظة 1:

لدينا $1 \le p \le \infty$ نشير بواسطة p' إلى المرافق $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$

خاصية 1. متراجحة ($yong$) [17]

ليكن a,b حقيقين موجبين و $1 \le p$ و $p' < \infty$ إذن

$$\boxed{ab \le \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}}$$

خاصية 2.متراجحة($\epsilon - yong$)

ليكن a,b حقيقين موجبين و $1 \le p$ و $p' < \infty$ من أجل كل $\varepsilon > 0$

$$\boxed{ab \le \epsilon a^p + c_\epsilon b^{p'}}$$

خاصية 3 . متراجحة (Holder) [18]

ليكن Ω مجموعة مفتوحات في $\mathbb{R}^n$ حيث :

$f\epsilon L^p(\Omega), g\epsilon L^p(\Omega)$ و $1 < p < \infty$ حيث $f.g\epsilon L^p(\Omega)$

$$\boxed{\int_\Omega |fg| \le \|f\|_p^p \cdot \|g\|_{p'}^{p'}}$$

2.1 فضاء سوبولف [19](espace de sobolev)

يرجع الفصل إلى كازيناف و أرو سنة 1998م للوصول لتعاريف والنتائج الواردة أدناه .

نعتبر Ω مجموعة مفتوحات في $\mathbb{R}^n$ و $\mathcal{D}(\Omega)$ فضاء من c^∞ (قيمة حقيقية أو قيمة مركبة) و الدوال تنتمي الى (soupport Ω) و $\mathcal{D}'(\Omega)$ فضاء التوزيعات على Ω

A توزيع $T\epsilon \mathcal{D}'(\Omega)$ ينتمي إلى $L^p(\Omega)\ (1 < p < \infty)$ إذا وجدت دالة تنتمي إلى $f\epsilon L^p(\Omega)$ فإن :

$$\boxed{\langle T,\phi\rangle = \int_\Omega f(x)\phi(x)dx}$$

من أجل كل $\phi\epsilon\,\mathcal{D}(\Omega)$ في هذه الحالة f معرفة جيدًا ووحيدة .

لدينا $m\epsilon\mathbb{N}$ و لدينا $p\epsilon[1,\infty]$ نعرف كتالي :

$$w^{m,p}(\Omega)=\left\{\begin{matrix} f\epsilon L^{p}(\Omega)/D^{\alpha}f\epsilon L^{p}(\Omega). \\ \text{من أجل كل}\quad \alpha\in\mathbb{N}^{n}\quad |\alpha|\leq m \end{matrix}\right\}$$

حيث $w^{m,p}(\Omega)$ فضاء بناخ مزود بنظيم :

$$\|f\|w^{m,p}=\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}f\|\,l^{p}$$

من أجل كل $f\epsilon w^{m,p}(\Omega)$.

من أجل كل m,p ، نشير بواسطة $w^{m,p}{}_{0}(\Omega)$ إلى مغلق $D\ (\Omega)$ في $w^{m,p}(\Omega)$.

إذا كان $p=2$، مجموعة واحدة

$w^{m,2}{}_{0}(\Omega)=H^{m}(\Omega)$ ، $w^{m,2}{}_{0}(\Omega)=H_{0}^{m}(\Omega)$.

مع إرفاق $H^{m}(\Omega)$ بنظيم كتالي :

$$\|f\|_{H^{m}}=\left(\sum_{|\alpha|\leq m}\|D^{\alpha}u\|_{l^{2}}^{2}\right)^{1/2}$$

حيث $H^{m}(\Omega)$ فضاء هلبيرتي مزود بالجداء السلمي التالى :

$$\langle u,v\rangle=\sum_{|\alpha|\leq m}\int_{\Omega}D^{\alpha}u\cdot D^{\alpha}v\,dx$$

إذا كانت Ω محدودة فإنه يوجد ثابت $c(\Omega)$ بحيث :

$$\|u\|_{L^{2}}\leq c(\Omega)\|\nabla u\|_{L^{2}}$$

من أجل كل $u\epsilon H_{0}^{1}(\Omega)$ تعرف(بمساوات بوانكاري).

يكون التعريف دقيقا مع عبارة الجداء السلمى التالية :

$$\langle u,v\,\rangle=\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\,dx$$

مع تحديد $\|\cdot\|_{H^1}$ نظيم على الفضاء المغلق $H_0^1(\Omega)$.

3.1 مفهوم دالة الإختبار : [20]

التوزيعات عبارة عن دوال خطية في فضاء دوال الإختبار. نبدأ بتعريف دوال الإختبار على النحو التالي:

تعريف 3:

نسمى دالة الإختبار أو دالة الأساس $\varphi \in c^{\infty}(\Omega, C)$. $support(\varphi)$ هو المجموعة:

$$\boxed{supp(\varphi) = \{\overline{x\epsilon\Omega: \varphi \neq 0}\}}$$

خواص عامة :

1) المجموعة D لدوال الإختبار هي فضاء شعاعي جزئي$c^{\infty}(\mathbb{R}, C)$.

2) إذا كانت φ دالة إختبار على $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ و f دالة معرفة على$c^{\infty}(\mathbb{R}, C)$ فإن $f \circ \varphi$ دالة أساس .

يمكن كتابة جميع دوال الإختبار على النحوى التالي : $\varphi(x) = \psi(x) + x\xi(x)$ حيث ξ و ψ دوال إختبار.

لاحظ فقط أن :

$$\varphi(x) = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2} = \frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2} + x\,\frac{(x)-\varphi(-x)}{2x}$$

أو

$$\frac{\varphi(x)+\varphi(-x)}{2x} = \frac{1}{2x}\int_{-x}^{+x} \varphi'(t)dt = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi'(xu)du = \varphi(x)$$

4.1 تحويل فورييه : [21]

- تحويلات فورييه:

$$\boxed{\mathcal{F}\{h(t), w\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iwt}\, h(t)dt}$$

- تحويل لفورييه العكسي :

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1} = h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(w)e^{iwt}\, dw}$$

- تحويلات فوربيه للإلتفاف:

$$h(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)g(\tau)d\tau$$

من أجل الدالتين $g(t)$ و $h(t)$ المعرفتان على $(-\infty,+\infty)$ تساوي حاصل ضرب تحويل فورييه:

$$\mathcal{F}\{h(t) * g(t); w\} = \mathcal{H}(w)G(w)$$

مع فرض وجود $G(w)$ و $\mathcal{H}(w)$.

- مشتق تحويل فورييه للمشتق من الرتبة n ل h(t):

$$\mathcal{F}\{h^n(t), w\} = (iw)^n\mathcal{H}(w)$$

5.1 تحويلات لابلاس [22]

هو عبارة عن تحويل رياضي خطي يتم فيه تحويل الدالة الزمنية إلى دالة مركبة في متغير مركب يسمى متغير لابلاس ، كما يمكن به تحويل المعادلات التفاضلية إلى معادلات رياضية يمكن تبسيطها واختصارها والتعامل معها بسهولة ويسر.

ويمكن كتابة تحويل لابلاس كما يلي :

$$F(s) = L\big(f(t)\big) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}dt$$

6.1. بعض الخصائص والتعاريف

تعريف 4 (مؤثر لابلاس الكسري):[23]

$-(\Delta)^s$ مع $s \in (0,1)$ هو العامل الأساسي الذى يساهم في هذه المسائل ويسمى كسور لابلاسيان.

يمكن اعتباره عامل تفاضل للرمز $|\xi|^2$

تعريف5 :

لدينا $s \in (0,1)$ ونعرف المؤثر $(-\Delta)^s: s \to L^2(\mathbb{R}^\alpha)$

$$(-\Delta)^s u(x) = c(n,s) \lim_{\epsilon \to +0} \int_{\mathbb{R}^n / B(x,\epsilon)} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

حيث $B(x,\epsilon)$ هي كرة مركزها $x \in \mathbb{R}^n$ وقطرها ϵ و $C(n,s)$ هو ثابت التطبيق الموجب

$$C(n,s) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1-\cos(\xi_1)}{|\xi|^{n+2\xi}} d\xi \right)^{-1}$$

مع $\xi = (\xi, \xi') \in \mathbb{R}^{n-1}$ المؤثر المعرف سابقا هو مؤثر لابلاسيان الكسري

2 حساب التفاضل والتكامل الكسري : [24]

1.2 المعادلة التفاضلية العادية : هي علاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل تدخل

فيها المشتقات أو التفاضلات، كل المعادلات التفاضلية العادية والجزئية يمكن أن تصنف إلى خطية وغير خطية حيث أن المعادلات التفاضلية الخطية هي المعادلات التفاضلية في المتغير التابع ومشتقاته جميعا، وتكون المعادلة التفاضلية بشرطين :

1) إذا كانت معاملات المتغير التابع والمشتقات فيها دوال في المتغير المستقل فقط ثوابت

2) إذا كان المتغير التابع والمشتقات غير مرفوعة الأسس، أي كلها من الدرجة الأولى.

وتكون غير خطية في ما عدا ذلك.

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هو :

$$p_n(x)y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = Q(x)$$

حيث y وجميع المشتقات مرفوعة للأس واحد حواصل ضرب مشتركة بين أي منها.

والمعاملات $p_i(x)$ هي دوال في x خطية أم غير خطية وكذلك بالنسبة للدالة $Q(x)$.

2.2 المعادلات التفاضلية الكسرية : [25]

المعادلات التفاضلية الكسرية :هي تعميم للمعادلات التفاضلية العادية ذات رتب صحيحة حيث أن الصورة العامة للمعادلة التفاضلية الكسرية متعددة الترتيب تعرف بشكل التالى :

$$\mathcal{D}^{\alpha}(x) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{D}^{\beta_i} y(x) + \alpha_{k+1} y(x) + g(x)$$

مع الشروط الابتدائية

$$y^{(i)}(0) = d_i, \qquad i = 0,1, \dots n-1$$

حيث$\alpha_j(j = 1, \dots, k+1)$ هي معاملات ثابتة حقيقية و أيضا $n-1 < \alpha \leq n$ و $0 < \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_k < \alpha$ و $\mathcal{D}^{\alpha}$ تدل على المشتقات الكسرية لريمان ليوفيل من الرتبة α

3.2 الحل العام و الحل الخاص : [26]

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي علىn من الثوابت الاختيارية وبالتابع يحقق المعادلة التفاضلية .

أما الحل الخاص هو أي حل يحقق المعادلات التفاضلية لا يشتمل على أي ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه أحيانا بالتعويض عن الثابت الاختيارية في الحل العام بقيم محددة.

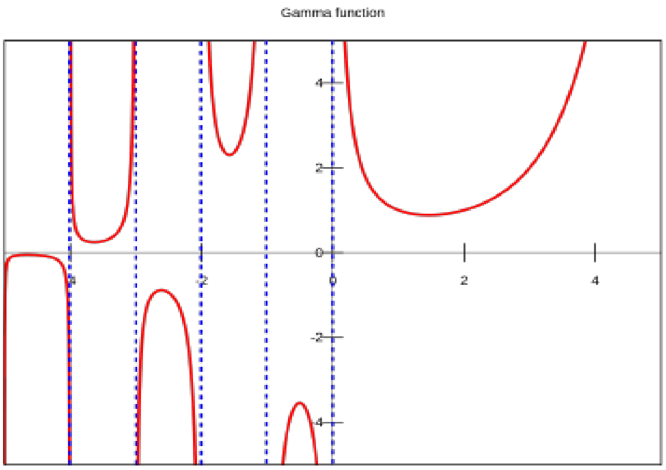
4.2 الدوال الخاصة :

نتطرق في هذا الجزء إلى بعض المفاهيم الأساسية للدوال الخاصة التي نعتمد عليها في هذه المذكرة تلعب دورا هاما في الحساب الكسري وهي

1.4.2 الدالة غاما: [27]

الدالة غاما لها عدة أشكال يمكن الانتقال من شكل إلى أخر منها بإجراءات رياضية ولكن أشهرها صيغة(أولر) وهي :

$$\boxed{\Gamma(n) = \lim_{M\to\infty} \int_0^M x^{n-1} e^{-x}\, dx; n \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}}$$



شكل 1.1: منحنى بياني للتابع غاما

1.1.4.2خواص الدالة غاما [28] لدينا :

1) خاصية التتابع

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \forall x \geq -1$$

2) خاصية التسلسل :إذا كان n عددا صحيحا موجبا فإن:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

3) خاصية التكرار

$$\Gamma(n)\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = 2^{1-2n}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n)$$

4)

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1\times 3\times 5 \ldots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$$

5)

$$\Gamma\left(-n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n 2^n\sqrt{\pi}}{1\times3\times5\ldots(2n-1)} \qquad n = 1,2,3,\ldots$$

6)

$$\Gamma(n)\Gamma(n-1) = \frac{\pi}{\sin(n\pi)}$$

ملاحظة : لا يمكن إيجاد $\Gamma(n)$ إذا كان n عدداصحيحا نسبيا

$$\Gamma(1) = 1; \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

2. 4.2 الدالة بيتا : [29]

تعرف الدالة بيتا كتالي:

$$\beta(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}dx \qquad m>0;n>0$$

$$\beta(2,3)=\int_0^1 x(1-x)^2dx$$

$$=\int_0^1 x(1-2x+x^2)dx$$

$$=\int_0^1 (x-2x^2+x^3)dx=\frac{x^2}{2}-\frac{2x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{12}$$

ملاحظة 2 : الدالة β متناظر أي:

$$\beta(m,n)=\beta(n,m)$$

4.2. 3علاقة الدالة غاما والدالة بيتا:

$$\beta(m,n)=\frac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$$

4.4.2 الدالة ميتاغ- لفلور: [30]

تعرف الدالة ميتاغ− لفلور بعامل أو عاملين والمشار إليها $\boldsymbol{E_{\alpha}}(.)$ و $\boldsymbol{E_{\alpha,\beta}}(.)$ على التوالي .

تعريف 6:

يتم تعريف دالة ميتاغ لفلور $E_\alpha(.)$ بمعامل واحد على النحوي التالي :

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)} \ ، \ \alpha>0$$

وبوسطين $E_{\alpha,\beta}(.)$ على النحوى التالي :

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)} Re(\alpha)>0\ ,Re(\beta)>0,\beta\in\mathbb{C}$$

5.2 بعض المشتقات الكسرية:

1.5.2 الاشتقاق الكسري لريمان –لوفيل-: [31]

الاشتقاق الكسري اليميني :

$$ {}^{R}_{t}\mathcal{D}^{\alpha}_{b}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(-\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{t}^{b}(\tau-t)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau \quad (\forall t>b)$$

الإشتقاق الكسري اليساري :

$$ {}^{R}_{t}\mathcal{D}^{\alpha}_{b}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\left(\frac{d}{dt}\right)^{n}\int_{t}^{b}(\tau-t)^{n-\alpha-1}f(\tau)d\tau \quad (\forall t>\alpha)$$

2. 5.2 الاشتقاق الكسري لكابوتو : [32]

يعرف المشتق الكسري بمفهوم كابوتو كتالي :

$$\mathcal{D}^{\alpha}f(x)\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\displaystyle\int_{0}^{x}\frac{f^{n}(t)}{(x-t)^{\alpha+1-n}}\ dt\,, & n-1<\ \alpha<n\\ \left(\dfrac{d}{dx}\right)^{n}f(x) & \alpha=n\epsilon\mathbb{N}\end{cases}$$

حيث : $\alpha>0$ هي رتبة المشتق و n هي أصغر عدد صحيح أكبر من α .

لمشتق كابوتو لدينا :

$$\mathcal{D}^{\alpha}C=0\quad (C\text{ثابت})$$

$$\mathcal{D}^{\alpha}x^{j}=\begin{cases}0 & j\epsilon\mathbb{N}\cup\{0\}\ \text{و}\ j<[\alpha]\\ \dfrac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-\alpha)}x^{j-\alpha} & j\epsilon\mathbb{N}\cup\{0\}\text{و}j\geq[\alpha]\ \ \text{و}\ j\notin\mathbb{N}\text{و}j>[\alpha]\end{cases}$$

ومن خصائصه أنه تطبيق خطي يحقق العلاقة التالية :

$$D^{\alpha}\big(\lambda f(x)+\mu g(x)\big)=\lambda D^{\alpha}f(x)+\mu D^{\alpha}g(x)$$

6.2 التكامل ذي الرتب الكسرية

التكامل ذي الرتبة الكسرية لريمان ليوفيل [33، 34]

$$I^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{0}^{x}(x-t)^{\alpha-1}f(t)dt \qquad \alpha>0, x>0$$

$$I^{0}f(t)=f(x)$$

خاصية : من خواص المؤثر I^{α} مايلي :

$$I^{\alpha}x^{\gamma}=\frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+\gamma+1)}x^{\alpha+\gamma}$$

ملاحظة : [35]

التكامل الكسري لريمان ليوفيل يمكن كتابته علي شكل جداء التونسوري $f(t)$ و

$g_{\alpha}(t)=\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$

$$(I_{a}^{\alpha}f)(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau=g_{\alpha}(t)f(t)$$

التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل اليميني :

$$\forall t>\alpha \;\; {}_{\alpha}^{R}\mathcal{D}_{t}^{-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{\alpha}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau$$

التكامل ذي الرتب الكسرية لريمان ليوفيل اليساري:

$$\forall t\leq b \;\; {}_{t}^{R}\mathcal{D}_{b}^{-\beta}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_{t}^{b}(t-\tau)^{\beta-1}f(\tau)d\tau$$

الفصل الثاني

القيمة الحرجة و المعادلات التفاضلية

القيمة الحرجة والمعادلات التفاضلية الكلاسكية

1 لمحة عن الأسس الحرجة وأهم الأعمال المنجزة فيها :

1.1 تعريف النقطة الحرجة :

هي النقطة التي تكون عندها الدالة غير قابلة للإشتقاق أي (المشتقة على اليمين لاتساوي المشتقة على اليسار) أو المشتقة عندها تساوي صفر.

1 .2 بعض الأعمال التي تم فيها اثبات عدم وجود الحلول في حالة المعادلات التفاضلية الكلاسكية باستخدام الأسس الحرجة:

تمت العديد من الدراسة حول النقطة الحرجة، حيث تناولها "فوجيتا" سنة 1966 في حالة معادلة تفاضلية كلاسكية وذلك بدراسته لمسألة :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \quad + u^p & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ \quad u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad \dots (1.1)$$

حيث أن : $n \geq 1$ و $p > 1$ و $u_0(x)$ مستمرة موجبة محدودة

وتم إثبات أن المسألة (1.1)لاتقبل أي حل عام غير سالب، إذا كان $1 < p < p_c = 1 + \frac{2}{N}$ بينما إذا كان $p > p_c$ فإنه توجد حلول عامة وحلول تنفجر، p_c رقم "**فوجيتا**"الحرج (أس"فوجيتا" الحرج).

كما أثبت كلا من"**هاي كاوا**" و"**ويساور**" أن: لما $p_c = 1 + \frac{2}{N}$ حالة التفجير، وقد أدت هذه الدراسة إلى اكتشاف ظاهرة جديدة ل PDEs غير الخطية وقامت دراسة مماثلة لمعادلة التطور غير الخطي.

الأس الحرج **ل**"فوجيتا" لمسألة كوشي التالية يعطى بالقيمة التالية $p_c = m + \frac{2}{N}$

$$\begin{cases} \quad u_t = \Delta u^m + u^p & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x,0) = u_0(\mathrm{x}) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad \forall t > 0 \qquad \dots (1.2)$$

إذا كان $p > 1$ أو $1 > m > \frac{N-2}{N}$ و $u_0(\mathrm{x})$ دالة مستمرة موجبة محدودة [36]

تم إثبات بأن الحل$u(x,t)$ ل(2 . 1) ينفجر إذا كان $1 < p < p_c$ بينما الحلول العامة وغير العامة الموجبة موجودة إذا كان $p > p_c$ عندما تكون $p_c = m + \frac{2}{N}$، أثبت كلا من:

"كيوشيسكي"،"**موكاي**" و"**سوزكي**" أن حلول (2 . 1) تنفجر في زمن منتهي [37].

[38]"كي" استبدل المعامل الثابت غير الخطي في (2 . 1) بدالة موجبة $|x|^\sigma$ للحصول على

$$\begin{cases} u_t = \Delta u^m + |x|^\sigma u^p & x \in \mathbb{R}^N \\ u(x,0) = u_0(\mathrm{x}) & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad \forall t > 0 \quad \dots(1.3)$$

وأنشاء الأس الحرج ل "فوجيتا" $p_c = m + \frac{2+\sigma}{N}$ من أجل : $m > \frac{(N-2)}{N}$

بعض نتائج "فوجيتا"من أجل $(1.1), (1.2), (1.3)$ تم تمديدها للحصول على (1.4)

$$|x|^m u_t = \Delta u^k + |x|^n u^q, x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \quad \dots(1.4)$$

مع $0 < m \leq n < qm + q - 1$ و $q > k \geq 1$

والأس الحرج ل "فوجيتا" ل(1.4) يعطى باقيمة :

$$q_c = k + \frac{2+n}{N+m}$$

نسلط الضوء على دراسة الحل الموجب لمسألة كوشي ذات المعادلة سريعة الإنتشار

$$\begin{cases} |x^m| = div\ (|\nabla|^{p-2}\nabla u) + |x|^n \mathrm{u}^{\mathrm{q}}, x \epsilon \mathbb{R}^N, t > 0 \\ \mathrm{u}(x,0) = \mathrm{u}_0(x), \epsilon \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \end{cases} \quad \dots(1.5)$$

حيث $\frac{2\mathrm{N}+\mathrm{m}}{N+m+1} < p < 2$ ، $q > 1$ ، $0 < m \leq n < m + N(q-1)$ و $\mathrm{u}_0(x)$

حل غير سلبي وغير تافه المعادلة (1.5) تظهر في نماذج مختلفة في

non−Newtonian fluids

3.1 الأس الحرج ل "فوجيتا": [39]

نظرية 1:

إذا كان : $1 < p < \rho - 1 + \frac{\rho+n}{N+m}$

فإن: أي حل غير تافه وغير سلبي (1.5) تتفجر في زمن منتهي

البرهان:

لتكن دالة الإختبار:

$$\emptyset(x) = \begin{cases} 1 & 1 & 0 \le |x| \le 1 \\ \cos\frac{1}{2}\ (|x|-1)\pi & & 1 < |x| < 2 \\ 0 & 0 & |x| \ge 2 \end{cases}$$

$l > 0$ و $\phi_l(x) = \phi\left(\frac{x}{l}\right)$ متناظرة والدالة الغير متزايدة والتى تحقق

$$|\nabla\phi_l| \le \frac{c}{l}\,, |\Delta\phi_l| \le \frac{c}{l^2}\,, \frac{|\Delta\phi_l|}{\phi_l} \le \frac{c}{l^2}, l < |x| < 2l$$

c ثابت موجب يختلف عن l .

بضرب (1.5) في$\emptyset_l$ ونكامل في $\mathbb{R}^N$ نجد

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u\emptyset_l\ dx = \int_{\mathbb{R}^N} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\emptyset_l\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^n u^q \emptyset_l\ dx \\ \qquad \ge -\alpha(n) \int_l^{2l} |u'|^{p-1}\ |\emptyset_l{}'| r^{N-1}\ dr + \int_{\mathbb{R}^N} |x|^n u^q\emptyset_l\ dx \end{cases} \quad \ldots (2.1)$$

α(n) تدل على حجم الكرة في$\mathbb{R}^N$ باستخدام متراجحة **Holder** نجد

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{l}^{2l} |u'|^{p-1} |\emptyset_l{}'| r^{\,N-1}\ dr \\ \displaystyle\le \left(\int_l^{2l} |u'|^{p-1}\ |\emptyset_l{}'| r^{\,N-1}\ dr\right)^{p-1} + \left(\int_l^{2l} |\emptyset_l{}'| r^{N-1}\, dr\right)^{2-p} \end{cases} \quad \dots(2.2)$$

نلاحظ أن: $\frac{\partial \emptyset_l}{\partial v} = 0$ في $\partial\beta_l$ و $0 \le \frac{\partial \emptyset_l}{\partial v}$ في $\partial\beta_{2l}$ حيث β_l كرة في $\mathbb{R}^n$

مع l نصف القطر و v شعاع الموجه على حدود $\partial\beta_l$ و $\partial\beta_{2l}$ وكل من

u ،$\emptyset_l$ متناظرة شعاعياغير متزايدة تعطي الاحداثية القطبية كتالي :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_l^{2l} |u'|\ |\emptyset_l{}'| r^{\,N-1}\ dr = \frac{1}{\alpha(n)} \int_{\beta_{2l}/\beta_l} \nabla u . \nabla \emptyset_l\ \mathrm{d}x \\ \displaystyle\le \frac{1}{\alpha(\mathrm{n})} \left| \int_{\partial\beta_{2l}} u \frac{\partial \phi_l}{\partial v} \mathrm{ds} - \int_{\beta_{2l}/\beta_l} \nabla u . \nabla \phi_l\, \mathrm{d}x \right| \\ \displaystyle= \frac{1}{\alpha(\mathrm{n})} \left| \int_{\partial\left(\beta_{2l}/\beta_l\right)} u \frac{\partial \phi_l}{\partial v} \mathrm{ds} - \int_{\beta_{2l}/\beta_l} \nabla u\, . \nabla \phi_l\, \mathrm{d}x \right| \\ \displaystyle= \frac{1}{\alpha(n)} \left| \int_{\beta_{2l}/\beta_l} u\, . \Delta \emptyset_l\, dx \right| \\ \displaystyle\le \frac{1}{\alpha(n)} \int_{\beta_{2l}/\beta_l} u\, . |\Delta \emptyset_l|\, dx \end{cases} \quad \dots(3.2)$$

وباستخدام متراجحة **Holder** نتحصل على:

$$\begin{cases} \int_{\beta_{\frac{2l}{\beta_l}}} u\,|\Delta\emptyset_l|\,dx \\ \leq \left(\int_{\beta_{\frac{2l}{\beta_l}}} |x|^n u^q \emptyset_l\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\beta_{\frac{2l}{\beta_l}}} \left(|x|^{-n}|\Delta\emptyset_l|^q {\emptyset_l}^{-1}\right)^{\frac{1}{q-1}} dx\right)^{\frac{q-1}{q}} \end{cases} \quad \dots (4.2)$$

بالحساب المباشر نجد

$$\begin{cases} \left(\int_l^{2l} |\emptyset'_l|\, r^{N-1}\ dr\right)^{2-p} = Cl^{\,(N-1)(2-p)} \\ \left(\int_{\beta_{\frac{2l}{\beta_l}}} \left(|x|^{-n}|\Delta\emptyset_l|^q {\emptyset_l}^{-1}\right)^{\frac{1}{q-1}} dx\right)^{\frac{q-1}{q}} = Cl^{\frac{N(q-1)-n-2q}{q}} \end{cases} \quad \dots (5.2)$$

بتعويض(2.2) في (5.2) نجد

$$\begin{cases} \int_l^{2l} |u'|^{p-1}|\emptyset'_l| r^{N-1}\,dr \\ \leq cl^{(N-2)(2-p)+\frac{(N(q-1)-n-2q)(p-1)}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^n\, u^q \phi_l\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}} \end{cases} \quad \dots (6.2)$$

ينتج :

$$\omega_l(t) = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u\phi_l\,dx \qquad , \quad t > 0$$

بتعويض $(6\,.\,2)$ في (2.2) نجد

$$\begin{cases} \frac{dw_l}{dt} = \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^n u^q \phi_l\,dx\right)^{\frac{p-1}{q}} \begin{pmatrix} -Cl^{(N-1)(2-p)+\frac{(N(q-1)-n-2q)(p-1)}{q}} \\ +\left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^n\ u^q\phi_l\,dx\right)^{\frac{q-p+1}{q}} \end{pmatrix} \end{cases} \quad \dots (7.2)$$

بتطبيق متراجحة **Holder** مع $qm - n > N(q-1)$ نجد

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u\phi_l \, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{qm-n}{q-1}} \phi_l \, dx \right)^{\frac{q-1}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^n u^q \phi_l \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$
$$\leq Cl^{(N+m)-\frac{N+n}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |x|^n \; u^q \phi_l \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

ومنه نجد

$$\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} |x|^n u^q \phi_l \, dx \geq \mathrm{C} w_l^q l^{-qN-qm+N+n} \right. \quad \dots (8.2)$$

من (7.2) و (8.2) نجد

$$\left\{ \frac{dw_l}{dt} \geq l^{\frac{(-qN-qm+N+n)(p-1)}{q}} w_l^{p-1} \left(-C_1 l^{(N-1)(2-p)+\frac{[N(q-1)-n-2q](p-1)}{q}} \right. \right.$$
$$\left. + C_2 w_l^{q-p+1} l^{\frac{(-qN-qm+N+n)(q-p+1)}{q}} \right) \quad \dots (9.2)$$

في ظل الفرض: $p < p - 1 + \frac{p+n}{N+m}$ نجد:

$$(N-1)(2-p) + \frac{[N(q-1)-n-2q](p-1)}{q}$$
$$< \frac{(-qN-qm+N+n)(q-p+1)}{q}$$

من العلاقة الأخيرة نجد أن الحل u ينفجر في زمن منتهي $q > 1$.

نظرية 2:

إذاكان: $q > p - 1 + \frac{p+n}{N+m}$ فإن : حل المسئلة (5.1) مع الشروط الإبتدائية u ينفجر في زمن منتهي.

برهان:

من برهان النظرية1 u تحقق(9.2) إذا كان u_0 ضروري يكفي أخذ $l > 0$

$$C_1 l^{(N-1)(2-p)+\frac{[N(q-1)-n-2q](p-1)}{q}} \leq \frac{1}{2} C_2 w_l^{q-p+1}(0) l^{\frac{(-qN-qm+N+n)(q-p+1)}{q}}$$

لدينا من العلاقة (9.2)

$$w_l(t) \geq w(0), t > 0$$

$$\frac{dw_l}{dt} \geq l^{\frac{(-qN-qm+N+n)(q-1)}{q}} w_l^{p-1}\left(\frac{1}{2} C_2 w_l^{q-p+1} l^{\frac{(-qN-qm+N+n)(q-p+1)}{q}}\right) \geq \delta w_l^q, t > 0$$

من أجل $\delta > 0$ يحقق أن u ينفجر في زمن منتهي.

نظرية3:

إذا كان $q > p - 1 + \frac{p+n}{N+m}$

فإن: المسألة (5.1) تقبل حل عام مع بعض الشروط الإبتدائية.

برهان :

يتم التحقق باستعمال الدالة المساعدة

$$\overline{u}(x,t) = (t+1)^{-\alpha} f(\xi), \xi = |x|(t+1)^{-\beta} \qquad \dots (10.2)$$

حيث $f(\xi)$ معرفة سابقا:

$$\alpha = \frac{p+n}{m(q-p+1)+n(p-2)+p(p-1)}; \ \beta = \frac{q-p+1}{p+n}\alpha$$

حيث لدينا

$$\overline{u_t} = (t+1)^{-(\alpha+1)}(-\alpha f(\xi) - \beta f'(\xi)$$

$$|\nabla \overline{u}|^{p-2} \nabla \overline{u} = (t+\tau)^{-(p-1)(\alpha+\beta)} |f'|^{p-2} f'(\xi) \nabla |x|$$

$$div\left(\nabla \overline{u}^{p-2} \nabla \overline{u}\right) = (t+1)^{-(p-1)\alpha - p\beta}\left((|f'|^{p-2} f')'(\xi) + \frac{N-1}{\xi}|f'|^{p-2} f'(\xi)\right).$$

$\overline{u}(x,t)$ هو حل جيد للمسألة (6.2) مع بعض الشروط على u_0

حيث الدالة $f(\xi)$ تحقق:

$$\begin{cases} (|f'|^{p-2}f')'(\xi) + \frac{N-1}{\xi}|f'|^{p-2}f'(\xi) + \beta\xi^{m+1}f'(\xi) + \alpha\xi^{m}f(\xi) + \xi^{n}f^{q}(\xi) \le 0 \\ \xi > 0, f(0) > 0, f'(0) = 0 \end{cases} \quad \dots (11.2)$$

بأخذ

$$\left\{ f(\xi) = \left(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{2-p}} \right. \quad \dots (12.2)$$

حيث $A > 0, \alpha$ ثوابت يتم إختيارها

بعد الحساب نجد

$$f'(\xi) = -\frac{p+m}{2-p}A\left(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{1}{2-p}}\xi^{\frac{m+1}{p-1}}$$

$$|f'|^{p-2}f'(\xi) = -\left(\frac{p+m}{2-p}\right)^{p-1}A^{P-1}\left(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{2-p}}\xi^{m+1}$$

$$(|f'|^{p-2}f')'(\xi) = \left(\frac{p+m}{2-p}\right)^{p}A^{P}\left(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{-1}{2-p}}\xi^{\frac{p(m+1)}{p-1}} - (m+1)\left(\frac{p+m}{2-p}\right)^{p-1}A^{P-1}\left(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{2-p}}\xi^{m}$$

وبتكامل بالنسبة إلى $f(\xi)$ في (11.2) نجد

$$\frac{p+m}{2-p}A(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}})^{-\frac{1}{2-p}}\xi^{\frac{p(m+1)}{p-1}}\left[(\frac{p+m}{2-p})^{p-1}A^{p-1} - \beta\right] + \left(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{p-1}{2-p}}\xi^{m}\left[\alpha - (N+m)\left(\frac{p+m}{2-p}\right)^{p-1}A^{p-1}\right] + \xi^{n}(\alpha + A\varepsilon^{\frac{p+m}{p-1}})^{\frac{-(p-1)q}{2-p}} \le 0$$

نجد

$$\begin{cases} \frac{p+m}{2+p}A\left(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{\frac{p-2}{2-p}}\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\left[(\frac{p+m}{2-p})^{p-1}A^{p-1} - \beta\right] \\ \quad + \left[\alpha - (N+m)\left(\frac{p+m}{2-p}\right)^{p-1}A^{p-1}\right] \\ \quad + \xi^{n-m}(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}})^{\frac{-(p-1)(q-1)}{2-p}} \le 0 \end{cases} \quad \dots (13.2)$$

نلاحظ أن: $q > p - 1 + \frac{p+n}{N+m}$ هذا يعني أن: $\beta > \frac{\alpha}{N+m}$ نختار A تحقق

$$\frac{\alpha}{N+m}\left(\frac{2-p}{p+m}\right)^{p-1} < A^{p-1} < \beta\left(\frac{2-p}{p+m}\right)^{p-1}$$

ونعرف $\sigma = (N+m)\left(\frac{p+m}{2-p}\right)^{p-1} A^{p-1} - \alpha$

مع أخذ

$$\alpha > A^{-\frac{(n-m)(2-p)}{(p+m)(q-1)-(n-m)(2-p)}}\sigma^{-\frac{(p+m)(2-p)}{[(p+m)(q-1)-(n-m)(2-p)](p-1)}}$$

من أجل كل $\xi > 0$ نجد

$$\xi^{n-m}\left(\alpha + A\xi^{\frac{p+m}{p-1}}\right)^{-\frac{(p-1)(q-1)}{2-p}} \le \sigma.$$

وهكذا مع إختيار A, α في (13.2) نتحقق من صحة المتباينة (11.2) .

الحالة $q > q_c$ ، نجد مجموعة من الحلول العامة المتماثلة ذاتيا المعرفة بواسطة (10.2)،(12.2) طبقا لمبداء المقارنة حل المسألة (5.1) حل عام إذا كانت الشرط الابتدائي صغير بما يكفي .

الحالة الحرجة $\boldsymbol{q = q_c}$:

لدراسة الحالة الحرجة $q = q_c$ يعطى سلوك الزمني الكبير لحل المسألة (5.1) لما $|x| > 1$.

خاصية: الحل الموجب للمسألة (5.1) من أجل كل $t \in (\tau, T)$

$$\{u(x,t) \ge \epsilon(t-\tau)^{-\alpha}(1+\delta r^k)^{-\gamma}, |x| > 1 \quad \dots (1.3)$$

حيث T الزمن الأعظمي موجود من أجل كل حل ، ϵ, δ ثوابت موجبة.

$$\alpha = \frac{N+m}{(p-1)(N+m)+p-N} ، k = \frac{p+m}{p+1}$$

$$\gamma = \frac{p-1}{2-p} ، r = |x|(t-\tau)^{-\beta} ، \beta = \frac{1}{(p-1)(N-m)+p-N}$$

نظرية 4 :

إذا كان: $q = p - 1 + \frac{p+n}{N+m}$ و $p > \frac{2N}{N+1}$

أي حل المسألة (5.1) ينفجر في زمن منتهى.

برهان:

بفرض العكس أن $u(x,t)$ هو الحل العام الغير تافه للمسألة $(\mathbf{5.1})$.

يلاحظ بأن : $p = p - 1 + \frac{p+n}{N+m}$

$$(N-1)(2-p) + \frac{[N(q-1) - n - 2q](p-1)}{q}$$
$$= \frac{(-qN - qm + N + n)(q - p + 1)}{q}$$

من (9.2) نجد

$$C_2 w_l^{q-p+1} \leq 2C_1, \forall l, t > 0 \quad \dots (2.3)$$

حيث C_1 و C_2 غير مرتبطان **ب** l و t ومن جهة أخرى نستطيع إثبات أن w_l و u تنفجر في زمن منتهي، نلاحظ أن:

$$l \xrightarrow{\lim w_l(t)} \infty = \int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u \, dx$$

من(2.3) نجد

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^m u \, dx \leq C, \forall t > 0 \qquad \dots (3.3)$$

بالرجوع ل $(2.1)$$(2.3)$و$(2.5)$ مع $l > 1$ نجد (4.3)

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^m u\phi_l\,dx \geq -cl^{(N-1)(2-p)}\left(\int_{B_{\frac{2l}{B_l}}} u|\Delta\emptyset_l|\,dx\right)^{p-1} + \int_{\mathbb{R}^N}|x|^n u^q\phi_l\,dx$$

$$= -Cl^{(N-1)(2-p)}\left(\int_{B_{\frac{2l}{B_l}}} u\emptyset_l\left|\frac{\Delta\emptyset_l}{\emptyset_l}\right|dx\right)^{p-1} + \int_{\mathbb{R}^N}|x|^n u^q\phi_l\,dx$$

$$\geq -Cl^{(N-1)(2-p)-2(p-1)}\left(\int_{B_{\frac{2l}{B_l}}} u\emptyset_l\,dx\right)^{p-1} + \int_{\mathbb{R}^N}|x|^n u^q\phi_l\,dx$$

$$\geq -Cl^{(N-1)(2-P)-2(p-1)}\left(\int_{B_{\frac{2l}{B_l}}} |x|^m\,u\emptyset_l\,dx\right)^{p-1} + \int_{\mathbb{R}^N}|x|^n u^q\phi_l\,dx$$

$$\geq -Cl^{(N-1)(2-P)-2(p-1)}\left(\int_{B_{\frac{2l}{B_l}}} |x|^m\,u\emptyset_l\,dx\right)^{p-1} + \int_{\mathbb{R}^N}|x|^n u^q\phi_l\,dx$$

لدينا $p > \frac{2N}{N+1}$ وبأخذ: $(N-1)(2-p)-2(p-1) < 0$ وبأخذ $l \to +\infty$ في (4.3) ومن (3.3) نجد

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^m u\,dx \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^n u^q\,dx$$

بأخذ: $w(t) = \int_{\mathbb{R}^N}|x|^m u \quad dx$ نتحصل على:

$$w(t) - w(0) \geq \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^N}|x|^n u^q\,(x,s)dx\,ds \qquad \dots(5.3)$$

بتطبيق الخاصية (1.3) نجد

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N} |x|^n u^q\,(x,t)dx \geq \epsilon^q (t-\tau)^{-1} \int\limits_{|y|\geq(t-\tau)^{-\beta}} |y|^n(1+\delta|y|^k)^{-q\gamma}\,dy \geq c(t-\tau)^{-1}$$

من (5.3) نجد

$$\lim_{t\to+\infty} w(t) = +\infty$$

$$\lim_{t\to+\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^N} |x|^m u\,dx = +\infty$$

وهذا تناقض مع (3.3) .

القيمة الحرجة والمعادلات التفاضلية الكسرية

في هذا الجزء نسترجع كيفية إيجاد الشروط الكافية والضرورية لوجدانية وعدم وجدانية الحلول العامة للمعادلات التفاضلية الجزئية ذات الرتب الكسرية، ونسلط الضوء على نتائج عدم وجدانية الحلول العامة للمسائل الكوشية (**STFE**) و(**FDS**) التالية :

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0|t}u + (-\Delta)^{\beta/2}(u) = h(x,t)|u|^{1+\tilde{p}} & (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ =: Q \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad \dots (\mathbf{1.1})$$

والنظام (**FDS**) نظام تفاعل الإنتشار

$$\begin{cases} D^{\alpha}_{0|t}(u - u_0) + (-\Delta)^{\beta/2}\, u = |v|^p & \in Q \\ D^{\alpha}_{0|t}(v - v_0) + (-\Delta)^{\beta/2}\, v = |u|^q & \in Q \end{cases} \quad \dots (\mathbf{1.1'})$$

الشروط الإبتدائية : $u(x,0) = u_0(x) \geq 0\, , v(x,0) = v_0(x) \geq 0, \forall x \epsilon \mathbb{R}^N$

حيث : $\tilde{p} > 0, 0 < \alpha\, ; \delta < 1 < \gamma\ \ ; \beta \leq 2$

2. عدم وجود الحلول لمسألة كوشي القطعية (prabolique) : [40]

تعريف :

بأخذ $p = \tilde{p} + 1$ والدالة $u \in l^1_{loc}(Q_T)$ ، $(Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T))$ الحل الخاص الضعيف للمسألة (**STFE**) معرف على Q_T ،$u \in l^1_{loc}(Q_T)$

بضرب المسألة (1.1) في دالة الإختبار $\varphi \in C^{1,2}_{x,t}(Q_T)$ والمكاملة بالتجزئة نجد

$$\int_{Q_T} u_0(x) D^{\alpha}_{t|T}\varphi(x,t)dxdt + \int_{Q_T} h|u|^p \varphi dxdt =$$
$$\int_{Q_T} u(-\Delta)^{\beta/2}\varphi dxdt + \int_{Q_T} u D^{\alpha}_{t|T}\varphi dx\, dt \quad \dots (\mathbf{3.1})$$

$\forall \varphi \in C^{1,2}_{x,t}(Q_T)$ دالة اختبار , نختار $\varphi(x,t) = 0$

$\mathrm{T} = +\infty$ إذن يكون الحل عام والتكامل في التعريف أيضا متقارب .

والأن من أجل إيجاد الحل u للمسألة (**STFE**) نضع الشرط على (H)

$H = h(x,t) \geq C_h|x|^{\sigma} t^p \ \ ,\ \ x \in \mathbb{R}^N$ من أجل $, t > 0\, , C_{h>0}$

بفرض أن σ و $\boldsymbol{\rho}$ يعرفان تقارب التكاملات وفي حالة $|x| < R$, $t \geq t_0 > 0$ h^{1-p} قابلة للتكامل في كرة ذات القطر R في x ونصف قطرها t_0 ***من*** t وسنعرف بأنه لايوجد أي شرط موضوع عليه .

1.2 النتائج :

النظرية 1:

ليكن $N \geq 1$ و $p > 1$ نفرض أن H محققة إذا كان :

$$1 < p \leq p_c = 1 + \frac{\alpha(\beta + \sigma) + \beta_\rho}{\alpha N + \beta(1 - \alpha)}$$

فإن : المسألة (STFE) لاتقبل حل عام ضعيف غير سالبة و تافهه .

البرهان:

يبرهن بالخلف أنه بفرض أن u حل ضعيف (أعظمي وليس معدوم) الحل u موجود وأعظمي, وبالحساب نتحصل على حل معدوم $u = 0$ إذن الشروط التى تم اختيارها أثبتت عدم الوجدانية .

بفرض u حل عام غير سالب و غير تافه إذا كان u موجود في $(0, T^*)$ من أجل $T^* > 0$.

لدينا $T\,, R \in \mathbb{R}^+$ بحيث $0 < TR^{\beta/\alpha} < T^*$

نعرف دالة الإختبار $\varphi(z) = \begin{cases} 1 \;, & z \leq 1 \\ 0 \;, & z \geq 2 \end{cases}$ و $0 \leq \varphi \leq 1$

$$\int_{\phi_T} u(x)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi(x,t)dxdt \qquad \dots(1)$$

بتعويض $T = TR^{2/\theta}$ في العلاقة(1) نجد

$$\int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} u(h\varphi)^{1/p}(-\Delta)^{\beta/2}Q(h\varphi)^{-1/p}dxdt \qquad \dots(2)$$

الآن نطبق متراجحة $\epsilon -$Young:

$xy \leq \varepsilon x^p + c(\varepsilon)y^{p'}$ و $x \geq 0\,, y \geq 0$, $p + p' = pp'$ نجد

$$\int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} \underbrace{u(h\varphi)}_{x} \underbrace{(-\Delta)^{\beta/2}\varphi(x,t)(h\varphi)^{-1/p}}_{y}$$

$$\leq \varepsilon \int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} u^p (h\varphi)^{p/p} dxdt + c(\varepsilon) \int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} \left((-\Delta)^{\beta/2}\varphi\right)^{p'} (h\varphi)^{-p'/p} dxdt \quad \dots (3)$$

بنفس الطريقة من أجل

$$\int_{TR^{2/\theta}} u\left(D^{\alpha}_{T|TR^{2/\theta}}\varphi\right) dxdt = \int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} \underbrace{u(h\varphi)^{1/p}}_{x} \underbrace{\left(D^{\alpha}_{T|TR^{2/\theta}}\varphi\right)(h\varphi)^{-1/p}}_{y} dxdt$$

$$\leq \varepsilon \int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} |u|^p h\varphi dxdt + c(\varepsilon) \int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} \left|D^{\alpha}_{T|TR^{2/\theta}}\varphi\right|^{p'} (h\varphi)^{-p'/p} dxdt$$

$$\int_{TR^{2/\theta}} u\left(D^{\alpha}_{t|TR^{2/\theta}}\varphi\right) dxdt \longrightarrow 0 \ / \qquad u_0(x) \geq 0$$

من أجل ε صغير جدا نجد الحصر بالشكل

$$(1-2\varepsilon) \int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} |u|^p h\varphi dt$$

$$\leq c\varepsilon \int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} \left|D^{\alpha}_{T|TR^{2/\theta}}\varphi\right|^{p'} (h\varphi)^{-p'/p} dxdt \qquad \dots (3.1)$$

إذا كان: $\varepsilon \to 0$ نجد

$$\int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} h|u|^p \varphi dt \leq c\varepsilon \int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} \left\{\left|(-\Delta)^{\beta/2}\varphi\right|^{p'} + \left|D^{\alpha}_{T|TR^{2/\theta}}\varphi\right|^{p'}\right\} (h\varphi) dxdt \qquad \dots (4.1)$$

الآن نقدم

$$\varphi\,(x,t) = \Phi\left(\frac{|x|^2 + t\theta}{R^2}\right)$$

مع تحويل المتغير $\tau = t/R^{(2/\theta)}, y = x/R$

$$\Omega = \left\{(y,\tau) \in \mathbb{R}^N \mathbb{R}^+ |y|^2 + \tau^\theta \ < 2\right\} \ ، \mu(y,\tau) = \tau^\theta + |y|^2$$

نجد

$$\int_{\phi_{TR^{2/\theta}}} \left|\left((-\Delta)^{\beta/2}\varphi\right)\right|^{p'} (h\varphi)^{-p'/p} dyd\tau \leq$$

$$R^{-\beta p'+N+\frac{2}{\theta}-\frac{p'}{p}(\sigma+\frac{2\rho}{\theta})} \int_{\Omega} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\Phi\circ\mu\right|^{p'} (c_h|y|^{\sigma}\tau^{\rho}\Phi\circ\mu)^{-p'/p} dyd\tau \quad \dots (5.1)$$

$$\int_{TR^{2/\theta}} \left|D^{\alpha}_{t|TR^{2/\theta}}\varphi\right|^{p'} (h\varphi)^{-p'/p} dyd\tau$$

$$\leq R^{-\frac{2}{\theta}\alpha p'+N+\frac{2}{\theta}-\frac{p'}{p}(\delta+\frac{2\rho}{\theta})} \int_{\Omega} \left|D^{\alpha}_{t|TR^{2/\theta}}\varphi\right|^{P'} (c_h|y|^{\sigma}\tau^{\rho}\varphi\circ\mu)^{-p'/p} dyd\tau \quad \dots (6.1)$$

وللتبسيط لدينا :

1) $h(x,t) = c_h|x|^{\sigma}t^{\rho}$

2) $\varphi(x,t) = \Phi\left(\frac{|x|^2t^{\theta}}{R^2}\right)$

3) $y = \frac{x}{R} \Rightarrow x = y^R$

4) $\tau = \frac{t}{R^{2/\theta}} \Rightarrow t = \tau R^{2/\theta}$

5) $\Omega = \left\{(y,\tau)\epsilon\mathbb{R}^N\mathbb{R}^+, |y|^2+\tau^{\theta} < 2\right\}$

6) $\mu(y,\tau) = \tau^{\theta}|y|^2$

7) $h(x,t) = c_h|yR|^{\sigma}\left[\tau R^{2/\theta}\right]^{\rho} \Rightarrow h(x,t) = c_h|y|^{\sigma}R^{\sigma}\left[\tau R^{2/\theta}\right]$

$$\Rightarrow h(x,t) = c_h|y|^{\sigma}\tau^{\rho}R^{\sigma+\frac{2\rho}{\theta}}$$

$$\varphi(x,t) = \emptyset\left(\frac{|yR^2|+\left[\tau R^{2/\theta}\right]}{R^2}\right) = \Phi\left(\frac{|y|^2R^2+\tau^{\theta}R^2}{R^2}\right) = \Phi\left(|y|^2+\tau^{\theta}\right) = \Phi\left(u(y,\tau)\right)$$
$$= \Phi\circ\mu = \emptyset(x,t)$$

$$x \in \mathbb{R}^N, x = (x_1,\dots,x_N), y\epsilon\mathbb{R}^N \Leftrightarrow y = (y_1,\dots y_N)$$

$$dx = d(yR) \Longrightarrow dx = R^N dy$$

$$dt = d\left(\tau R^{2/\theta}\right) \Longrightarrow dx = R^{2/\theta}d\tau$$

$$\phi_{TR^{2}/\theta} = \Big\{(yR, \tau R^{2/\theta}, |y|^2R^2+\tau^{\theta}R^2 < 2 \Rightarrow |y|^2+\tau^{\theta} < 2.\frac{1}{R^2} = \phi_{TR^{2}/\theta} = \tau$$

إذا عوضنا العبارات $\left(h(x,t),\varphi(x,t),dx,dt\right)$ في الحصر نجد (6.1)

$\left(-\Delta^{\beta/2}\right)$ معرفة على $\phi_{TR^{2}/\theta}$ لكن نجد $\left(\frac{-\Delta^{\beta/2}}{R^2}\right)$ معرفة على Ω .

لدينا

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} / \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \frac{x}{R}}{\partial x} = \frac{1}{R}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right).\left(\frac{1}{R}\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{R^2}\frac{\partial f}{\partial y^2}$$

$$\Leftrightarrow (\Delta x) = \frac{1}{R^2}(\Delta y)$$

$$\Leftrightarrow \left|-\Delta^{\beta/2}\right| = \left|\frac{1}{R^2}(\Delta y)\right|^{\beta/2} = R^{-\beta}(\Delta y)^{\beta/2} \ldots (7.1)$$

لدينا من علاقة "كابوتو" $n-1 \leq p \leq n$

$$\underset{\alpha\ t}{\overset{p}{D}} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t (t-\tau)^{n-p-1} f(\tau)d\tau$$

ولدينا

$$\Rightarrow D^{\alpha}_{t|TR^{2}/\theta}\varphi(x,t) = -\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^{TR^{2}/\theta}(t-s)^{-\alpha}\varphi(x,s)ds$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^{TR^{2}/\theta}(t-s)^{-\alpha}\Phi\left(\frac{|x|^2+s^\theta}{R^2}\right)ds$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dt}\int_t^{TR^{2}/\theta}(t-s)^{-\alpha}\Phi\left(\left(\frac{|x|}{R^2}\right)^2+\left(\frac{S}{R^{2}/\theta}\right)^\theta\right)ds$$

ولدينا

$$\frac{t}{R^{2/\theta}} = \tau \Rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau R^{2/\theta}} \int_{\tau}^{t} \left(\tau R^{2/\theta} - s\right)^{-\alpha} \Phi(u) d\tau \ \backslash dt = R^{2/\theta} d\tau$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{d\tau} \int_{\tau}^{t} (\tau - s)^{-\alpha} \Phi(u) d\tau \ \backslash dt = R^{\frac{-2\alpha}{\theta}} d\tau$$

إذن نجد $\theta = \frac{2\alpha}{\beta}$

$$\int_{\phi_{TR^{\beta/\alpha}}} h|u|^p \varphi \leq CR^{\gamma} \qquad (8.1)$$

حيث $\gamma = -p' + N + \frac{\beta}{\alpha} - (\sigma + \frac{\rho\beta}{\alpha}) \frac{p'}{p}$

و

$$C = C(\varepsilon) \int_{\Omega} \left(\left| (-\Delta)^{\beta/2} \Phi^{\circ}\mu \right|^{p'} + \left| D^{\alpha}_{\tau|t} \Phi^{\circ}\mu \right|^{p'} \right) \left(C_h |y|^{\sigma} \tau^{\rho} \Phi^{\circ}\mu \right)^{-p'/p} dy d\tau$$

الأن إذا أخترنا $\gamma < 0$ (يكون $p < p_c$) ولدينا $R \to \infty$ في العبارة (8.1) نتحصل على

$$\int_{\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+} h|u|^p \leq 0 \qquad (9.1)$$

وهذا يعني أن $u = 0$ ومنه الوصول إلى تناقض .

في الحالة $\gamma = 0$ ($p = p_c$) نلاحظ (بسبب تقارب التكامل في(8.1)) إذا كان

$$C_R = \left\{ (x,t) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^2 : R^2 < |x|^2 + t^{\theta} \leq 2R \right\}$$

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} |u|^p h \varphi dx dt = 0 \ \ (10.1)$$

إذا استخدامنا متراجحة **Hodler** بدلا من استخدام متراجحة $\varepsilon - Young$ ، ثم بدلا من الحصر (8.1)

$$\int_{\phi_{TR^{\beta/\alpha}}} |u|^p h\varphi dxdt \leq L\left(\int_{C_R} |u|^p h\varphi dxdt\right)^{1/p} \qquad (11.1)$$

حيث

$$L := \left\{\left(\int_{\Omega_1} \left|D^{\alpha}_{\tau|t}\Phi^\circ\mu\right|^{p'} (C_h|y|^\sigma\tau^\rho\Phi^\circ\mu)^{-p'/p} dyd\tau\right)^{1/p'} + \right.$$

$$\left.\left(\int_{\Omega_1} \left|(-\Delta)^{\beta/2}\Phi^\circ\mu\right|^{p'} (C_h|y|^\sigma\tau^\rho\Phi^\circ\mu)^{-p'/p} dyd\tau\right)^{1/p'}\right\}$$

و$\Omega_1 = \{(y,\tau)\epsilon\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ : 1 < |y|^2 + t^\theta \leq 2\}$ باستعمال (11.1)

بالمرور إلى النهاية $R \to \infty$ نجد

$$\int_{\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^+} h|u|^p = 0$$

هذا يؤول إلى $u = 0$ وهكذا ينتهي البرهان .

ملاحظة1:

الشرط $0 \leq \gamma$ تحقق : $p \leq 1 + \frac{\alpha(\beta+\sigma)+\beta\rho}{\alpha N+\beta(1-\alpha)}$ يزودنا بالأس الحرج الذي يتطابق مع الاس "فوجتا" المعروف في الحالة $\beta = 2$ و$\sigma = \rho = 0, \alpha = 1$

ملاحظة 2:

يمكن إجراء تحليل للمعادلات غير الخطية أكثر عمومية مثل

$$D^{\alpha}_{0|t}(u-u_0) + (-\Delta)^{\beta/2}(|u|^{m-1}u) + \alpha(x).\nabla(|u|^{q-1}u) = h(x,t)|u|^p$$

يعمل أكثر مع مسائل أكثر عمومية .

2.2 حالة النظام ذو المعادلات التفاضلية الكسرية :

نوضح كيفية تنفيذ طريقة الإثبات المستخدمة في حالة نظام معادلات تفاعل الإنتشار

2. 1.2 نتائج عدم وجود الحلول لنظام معادلات تفاعل الإنتشار (FDS)

ليكن نظام معادلات تفاعل الإنتشار :

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0|t}^{\alpha}(u-u_0)+(-\Delta)^{\beta/2}u=|v|^p & \in \mathbb{Q} \\ \mathcal{D}_{0|t}^{\delta}(v-v_0)+(-\Delta)^{\gamma/2}v=|u|^q & \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad (1.1')$$

يخضع لشروط الإبتدائية :

$$u(x,0)=u_0(x)\geq 0 \qquad v(x,0)=v_0(x)\geq 0 \qquad \forall x\epsilon\mathbb{R}^N$$

حيث : $0<\alpha;\delta<1<\gamma\ ;\beta\leq 2$

لتبسيط مصطلحات نظام التفاعل تؤخذ على قدر المساواة مع $|v|^p$ و$|u|^q$

ملاحظة 3:

تحليلنا صالح من أجل عبارات النظام $f(x,t)|v|^p$ و $g(x,t)|u|^q$ حيث f و g يحققان الشروط التالية :

$$\begin{cases} f(t,x)\geq c_1t^{w_1}|x|^{d_1} \quad ,g(t,x)\geq c_2t^{w_2}|x|^{d_2} \\ t>0,x\gg 1,w_1\geq 0,w_2\geq 0\,,d_1\geq 0\,,d_2\geq 0 \end{cases}$$

من أجل النظام (FDS) لدينا :

النظرية 2:

ليكن: $p>1$ و $q>1$

$$N\leq max\left\{\frac{\dfrac{\delta}{q}+\alpha\left(1-\dfrac{1}{pq}\right)}{\dfrac{\delta}{\gamma qp'}+\dfrac{\alpha}{\beta q'}},\frac{\dfrac{\alpha}{p}+\delta-\left(1-\dfrac{1}{pq}\right)}{\dfrac{\alpha}{\beta pq'}+\dfrac{\delta}{\gamma p'}}\right\}$$

النظام (FDS) مع الشروط الإبتدائية , لا يملك حلول عامة وحلول ضعيفة غير سلبية وتافهة.

برهان:

نفرض دالة الإختبار: $j=1,2$, $\varepsilon_j(x,t)=\Phi\left(\frac{t^2+|x|^{2\theta_j}}{R^2}\right)$ حيث :

$$R > 0, \theta_1 = {}^{\beta}/_{2} \text{ و } \theta_2 = \gamma/\delta$$

عبارة الحل الضعيف في النظام(FDS) كتالي :

بضرب دالة الإختبار والمكاملة بالتجزئة

$$\int\limits_{Q_{TR}} D^{\alpha}_{0|t}(u-u_0)\xi_1 + \int\limits_{Q_{TR}} (-\Delta)^{\beta/_2} u\varepsilon_1 = \int\limits_{Q_{TR}} |v|^p \varepsilon_1$$

وبأستعمال عبارة المكاملة بالتجزئة نجد $T = \tau R$

$$\int\limits_{Q_{TR}} u\,(D^{\alpha}_{t|TR}\varepsilon_1)dxdt + \int\limits_{Q_{TR}} (-\Delta)^{\beta/_2} \varepsilon_1 u(x)dxdt$$

$$= \int\limits_{Q_{TR}} |v|^p \varepsilon_1 dxdt + \int\limits_{Q_{TR}} u_0\big(D^{\ \alpha}_{0|t}\varepsilon_1\big)dxdt \quad \ldots \ (2.1)$$

$$\int\limits_{Q_{TR}} v(D^{\delta}_{t|TR}\,\varepsilon_2) + \int\limits_{Q_{TR}} v(-\Delta)^{\gamma/_2}\varepsilon_2$$

$$= \int_{QTR} \varepsilon_2|u|^q + \int_{Q_{TR}} v_0(x)\big(D^{\ \delta}_{t|TR}\varepsilon_2\big) \qquad \ldots \ (2.2)$$

الأن نستعمل متراجحة **Holder** في المعادلاتان (2.1) و(2.2)

نجد

$$\int\limits_{Q_{TR}} u\left|D^{\alpha}_{t|TR}\varepsilon_1\right| \le \left(\int\limits_{Q_{TR}} |u|^p \varepsilon_2\right)^{1/_q} . \left(\int\limits_{Q_{TR}} \left|D^{\ \alpha}_{t|T}\varepsilon_1\right|^{q'} \varepsilon_2^{\ -q'/_q}\right)^{1/_{q'}} \ldots (2.3)$$

و

$$\int_{Q_{TR}} u\left|\left(-\Delta^{\beta/2}\right)\varepsilon_1\right|$$
$$\leq \left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\,\varepsilon_2\right)^{1/q} . \left(\int_{Q_{TR}} \left|\left(-\Delta^{\beta/2}\right)\varepsilon_1\right|^{q'} \varepsilon_2^{-q'/q}\right)^{1/q'} dx \quad \ldots (2.4)$$

نعوض(2.4) في العبارة (2.1) نجد

نتيجة

$$\int_{Q_{TR}} |v|^p \varepsilon_1 dxdt \leq \left[\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\,\varepsilon_2\right)^{1/q}\right] . A \qquad \ldots (2.5)$$

حيث

$$A = \left(\int_{Q_{TR}} \left| D^{\alpha}_{t|TR}\varepsilon_1\right|^{q'} \varepsilon_2^{-q'/p}\right)^{1/p'} + \left(\int_{Q_{TR}} \left|\left(-\Delta^{\beta/2}\right)\varepsilon_1\right|^{q'} \varepsilon_2^{-q'/q}\right)^{1/q'}$$

وبنفس الطريقة نجد

$$\int_{Q_{TR}} |u|^q \varepsilon_2 \leq \left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\,\varepsilon_1\right)^{1/q} . B \qquad \ldots (2.6)$$

حيث

$$B = \underbrace{\int_{Q_{TR}} \left|\left(D^{\delta}_{t|TR}\varepsilon_2\right) dx\right|^{p'} \xi_1^{-q'/p}}_{B}{}^{1/p} + \left(\int_{Q_{TR}} \left|\left(-\Delta^{\gamma/2}\right)\varepsilon_2\right|^{q'} \varepsilon_1^{-p'/p}\right)^{1/p'}$$

ولدينا

$$\int_{Q_{TR}} |v|^p \varepsilon_1 dxdt \leq \left[\left(\int_{Q_{TR}} |u|^q\,\varepsilon_2\right)^{1/q}\right] . A$$

$$\int_{Q_{TR}} |u|^q \varepsilon_2 \le \left[\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\, \varepsilon_1\right)^{1/q}\right].B$$

إذن

$$\int_{Q_{TR}} |v|^p \varepsilon_1 dxdt \le \left[\left(\int_{Q_{TR}} |v|^p\, \varepsilon_1\right)^{1/q} .B\right]^{1/q} .A$$

$$\int_{Q_{TR}} |v|^p \varepsilon_1 . |v|^p {\varepsilon_1}^{1-1/Pq} \le B^{1/q}.A \iff \int_{Q_{TR}} (|v|^p \varepsilon_1)^{1-1/Pq} \le B^{1/q}.A$$

ولدينا

$$\int_{Q_{TR}} (|u|^q \varepsilon_2)^{1-1/Pq} dxdt \le B.A^{1/q}$$

الآن نقوم استعمال تحويل المتغير حيث

$$\begin{cases} dt = Rd\tau \\ dx = R^{\alpha/\beta} dy \end{cases} \quad \text{نجد} \begin{cases} t = R\tau \quad x = R^{\alpha/\beta} y & \text{من أجل } A \\ t = R\tau \quad x = R^{\delta/\gamma} y & \text{من أجل } B \end{cases}$$

$$\varepsilon_1(x,t) = \Phi\left(\frac{t^2 + |x|^{2\theta_1}}{R^2}\right), \theta_1 = \beta/\alpha$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1(x,t) = \Phi\left(\frac{\tau^2 t^2 + \left(R^{\alpha/\beta} y\right)^{\frac{2\beta}{\alpha}}}{R^2}\right) = \Phi\left(\frac{R^2(\tau^2 + y^{2\theta_1})}{R^2}\right)$$

$$= \Phi(\tau^2 + |y|^2\theta_1.$$

ولدينا أيضا

$$\Rightarrow \varepsilon_2(x,t) = \Phi(\tau^2 + |y|^{2\theta_2}), \quad \theta_2 = \gamma/\delta$$

نجد

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{R^{\alpha/\beta}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{R^{\alpha/\beta}}\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{1}{R^{2\alpha/\beta}}$$

$$\Rightarrow \Delta=\frac{1}{R^{2\alpha/\beta}}\Delta y$$

$$\Rightarrow (-\Delta)^{\beta/2}=\left(\frac{1}{R^{2\alpha/\beta}}\Delta y\right)^{\beta/2}(-\Delta)^{\beta/2}$$

$$=R^{-\alpha}(-\Delta)^{\beta/2}$$

$$\left[\int_{Q_{TR}}\left|\left(-\Delta^{\beta/2}\right)\varepsilon_1(x,t)\right|^{q'}.\varepsilon_2(x,t)^{-q'/q}\,dxdt\right]^{1/q'}$$

$$=\left[\int_{Q_{TR}}\left|R^{-\alpha}\,(-\Delta_y)^{\beta/2}\varepsilon_1(y,\tau)\right|^{q'}.\varepsilon_2(y,\tau)^{-q'/q}.R^{\alpha/\beta N}R\,dyd\tau\right]^{1/q'} \quad \ldots (8.2)$$

$$\left[\int_{Q_{TR}}\left|\left(D^{\alpha}_{t|TR}\varepsilon_1(x,t)\right)\right|^{q}(\varepsilon_2(x,t))^{-q'/q}\quad dxdt\right]^{\frac{1}{q'}}$$

$$=\left[\int_{Q_{TR}}\left|\left(D^{\alpha}_{\tau|T}\varepsilon_1(x,t)^{q'}\right)\right|(\varepsilon_2(x,t))^{-q'/q}.R^{\alpha/\beta N}Rdyd\tau\right]^{\frac{1}{q'}} \quad \ldots (9.2)$$

من (2.8) و (2.9) نجد

$$\int_{Q_{TR}}|u|^p\varepsilon_2^{-1/Pq}\le R^{-\alpha+\frac{1}{q'}(\frac{\alpha N}{\beta}+1)}\left[-\gamma+\frac{1}{p'}(\frac{\delta}{\gamma}N+1)\right]^{1/q}$$

$$\left[\int_{Q_{TR}}\left|\left(D^{\alpha}_{\tau|TR}\varepsilon_1{}^{q'}(\varepsilon_2{}^{-q'/q}\right)dyd\tau\right|\right]^{\frac{1}{q'}}.\ \left(\int_{Q_{TR}}\left|\left((-\Delta y)^{\beta/2}\right)\varepsilon_1\right|^{q'}\ \varepsilon_2{}^{-q'/q}dyd\tau\right)^{1/q'}$$

$$\left[\int_{Q_{TR}}\left|\left(D^{\alpha}_{\tau|T}\varepsilon_2\right)^{q'}(\varepsilon_1)^{-p'/q}dyd\tau\right)\right|^{\frac{1}{p'q}}.\int_{Q_{TR}}\left|\left((-\Delta y)^{\beta/2}\right)\varepsilon_2\right|^{p'}\varepsilon_1{}^{-q'/q}\ \ dyd\tau\right]^{\frac{1}{q'}}$$

$$\Leftrightarrow \int_{Q_{TR}}(|v|^p\varepsilon_1)^{-1/Pq}\leq CR^{-l_1}(R^{-l_2})^{1/q}\quad ...(2.10)$$

بحيث
$$\begin{cases} l_1=\alpha-\frac{1}{q'}(\frac{\alpha}{\beta}(N+1) \\ l_2=\delta-\frac{1}{p'}(\frac{\delta}{\gamma}(N+1)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(\int_{Q_{TR}}|v|^p\varepsilon_1\right)^{1-\frac{1}{pq}}\leq C.R^{-(l_1+\frac{l_2}{q})}\quad ...(2.11)$$

من أجل $l_1+\frac{l_2}{q}\geq 0$

$$\alpha-\frac{1}{q'}\left(\frac{\alpha}{\beta}N+1\right)+\frac{\delta}{q}-\frac{1}{p'q}\left(\frac{\delta}{\gamma}N+1\right)\geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha+\frac{\delta}{q}+\frac{\alpha}{\beta q'}N-\frac{1}{p'q}-\frac{\delta}{(p'q)\gamma}\geq 0$$

$$\Rightarrow -N\left(\frac{\delta}{(p'q)\gamma}+\frac{\alpha}{\beta q'}\right)\leq \alpha+\frac{\delta}{q}-\frac{1}{q'}-\frac{1}{qp'}$$

$$\Rightarrow N\leq\frac{\alpha+\frac{\delta}{q}-\left(1-\frac{1}{qp}\right)}{\left(\frac{\delta}{(p'q)\gamma}+\frac{\alpha}{\beta q'}\right)}\qquad ...(2.11)$$

لدينا حسب متراجحة **Holder**

$$\begin{cases}\frac{1}{P}+\frac{1}{p'}=1\\ \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1\end{cases}$$

$$\frac{1}{q'}+\frac{1}{pq'}=\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{q'}+\frac{1}{q}-\frac{1}{pq}=1-\frac{1}{pq}$$

ومنه $\frac{1}{q'}+\frac{1}{pq'}=1-\frac{1}{pq}$

نفس العمل بالنسبة للعبارة $\int_{Q_{TR}}(|u|^q\varepsilon_2)^{1-\frac{1}{pq}}\leq B.A^{1/p}$

$$\int_{Q_{TR}}(|u|^q\varepsilon_2)^{1-\frac{1}{pq}}\leq C(R^{-l_3}).(A^{-l_4}\ )^{\frac{1}{p}}\quad ...(2.12)$$

$$\begin{cases}l_3=\delta-\frac{1}{p'}(\frac{\delta}{\gamma}N+1)\\ l_4=\alpha-\frac{1}{q'}(\frac{\alpha}{\beta}N+1)\end{cases}$$

نجد من (2.12) الحصر

$$\Rightarrow N\leq\frac{\frac{\alpha}{p}+\delta-\left(1-\frac{1}{qp}\right)}{\left(\frac{\delta}{(p'q)\beta}+\frac{\alpha}{\gamma q'}\right)}\qquad ...(2.13)$$

نلاحظ من(2.12) و (2.13) أنها مهمة للحصول على تناقض لذلك يكفي أخذ

$$N\leq max\left\{\frac{\frac{\delta}{q}+\alpha\left(1-\frac{1}{pq}\right)}{\frac{\delta}{\gamma qp'}+\frac{\alpha}{\beta q'}},\frac{\frac{\alpha}{p}+\delta\left(1-\frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha}{\beta pq'}+\frac{\delta}{\gamma p'}}\right\}$$

يمكن إثبات الحالة التي تكون فيه f و g كما في الفرضيات السابق ذكرها وحالة معادلة واحدة كما هو في النظرية1.

الفصل الثالث

نتائج عدم وجدانية الحلول العامة لمسألة كوشي للمعادلات التفاضلية الكسرية غير الخطية

في هذا الفصل نسلط الضوء على دراسة تخص مسألة كوشي ذات معادلات تفاضلية كسرية غير خطية من نوع قطع مكافئ (hyperbolique) التالية : [41]

$$\begin{cases} D_{0|t}^{1+\alpha_1}u + D_{0|t}^{\beta_1}u + (-\Delta)^{\gamma_1/2}u = h_1|v|^{p_1}|1-v|^{q_1} \\ D_{0|t}^{1+\alpha_2}v + D_{0|t}^{\beta_2}v + (-\Delta)^{\gamma_2/2}v = h_2|u|^{p_2}|1-u|^{q_2} \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, u_t(x,0) = u_1(x) \geq 0 \\ v(x,0) = v_0(x) \geq 0, v_t(x,0) = v_1(x) \geq 0 \end{cases}$$

حيث: $(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$; $u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)\,; u_1(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$

$-1 < \alpha_i < 1; 0 < \beta_i < 2\,; 0 < \gamma_i < 2\,; \beta_i < 2 + \alpha_i\,, i = \overline{1,2}$

ومقارنة الدراسات السابقة من حيث طريقة المعالجة والنتائج .

حيث $L^P_{loc}(Q_t, h\,dt\,dx)$ فضاء كل الدوال :

$$v: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{\boldsymbol{N}} \to \mathbb{R}^+$$

$$\int_k |v|^p h(t,x)\,dt\,dx < +\infty \;\forall\, k \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$$

تعريف 1: من أجل $0 < \alpha < 1; 0 < \beta < 1$ الحل الضعيف للمسألة

$$\begin{cases} D_{0|t}^{1+\alpha_1}u + D_{0|t}^{\beta}u + (-\Delta)^{\gamma/2}u = h(x,t)|u|^p|1-u|^q \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0, u_t(x,0) = u_1(x) \end{cases} \quad \ldots (1.4)$$

حيث $p,q > 1\,; -1 < \alpha < 1\,; 0 < \beta < 2\,; 0 < \gamma < 2\,; \beta < 1 + \alpha$

$$u_0(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ و } u_1(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$$

u قابلة للتكامل المحلي حيث $u \in L^P_{loc}(Q_t\,, hdtdx)$ وبضرب φ دالة الإختبار في العبارة (1.4) والمكاملة بالتجزئة نجد

$$\int_{\Phi_t} D_{0|t}^{1+\alpha} u\varphi \, dxdt + \int_{\Phi_t} D_{0|t}^{\beta} u \, \varphi dxdt$$
$$+ \int_{\Phi_t} (-\Delta)^{\gamma_1/2} u\varphi dxdt = \int_{\Phi_t} h(x,t)|u|^p \; |1-u|^q dxdt$$

من علاقة "كابوتو " نجد

$$\int_{\Phi_t} D_{0|t}^{1+\alpha}(u-u_0)\varphi dxdt + \int_{\Phi_t} D_{0|t}^{\beta}(u-u_0)\varphi dxdt + \int_{\Phi_t} (-\Delta)^{\gamma/2} u\varphi dxdt$$
$$= \int_{\Phi_t} h(x,t)|u|^p \; |1-u|^q \varphi dxdt$$

ولدينا

$$\left[\int_{\Phi_t} -D_{0|t}^{1+\alpha} u_0 \varphi dxdt = \int_{\Phi_t} D_{0|t}^{1+\alpha} u\varphi dxdt\right]$$

و بالمكاملة بالتجزئة نجد

$$\int_{\Phi_t} uD_{t|T}^{1+\alpha}\varphi dxdt - \int_{\Phi_t} u_1 D_{t|T}^{1+\alpha}\varphi dxdt + \int_{\Phi_t} u \, D_{t|T}^{\beta}\varphi dxdt$$
$$- \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \; D_{t|T}^{\alpha}\varphi(0)dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_0 \; D_{t|T}^{\beta-1}\varphi(0)dx$$
$$+ \int_{\Phi_t} u_1 D_{t|T}^{\beta-1}\varphi dxdt + \int_{\Phi_t} (-\Delta)^{\beta\ /2} u\varphi dxdt$$
$$= \int_{\Phi_t} h(x,t)|u|^p \; |1-u|^q \varphi dxdt \qquad \ldots(2.4)$$

لدينا من (2.4) نجد

$$\int_{\Phi_t} D_{t|T}^{1+\alpha} u\varphi dtdx + \int_{\Phi_t} D_{t|T}^{\beta} u_1 \varphi dtdx + \int_{\Phi_t} (-\Delta)^{\gamma/2} \varphi dtdx$$
$$= \int_{\Phi_t} h\varphi |u|^p |1-u|^q \, dtdx$$

$$\int_{\Phi_t} u D_{t|T}^{1+\alpha} \varphi dtdx$$
$$+ \int_{\Phi_t} \underbrace{u_0 \, D_{t|T}^{\alpha+1} \varphi dtdx}_{X} + \int_{\Phi_t} u D_{t|T}^{\beta} \varphi dtdx + \int_{\Phi_t} \underbrace{u_0 D_{t|T}^{\beta} \varphi dtdx}_{Y}$$
$$+ \int_{\Phi_t} (-\Delta)^{\gamma/2} u\varphi dtdx = \int_{\Phi_t} h\varphi |u|^p |1-u|^q \, dtdx$$

بوضع

$$\begin{cases} u = u_0 \Rightarrow u' = Du_0 = u_t(x,0) u_1 \\ v' = D_{t|T}^{\alpha+1} \varphi \Rightarrow D_{t|T}^{\alpha} \varphi = v \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big|_0^T u_0 \, D_{t|T}^{\alpha} \varphi(t,x) dx - \int_{\Phi_t} u_1 \, D_{t|T}^{\alpha} \varphi(t,x) dx$$
$$= -\int_{\mathbb{R}^N} u_0 \, D_{t|T}^{\alpha} \varphi(0) dx - \int_{\Phi_t} u_1 \, D_{t|T}^{\alpha} \varphi(0) dtdx \qquad (X)$$

(Y) بنفس الطريقة
$$\begin{cases} u = u_0 \Rightarrow u' = u_1 \\ v' = D_{t|T}^{\beta} \varphi \Rightarrow v = D_{t|T}^{\beta-1} \varphi \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Big|_0^T u_0 \, D_{t|T}^{\beta-1} \varphi(t,x) dx - \int_{\Phi_t} u_1 \, D_{t|T}^{\beta-1} \varphi(t,x) dtdx$$

$$\left\{ D_{t|T}^{\alpha} \varphi(t,x) = D_{t|T}^{\beta-1} \varphi(t,x) = 0 \right.$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^N} u_0\ D_{t|T}^{\beta-1}\varphi(0)dx - \int_{\Phi_t} u_1\ D_{t|T}^{\beta-1}\varphi(t,x)dxdt$$

تعريف 2:

بفرض أن $2 > \beta > 1 ;1 > \alpha > 0$ و $\beta \leq 1+\alpha$ ، الدالة u قابلة للتكامل حيث $u \in L_{loc}^{p}(\Phi_t, hdtdx)$ و

$$\int_{\Phi_t} \varphi h|u|^p|1-u|^q\, dtdx$$

$$= \int_{\Phi_t} uD_{t|T}^{\alpha+1}\varphi dtdx$$

$$- \int_{\Phi_t} u_1 D_{t|T}^{\alpha}\varphi dtdx - \int_{\mathbb{R}^N} u_0 D_{t|T}^{\alpha+1}\varphi(0)dtdx$$

$$+ \int_{\Phi_t} uD_{t|T}^{\beta}\varphi dtdx$$

$$- \int_{\Phi_t} u_1 D_{t|T}^{\beta-1}\varphi dtdx$$

$$- \int_{\mathbb{R}^N} u_0 D_{t|T}^{\beta-1}\varphi(0)dtdx - \int_{\Phi_t} u(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi dtdx$$

من أجل $\varphi \epsilon\, C_0^2(\Phi_t)$ ، $\varphi \geq 0$ محقق

$$\varphi(T,x) = D_{t|T}^{\alpha}\varphi(T,x) = D_{t|T}^{\beta-1}\varphi(T,x) = 0.$$

3 بعض نتائج عدم وجود حلول لمعادلات تفاضلية كسرية: [42]

1.3 النتائج:

نظرية 1 :

ندرس الحالة لما: $1 < \alpha < 0$ و $1 < \beta < 0$ وبوضع

$u \neq 1$ و $0 < \beta, \alpha < 1$; $u_0(x)\ , u_1(x) \geq 0$ والدالة $h(x,t) > 0$ و

$h(tR^2, xR^\beta) = R^\rho h(t,x)$ مع $\rho > 0$ و $R > 0$

إذا كان: $1 < p \leq 1 + \frac{\beta\gamma+\rho}{2+\beta N-\beta\gamma}$ فإن المسألة (4.1) لا تقبل حل عام غير تافه بالنسبة للزمن.

البرهان :

يبرهن بالخلف على وجود حل من أجل كل $t > 0$, $\mathrm{u}\ \epsilon(0,T^*)$ و$(T$ و R) ثابتين موجبين حيث $0 < TR^2 < T^*$

نعرف دالة الإختبار ب: $\varphi(x,t) = \varphi_0\left(\frac{t^{2\beta}+|x|^4}{R^{4\beta}}\right)$

حيث: $\varphi(TR^2,x) = D^\alpha_{T|R^2}\varphi(TR^2,x) = 0$

الدالة $\varphi_0\epsilon\ C_0^2(R^2)$ غير سلبي و(موجب أو معدوم) يحقق

$$0 \leq \varphi_0 \leq 1 \quad \text{و} \quad \varphi_0(z) = \begin{cases} 1\ ,0 \leq z \leq 1 \\ 0\ \ ,z \geq 2 \end{cases}$$

باالإعتماد على التعريف 1 الصيغة الضعيفة لحل المسألة من الشكل :

$$\int_{\Phi_{TR^2}} \varphi h|u|^p\,|1-u|^q dxdt + \int_{\Phi_{TR^2}} u_1\ D^\alpha_{t|TR^2}\varphi dtdx + \int_{\Phi_{TR^2}} u_0\ D^\beta_{t|TR^2}\varphi dtdx$$

$$+\int_{\mathbb{R}^N} u_0\ D^\alpha_{t|TR^2}\varphi(0)dx$$

$$= \int_{\Phi_{TR^2}} u\ D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi dtdx + \int_{\Phi_{TR^2}} u\ D^\beta_{t|TR^2}\varphi dtdx + \int_{\Phi_{tR^2}} (-\Delta)^{\gamma/2} u\varphi dxdt$$

من أجل $D^{\beta}_{t|T}\varphi \geq 0$ و $D^{\alpha}_{t|T}\varphi \geq 0$ و $\varphi(TR^2,x) = D^{\alpha}_{t|TR^2}\varphi(TR^2,x) = 0$

إذن نجد

$$\int_{\Phi_{TR^2}} \varphi h|u|^p\,|1-u|^q dxdt + \underbrace{\int_{\Phi_{TR^2}} u_1\ D^{\alpha}_{t|TR^2}\varphi dtdx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_{\Phi_{TR^2}} u_0\, D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi dtdx}_{\geq 0}$$

$$+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} u_0\ D^{\alpha}_{t|TR^2}\varphi(0)dx}_{\geq 0}$$

$$= \underbrace{\int_{\Phi_{TR^2}} u\ D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi dtdx}_{1} + \underbrace{\int_{\Phi_{TR^2}} u\ D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi dtdx}_{2} + \underbrace{\int_{\Phi_{TR^2}} u(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi dtdx}_{3}$$

وبتطبيق متراجحة Yong $-\,\varepsilon$على 1و2 و3 نجد [43]

1) $\int_{\Phi_{TR^2}} u\ D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi dtdx \leq \varepsilon \int_{\Omega_1} \varphi h|u|^p\,|1-u|^q + C_\varepsilon \int_{\Omega_1} |1-u|^{-q/_{p-1}} \left(|\,D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi|\right)^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}}$

2) $\int_{\Phi_{TR^2}} u\ D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi dtdx \leq \varepsilon \int_{\Omega_1} \varphi h|u|^p\,|1-u|^q + C_\varepsilon \int_{\Omega_1} |1-u|^{-q/_{p-1}} \left(|D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi|\right)^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}}$

3) $\int_{\Phi_{TR^2}} u(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi dxdt \leq \varepsilon \int_{\Omega_2} \varphi h|u|^p\,|1-u|^q + C_\varepsilon \int_{\Omega_2} |1-u|^{-q/_{p-1}} (|-\Delta^{\gamma/2}\varphi|^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}}) dtdx$

حيث $xy \leq \varepsilon x^p + C_x y^q$

$$\int_{\Phi_{TR^2}} u\ D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi dtdx$$

$$\leq \int_{\Phi_{TR^2}} (\varphi h)^{1/p}\,|1-u|^{q/p}\, D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi (1-u)^{-q/p} (h\varphi)^{-1/p}$$

حيث $\Omega_1 = sup\varphi; \Omega_2 = sup(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi$ إذن نجد بإختزال طرف بطرف :

$$\int\limits_{\Phi_{TR^2}} \varphi h|u|^p\,|1-u|^q dtdx$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{\Omega_1} \varphi h|u|^p\,|1-u|^q + \varepsilon \int\limits_{\Omega_1} (h\varphi)|u|^p|1-u|^q$$

$$+ C_\varepsilon \left[\int\limits_{\Omega_1} |1-u|^{-q/_{p-1}} \left| D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi \right|^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}} \right.$$

$$+ \int\limits_{\Omega_2} |1-u|^{-q/_{p-1}} \left| D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi \right|^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}}$$

$$\left. + \int\limits_{\Omega_2} |1-u|^{-q/_{p-1}} \left| (-\Delta)^{\gamma/_2}\varphi \right|^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}} dxdt \right]$$

من أجل $\varepsilon < \frac{1}{3}$ نجد

$$\int\limits_{\Phi_{TR^2}} \varphi h|u|^p\,|1-u|^q dtdx \leq C(A_1 + A_2 + A_3)$$

$$A_1 = \int\limits_{\Omega_1} |1-u|^{-q/_{p-1}} \left(D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi \right)^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}} dxdt$$

$$A_2 = \int\limits_{\Omega_1} |1-u|^{-q/_{p-1}} \left(D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi \right)^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}} dxdt$$

$$A_3 = \int\limits_{\Omega_2} |1-u|^{-q/_{p-1}} \left| (-\Delta)^{\gamma/_2}\varphi \right|^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}} dxdt$$

ومنه نجد أيضا

$$(1) = \int_{\Phi_{TR^2}} \varphi h|u|^p \,|1-u|^q dtdx$$

$$\leq c \int_{\Omega_1} \left| D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi \right|^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}} dxdt$$

$$+ \int_{\Omega_1} \left(\left| D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi \right|\right)^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}}$$

$$+ \int_{\Omega_2} \left|(-\Delta)^{\gamma/_2}\varphi\right|^{p/_{p-1}} (\varphi h)^{-1/_{p-1}}$$

C ثابت موجب، ليكن تحويل المتغير التالى :

$$\begin{cases} t = R^2\tau \\ x = R^\beta y \\ \Omega = \{(\tau, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N : \tau^{2\beta} = |y|^4 \leq 2\} \\ X(\tau, y) = \varphi\left(R^2\tau, R^\beta y\right) = \varphi(t, x) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} dtdx = R^{2+\beta N} dyd\tau \\ D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi \quad = R^{-2(\alpha+1)}\, D^{\alpha+1}_{\tau|T} X \\ D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi \quad = R^{-2\beta}\, D^{\beta}_{\tau|T} X \\ (-\Delta\varphi)^{\gamma/_2} = R^{-\beta\gamma}(-\Delta X)^{\gamma/_2} \end{cases}$$

1) $D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi \quad (t, x)$

$$= \frac{-1}{\gamma(1-\alpha+1)} \frac{d}{dx} \int_t^{TR^2} (t-M)^{1-\alpha-1-1} \varphi(M, x) dM$$

$$= \frac{-1}{\gamma(2-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_t^{TR^2} (t-M)^{-(1+\alpha)} \varphi(M, x) dM$$

مع تحويل المتغير نجد

$$\begin{cases} t = R^2\tau \Rightarrow dt = R^2 d\tau \\ M = R^2 s \Rightarrow dM = R^2 ds \\ x = R^\beta y \end{cases}$$

$$(1) = D^{\alpha+1}_{t|TR^2}\varphi \quad (t,x) = \frac{-1}{\gamma(-\alpha)}\frac{d}{R^2 d\tau}\int_{\tau}^{T}(R^2\tau - R^2S)^{-(1+\alpha)}\underbrace{\varphi\left(R^2S, R^\beta Y\right)}_{X(S,Y)}R^2 dS$$

$$\Leftrightarrow\ D^{\alpha+1}_{t|T}\varphi \quad (t,x) = R^{-2(1+\alpha)}\, D^{\alpha+1}_{\tau|T}X \quad (\tau, y)$$

من الشكل السابق نجد $n-1<\delta<n$

$$D^{\delta}_{t|T}f(t) = \frac{(-1)^n}{\gamma(n-\delta)}\frac{d^n}{dt^n}\int_{t}^{T}(\tau - t)^{n-\delta-1}f(\tau)d\tau$$

$$2)\quad D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi(t,x) = \frac{(-1)^2}{\gamma(2-\beta)}\frac{d}{dt}\int_{t}^{TR^2}(M-t)^{-\beta}\varphi(M,x)dM$$

مع تحويل المتغير $0<\beta<2$:

$$\begin{cases} t = R^2\tau \\ M = R^2 s \Rightarrow dM = R^2 ds \\ x = R^\beta y \end{cases}$$

نجد

$$D^{\beta}_{t|TR^2}\varphi(t,x) = \frac{-1}{\gamma(1-\beta)}\frac{d}{R^2 d\tau}\int_{\tau}^{T}(R^2 s - R^2\tau)^{-\beta}\, X(s,y)R^2 ds$$
$$= \frac{-1}{\gamma(1-\beta)}\frac{d}{d\tau}\int_{\tau}^{T} R^{-2\beta}\,(s-\tau)X(s,y)ds$$
$$= R^{-2\beta}\, D^{\beta}_{\tau|T}X(\tau,y)\ \ldots(2)$$

$$3)\qquad |(-\Delta)\varphi(t,x)|^{\gamma/2} = R^{-\gamma\beta}|(-\Delta y)X|^{\gamma/2}\ldots(3)$$

ومنه نجد

$$\int_{\Phi_{TR^2}} h\varphi|u|^q|1-u|^q dxdt \qquad (1$$

$$\leq C\left[R^{-2(\alpha+1)\frac{p}{p-1}+\beta N+2}\left(\int_{\Omega}(hX)^{-1/p-1}\left|D_{\tau|T}^{\alpha+1}X\right|^{p/p-1}\right)dyd\tau\right.$$

$$+R^{\beta N+2-2\beta\left(\frac{p}{p-1}\right)}\left(\int_{\Omega}(hX)^{-1/p-1}\left|D_{\tau|T}^{\beta}X\right|^{p/p-1}\right)dyd\tau$$

$$\left.+\ R^{-\beta\gamma\left(\frac{p}{p-1}\right)\beta N+2}\left(\int_{\Omega}(hX)^{-1/p-1}|(-\Delta y)X)|^{\gamma/2}\right)dyd\tau\right]$$

$$\Leftrightarrow \int_{\Phi_{TR^2}} h\varphi|u|^p|1-u|^q dxdt \leq CB \quad / B=R$$

من أجل

$$\beta N+2-\frac{\beta\gamma p}{p-1}-\frac{\rho}{p-1}\leq 0$$

$$\Longrightarrow \beta N+2-\frac{\beta\gamma p+\rho}{p-1}\leq 0 \qquad \ldots(1)$$

ولدينا

$$p\leq 1+\frac{\beta\gamma+\rho}{2+\beta N-\beta\gamma}$$

ومن(1) نجد

$$\beta\ N+2\leq\frac{\beta\gamma+\rho}{p-1}$$

$$\Rightarrow (p-1)(\beta N+2)\leq \beta\gamma p+\rho$$

$$\Rightarrow \rho(\beta N-\beta\gamma+2)\leq \beta N+2+\rho$$

$$\Rightarrow p\leq\frac{\beta\gamma+2+\rho}{\beta N-\beta\gamma+2}$$

$$\Leftrightarrow p \leq 1 + \frac{\beta\gamma + \rho}{2 + \beta N - \beta\gamma}$$

الحالة الأولى :

إذا كان :

$$p \leq 1 + \frac{\beta\gamma + \rho}{2 + \beta N - \beta\gamma}$$

فإن :

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Phi_{TR^2}} h|u|^p|1-u|^q dxdt = 0$$

وهذا يكافئ : $h(t,x) > 0$; $u = 0$ في $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N$ و $u \neq 1$

ومنه الوصول إلى تناقض .

الحالة الثانية :

إذا كان :

$$p = 1 + \frac{\beta\gamma + \rho}{2 + \beta N - \beta\gamma}$$

نتحصل على

$$\int_{Q\infty} h|u|^p|1-u|^q dxdt \leq C \quad \dots (2)$$

بتطبيق متراجحة **Holder** على (2) نجد $\int_{\Phi_{TR^2}} h\varphi|u|^p|1-u|^q dxdt \leq$

$$\left(\int_{CR} |1-u|^{-q/pp'} (h\varphi)^{-p'/p} [\left| D_{\tau|T}^{\alpha+1} X\right|^{p'} + \left| D_{\tau|T}^{\beta} X\right|^{p'} + \left|(-\Delta y)^{\gamma/2} X\right|^{p'}\right)^{1/p'} \quad \dots (3)$$

لما حيث $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ و $CR = \{(t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, 0 \leq t^{2\beta} + |x|^4 \leq 2R^{4\beta} \}$

بالمرور إلى النهاية نجد:

$$\lim_{R\to\infty}(3) = \lim_{R\to\infty} \int_{QR^2} h|u|^p|1-u|^q dxdt = 0 \quad ;u=0$$

ومنه الوصول إلى تناقض ، وهذا يؤكد صحة الفرض وعدم وجود الحلول العامة غير التافهة.

2.3 المقارنة بين الأعمال المدروسة في الفصول :

بالمقارنة بين الأعمال المدروسة في الفصول من حيث طريقة المعالجة والدراسة لبعض نتائج عدم وجود حلول المعادلات التفاضلية في الحالة الكلاسيكية وفي الحالة الكسرية باستخدام مفهوم الأسس الحرجة وطريقة الدوال الإختبارية.

في الفصل الأول تطرقنا إلى دراسة مقال "فوجيتا" حيث تم أخذ شكل المعادلة

$$\begin{cases} |x|^m u_t = div\left(|\nabla u \quad|^{p-2}\nabla \mathrm{u}\right) + |x|^n u^q \\ u(x,0) = u_0(x) \ge 0 \end{cases} \dots (1.5)$$

وأثبت بأنه إذا كان $1 < q < p-1+\frac{p+n}{N+m}$ فإن كل حل غير سلبي بديهي للمسألة (5.1) ينفجر في زمن منتهي وقد تم إتباع الخطوات التالية لإثبات ذلك بإنشاء دالة إختبار

$$\emptyset(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le |x| \le 1 \\ \cos\frac{1}{2}\ (|x|-1)\pi & 1<|x|<2 \\ 0 & |x| \ge 2 \end{cases}$$

وضربها في العبارة (5.1) ومكاملتها بالتجزئة على $\mathbb{R}^n$ ثم تطبيق متراجحة **Holder** على النتائج توصل إلى إثبات صحة الفرض أن الحلول تنفجر في زمن منتهي لما

$$1 < q_c < p-1+\frac{p+n}{N+m}$$

وكذلك توصل إثبات أنه لما تكون $p_c > p-1+\frac{p+n}{N+m}$ فإن المسألة **(5.1)** تقبل حل عام بإستخدام شروط إبتدائية

التحقق بدالة مساعدة :

$$\overline{u}(x,t) = (t+1)^{-\alpha} f(\xi), \xi = |x|(t+1)^{-\beta}$$

حيث $f(\xi)$ معرفة:

$$\alpha = \frac{p+n}{m(q-p+1)+n(p-2)+p(p-1)};\ \beta = \frac{q-p+1}{p+n}\alpha$$

أما في حالة $p = p - 1 + \frac{p+n}{N+m}$ و $p > \frac{2N}{N+m}$ فإن الحل موجب ل**(5.1)** ينفجر في زمن منتهي .

وعند حساب النهاية لما$t \to +\infty$ نحصل على تناقض .

في الجزاء الثاني قدمنا بتقديم دراسة تم فيها تناول دراسة مسألة التطور

$$(\text{STFE})\ \begin{cases} D^{\alpha}_{0|t}u + (-\Delta)^{\beta/2}(u) = h(x,t)|u|^{1+\tilde{p}} \\ u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \qquad x \in \mathbb{R}^N \end{cases} \quad \dots (1.1)$$

إذا كانت $\beta = 2$ و$\alpha = 1$ في المسألة (1.1) نتحصل على معادلة الحرارة .

حيث إعتبر فيجتا مسألة كوشي التالية :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{1+\tilde{p}} & x \in \mathbb{R}^n \\ u(x,0) = \alpha(\mathrm{x}) \geq 0 & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

حيث $0 \geq \tilde{p}$ و $p_c = \frac{2}{N}$ القيمة الحرجة يثبت

1) إذا كان $0 < \tilde{p} < p_c$ و $\alpha(\mathrm{x}_0) \geq 0$ من أجل قيم x_0 جميع الحلول(FE) تنفجر في الزمن النهائي .

2) إذا كان $p > p_c$ إذن توجد حلول على $\mathbb{Q}$ إضافة إلى حلول متواجدة على $\mathbb{R}^N \times (0,\mathrm{T})$ من أجل قيمة $t \leq +\infty$ لكن ليس على مستوى $\mathbb{Q}$ (من أجل قيمة $p > p_c$ جميع الحلول عامة).

حيث يتضمن (STFE) شروط كلاسكية أي دراسة المسألة بمفهوم المشتق الكسري "كابوتو" تتحصر النظرية في التأكيد على عدم وجود الحلول لمسألة كوشي يعني أن كل حل غير سلبي ينفجر في زمن منتهي .

طريقة المعالجة : إيجاد عبارة الحل الضعيف الخاص$u \in l_{loc}^{1}(Q_T)$ للمسألة (1.1) المعرف على $Q_T = \mathbb{R}^N \times (0,T)$

كما تم إثبات في نص النظرية انه عند أخذ $N \geq 1$ و $P > 1$ الشرط (H) محقق إذا كان :

$$1 < p \leq p_c = 1 + \frac{\alpha(\beta+\sigma)+\beta_p}{\alpha N + \beta(1-\alpha)}$$

فإن: المسألة(1.1) لاتقبل حلول عامة ضعيفة غير سلبية.

يبرهن بلخلف بفرض أن u حل ضعيف (أعظمي ليس معدوم)الحلu موجود وأعظمي وينعدم ثم نتحصل على حل معدوم u=0 إذن الشروط التى تم اختيارها أثبتت عدم وجود الحلول.

ثم إختار دالة الإختبار $\Phi(\mathrm{z}) = \begin{cases} 1 & z \leq 1 \\ 0 & z \geq 2 \end{cases}$ و $0 \leq \Phi \leq 1$

وبتحويل المتغير الزمني $T = TR^{2/\theta}$ في العبارة $\int_{Q_T} u(x)(-\Delta)^{\beta/2}\varphi(x,t)dxdt$ تصبح $\int_{\Phi_{TR^{2/\theta}}} u(h\varphi)(-\Delta)^{\beta/_2} Q(x,t)(h\varphi)^{-1/_p} dxdt$

وبتطبيق متراجحة Young على العبارة والحصر نجد

$$\int_{\Phi_{TR^{2/\theta}}} h|u|^p \varphi dt$$

$$\leq c\varepsilon \int_{\Phi_{TR^{2/\theta}}} \left[\left((-\Delta)^{\beta/_2}\varphi \right)^{p'} + \left(D^{\alpha}_{T|TR^{2/\theta}}\varphi \right)^{p'} \right] (h\varphi)dxdt$$

1) وبتطبيق تحويل المتغير التالي: $h(x,t) = c_h|x|^\sigma t^\rho$

2) $\varphi(x,t) = \varphi\left(\frac{|x|^2 t^\theta}{R^2}\right)$

3) $y = \frac{x}{R} \Rightarrow x = y^R$

4) $\tau = \frac{t}{R^{2/\theta}} \Rightarrow t = \tau R^{2/\theta}$

5) $\Omega = \{(y,\tau)\epsilon\mathbb{R}^N\mathbb{R}^+|y|^2 + \tau^\theta < 2\}$

6) $u(x,\tau) = \tau^\theta|y|^2$

وحساب نهاية التكامل نجد $\lim_{r\to\infty}\int_{cR}|u| \quad h\varphi dxdt = 0$ إذن u=0 أي عدم وجدانية الحلول الضعيفة غير السلبية .

كما تمت دراسة نظام تفاعل الإنتشار

$$(\text{FDS}) \quad \begin{cases} D_{0|t}^{\alpha}(u-u_0) + (-\Delta)^{\beta/2}\, u = |v|^p \\ D_{0|t}^{\alpha}(v-v_0) + (-\Delta)^{\beta/2}\, v = |u|^q \end{cases}$$

$$u(x,0) = u_0(x) \geq 0 \forall x\epsilon\mathbb{R}^N \quad v(x,0) = v_0(x) \geq 0$$

حيث : $0 < \alpha; \delta < 1 < \gamma \ ; \beta \leq 2$

من أجل تبسيط حدود المسألة (FDS)يجب إيجاد مساوات ل$|v|^p$و $|u|^q$ تحليلنا ناجح لشروط من الشكل $f(x,t)|v|^p$ و $g(x,t)|u|^q$ حيث f وg

يحققان الشروط التالية :

$$\begin{cases} f(t,x) \geq c_1 t^{w_1}|x|^{d_1} \quad , g(t,x) \geq c_2 t^{w_2}|x|^{d_2} \\ t > 0, x \gg 1, w_1 \geq 0, w_2 \geq 0\,, d_1 \geq 0\,, d_2 \geq 0 \end{cases}$$

ومن أجل دراسة نتائج النظام نحتاج إلى برهنة النظرية

ليكن: $p \geq 1$ و $q > 1$

$$N \leq max\left\{\frac{\frac{\delta}{q} + \alpha\left(1 - \frac{1}{pq}\right)}{\frac{\delta}{\gamma q p'} + \frac{\alpha}{\beta q'}}, \frac{\frac{\alpha}{p} + \delta\left(1 - \frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha}{\beta p q'} + \frac{\delta}{\gamma p'}}\right\}$$

حيث p_c قيمة حرجة ومنه النظام مع الشروط الإبتدائية لا تقبل الحلول العامة العامة غير ضعيفة و غير تافهة . ولبرهان ذلك تم اعتماد دالة الاختبار

$$R > 0, \theta_1 = \beta/_2 \text{ و } \theta_2 = \gamma/\delta \text{ : حيث } \varepsilon_j(x,t) = \Phi\left(\frac{t^2+|x|^{2\theta_j}}{R^2}\right) \ , j = 1,2$$

وبضرب معادلات النظام في دالة الإختبار ذات المتغيرين وتطبيق متراجحة **Holder** نتحصل على

$$\begin{cases} \int\limits_{\Phi_{TR^2}} (|v|^p \varepsilon_1)^{-1/_{Pq}} \leq B^{1/_q}.A \quad \dots (2.7) \\ \int\limits_{\Phi_{TR^2}} |u|^p {\varepsilon_2}^{-1/_{Pq}} \leq B^{1/_q}.A \quad \dots (2.8) \end{cases}$$

استعمل تحويل المتغير التالي :

$$\begin{cases} t = R\tau \quad x = R^{\alpha/_\beta} y \\ t = R\tau \quad x = R^{\delta/_\gamma} y \end{cases} \text{ : نجد } \begin{cases} dt = Rd\tau \\ dx = R^{\alpha/_\beta} dy \end{cases}$$

$$\varepsilon_1(x,t) = \Phi\left(\frac{t^2+|x|^{2\theta_1}}{R^2}\right), \theta_1 = \beta/_\alpha$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1(x,t) = \Phi\left(\frac{\tau^2 t^2 + \left(R^{\alpha/_\beta} y\right)^{2^{\beta/_\alpha}}}{R^2}\right) = \Phi\left(\frac{R^2(\tau^2+y^{2\theta_1})}{R^2}\right)$$
$$= \Phi(\tau^2 + |y|^2\theta_1$$

ولدينا أيضا :

$\Rightarrow \varepsilon_2(x,t) = \Phi(\tau^2 + |y|^2\theta_2 , \quad \theta_2 = \gamma/_\delta$ بتطبيق متراجحة **Holder** نتحصل على تناقض لذلك يكفي أخذ

$$N \leq max\left\{\frac{\frac{\delta}{q}+\alpha\left(1-\frac{1}{pq}\right)}{\frac{\delta}{\gamma qp'}+\frac{\alpha}{\beta q'}},\frac{\frac{\alpha}{\beta}+\delta\left(1-\frac{1}{pq}\right)}{\frac{\alpha}{\beta pq'}+\frac{\delta}{\gamma p'}}\right\}$$

أما الفصل الثالث تمت دراسة مسألة كوشي لنظام معادلات تفاضلية خطية(prabolyque)

$$\begin{cases} D_{0|t}^{n+\alpha_1}u+\ D_{0|t}^{\beta_1}u+(-\Delta)^{\gamma_1/2}u=|v|^p \\ D_{0|t}^{n+\alpha_2}u+D_{0|t}^{\beta_2}u+(-\Delta)^{\gamma_2/2}v=|u|^q \\ u(x,0)=u_0(x)\geq 0, u_t(x,0)=u_1(x)\geq 0 \\ v(x,0)=v_0(x)\geq 0, v_t(x,0)=v_1(x)\geq 0 \end{cases}$$

حيث: $u_0(x)\in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N), u_1(x)\in L_{loc}^1(\mathbb{R}^N)\quad ;(t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N$

$-1<\alpha_i<1; 0<\beta_i<2; 0<\gamma_i<2; \beta_i<1+\alpha_i\ , i=\overline{1,2}$

وإيجاد الحل الضعيف الخاص ودراسة الحالة $0<\alpha<1$ إثبات صحة النظرية :

نفرض أن: $u_0(x),u_1(x)\geq 0$ و $0<\alpha<1$ و $0<\beta<1$

$\alpha<0;\beta<1$ و $u\neq 1$ والدالة $h(x,t)>0$ و $h(tR^2,xR^\beta)=R^\rho h(t,x)$ مع
$\rho>0$ و $R>0$

إذا كان $1<p\leq 1+\frac{\beta\gamma+\rho}{2+\beta N-\beta\gamma}$ فإن العلاقة (1.1) لا تقبل حل عام غير تافه في الوقت المناسب

باستعمال البرهان بالخلف على وجود حل من أجل كل $t>0$ ، $u\in(0,T^*)$ و

$(T$ و R) ثابتين موجبين من اجل $0<TR^2<T^*$

إختيار دالة الإختبار $\varphi(x,t)=\varphi_0\left(\frac{t^{2\beta}+|x|^4}{R^{4\beta}}\right)$ مع
$\varphi(TR^2,x)=\ D_{t|TR^2}^{\alpha}\varphi(TR^2,x)=0$ و الدالة $\varphi_0\epsilon C_0^2(R^2)$ غير سلبي و(موجب أو معدوم)

تحقق $\varphi_0(z)=\begin{cases}1 & ,0\leq z\leq 1\\ 0 & ,z\geq 2\end{cases}$ و $0\leq\varphi_0\leq 1$

قام بضرب دالة الإختبار في العبارة الضعيفة

بتطبيق متراجحة Yong $-\epsilon$ على

$$\underbrace{\int_{\Phi_{TR^2}} u\ D_{t|TR^2}^{\alpha+1}\varphi dtdx}_{1}+\underbrace{\int_{\Phi_{TR^2}} u\ D_{t|TR^2}^{\beta}\varphi dtdx}_{2}+\underbrace{\int_{\Phi_{TR^2}} u(-\Delta)^{\gamma/2}\varphi dtdx}_{3}$$

وإستعمال تحويل المتغير

$$\begin{cases} t=R^2\tau \\ x=R^\beta y \\ \Omega=\left\{(\tau,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^N:\tau^{2\beta}=|y|^4\leq 2\right\} \\ X(\tau,y)=\varphi\left(R^2\tau,R^\beta y\right)=\varphi(t,x)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} dtdx=R^{2+\beta N}dyd\tau \\ D_{t|T}^{\alpha+1}\varphi\quad=R^{-2(\alpha+1)}\ D_{\tau|T}^{\alpha+1}X \\ D_{t|T}^{\beta}\varphi\quad=R^{-2\beta}\ D_{\tau|T}^{\beta}X \\ (-\Delta\varphi)^{\gamma/2}=R^{-\beta\gamma}(-\Delta X)^{\gamma/2}\end{cases}$$

ومنه الوصول إلى تناقض .

خاتمة

في هذه المذكرة سلطنا الضوء على دراسة بعض نتائج عدم وجود حلول معادلات تفاضلية جزئية ومعادلات تفاضلية ذات رتب كسرية وذلك باستعمال مفهوم الأس الحرج ودوال الاختبار.

مسألة عدم وجود الحلول للأنظمة والمسائل الخطية وغير الخطية في الحساب الكسري لا تزال من بين المسائل الهامة التي تتطلب المزيد من الدراسات والبحوث المتعمقة وهذا لأهمية هذا الفرع الرياضي في الحقول العلمية المختلفة كالرياضيات التطبيقية والفيزياء، البيولوجيا والآفاق العلمية الأخرى.

قائمة المصادر والمراجع

قائمة المصادر والمراجع

[1] K.B. Oldham, J. Spanier, The Fractional Calculus, Academic Press, New York, 1974.

[2] K.S. Miller, B. Ross, An Introduction to The Fractional Calculus and Fractional Differential Equations, Wiley, New York, 1993.

[3] K. Hayakawa, on nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic differential equations, Proc. Japan Acad. 49 (1973) 503–505.

[4] K. Kobayashi, T. Sirao, H. Tanaka, On the growing up problem for semilinear heat equations, J. Math. Soc. Japan 29 (1977) 407–424

[5] M. Nagasawa, T. Sirao, Probabilistic treatment of the blowing up of solutions for a nonlinear integral equation, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1969) 301–310.

[6] S. Sugitani, on nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations, Osaka J. Math. 12(1975) 45–51.

[7] M. Guedda, M. Kirane, A note on nonexistence of global solutions to a nonlinear integral equation, Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 6 (1999) 491–497.

[8] M. Guedda, M. Kirane IBID

[9] M. Nagasawa, T. SiraoOL.CIT

[10]M. Nagasawa, T. Sirao IBID

[11] S. Sugitani, on nonexistence of global solutions for some nonlinear integral equations, Osaka J. Math. 12(1975) 45–51.

[12] M. Guedda, M. Kirane, Criticality for some evolution equations, Differential Equations 37 (2001) 540–550.

[13] M. Kirane, M. Qafsaoui, Global nonexistence for the Cauchy problem of some nonlinear reaction–diffusion systems, J. Math. Anal. Appl. 268 (2002) 217–243.

[14] S.Q. Zhang, A blow-up result for a nonlinear wave equation with damping: the critical case, C. R. Acad. Sci. Paris 333 (2001) 109–114.

[15] I. Podlubny, Fractional Differential Equations, Math. Sci. Engrg., vol. 198, Academic Press, New York, 1999.

[16] H. Brezis : Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Masson, Paris, 2010.

[17] H. Brezis : IBID

[18] H. Brezis :IBID

[19] Y.Zhou : Basic Theory Of Fractional Differential Equations. Xiangtan University, China, 2014.

[20] J, MATOS : EDP et méthodes hilbertiennes, Universite PARIS-SCALAY, 2017/2018.

[21] I, Petras : Fractional-Order Nonlinear Systems, Paris, 2011.

22المعادلات التفاضلية : الأستاذ الدكتور حسن مصطفى العوضي -دعبد الوهاب عباس-دسناءعلى زارع دار الرشد 2005

[23] G. M Bisci, Vicentiu D. Radulescu and R, Servadei : Methods for Nonlocal Fractional Problems, Italy,2016.

[24] -Pierre Grisvard , calcul Differential of Equations Differential ,office des publications universitaires,2 eme Edition ,Alger ,1980.

[25] -Ross,Introduction of Ordinary Differential Equations, 1989.

-M. H. Akrami, M. H. Atabakzadeh and G. H. Erjaee, "The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials" Iranian Journal of Science Technology,IJST (2013) 37A4: 439-444.

[26]المعادلات التفاضلية : المرجع السابق

[27] Shantanu Das ,Functional Fractional Calculus ,DOI 10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN 978-3-642-20544-6,2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[28] Shantanu Das IBID

[29] Shantanu Das IBID

[30] Podlubny : Fractional differential equations. Academic Press, 1999.

[31] Shantanu Das ,Functional Fractional Calculus ,DOI 10.1007/978-3-642-20545-3,ISBN 978-3-642-20544-6,2011 Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[32] Abbas Saadatmandi,Bernstein operational matrix of fractional derivatives and its applications,Applied Mathematical Modelling, Volume 38, Issue 4, 15 February 2014, Pages 1365-1372

[33] Shantanu Das:IBID

[34] M. H. Akrami, M. H. Atabakzadeh and G. H. Erjaee, "The operational matrix of fractional integration for shifted Legendre polynomials" Iranian Journal of Science Technology,IJST (2013) 37A4: 439-444.

[35] Guermit Djamila. Sur quelques opérateurs de dérivations fractionnaires, théorie et applications

[36] V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, A. P. Mikhailov, and A. A. Samarskii, On un- bounded solutions of the Cauchy problem for the parabolic equation $U(t) = \nabla(u^{\sigma}\nabla u) + u^{\beta}$ Soviet Phys. Dokl. 25 (1980), 458–459.

–Blowup in Quasilinear Parabolic Equations, De Gruyter Expositions in Math- emat- ics, Springer, Berlin, 1995.

–Y. W. Qi and H. A. Levine, The critical exponent of degenerate parabolic sys- tems, Z. Angew. Math. Phys. 44 (1993), no. 2, 249–265.

[37] –Blow-up for quasilinear heat equations with critical Fujita's exponents, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 124 (1994), no. 3, 517–525.

–V. A. Galaktionov and H. A. Levine, A general approach to critical Fujita expo – nents and systems, Nonlinear Anal. 34 (1998), no. 7, 1005–1027.

[38] The critical exponents of parabolic equations and blow-up in RN, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 128 (1998), no. 1, 123–136.

[39] Zhongping Li ,Chunlai Mu .Wanjuan DN : Wanjuan Du: CRITICAL FUJITA EX- PONENT FOR A FAST DIFFUSIVE EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTSBull. Korean Math. Soc. 50 (2013), No. pp. 105–116

[40] M. Kirane, Y. Laskri, and N.E. Tatar : Critical exponents of Fujita type for certain evolution Equations and systems with spatio-temporal fractional derivatives, J Math. Anal Appl, 312, 2005, p 488-511.

[41] Kamel Haouam, Brahim Tllab and Belgacem Rebiai :Global Nonexistence for the Cauchy Problem of Nonlinear Fractional Hyperbolic Equations and system .p1-6

[42] Kamel Haouam, Brahim Tllab and Belgacem Rebiai :IBID

[43] Kamel Haouam, Brahim Tllab and Belgacem Rebiai :IBID