

Ministère de l'Enseignement Supérieure
et de la Recherche Scientifique
Université De Larbi Tebessi -Tébessa-
Faculté des Science Exactes
et Science de la Nature et de la Vie



Département des mathématique et informatique

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي

جامعة الشيخ العربي التبسي - تبسة -
كلية العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة
والحياة
- قسم الرياضيات و الإعلام الآلي -

مذكرة تخرج لنيل شهادة ماستر

Mémoire de fin d'étude

En vue de l'obtention du diplôme :MASTER

الموضوع
Thème

مزمنة الأنظمة الديناميكية الفوضوية

تحت إشراف الدكتور:

بوخالفة الحفصي

من إعداد الطالبان :

طالب هارون

عون الله رضوان

نوقشت من طرف اللجنة:

- قصري أحلام

- بوخالفة الحفصي

- طواليبة عبد اللطيف

رئيسا

جامعة تبسة

أم أ

مؤطرا

جامعة تبسة

أم ب

ممتحنا

جامعة تبسة

أم ب

السنة الجامعية: 2020/2021

دفعة 2021

Promotion 2021

الملخص:

الهدف من هذه الأطروحة هو التطرق إلى المزامنة في الأنظمة الديناميكية الفوضوية غير الخطية، تحديدا في الأنظمة الديناميكية الفوضوية غير الخطية المعبر عنها بعلاقة تراجعية مع وجود وسيط التفريع، (مجموعة من الوسائط في الحالة متعددة الأبعاد)، حيث أن اضطراب بسيط في الشروط الابتدائية يسبب اختلافا كبيرا في النتائج على المدى البعيد، من هنا نشأت فكرة عدم القابلية للتنبؤ.

بتطبيق الوسائل المتاحة سوف نكتشف ان كثيرا من الأنظمة الديناميكية الغير خطية المتقطعة ذات سلوك فوضوي من أجل مجموعة من الوسائط. في نفس السياق، المزامنة لها مكانة في هذا النوع من البحوث، خاصة مزامنة الفوضى، بمعنى الحصول على نفس النتائج من نظامين ذوي سلوك فوضوي انطلاقا من رتبة معينة.

Résumé :

Le but de ce mémoire est d'aborder la synchronisation dans les systèmes dynamiques non linéaires chaotiques, en particulier dans Systèmes dynamiques chaotiques non linéaires exprimés dans une relation régressive avec la présence d'un médiateur de branchement, (un ensemble de paramètres dans le cas multidimensionnel), car une petite perturbation des conditions initiales provoque une grande différence dans Des résultats à long terme, d'où l'idée d'imprévisibilité. En appliquant les moyens disponibles, nous découvrirons que de nombreux systèmes dynamiques non linéaires discontinus ont un comportement Désordonné pour un tas de médias. Dans le même ordre d'idées, la synchronisation a sa place dans ce type de recherche, notamment la synchronisation du chaos, c'est-à-dire Les mêmes résultats pour deux systèmes avec un comportement chaotique à partir d'un certain rang.

Abstract :

The aim of this dissertation is to address synchronization in chaotic nonlinear dynamical systems, in particular in Nonlinear chaotic dynamic systems expressed in a regressive relation with the presence of a branching mediator, (a set of media in the case multidimensional), because a small disturbance of the initial conditions causes a big difference in long-term results, hence the idea of unpredictability. Applying the available means, we will find that many discontinuous nonlinear dynamical systems have Disordered behavior for a lot of parameters. In the same order of ideas, synchronization has its place in this type of research, in particular the synchronization of chaos, that is to say The same results for two systems with a chaotic behavior from a certain rank.



بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ



شكر وعرفان

ونحن في آخر أيامنا في جامعة الشيخ العربي التبسي نتذكر يوم دخولنا لها، ذلك اليوم الذي كنا نحسبه أسوأ يوم في مسيرتنا الدراسية، لكن وها نحن نخط آخر الخطوات نحو المغادرة نكاد نجزم أن أسوأ أيامنا هو اليوم الذي سنخرج من بابها. أصبحنا نتمنى أن تطول هذه الأيام أكثر، لكن كما قال الشاعر:

وما كل ما يتمناه المرء يدركه ... تجري الرياح بما لا تشتهي السفن

كل ما نستطيع فعله الآن هو شكر كل من كان سببا في حبنا لهاته الجامعة.
وقبل أن نمضي نقدم أسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة...
إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة...
إلى جميع أساتذتنا الأفاضل...

” كن عالما.. فإن لم تستطع فكن متعلما، فإن لم تستطع فأحب العلماء، فإن لم تستطع فلا تبغضهم”

ونخص بالذكر كل من أستاذنا الفاضل الدكتور الحفصي بوخالفة و كل أساتذة قسم الرياضيات والإعلام الآلي ، نشكر كذلك الدكتور لطفي جويني الذي ساعدنا في كتابة هذه المذكرة بمجهوداته الجبارة.

الإهداء

أهدي هذا العمل المتواضع:

إلى روح جدتي، إلى التي لا يزال ينفطر قلبي عندما أتذكر دعائها لي وابتسامتها عندما تراني،
إلى المرحومة الغالية لالة غزالة.

إلى جدي صالح ومحمد وجدتي شهلة ونجمة.

إلى أعز إنسان وأكثر من أحبه بين الأنام، إلى من تعب كي أرتاح، إلى من حصد الأشواك
في دربي ليمهد لي طريق الحياة وطريق العلم، إلى القلب الكبير وقُدوتي في الحياة ومن أنخر
بجمل إسمه أبي الغالي محمد الأمين.

إلى ملاكي في الحياة، إلى معنى الحب وإلي معنى الحنان والتفاني، إلى بسمة الحياة وسر
الوجود، إلى من كان دعائها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أعلى الجباب إلى أمي
الحبيبة فضيلة العيشاوي.

إلى الروح التي سكنت روحي، إلى زوجتي بثينة.

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة إلى كل حياتي، اخوتي زكريا، سليمان، عبد
المالك وعبد الحكيم، وأختي والوحيدة إيمان إلى عمي وأخوي وصديقي أحمد ولطفي.

إلى جميع أقاربي وأصدقائي صغيرهم وكبيرهم.

الإهداء

تتناثر الكلمات حبرا وحبا ..
على صفائح الأوراق
لكل من علمني .
ومن أزال غيمة جهل مررت بها .
برياح العلم الطيبة ..
ولكل من أعاد رسم ملامحي
وتصحیح عثراتي
أبعث تحية شكر واحترام

قائمة الأشكال

- 1.3 الجاذب الفوضوي لنظام هينون من أجل $a = 1.4$ و $b = 0.3$ 19
- 2.3 تطور حالات نظام هينون بعد 100 تكرار الأولى 20
- 3.3 مخطط المفارقات لنظام هينون 20
- 4.3 تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام هينون بدلالة الوسيط a 21
- 5.3 ثوابت ليابونوف لنظام هينون من أجل $a = 1.4$ و $b = 0.3$ 21
- 6.3 الجاذب الفوضوي لنظام لوزي من أجل $a = 1.7$ و $b = 0.5$ 22
- 7.3 تطور حالات نظام لوزي بعد 100 تكرار الأولى 23
- 8.3 مخطط المفارقات لنظام لوزي 23
- 9.3 تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام لوزي بدلالة الوسيط a 24
- 10.3 ثوابت ليابونوف لنظام لوزي من أجل $a = 1.7$ و $b = 0.5$ 24
- 11.3 الجاذب الفوضوي لنظام لورينز من أجل $a = 1.25$ و $b = 0.75$ 25
- 12.3 تطور حالات نظام لورينز بعد 100 تكرار الأولى 26
- 13.3 مخطط المفارقات لنظام لورينز 26
- 14.3 تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام لورينز بدلالة الوسيط a 27
- 15.3 ثوابت ليابونوف لنظام لورينز من أجل $a = 1.25$ و $b = 0.75$ 27
- 16.3 الجاذب الفوضوي لنظام زراولية-سبروت من أجل $a = 3.365$ و $b = 1.4$ 28
- 17.3 تطور حالات نظام زراولية-سبروت بعد 100 تكرار الأولى 29
- 18.3 مخطط المفارقات لنظام زراولية سبروت 30
- 19.3 تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام زراولية-سبروت 30
- 20.3 ثوابت ليابونوف لنظام زراولية-سبروت من أجل $a = 3.365, b = 1.4, m_0 =$ 31
- 21.3 الجاذب الفوضوي لنظام ستيفانسكي من أجل $a = 1.4$ و $\beta = 0.2$ 32

- 22.3 تطور حالات نظام ستيفانسكي بعد 100 تكرار الأولى 33
- 23.3 مخطط المفارقات لنظام ستيفانسكي 33
- 24.3 تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام ستيفانسكي 34
- 25.3 ثوابت ليابونوف لنظام ستيفانسكي من أجل $\alpha=1.4$ و $\beta=0.2$ 34
- 26.3 الجاذب الفوضوي لنظام لي من أجل $a=1.4$ و $b=4$ 35
- 27.3 تطور حالات نظام لي بعد 100 تكرار الأولى 36
- 28.3 مخطط المفارقات لنظام لي 36
- 29.3 تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام لي 37
- 30.3 ثوابت ليابونوف لنظام لي من أجل $\alpha=1.4$ و $\beta=4$ 37
- 31.3 الجاذب الفوضوي لنظام تشوزا-جوليبيتسكي من أجل $a=1$ و $b=0$ ، 37
- 38 $d=0.2$ و $c=-2.25$ 38
- 32.3 تطور حالات نظام تشوزا-جوليبيتسكي بعد 100 تكرار الأولى 39
- 33.3 مخطط المفارقات لنظام تشوزا-جوليبيتسكي 40
- 34.3 تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام تشوزا-جوليبيتسكي 40
- 35.3 ثوابت ليابونوف لنظام تشوزا-جوليبيتسكي من أجل $a=1$ و $b=0$ ، 40
- 41 $d=0.2$ و $c=-2.25$ 41
- 1.4 خطأ المزامنة e_1 49
- 2.4 خطأ المزامنة e_2 49
- 3.4 أخطاء المزامنة e_1 ، e_2 و e_3 51

الفهرس

4	المقدمة
5	1 عموميات حول الأنظمة الديناميكية
6	1.1 فضاء الحالات
6	2.1 الأنظمة الديناميكية
6	1.2.1 الأنظمة الديناميكية المتقطعة
6	2.2.1 الأنظمة الديناميكية المستمرة
6	3.1 المدارات
7	4.1 النقطة الثابتة
7	5.1 النقط الدورية
7	6.1 الإستقرار
8	1.6.1 تعاريف
9	7.1 المفارقات
9	8.1 أنواع المفارقات
10	1.8.1 مفارقة عقدة العنق
10	2.8.1 المفارقة الحرجة
11	3.8.1 مفارقة بيتشفورك
11	4.8.1 مفارقة مضاعفة الدور
11	5.8.1 مفارقة نايمارك-ساكر
12	2 مدخل إلى نظرية الفوضى
13	1.2 نبذة تاريخية
14	2.2 خصائص الفوضى
14	1.2.2 الحساسية للشروط الابتدائية
15	2.2.2 ثوابت ليابونوف
16	3.2.2 البعد الكسري
17	4.2.2 الجاذب الفوضوي
18	3 أمثلة حول الأنظمة الديناميكية الفوضوية المتقطعة
19	1.3 نظام هينون

22	2.3	نظام لوزي
25	3.3	نظام لورينز
28	4.3	نظام زراولية-سبروت
31	5.3	نظام ستيفانسي
35	6.3	نظام لي
38	7.3	نظام تشوزا-جوليبيتسكي

4 مزامة الفوضى

43	1.4	أنواع المزامنة
43	1.1.4	المزامنة الكاملة
43	2.1.4	المزامنة العكسية
44	3.1.4	المزامنة المتداخلة
44	4.1.4	المزامنة الإسقاطية
44	5.1.4	المزامنة العامة الإسقاطية
45	6.1.4	المزامنة العامة
45	7.1.4	مزامنة Q-s
46	2.4	طريقة المتحكم النشط
47	3.4	أمثلة
47	1.3.4	مثال 1
50	2.3.4	مثال 2

52 خاتمة

53 قائمة المراجع

المقدمة

حصلت ثورتين في القرن الماضي، أولهما يتعلق بالكون ونسبية نيوتن حول مشكلة استقرار النظام الشمسي، والثانية معادلة شرودنغر المؤدية إلى ميكانيكا الكم، يسمي بعض المؤلفين ثورة ثالثة، تلك المتعلقة بالسلوك الفوضوي للأنظمة الديناميكية بشكل عام، والأنظمة الديناميكية المتقطعة بشكل خاص.

تطورت الأنظمة الديناميكية خلال القرن التاسع عشر؛ في الواقع، قرب نهاية هذا القرن، قام عالم الرياضيات والفيزياء والفيلسوف الفرنسي هنري بوانكاريه بالفعل بتسليط الضوء على ظاهرة الحساسية للشروط الابتدائية، وأظهر في دراسته للنظام الشمسي أن هناك مدارات مستقرة وأخرى غير مستقرة وأنه في بعض الأحيان قد يؤدي الاضطراب الصغير جداً في النظام إلى تغيير حالة المدار. لقد أدرك أن الأسباب المتشابهة تماماً قد لا يكون لها نفس التأثيرات.

بعد ذلك، تم إجراء العديد من الأبحاث حول حساسية الحركة، ألكساندر ليابونوف، عالم الرياضيات الروسي الذي قدم فكرة قياس الفجوة بين مسارين لهما ظروف متشابهة في البداية، عندما تتطور هذه الفجوة أسياً فهي تتعلق بالحساسية تجاه الشروط الابتدائية، وقام عالم الأرصاد الجوية الأمريكي إدوارد لورنز بتحليل سلوك نظام ديناميكي غير خطي يعتمد على نموذج الغلاف الجوي للأرض. بالتناسب مع القيم المختلفة للمتغيرات، تم التأكيد على سلوك ديناميكي جديد. متغيرات الحالة الثلاثة للنظام، والتي تحدد تطور الكتل الهوائية، تعمل بشكل متقطع، وغير متوقع. توصل إدوارد لورنز إلى أن الاختلافات الصغيرة في الشروط الابتدائية في الأنظمة غير الخطية تعيد إنتاج أنظمة مختلفة تماماً على المدى الطويل. فكانت هذه هي الخطوة الأولى في فهم الفوضى الحتمية.

بشكل عام، يصف النظام الديناميكي تطور الظواهر التي تتطور بمرور الوقت. يشير مصطلح "النظام" إلى مجموعة من متغيرات الحالة (التي تتغير قيمتها بمرور الوقت) وإلى التفاعلات بين هذه المتغيرات. تُستخدم جميع متغيرات الحالة في النظام لبناء فضاء رياضي

يسمى "فضاء الحالات"؛ هذا الرسم التوضيحي يجعل من الممكن التمييز بين السلوك العادي والسلوك العشوائي البحث وبالتالي يمكن التنبؤ به.

بالتزامن مع البحث عن الفوضى في الأنظمة الديناميكية المتقطعة، اتسع محور البحث في الرياضيات بالتوازي، مهتماً بمزامنة الحركات الفوضوية، وهو موضوع يجذب انتباه العديد من الباحثين، من بينهم يمادا وفوجيساكا الذين استخدموا نهجاً محلياً للتزامن الفوضوي. بعد ذلك، طور أفراموفيتش وزملاؤه المفاهيم المهمة المتعلقة بالتزامن الفوضوي ولاحقاً بيكورا وكارول. لقد حددت التزامن الفوضوي المعروف باسم التزامن المتطابق، والذي تم تطويره على أساس الدوائر الفوضوية المقترنة، مع أحدهما يسمى السيد والآخر التابع. نهج آخر أكثر حداثة هو طريقة التزامن المعمم، والتي وضع رولكوف وآخرون أسسها. نظراً لتطبيقاتها في الاتصالات السلوكية واللاسلكية، والنقل الآمن للمعلومات، والتشفير، تلعب الأنظمة الديناميكية الفوضوية المنفصلة دوراً أكثر أهمية، حيث تم تحديد العديد من النماذج الرياضية للعمليات الفيزيائية والظواهر البيولوجية والتفاعلات الكيميائية والأنظمة الاقتصادية باستخدام أنظمة ديناميكية منفصلة. لذلك، أصبح من المهم النظر في تزامن الأنظمة الديناميكية الفوضوية المنفصلة.

علاوة على ما سبق، امتدت أطروحتنا على أربعة فصول مهمة ومتراطة، أولها مخصص للأنظمة الديناميكية المتقطعة في عمومياتها، مثل المفاهيم الأساسية، وفضاء الحالة، والنظام الديناميكي المنفصل، والنقاط الثابتة مع تصنيفها واستقرارها. ثم التطرق إلى نظرية المفارقات. يأخذنا الفصل الثاني في جولة حول نبذة تاريخية حول الأنظمة الديناميكية الفوضوية ثم أدوات قياس وتقدير الفوضى في مثل هذا النظام، من خلال وصف مفاهيم الحساسية للشروط الابتدائية، وكذا ثوابت ليابونوف.

من أجل التوضيح الجيد للفوضى في الأنظمة الديناميكية المتقطعة، نستشهد في الفصل الثالث ببعض الأمثلة العامة للأنظمة الديناميكية المتقطعة مع دراسة خصائص فوضويتها المذكورة في الفصل السابق مدعمة ببرمجيات ماتلاب.

أخيراً، في الفصل الرابع، من خلال تقديم أنواع مختلفة من عمليات المزامنة للأنظمة الديناميكية المتقطعة، نعطي نتيجة على التزامن بمثالين تطبيقيين مدعيمين ببرمجيات ماتلاب.



الفصل الأول

عموميات حول الأنظمة الديناميكية



في هذا الفصل، سنتطرق إلى الأنظمة الديناميكية بنوعها المستمرة والمتقطعة، حيث سنسلط الضوء على الأنظمة المتقطعة تعريفاً وخواصاً، إنطلاقاً من المدارات، إلى النقطة الثابتة، النقاط الدورية مرورا بالمبرهنات المتعلقة بدراسة إستقرارها، إنتهاءً بالمفارقات.

1.1 فضاء الحالات

في نظام ديناميكي بعده n ، يسمى الفضاء المعروف بـ (x_1, x_2, \dots, x_n) فضاء الحالات. وبالتالي فإن المسار الذي يسلكه النظام يسمى ”منحنى” و x_1, x_2, \dots, x_n تسمى متغيرات النظام.

2.1 الأنظمة الديناميكية

1.2.1 الأنظمة الديناميكية المتقطعة

تعرف الأنظمة الديناميكية المتقطعة [1] بمتتالية تراجعية كإيلي:

$$x(k+1) = F(x(k), k) \quad (1.1)$$

حيث : $x(k) \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{N}$ و $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ويمكن أيضا كتابة :

$$F^0(x) = x, F^1(x) = F(x), F^2(x) = F(F(x)), \dots, F^k(x) = F(F^{k-1}(x))$$

$$\text{و } x_0, x_1 = F(x_0), x_2 = F^2(x_0), \dots, x_k = F^k(x_0)$$

2.2.1 الأنظمة الديناميكية المستمرة

تعرف الأنظمة الديناميكية المستمرة بمعادلة تفاضلية كإيلي:

$$\dot{x}(t) = F(x(t), t), x(t_0) = x_0 \quad (2.1)$$

حيث :

$$F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^n$$

3.1 المدارات

يعرف مدار x بواسطة النظام الديناميكي F بـ [2]:

$$O = \{F^k(x), k \in \mathbb{N}\} \quad (3.1)$$

4.1 النقطة الثابتة

تلعب النقاط الثابتة (أو الحالات الثابتة، أو نقاط التوازن) للنظام الحركي دوراً مهماً في وصف خصائص النظام.

تعريف 1.4:

نسمي "النقطة الثابتة" لنظام ديناميكي متقطع F أية نقطة تحقق:

$$F^p(x) = x, p = 0, 1, 2 \quad (4.1)$$

5.1 النقط الدورية

نقول أن x نقطة دورية إذا وجد $k \geq 1$ حيث $F^k(x) = x$
 دور النقطة الدورية x هو أصغر عدد طبيعي $k \geq 1$ يحقق $F^k(x) = x$
 المجموعة $\{x_1, x_2, \dots, x_{p-1}\}$ مدار دوري من الرتبة p :

$$\begin{cases} F(x(i)) = x(i+1), i = 0, 1, \dots, p-1 \\ F(x(p-1)) = x(0) \end{cases} \quad (5.1)$$

كل نقطة من مدار رتبته p هي نقطة ثابتة لـ $F^p(x(i)) = x(i)$ من أجل $i = 0, 1, \dots, p-1$
 وتكون نقطة غير ثابتة لـ F^k إذا كان $k < p$

6.1 الإستقرار

دراسة سلوك نظام ديناميكي منفصل متعلق بدراسة استقرار النقاط الثابتة [3].
 في هذا البحث نعالج مشكلة النقاط الثابتة وبالنسبة للنقاط الدورية يكفي أن نتطرق إلى التطبيق عند الرتبة p
 ليكن النظام الديناميكي غير الخطي التالي:

$$x(k+1) = F(x(k)) \quad (6.1)$$

حله من الشكل: $x(k) = x(k, k_0, x(k_0))$ نعرف الشروط الابتدائية كالتالي:

$$x(k_0) = x(0)$$

لتكن x_f نقطة ثابتة لهذا النظام، لدينا:

$$x_f = F(x_f)$$

1.6.1 تعاريف

تعريف 1.6:

نقول أن النظام مستقر حسب *Lyapunov* بالنسبة للنقطة الثابتة x_f إذا كان:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta: \|x(k_0) - x_f\| < \delta \Rightarrow \|x(k, k_0, x(k_0)) - x_f\| < \varepsilon, \forall k \geq k_0. \quad (7.1)$$

تعريف 2.6:

نقول أن النقطة الثابتة x_f جاذبة إذا كان:

$$(8.1)$$

$$\forall k_0 \in \mathbb{N} \exists \delta_0(k_0), \text{ tel que : } \|x(k_0) - x_f\| < \delta_0(k_0) \Rightarrow \lim x(k, k_0, x(k_0)) = x_f$$

لما : $\delta_0(k_0) = +\infty$ نقول أن x_f جاذبة بشكل عام.

تعريف 3.6:

النقطة الثابتة مستقرة بشكل مقارب إذا كانت جاذبة ومستقرة حسب *Lyapunov* إذا كان :

$$\exists \delta > 0: \|x(k_0) - x_f\| < \delta \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|x(k, k_0, x(k_0)) - x_f\| = 0 \quad (9.1)$$

ملاحظة

النقطة الثابتة x_f ليست مستقرة إذا كانت لا تحقق أيًا من التعاريف السابقة.

7.1 المفارقات

تعريف 1.7:

ليكن النظام الديناميكي المعرف كمايلي:

$$x_{k+1} = F_c(x_k), \quad (10.1)$$

والذي يقبل نقطة صامدة x_f حيث $x_k \in \mathbb{R}^n$ هو شعاع المتغيرات و $c \in \mathbb{R}^m$ هو شعاع الوسائط.

نقول أن النظام (10.1) يقبل مفارقة عند $c = c_0$ إذا كان هناك تغير نوعي أو كمي في نقطه الصامدة x_f عند تعديل الوسيط c .

تعريف 2.7:

مخطط المفارقات هو تمثيل صور إحدى المتغيرات بدلالة الوسيط.

8.1 أنواع المفارقات

يوجد عدة أنواع من المفارقات يمكن تصنيفها حسب خصائص المشتقات الثانية لعائلة الدوال $F_c(x_k)$ حيث تتميز كل مفارقة بمعادلتها العامة النموذجية [4,5,6]. أنواع المفارقات، للأنظمة الديناميكية المتقطعة [7] التي يمكن ذكرها هي: مفارقة عقدة العنق، المفارقة الحرجة، مفارقة بيتشفورك، مفارقة مضاعفة الدور، مفارقة نايمارك-ساكر. لتكن المعادلة غير الخطية العامة من الرتبة الأولى التالية:

$$x_{k+1} = F_c(x_k) \quad (11.1)$$

حيث المشتقات الجزئية للدالة F مستمرة بالنسبة للمتغيرات x و c لدينا التعاريف التالية:

1.8.1 مفارقة عقدة العنق

تعريف 1.8:

نقول أنه توجد مفارقة عقدة العنق عند c_0 إذا كان :

$$F_{c_0}(x_f) = x_f, -1$$

$$\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial x} = 1, -2$$

$$\frac{\partial^2 F_{c_0}(x_f)}{\partial x^2} \neq 0, -3$$

$$\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial c} \neq 0, -4$$

ملاحظة

- 1- هذه المفارقة تسمى أيضا نقطة النهاية.
- 2- وجود مفارقة نقطة العنق يشترط $\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial c} \neq 0$ إذ كان $\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial c} = 0$ مع تحقق جميع الشروط الأخرى يمكن التصريح بوجود إحدى المفارقتين إما الحرجة أو بيتسفورك.

2.8.1 المفارقة الحرجة

تعريف 2.8:

نقول أنه توجد مفارقة حرجة عند c_0 إذا كان :

$$F_{c_0}(x_f) = x_f, -1$$

$$\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial x} = 1, -2$$

$$\frac{\partial^2 F_{c_0}(x_f)}{\partial x^2} \neq 0, -3$$

$$\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial c} = 0, -4$$

3.8.1 مفارقة بيتشفورك

تعريف 3.8:

نقول أنه توجد مفارقة بيتشفورك عند c_0 إذا كان :

$$F_{c_0}(x_f) = x_f, -1$$

$$\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial x} = 1, -2$$

$$\frac{\partial^2 F_{c_0}(x_f)}{\partial x^2} = 0, -3$$

$$\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial c} = 0, -4$$

4.8.1 مفارقة مضاعفة الدور

تعريف 4.8:

نقول أنه توجد مفارقة مضاعفة الدور عند c_0 إذا كان :

$$F_{c_0}(x_f) = x_f, \forall c \in]c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon[-1$$

$$\frac{\partial F_{c_0}(x_f)}{\partial x} = -1, -2$$

$$\frac{\partial^2 F_{c_0}(x_f)}{\partial x \partial c} \neq 0, -3$$

5.8.1 مفارقة نايمارك-ساكر

تعريف 5.8: المفارقة الموافقة لوجود القيم الذاتية $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\theta_0}$ حيث $0 < \theta_0 < \pi$

تسمى مفارقة نايمارك-ساكر

ملاحظة

المفارقات المذكورة سابقا يمكن أن تتحقق من أجل $n \geq 1$ ، أما مفارقة نايمارك-ساكر فتشترط $n > 2$.



الفصل الثاني

مدخل إلى نظرية الفوضى



في هذا الفصل تطرقنا إلى مفهوم الفوضى بدايةً بنبذة تاريخية قصيرة مروراً بخصائصها: الحساسية للشروط الابتدائية، ثوابت ليابونوف، البعد الكسري وأخيراً الجاذب الفوضوي.

1.2 نبذة تاريخية

لم تعطى أهمية علمية لنظرية الفوضى [8] إلا في نهاية القرن التاسع عشر بواسطة هنري بوانكاريه 1854-1912 ، لعدة أسباب أهمها أعمال إسحاق نيوتن (1642-1727)، التي جعلت الحتمية تسيطر على العلم حيث من خلال معرفة الحالة الأولية لنظام معين، اعتقد العلماء أنهم يستطيعون التنبؤ بشكل كامل ودقيق بمستقبل هذا النظام.

بعد حوالي قرن من أعمال نيوتن، حدد "بيير سيمون لا بلاس" (1749-1827) المعنى المطلق للحتمية، وأكد أن الحالة الحاضرة للكون تُمكن من التنبؤ بمستقبله. لكن "بوانكاريه" كان سيثبت أن "لا بلاس" على خطأ، واعتمد في آرائه مشكلة الأجرام الثلاثة (*Three-body problme*) في الميكانيكا السماوية (مثل الأرض والقمر والشمس) التي تجعل التنبؤ غير ممكن تماماً وأن حركة الأجسام الثلاثة لا تتكرر الا في الحالات الخاصة.

بوانكاريه لاحظ هذه الظاهرة وكتب: أسباب صغيرة جداً لا نلاحظها يكون تأثيرها كبيراً "وقد كتب في ذلك العالم جيمس ماكسويل عام 1860 مقدماً مثالا عن حركة الجزيئات التي لا يمكن أن نراها وحركتها التي تزيد من الحركة العشوائية للغازات تدريجياً. في عام 1898 ، لاحظ "جاك هادامارد" الاختلاف العام في المسارات في الفضاء ، وناقش "بيير دوهم" الأهمية العامة المحتملة لهذا في عام 1908 ، وتوصل إلى نتيجة أنه لا يمكن للمرء أبداً الوصول إلى توقع كامل للنظام الفوضوي ، وذلك بسبب عشوائية الحالة الأولية.

في عام 1961 ، "إدوارد لورنز" ، عالم الأرصاد الجوية وأستاذ الرياضيات في معهد ماساتشوستس للتكنولوجيا لاحظ بالصدفة الظاهرة التي ستسمى فيما بعد نظرية الفوضى الحتمية ، عند محاولته لحساب توقعات الظواهر الجوية حيث تتطلب هذه التنبؤات عدداً كبيراً من الحسابات للمعادلات التفاضلية المعقدة مع عدد كبير جداً من المتغيرات التي يستحيل القيام بها يدوياً فاستخدم جهاز كمبيوتر اسمه *Royal McbeeLGP-300* ، وهو ما جعل لورنز الأب الرسمي لهذه النظرية لأن حسابات الأنظمة الفوضوية التي تحكم هذه الظواهر كان من الصعب فهمها ومحاكاتها بدون جهاز كمبيوتر.

بعد عدة ساعات من الحسابات، حصل لورنز على سلسلة من النتائج وللتأكد منها قرر إعادة تشغيل هذه البيانات في الكمبيوتر مرة أخرى لكن لربح الوقت أدخل المتغيرات بثلاثة مراتب عشرية بدلاً من ستة وكان يعتقد أن اختلافاً صغيراً في المتغيرات الكامنة وراء

الحساب لن يؤثر كثيراً على النتيجة النهائية، ولكن تفاجأ بالنتائج التي كانت مختلفة تماماً عن السلسلة الأولى. فاكتشف أن الاختلافات الطفيفة في الشروط الابتدائية للنظام الحتمي ستؤدي إلى نتائج مختلفة تماماً. ولفهم أهمية هذه الحساسية للظروف الأولية بشكل أفضل، استخدم لورنز استعارة ساهمت في النجاح الإعلامي لنظرية الفوضى: "الخفقان البسيط لجناح الفراشة في البرازيل يمكن أن يؤدي إلى إعصار في تكساس".

في عام 1971، نشر الفيزيائي البلجيكي "ديفيد رويل" وعالم الرياضيات "فلوريس تاكنز" أيضاً مقالاً حللاً فيه الحالات النهائية للنماذج الرياضية للأنظمة التي تبدد جزءاً من طاقتها كحرارة.

أثبتت النتائج أن مجموعة الحالات النهائية لكل نظام ذات بعد كسري، تكون جاذب فوضوي. من أجل مجموعة شروط ابتدائية معينة. أطلق "لورنز" على هذه الخاصية "تأثير الفراشة" حيث أي اختلاف ضئيل في المعاملات يؤدي إلى تغيير نوعي في حل معادلة، وذلك كافٍ لإنتاج سلوكٍ فوضوي.

بعد أربع سنوات، أظهرت الدراسة التجريبية لسائل دوار بواسطة الفيزيائيين "جيري جولوب" و"هاري سويناي"، من كلية مدينة نيويورك، أن بداية الاضطراب في هذه الحالة تتبع وصف رويل وتاكنز جيداً. لكن كلمة الفوضى لم تستخدم بعد، بل قدمها لاحقاً عالم الرياضيات "يورك" في عام 1975.

2.2 خصائص الفوضى

1.2.2 الحساسية للشروط الابتدائية

في نهاية القرن التاسع عشر اكتشف العالم المشهور هنري بوانكاريه لأول مرة الحساسية للشروط الابتدائية، وفي سنة 1963 بعد اختراع الحواسيب أكد عالم الأرصاد الجوية الرياضي إدوارد لورنز هذا الإكتشاف بحسابات دقيقة جداً. لعب هذا الإكتشاف دوراً فعالاً جداً في عدة ميادين علمية، خاصة في ميدان الرياضيات. تنص هذه الخاصية على أن تغيير جد طفيف في قيم متغيرات الحالات الابتدائية لنظام فوضوي يمكن أن يؤدي إلى حالات نهائية غير متوقعة على المدى الطويل [9,10].

2.2.2 ثوابت لياونوف

ثوابت لياونوف هي أدوات تمكن من قياس التباعد بين المدارات التي تنشئ من شروط ابتدائية متجاوزة. ثوابت لياونوف تسمح بتأكيد الحساسية للشروط الإبتدائية لنظام فوضوي. في حالة نظام ديناميكي متقطع ذو بعد n يوجد n ثابت لياونوف [11]. نعتبر النظام الديناميكي المتقطع الغير الخطي التالي :

$$x_{k+1} = F(x_k) \quad (1.2)$$

حيث $x_k \in \mathbb{R}^n$

مبرهنة 2.2.1: [12] ثوابت لياونوف للنظام (1.2) معرفة بالعلاقة التالية :

$$\lambda_L^{(i)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln |\lambda_i(J_k \dots J_1)|, i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

حيث $J_k = DF(x_{k-1}) \dots DF(x_0)$ و $DF(x_i)$ هي المصفوفة اليعقوبية للدالة F المعرفة عند x_i كالتالي:

$$DF(x_i) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial f_1(x_i)}{\partial x_{ni}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_{1i}} & \dots & \frac{\partial f_n(x_i)}{\partial x_{ni}} \end{pmatrix}$$

برهان. بإختبار شرطين إبتدائيين متجاورين x_0 و x'_0 نفرض أن المسارين x_k و x'_k تتباعد بشكل أسي، إذا بعد k تكرارا نجد :

$$|x_k - x'_k| = |x_0 - x'_0| e^{\lambda k}, \quad (3.2)$$

λ يمثل معدل تباعد المسارين، وبحساب بسيط نجد:

$$\lambda = \frac{1}{k} \ln \left| \frac{x_k - x'_k}{x_0 - x'_0} \right|, \quad (4.2)$$

نفرض $\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \lambda$ ، نجد :

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \ln \left| \frac{x_k - x'_k}{x_0 - x'_0} \right|, \quad (5.2)$$

ومنه :

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{k} \ln \left| \frac{x_k - x'_k}{x_{k-1} - x'_{k-1}} \times \frac{x_{k-1} - x'_{k-1}}{x_{k-2} - x'_{k-2}} \times \dots \times \frac{x_1 - x'_1}{x_0 - x'_0} \right| \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{x_{i+1} - x'_{i+1}}{x_i - x'_i} \right| \quad (6.2) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{x_0 \rightarrow x'_0} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{F(x_i) - F(x'_i)}{x_i - x'_i} \right|\end{aligned}$$

ونجد أخيراً:

$$\lambda_L = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} \ln \left| \frac{dF(x_i)}{dx_i} \right| \quad (7.2)$$

بإستبدال المشتقة الجزئية $\frac{dF(x_i)}{dx_i}$ بالمصفوفة اليعقوبية $DF(x)$ عند x_i وبأخذ $J_k = DF(x_{k-1}) \dots DF(x_0)$ مع $J_0 = DF(x_0)$ نجد العبارة العامة لثابت لياونوف :

$$\lambda_L^{(i)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \ln |\lambda_i(J_k \dots J_1)|, i = 1, 2, \dots, n \quad (8.2)$$

□

مبرهنة 2.2.2: [13] بحساب ثابت لياونوف للنظام (1.2) يمكن استنتاج استقراره كما يلي:

- إذا كان $0 < \lambda_L^{(1)} < \dots < \lambda_L^{(n)}$ ، فإنه يوجد نقاط ثابتة مستقرة بشكل مقارب.
- إذا كان $0 < \lambda_L^{(2)} < \dots < \lambda_L^{(n)} = 0$ ، فإن الجاذب هو دورة حدية مستقرة بشكل مقارب.
- إذا كان $0 < \lambda_L^{(k+1)} < \dots < \lambda_L^{(n)} = 0$ ، فإن الجاذب عبارة عن توروس ذو بعد k أي شبه دوري.
- إذا كان $0 < \sum_i \lambda_L^{(i)} < \lambda_L^{(1)}$ فإن الجاذب فوضوي.
- إذا كان $0 < \sum_i \lambda_L^{(i)} < \lambda_L^{(1)} > \dots > \lambda_L^{(k)} > 0$ فإن الجاذب فوضوي مفروط.

3.2.2 البعد الكسري

هناك عدة أنواع من الأبعاد الكسرية، التي من بينها يمكن توظيف بعد لياونوف :

تعريف 1.2: [14] بعد لياونوف معرف بـ $D_L = \frac{\sum_{i=1}^j \lambda_i}{|\lambda_{j+1}|} + j$ حيث $\lambda_n, \dots, \lambda_1$ هي ثوابت لياونوف و j هو أكبر عدد طبيعي يحقق : $\sum_{i=1}^j \lambda_i \geq 0$

4.2.2 الجاذب الفوضوي

إن عبارة الجاذب الفوضوي تم إستعمالها للمرة الأولى في سنة 1971 من طرف العالمين رويال و تاكنز، والتي ترمز لشكل في فضاء الحالات ممثلة سلوك النظام الديناميكي.

تعريف 2.2: [15] تسمى المجموعة الجزئية المحدودة من فضاء الحالات A جاذب فوضوي من أجل تحويل T للفضاء إذا وجد جوار U لـ A ، بمعنى من أجل كل نقطة من A يوجد كرة محتواة في \mathbb{R} تحوي هذه النقطة والتي تحقق الخصائص التالية:

1- U هي منطقة إنتقاط، بمعنى كل مدار بالتحويل T محتوي كلياً في U من أجل نقطة إبتدائية من U .

2- المسارات جد حساسة للشروط الإبتدائية من أجل نقطة إبتدائية من \mathbb{R} .

3- A هو كائن كسري.

4- من أجل كل نقطة من A ، يوجد مسارات تبدأ من \mathbb{R} والتي تمر بجوار هذه النقطة.



الفصل الثالث

أمثلة حول الأنظمة الديناميكية الفوضوية المتقطعة



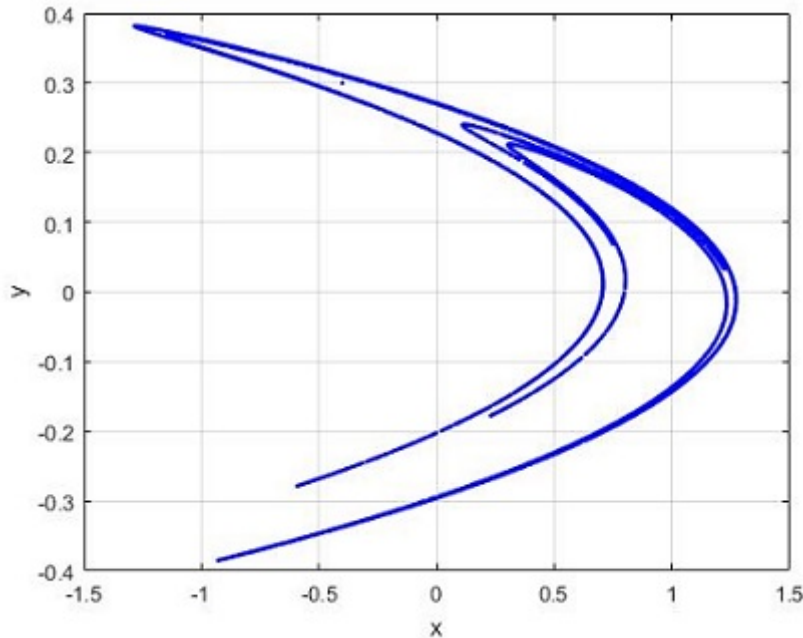
في هذا الفصل تطرقنا إلى مجموعة من الأنظمة الديناميكية المتقطعة الفوضوية المعرفة في المستوي وفي الفضاء مع دراسة خصائص فوضويتها المذكورة في الفصل السابق، مدعمة ببرمجيات *MATLAB*.

1.3 نظام هينون

في سنة 1976، عرف العالم الرياضي متشال هينون [16] النظام الديناميكي المتقطع كما يلي :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + y_k - ax_k^2, \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases} \quad (2.3)$$

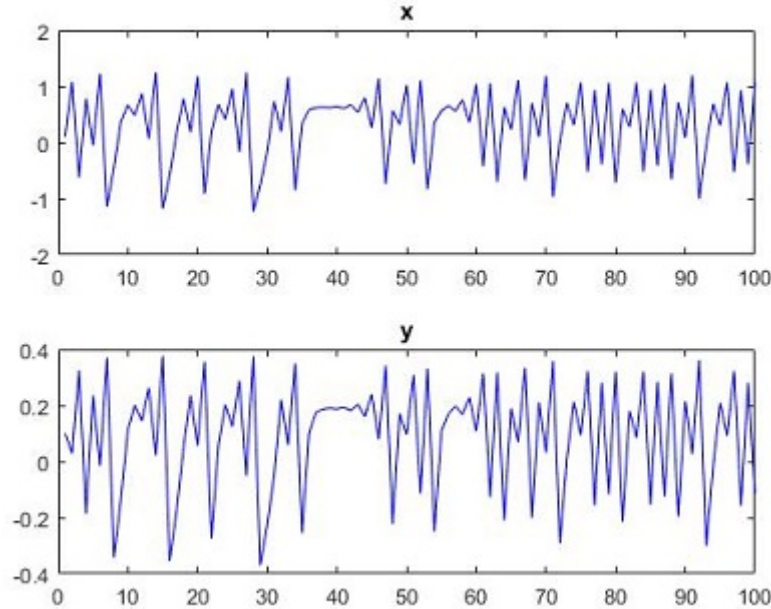
الجادب الفوضوي الملاحظ بالنسبة لهذا النظام من أجل قيم الوسائط $a = 1.4$ و $b = 0.3$ أنظر الشكل 1.3



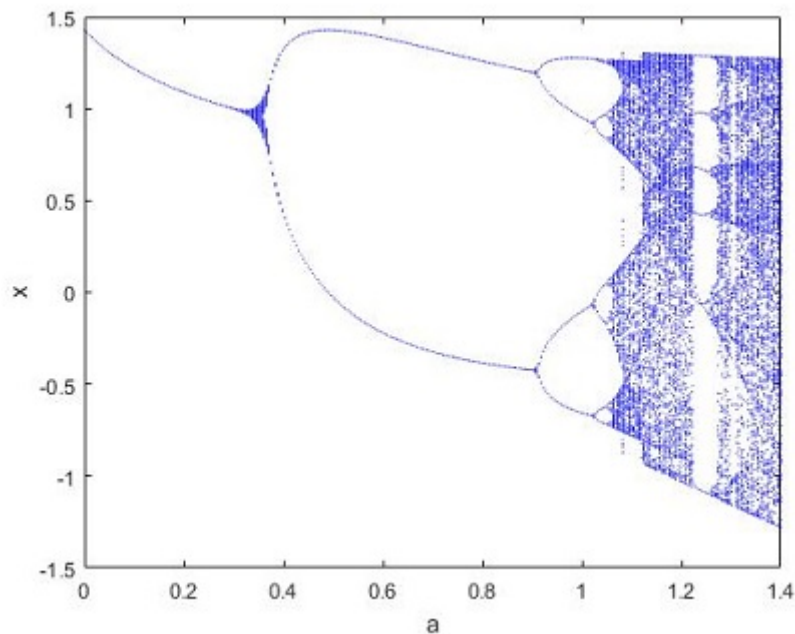
شكل 1.3: الجاذب الفوضوي لنظام هينون من أجل $a = 1.4$ و $b = 0.3$

كما يمكننا أيضا التحقق من فوضوية النظام (2.3) بملاحظة تطور متغيراته، أنظر الشكل 2.3 والذي يظهر لادورية حالاته وهذا السلوك مبرر بمخطط المفارقات الذي يلخص السلوك العام للنظام (2.3)، أنظر الشكل 3.3. وباستعمال تقنية ثابت ليابونوف الأعظمي، أنظر الشكل 4.3 فمن الواضح أنه من أجل $b = 0.3$ فإن سلوك نظام هينون منتظم من أجل $a \in [0, 1.06]$ ، ونلاحظ أن ثابت ليابونوف الأعظمي على المجال [1.06, 1.4] يغير إشارته مرتين مما يدل على وجود مراحل إنتقالية من السلوك الفوضوي إلى النقاط الدورية والعكس. أخيرا، من أجل $a = 1.4$ فإن النظام فوضوي بحت. وباستعمال خوارزمية آلان وولف [17] يمكن حساب ثوابت ليابونوف للنظام المدرس

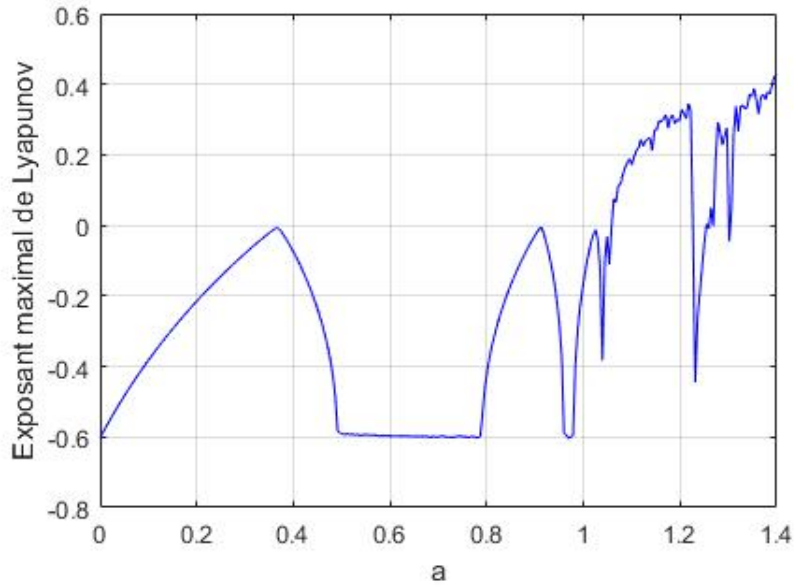
من أجل $(a, b) = (1.4, 0.3)$ ، بعد 20000 تكرارا نجد أنظر الشكل 5.3 $Le_1 = 0.42311$ و $Le_2 = -1.62671$ وبعد كسري لليابونوف $D_L = 1.26$.



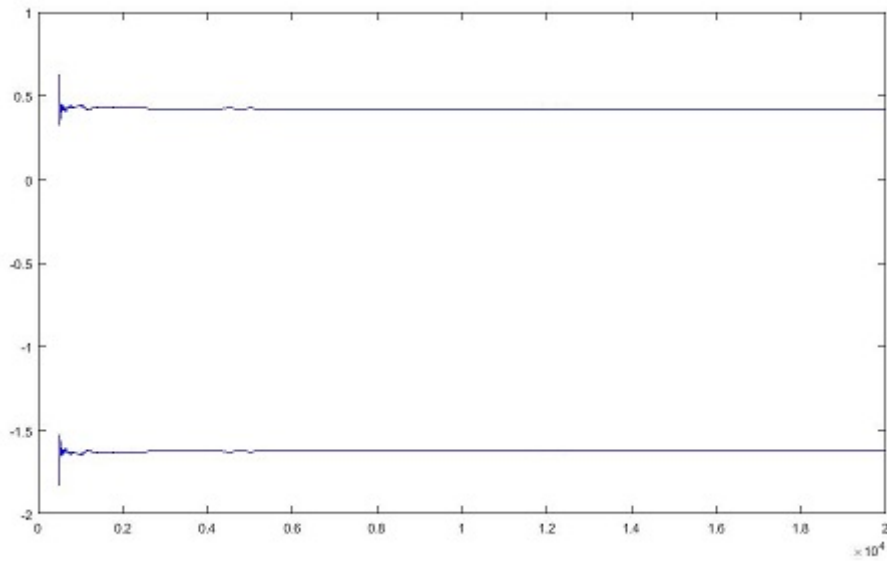
شكل 2.3: تطور حالات نظام هينون بعد 100 تكرار الأولى



شكل 3.3: مخطط المفارقات لنظام هينون



شكل 4.3: تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام هينون بدلالة الوسيط a



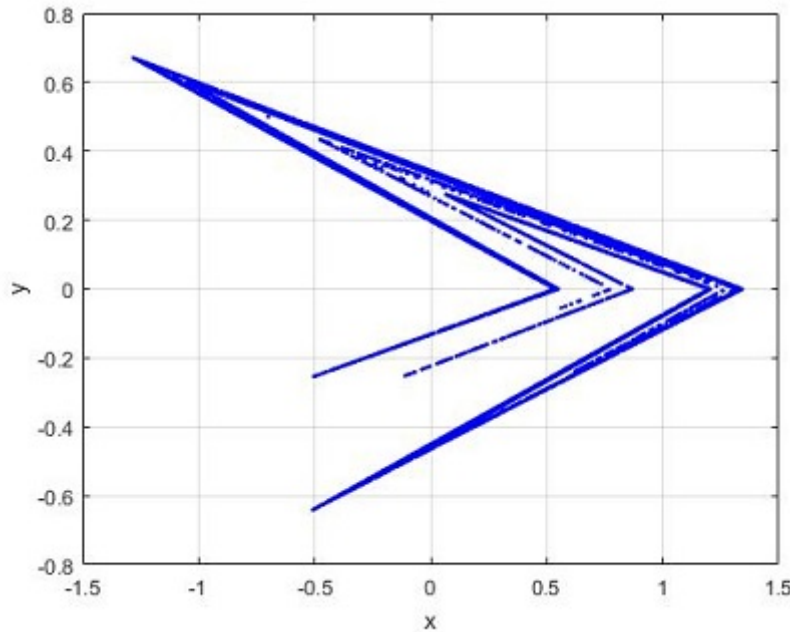
شكل 5.3: ثوابت ليابونوف لنظام هينون من أجل $a = 1.4$ و $b = 0.3$

2.3 نظام لوزي

في سنة 1978، عرف العالم الرياضي روني لوزي [18] النظام الديناميكي المتقطع كما يلي :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + y_k - a|x_k|; \\ y_{k+1} = bx_k. \end{cases} \quad (2.3)$$

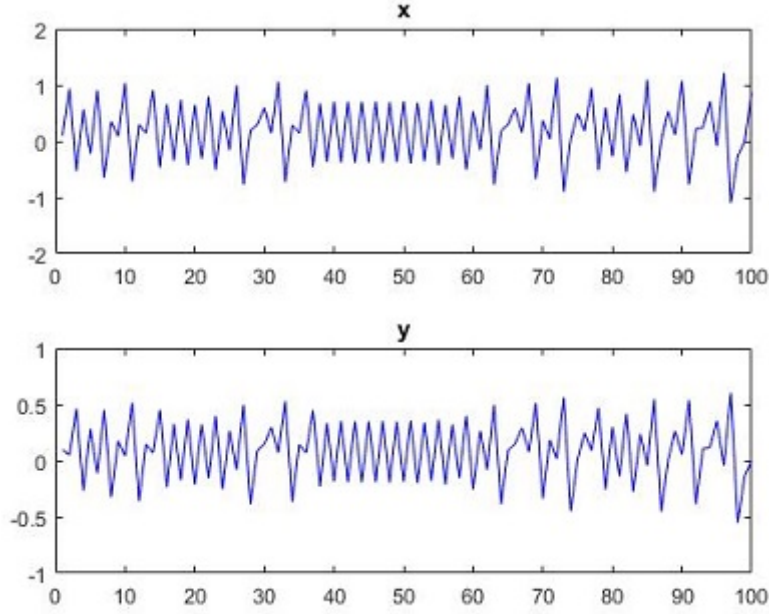
والمماثل لنظام هينون إلا أن الحد التربيعي تم استبداله بدلالة القيمة المطلقة له. الجاذب الفوضوي الملاحظ بالنسبة لهذا النظام من أجل قيم الوسائط $a = 1.7$ و $b = 0.5$ أنظر الشكل 6.3



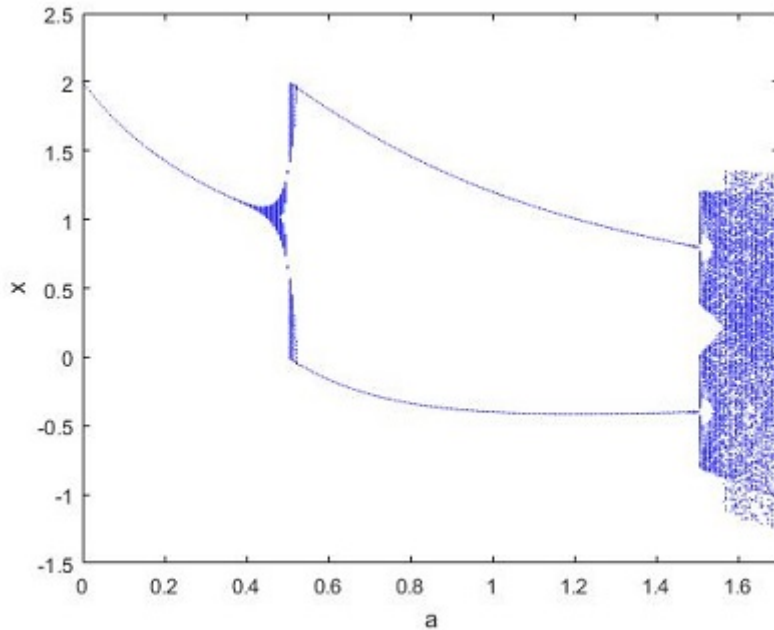
شكل 6.3: الجاذب الفوضوي لنظام لوزي من أجل $a = 1.7$ و $b = 0.5$

الشكل 7.3 يوضح تطورات متغيرات النظام من أجل 100 تكرارا الأولى. يمكننا أيضا تلخيص سلوك نظام لوزي عند تعديل قيمة الوسيط a من 0 إلى 7.1 وبأخذ $b = 0.5$ باستعمال مخطط المفارقات المرفق، أنظر الشكل 8.3. نلاحظ في الشكل 9.3 أن من أجل $b = 0.5$ فإن ثابت ليابونوف الأعظمي سالب من أجل $0 \leq a \leq 1.3$ مما يدل على إنتظام نظام لوزي. بينما من أجل $1.3 < a \leq 1.7$ فإن هذا الثابت يأخذ ثيما موجبة مما يدل على فوضوية النظام.

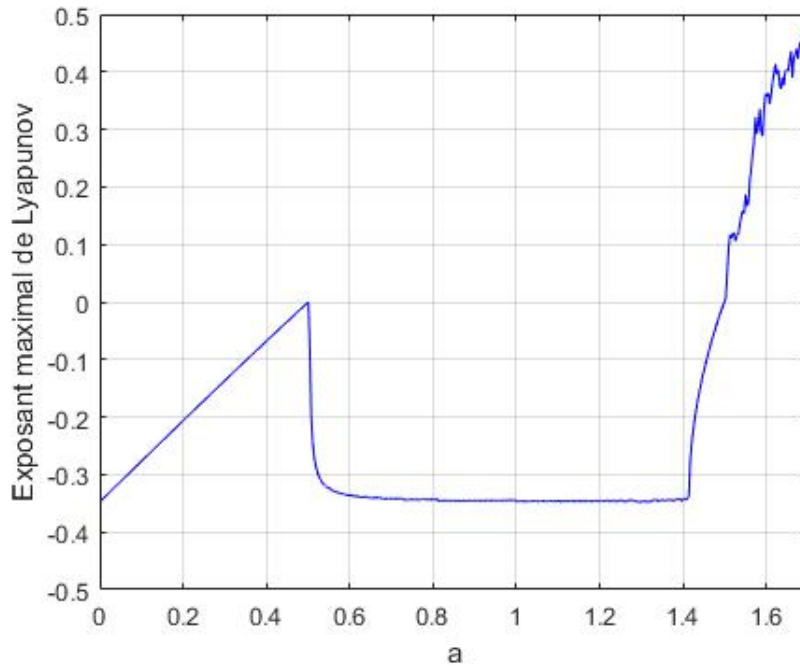
وباستعمال خوارزمية آلان وولف يمكن حساب ثوابت ليابونوف للنظام المدروس من أجل $(a, b) = (1.7, 0.5)$ وبأخذ الشروط الابتدائية $(x_0, y_0) = (0, 0)$ بعد 20000 تكرارا نجد أنظر الشكل 10.3 $Le_1 = 0.18$ و $Le_2 = -0.873$ وبعد كسري لليابونوف $D_L = 1.2068$



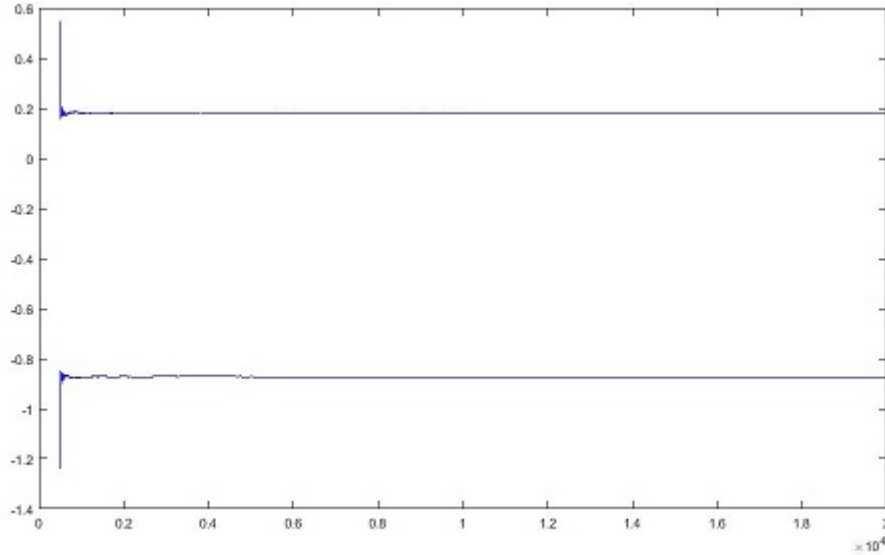
شكل 7.3: تطور حالات نظام لوزي بعد 100 تكرار الأولى



شكل 8.3: مخطط المفارقات لنظام لوزي



شكل 9.3: تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام لوزي بدلالة الوسيط a



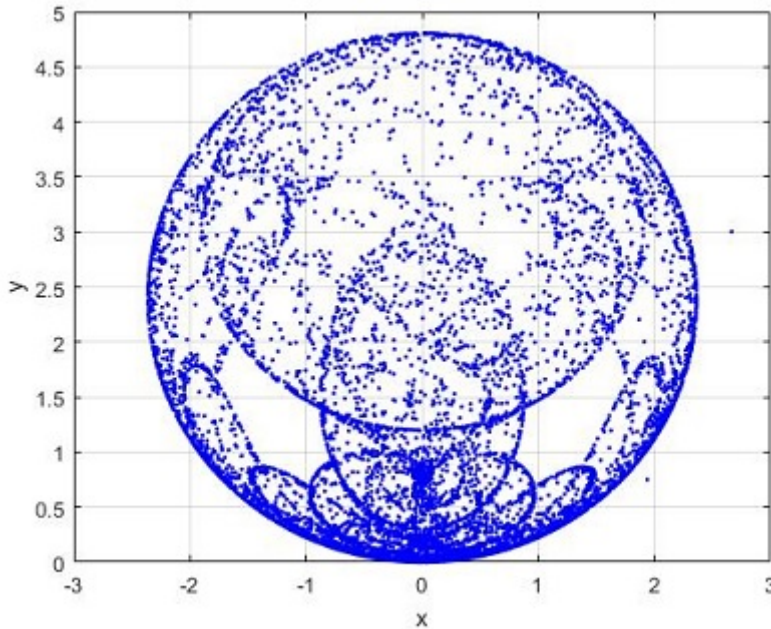
شكل 10.3: ثوابت ليابونوف لنظام لوزي من أجل $a = 1.7$ و $b = 0.5$

3.3 نظام لورينز

النظام الديناميكي المتقطع في المستوي للورينز [19] معرف كمايلي:

$$\begin{cases} x_{k+1} = (1 + ab)x_k - by_k x_k; \\ y_{k+1} = (1 - b)y_k + bx_k^2. \end{cases} \quad (3.3)$$

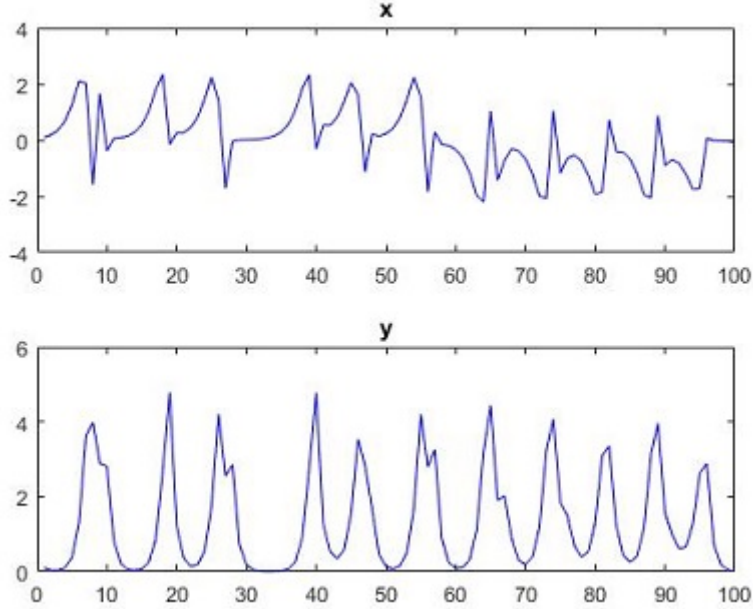
الجادب الفوضوي الملاحظ بالنسبة لهذا النظام من أجل قيم الوسائط $a = 1.25$ و $b = 0.75$ أنظر الشكل 11.3



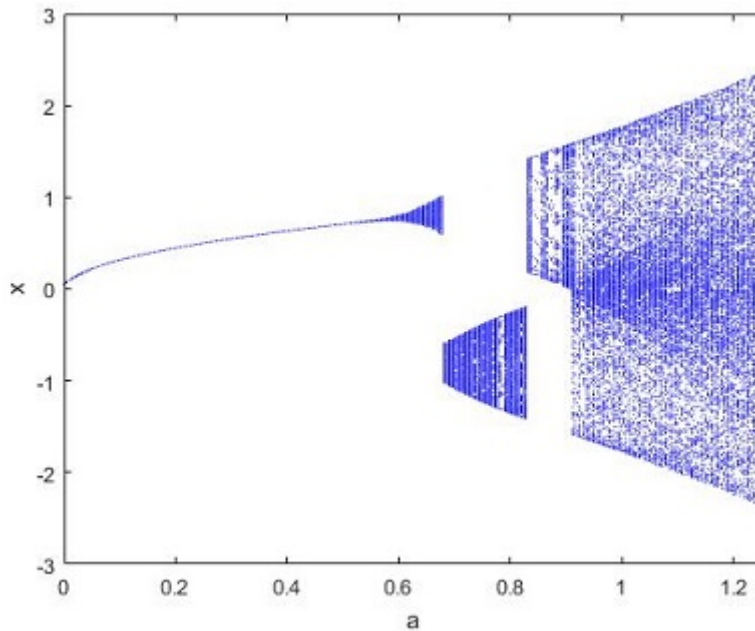
شكل 11.3: الجاذب الفوضوي لنظام لورينز من أجل $a = 1.25$ و $b = 0.75$

يمكننا ملاحظة تطور متغيرات حالات النظام الديناميكي المتقطع للورينز (3.3) بالنسبة للمئة تكرارا الأولى، أنظر الشكل 12.3 كما يمكن تلخيص سلوك النظام عند تعديل قيمة الوسيط a بين 0 و 25.1 مع تثبيت $b = 0.75$ ، أنظر الشكل 13.3. نلاحظ في الشكل 14.3 أنه من أجل $b = 0.75$ أن ثابت ليابونوف الأعظمي سالب لما $0 \leq a \leq 0.84$ مما يدل على إنتظام النظام المدروس، بينما من أجل $0.84 < a < 1$ فنلاحظ أن هذا الثابت يغير إشارته مما يؤكد إضطراب سلوك النظام بين الفوضى و الإنتظام. وأخيرا من أجل $1 \leq a \leq 1.25$ فإن ثابت ليابونوف الأعظمي موجب دوما وهذا يدل على فوضوية النظام. ويمكن حساب ثوابت ليابونوف للنظام المدروس من أجل $(a, b) = (1.25, 0.75)$ ، ومن أجل الشروط الإبتدائية $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$. بعد 20000 تكرارا نجد أن للنظام ثابتي ليابونوف

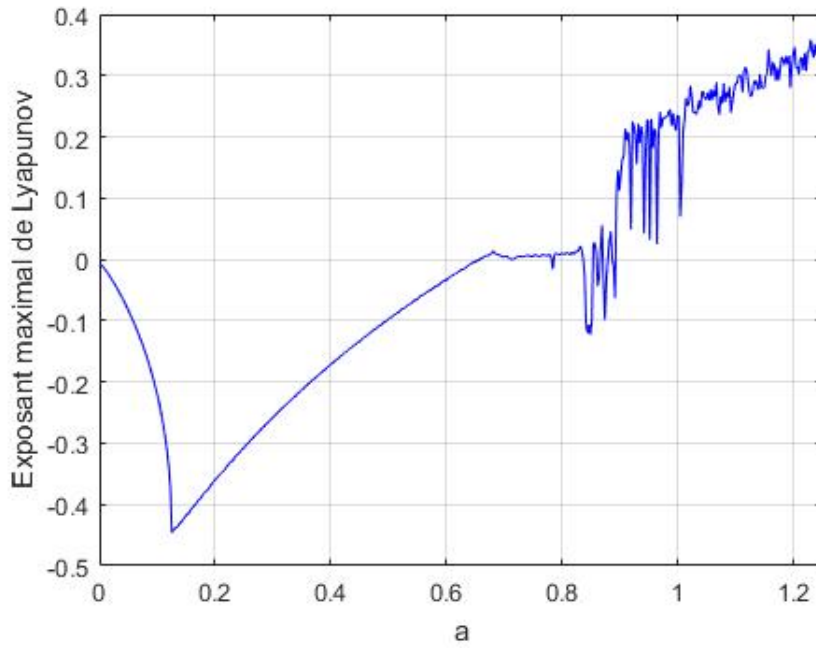
هما أنظر الشكل 15.3 $Le_1 = 0.060514$ و $Le_2 = -0.35562$ وبعد كسري لليابونوف $D_L = 1.1702$



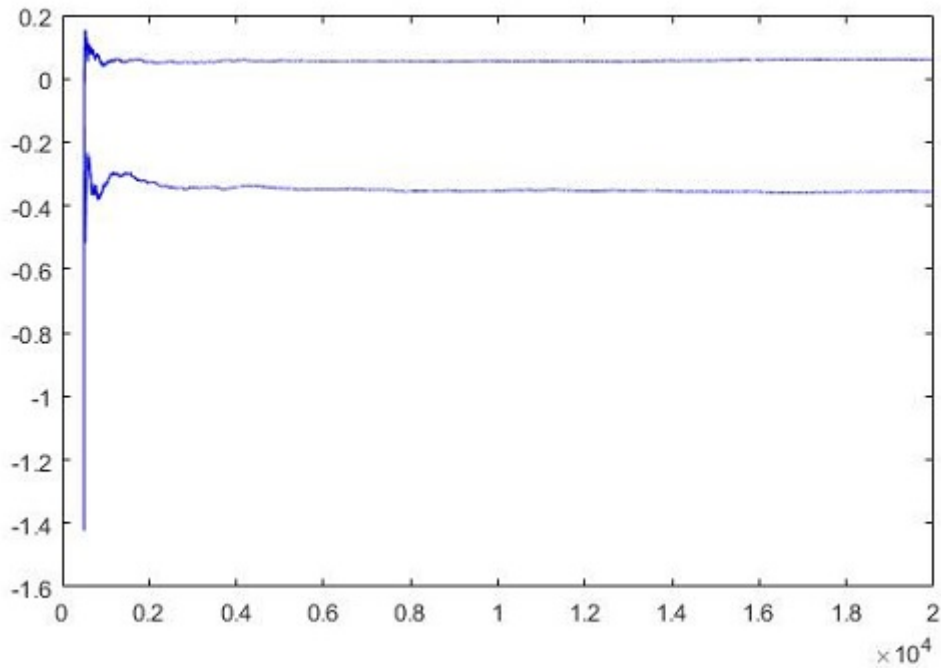
شكل 12.3: تطور حالات نظام لورينز بعد 100 تكرار الأولى



شكل 13.3: مخطط المفارقات لنظام لورينز



شكل 14.3: تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام لورينز بدلالة الوسيط a



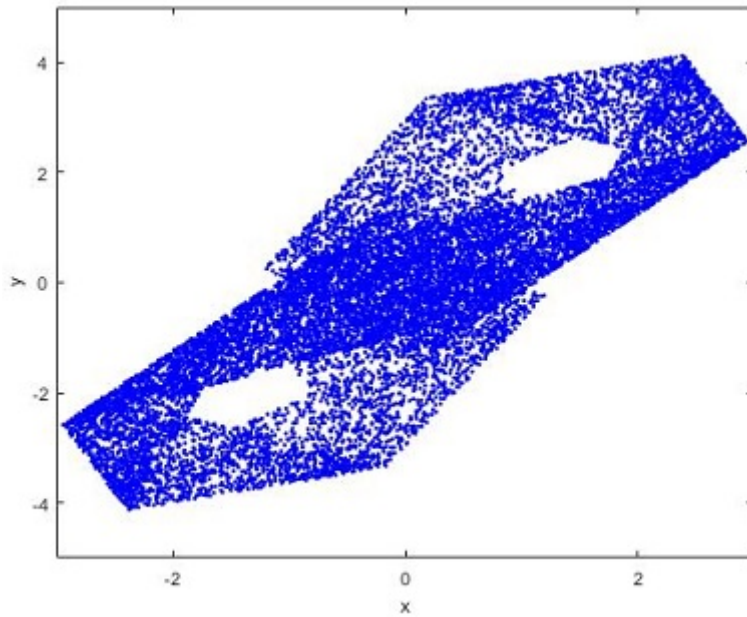
شكل 15.3: ثوابت ليابونوف لنظام لورينز من أجل $a = 1.25$ و $b = 0.75$

4.3 نظام زراولية-سبروت

عرف الرياضيين زراولية و سبروت [20] ، النظام الديناميكي المتقطع في المستوي كمايلي:

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - ah(y_k), \\ y_{k+1} = bx_k, \end{cases} \quad (4.3)$$

حيث : $h(x) = \frac{1}{2}(2m_1x + (m_0 - m_1)(|x + 1| - |x - 1|))$. هي دالة ليون اونج شوا .
الاجاذب الفوضوي الملاحظ بالنسبة لهذا النظام من أجل قيم الوسائط $a = 3.365$ ، $b = 1.4$ ،
 $m_0 = -0.43$ و $m_1 = 0.41$ أنظر الشكل 16.3



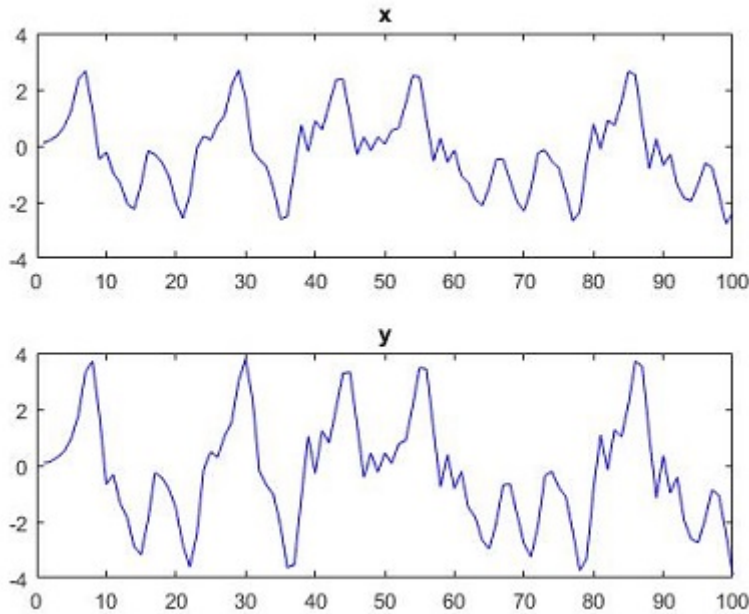
شكل 16.3: الجاذب الفوضوي لنظام زراولية-سبروت من أجل $a = 3.365$ و $m_1 = 0.41$ و $m_0 = -0.43$ ، $b = 1.4$

كما يمكننا أيضا التحقق من فوضوية النظام (4.3) بملاحظة تطور متغيراته، أنظر الشكل 17.3 والذي يظهر لادورية حالاته وهذا السلوك مبرر بخطط المفارقات الذي يلخص السلوك العام للنظام (4.3) ، أنظر الشكل 18.3 . وبإستعمال تقنية ثابت ليابونوف الأعظمي، أنظر الشكل 19.3 فمن الواضح أنه من أجل $b = 1.4$ فإن سلوك نظام زراولية-سبروت منتظم من أجل $|a| < 2.439$ ، ونلاحظ أن ثابت ليابونوف الأعظمي لما $2.439 < a < 3.323$ أو $-3.323 < a < -2.439$ موجب يدل على وجود مراحل إنتقالية من السلوك

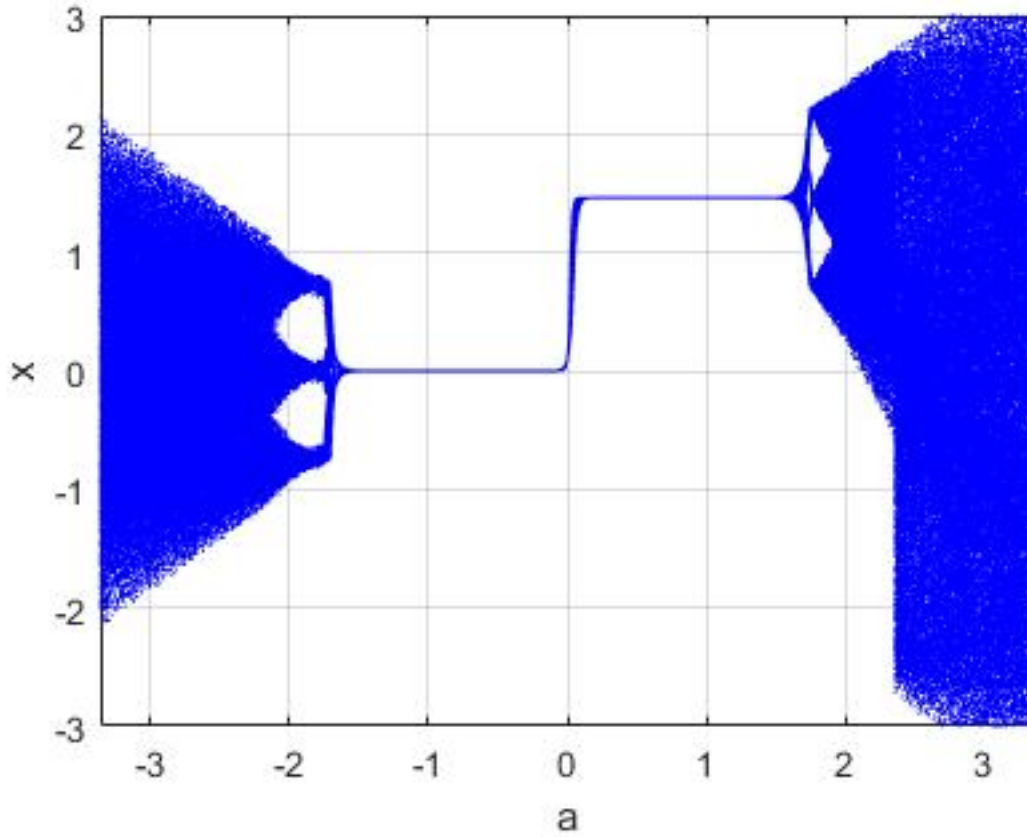
الفوضوي إلى النقاط الدورية و العكس. أخيراً، من أجل $-2.439 < a < -3.323$ أو $3.323 < a < 3.365$ فإن النظام فوضوي بحت.

وباستعمال خوارزمية آلان وولف يمكن حساب ثوابت ليابونوف للنظام المدروس من أجل $(a, b) = (3.365, 1.4)$ ، مع الشروط الابتدائية $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$ بعد 20000 تكرارا نجد أنظر الشكل 20.3

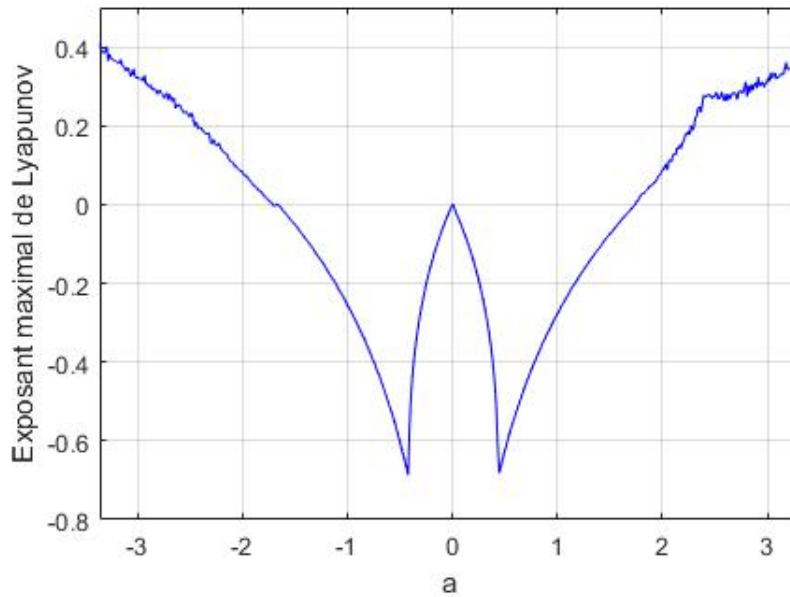
• $Le_1 = 0.1416$ و $Le_2 = 0.2771$ وبعد كسري لليابونوف $D_L = 2.9566$.



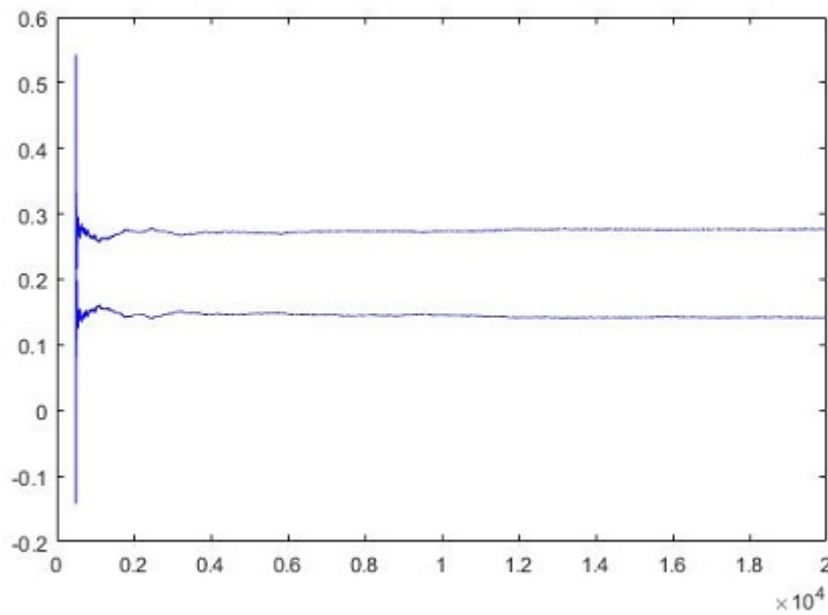
شكل 17.3: تطور حالات نظام زراولية-سبروت بعد 100 تكرار الأولى



شكل 18.3: مخطط المفارقات لنظام زراولية سبروت



شكل 19.3: تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام زراولية-سبروت



شكل 20.3: ثابت ليايبنوف لنظام زراولية-سبروت من أجل $a = 3.365$, $b = 1.4$ و $m_0 = -0.43$ و $m_1 = 0.41$

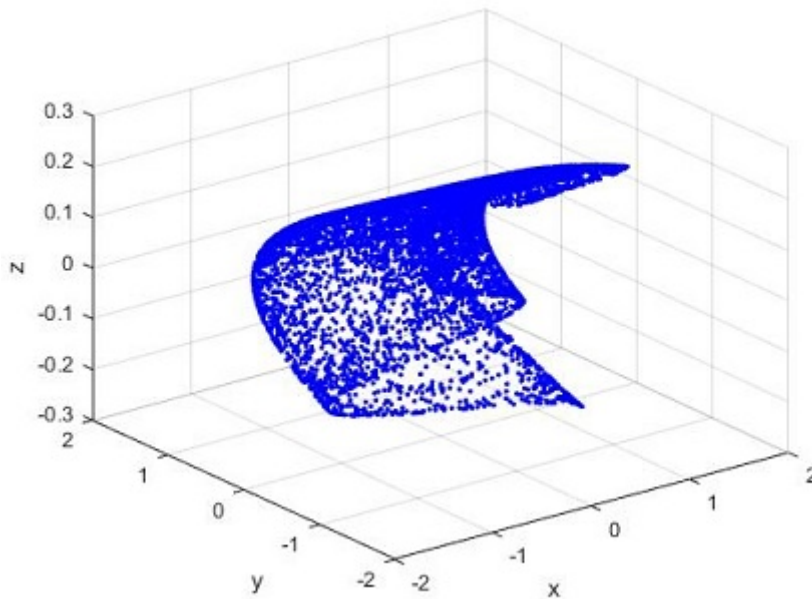
5.3 نظام ستيفانسي

عرف العالم الرياضي ستيفانسي [21] النظام الديناميكي المتقطع في الفضاء كما يلي :

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 + z_k - \alpha y_k^2, \\ y_{k+1} = 1 + \beta y_k - \alpha x_k^2, \\ z_{k+1} = \beta x_k, \end{cases} \quad (5.3)$$

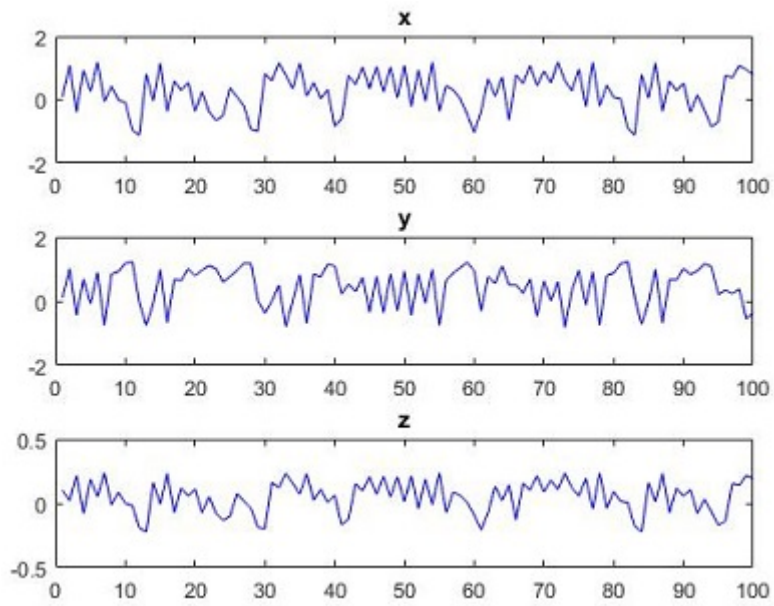
الجاذب الفوضوي لهذا النظام تم الحصول عليه من أجل $\alpha = 1.4$ و $\beta = 0.2$ أنظر

الشكل 21.3

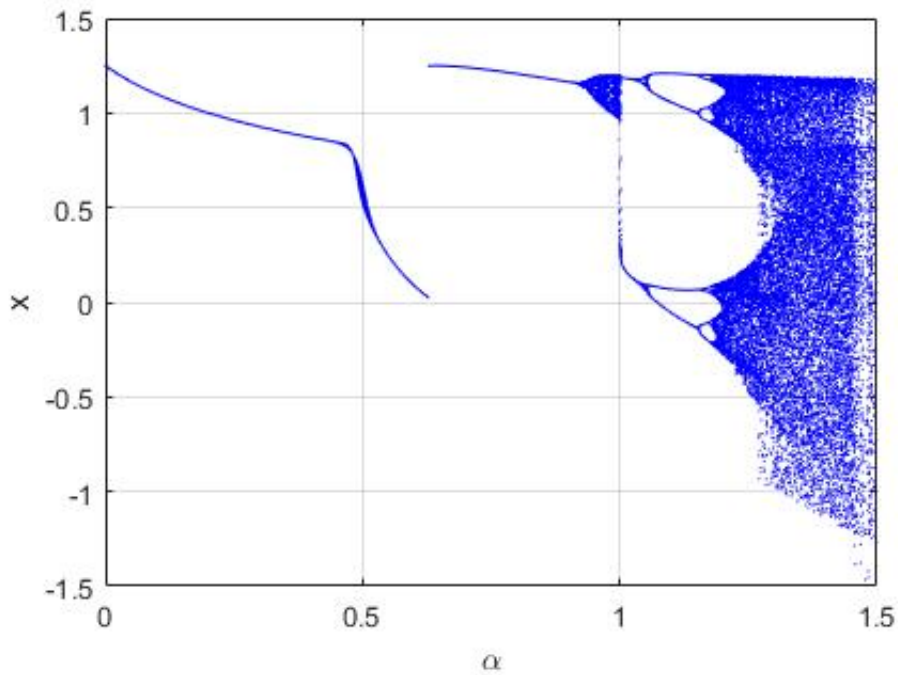


شكل 21.3: الجاذب الفوضوي لنظام ستيفانسي من أجل $\alpha = 1.4$ و $\beta = 0.2$

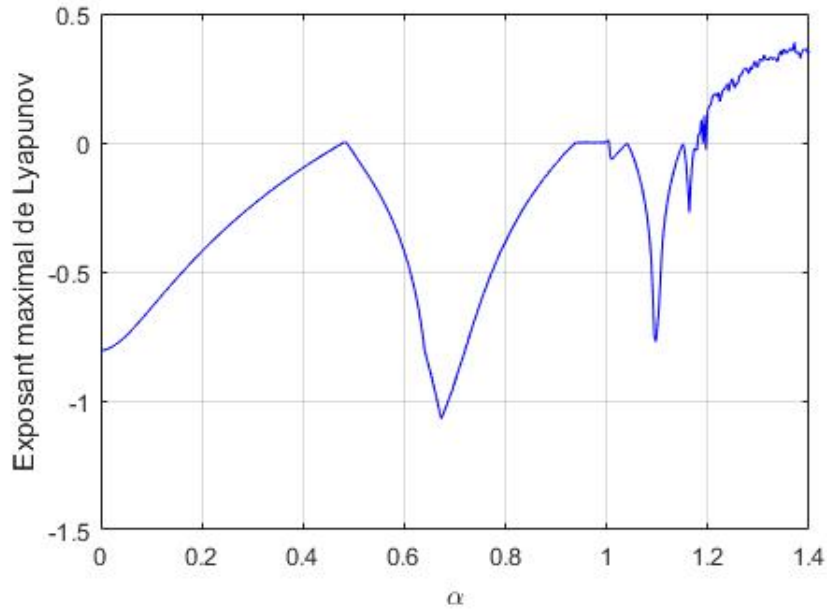
كما يمكننا أيضا التحقق من فوضوية النظام (5.3) بملاحظة تطور متغيراته، أنظر الشكل 22.3 والذي يظهر لادورية حالاته وهذا السلوك مبرر بخطط المفارقات الذي يلخص السلوك العام للنظام (5.3)، أنظر الشكل 23.3. وباستعمال تقنية ثابت ليابونوف الأعظمي، أنظر الشكل 24.3 فن الواضح أنه من أجل $\beta = 0.2$ فإن سلوك نظام ستيفانسي منتظم من أجل $\alpha \in [0, 1.182]$ ، ونلاحظ أن ثابت ليابونوف الأعظمي على المجال $[1.182, 1.2]$ يغير إشارته مما يدل على وجود مراحل إنتقالية من السلوك الفوضوي إلى السلوك المنتظم والعكس. أخيرا، من أجل $\alpha \in [1.2, 1.4]$ فإن النظام فوضوي بحت. وباستعمال خوارزمية آلان وولف يمكن حساب ثوابت ليابونوف للنظام المدروس من أجل $(\alpha, \beta) = (1.4, 0.2)$ ، مع الشروط الابتدائية $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ بعد 20000 تكرارا نجد أنظر الشكل 25.3 $Le_1 = 36.31318$ و $Le_2 = -381.4814$ وبعد كسري لليابونوف $D_L = 2.1562$.



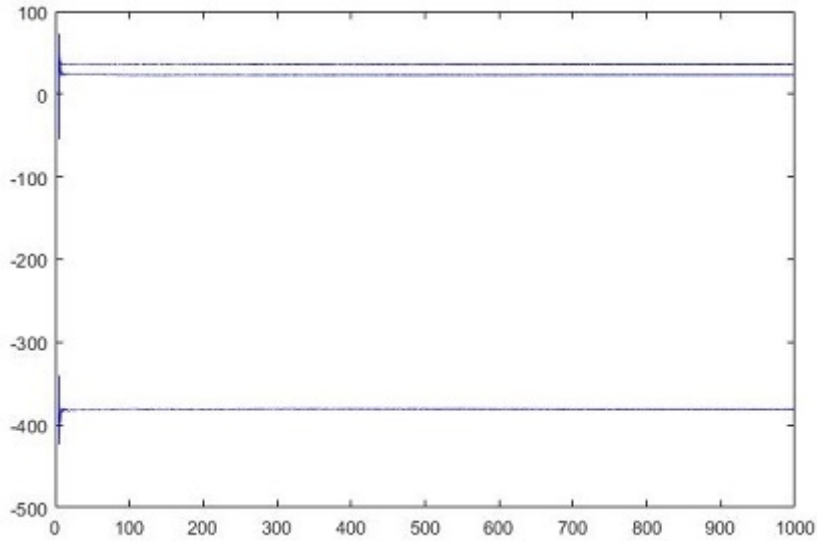
شكل 22.3: تطور حالات نظام ستيفانسي بعد 100 تكرار الأولى



شكل 23.3: مخطط المفارقات لنظام ستيفانسي



شكل 24.3: تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام ستيفاناسكي



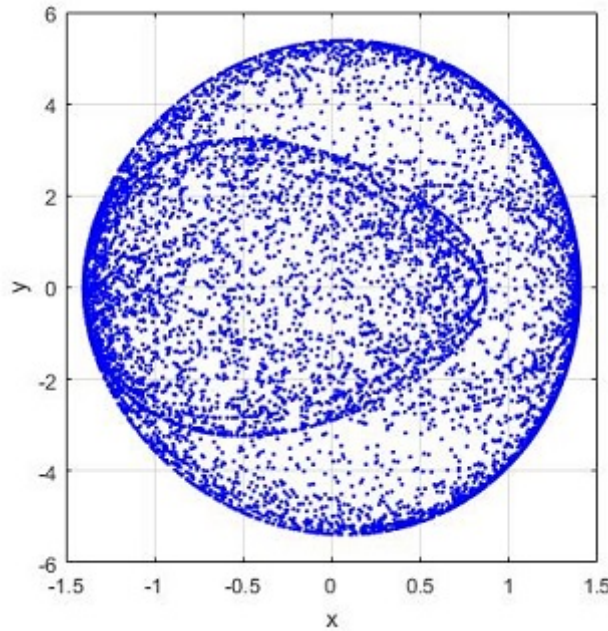
شكل 25.3: ثوابت ليابونوف لنظام ستيفاناسكي من أجل $\alpha = 1.4$ و $\beta = 0.2$

6.3 نظام لي

في سنة 2012، عرف العالم الرياضي لي يورك [22] النظام الديناميكي المتقطع كما يلي

$$\begin{cases} x_{k+1} = a \cos y_k; \\ y_{k+1} = b x_k \sin y_k; \end{cases} \quad (6.3)$$

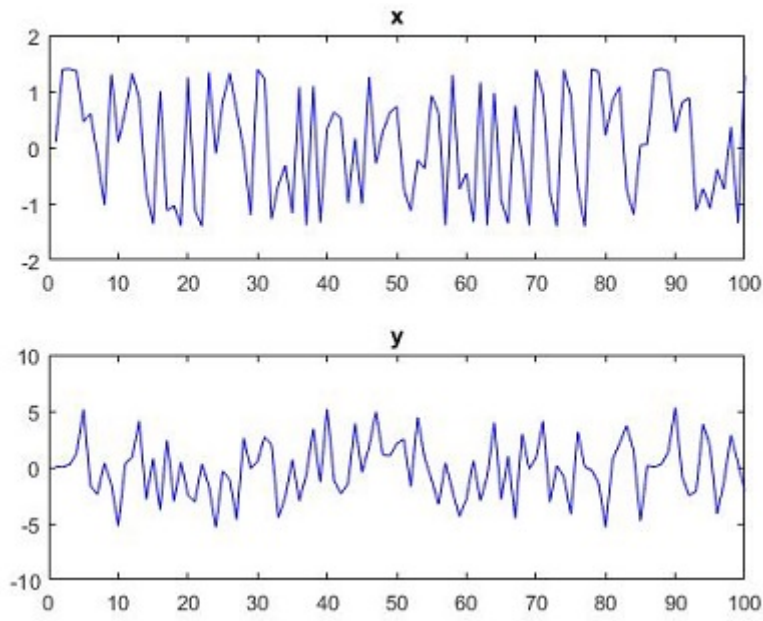
الجاذب الفوضوي لهذا النظام تم الحصول عليه من أجل $a = 1.4$ و $b = 4$ أنظر الشكل 26.3



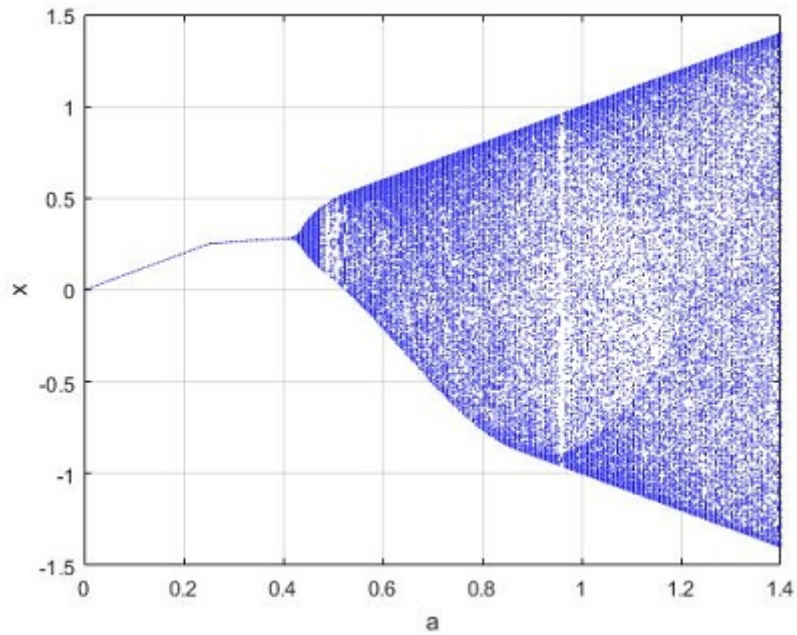
شكل 26.3: الجاذب الفوضوي لنظام لي من أجل $a = 1.4$ و $b = 4$

كما يمكننا أيضا التحقق من فوضوية النظام (6.3) بملاحظة تطور متغيراته، أنظر الشكل 27.3 والذي يظهر لادورية حالاته وهذا السلوك مبرر بخطط المفارقات الذي يلخص السلوك العام للنظام (6.3)، أنظر الشكل 28.3. وباستعمال تقنية ثابت ليابونوف الأعظمي، أنظر الشكل 29.3 فن الواضح أنه من أجل $a = 1.4$ و $b = 4$ فإن ثابت ليابونوف الأعظمي موجب، ما يدل على أن النظام فوضوي بحت.

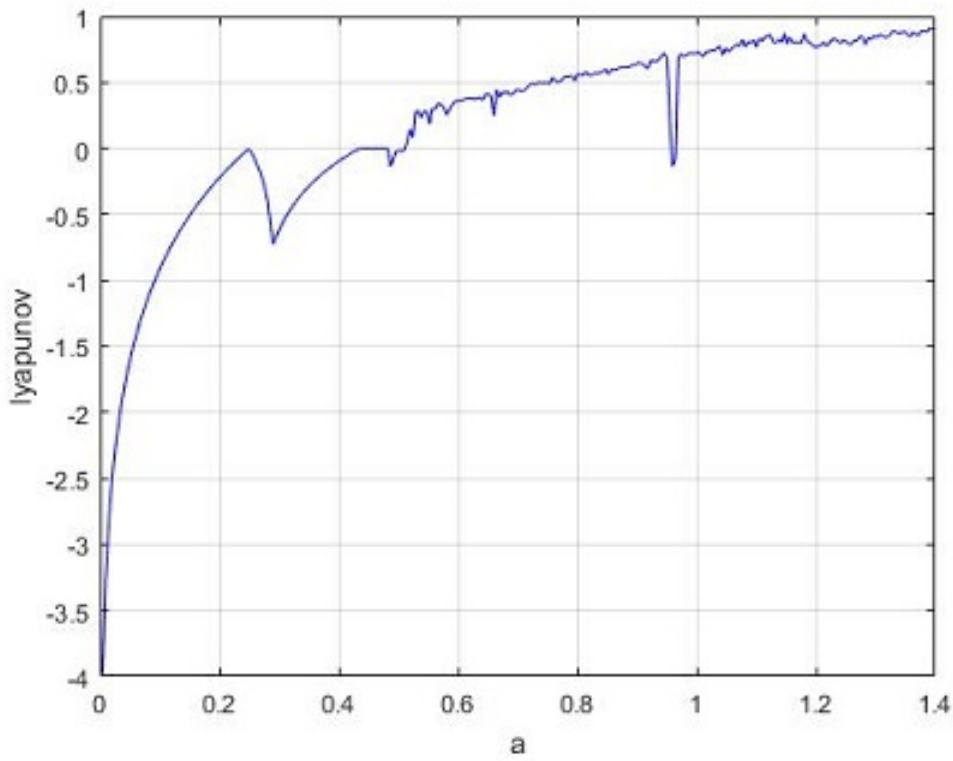
وباستعمال خوارزمية آلان وولف يمكن حساب ثوابت ليابونوف للنظام المدروس من أجل $(a, b) = (1.4, 4)$ ، مع الشروط الابتدائية $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$ بعد 20000 تكرارا نجد أنظر الشكل 30.3 $Le_1 = 0.92$ و $Le_2 = -0.67$ وبعد كسري لليابونوف $D_L = 2.3602$.



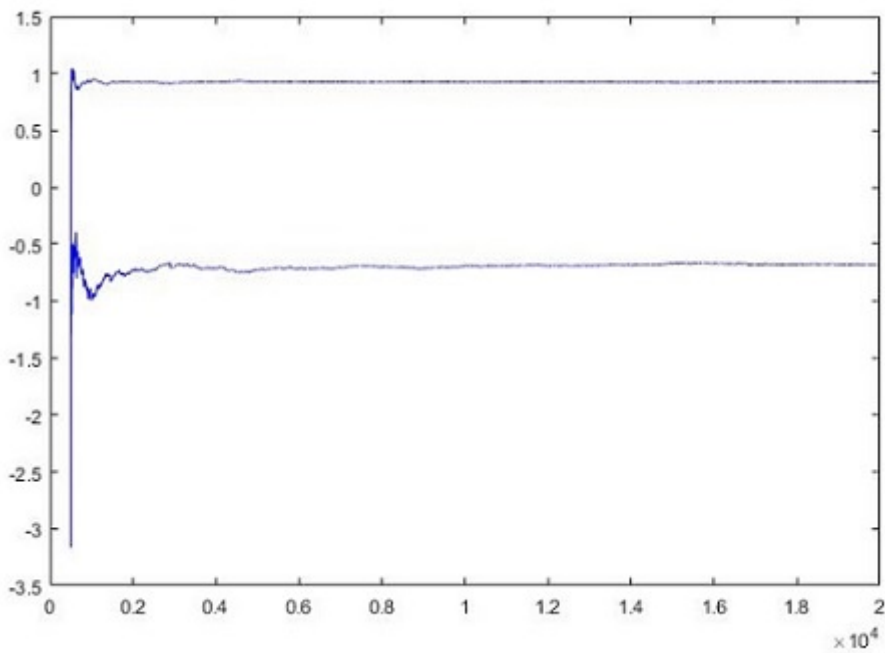
شكل 27.3: تطور حالات نظام لي بعد 100 تكرار الأولى



شكل 28.3: مخطط المفارقات لنظام لي



شكل 29.3: تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام لي



شكل 30.3: ثوابت ليابونوف لنظام لي من أجل $\alpha = 1.4$ و $\beta = 4$

7.3 نظام تشوزا-جوليبيتسكي

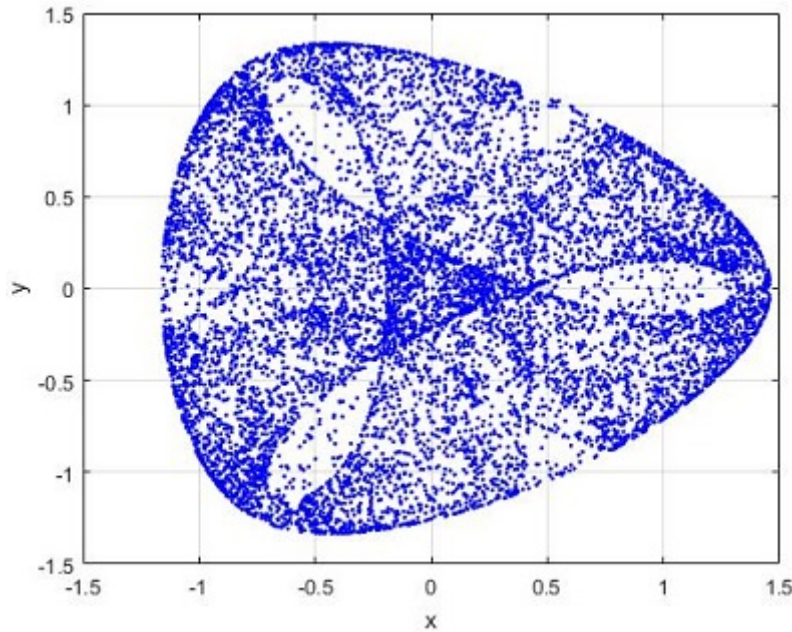
عرف الرياضيين تشوزا و جوليبيتسكي [23] النظام الديناميكي المتقطع كمايلي:

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + d(x_k^2 - y_k^2); \\ y_{k+1} = Ay_k - 2dx_k y_k; \end{cases} \quad (7.3)$$

حيث :

$$A = a(x_k^2 + y_k^2) + bx_k(x_k^2 - 6y_k^2) + c \quad (8.3)$$

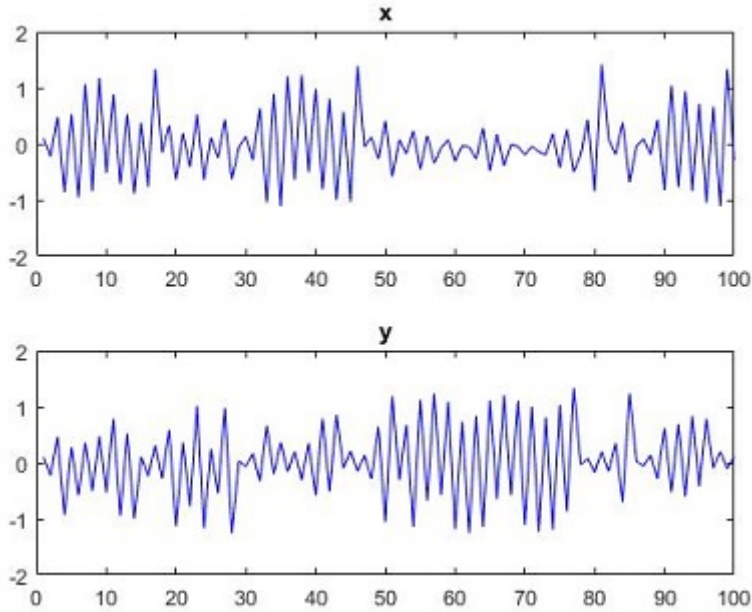
الجاذب الفوضوي لهذا النظام تم الحصول عليه من أجل $a = 1$ ، $b = 0$ ، $c = -2.25$ و $d = 0.2$ أنظر الشكل 31.3



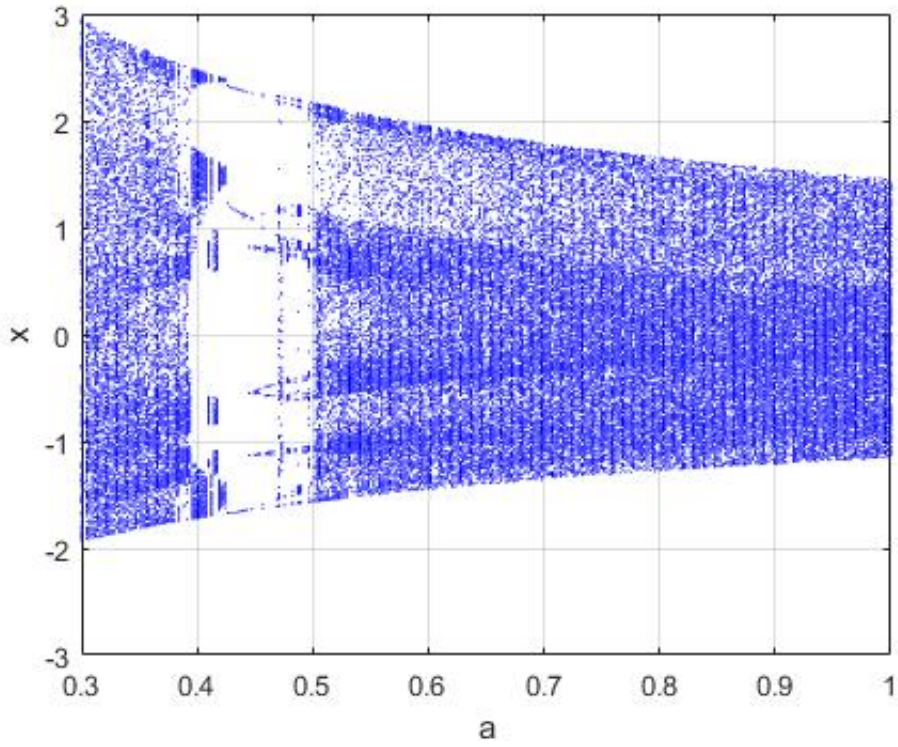
شكل 31.3: الجاذب الفوضوي لنظام تشوزا-جوليبيتسكي من أجل $a = 1$ و $b = 0$ ، $d = 0.2$ و $c = -2.25$ ،

كما يمكننا أيضا التحقق من فوضوية النظام (7.3) بملاحظة تطور متغيراته، أنظر الشكل 32.3 والذي يظهر لادورية حالاته وهذا السلوك مبرر بخطط المفارقات الذي يلخص السلوك العام للنظام (7.3) ، أنظر الشكل 33.3 . وباستعمال تقنية ثابت لياونوف الأعظمي، أنظر الشكل 34.3 فمن الواضح أنه من أجل قيم الوسائط السابقة فإن ثابت لياونوف الأعظمي موجب، ما يدل على أن النظام فوضوي بحت.

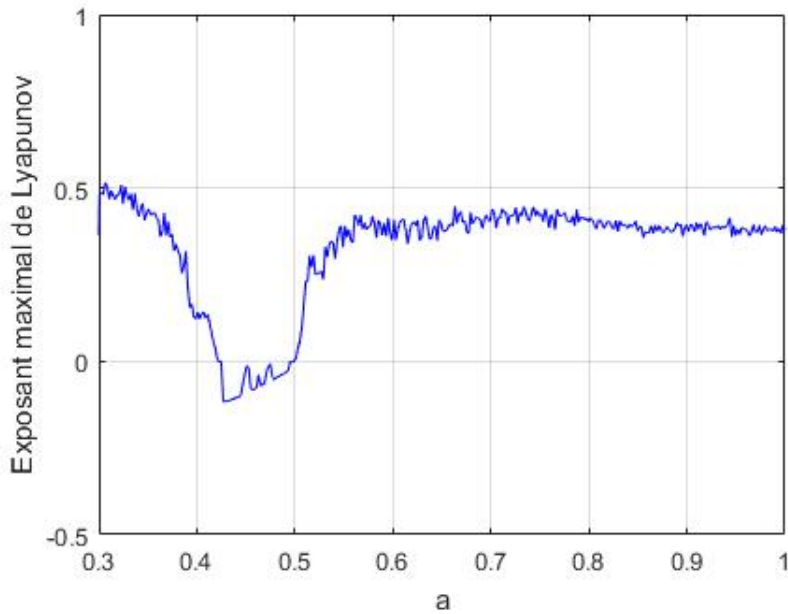
وباستعمال خوارزمية آلان وولف يمكن حساب ثوابت ليابونوف للنظام المدروس من أجل $(a, b, c, d) = (1, 0, -2.25, 0.2)$ ، مع الشروط الابتدائية $(x_0, y_0) = (0.1, 0.1)$ بعد 20000 تكرارا نجد أنظر الشكل 35.3 $Le_1 = 0.38$ و $Le_2 = 0.20$ وبعد كسري لليابونوف $D_L = 2.8605$



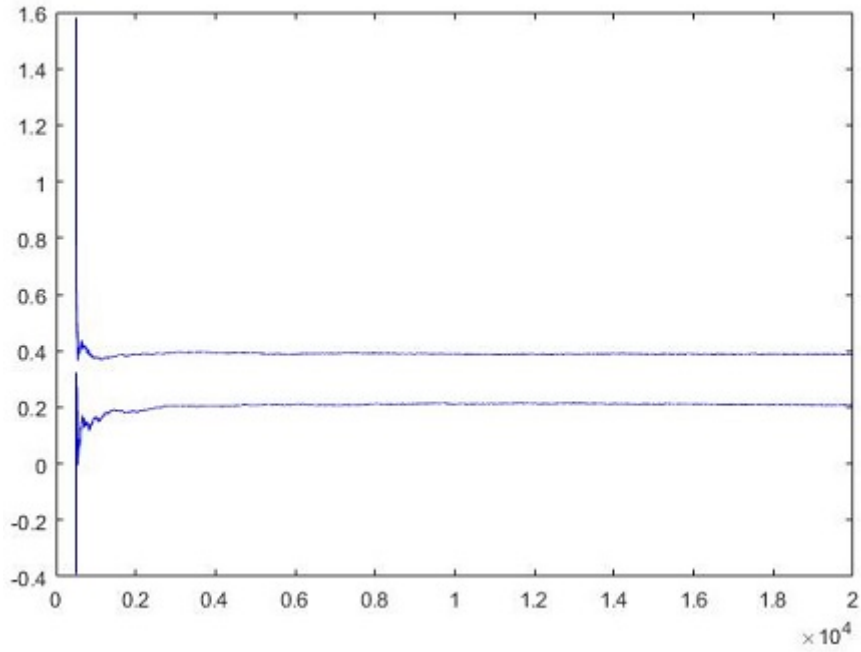
شكل 32.3: تطور حالات نظامتسوزا-جولبييتسكي بعد 100 تكرار الأولى



شكل 33.3: مخطط المفارقات لنظام تشوزا-جوليبيتسكي



شكل 34.3: تطور ثابت ليابونوف الأعظمي لنظام تشوزا-جوليبيتسكي



شكل 35.3: ثوابت لياونوف لنظام تشوزا-جوليبيتسكي من أجل $a = 1$ و $b = 0$ ،
 $d = 0.2$ و $c = -2.25$



الفصل الرابع

مزامة الفوضى



في هذا الفصل تطرقنا إلى مزامنة الفوضى بأنواعها الكلاسيكية والحديثة، ثم سلطنا الضوء على طريقة المتحكم النشط مزودة بمثالين تطبيقيين مدعمن ببرمجيات *MATLAB*.



1.4 أنواع المزامنة

في هذا القسم سوف نقوم بتقديم مختلف أنواع المزامنة والمتمثلة في المزامنة الكاملة، المزامنة العكسية، المزامنة المتداخلة، المزامنة الاسقاطية، المزامنة الاسقاطية العامة، المزامنة العامة، مزامنة $Q-S$.

1.1.4 المزامنة الكاملة

نعتبر النظام الفوضوي الرئيسي المعروف بـ

$$X(k+1) = F(X(k)) \quad (1.4)$$

حيث $X(k) \in \mathbb{R}^n$ هو حالة النظام (1.4) و F نظام فوضوي فرعي معطى بـ

$$Y(k+1) = G(Y(k)) + U \quad (2.4)$$

حيث $Y(k) \in \mathbb{R}^n$ هو حالة النظام (2.4) ، $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ، شعاع التحكم $U = (u_i)_{1 < i < n}$. نحدد خطأ المزامنة الكاملة باعتبار

$$e(k) = Y(k) - X(k) \quad (3.4)$$

لذا مشكلة المزامنة الكاملة هي تحديد شعاع التحكم U الذي يحقق :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0 \quad (4.4)$$

حيث $\|\cdot\|$ هو النظيم الاقليدي،

إذا كانت $F = G$ فإننا نتكلم عن مزامنة كاملة متطابقة.

إذا كانت $F \neq G$ فإننا نتكلم عن مزامنة عامة غير متطابقة .

إذا المزامنة الكاملة هي التطابق الكامل بين متغيرات الحالة للنظامين المتزامنين [24] .

2.1.4 المزامنة العكسية

نظريا نظامان غير متزامنان إذا كان من جهة النظام الرئيسي والنظام الفرعي لديهم

اشعة متطابقة في القيمة المطلقة ولكن علامات متعاكسة من جهة أخرى .

مجموع هذان الشعاعان في النظامين يؤول الى الصفر عندما يؤول الزمن الى اللانهاية [25]

خطأ المزامنة العكسية يمكن تعريفه على النحو التالي

$$e(k) = Y(k) + X(k) \quad (5.4)$$

3.1.4 المزامنة المتداخلة

وجد الباحثون أن نظامين ديناميين فوضويين غير متطابقين يمكن أن يكونا متزامنين حيث تصبح المتغيرات الديناميكية للنظامين متزامنة ولكن مع تأخر زمني [26].
نقول إن لدينا مزامنة متأخرة (أو متوقعة) إذا كانت متغيرات الحالة $Y(k)$ للنظام الفوضوي الفرعي تتقارب مع متغيرات الحالة $X(k)$ للمتغيرة للنظام الرئيسي الفوضوي كما هو موضح في العلاقة أدناه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k - \tau)\| = 0, \quad (\text{ou } \lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - X(k + \tau)\|), \forall x(0) \quad (6.4)$$

حيث τ هو عدد موجب صغير بكفاية.

4.1.4 المزامنة الإسقاطية

نقول أن لدينا مزامنة إسقاطية إذا كانت متغيرات الحالة $y_i(k)$ للنظام الفرعي الفوضوي $Y(k) = (y_i(k))_{1 \leq i \leq n}$ تتزامن مع ثابت متعدد للحالة $x_i(k)$ للنظام الرئيسي $X(k) = (x_i(k))_{1 \leq i \leq n}$ حيث [27]:

$$\exists \alpha_i \neq 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} |y_i(k) - \alpha_i x_i(k)| = 0, \quad \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n \quad (7.4)$$

إذا كانت جميع قيم α_i مساوية لـ 1 فإننا نتكلم عن المزامنة الكاملة، أما إذا كانت جميع قيم α_i مساوية لـ -1 فإننا نتكلم عن المزامنة العكسية الكاملة.

5.1.4 المزامنة العامة الإسقاطية

نقول أن لدينا مزامنة FSHP بالانجليزية

(full state hybrid projective synchronization)

إذا كان كل متغير للحالة $y_i(k), 1 \leq i \leq n$ للنظام العشوائي الفرعي يتزامن مع مزج خطي لمتغيرات الحالة $x_i(k), 1 \leq i \leq n$ للنظام الفوضوي الرئيسي حيث:

$$\exists (\beta)_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left| y_i(k) - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j(k) \right| = 0, \quad \forall (x(0), y(0)), i = 1, 2, \dots, n \quad (8.4)$$

المزامنة FSHP هي تعميم للمزامنة الإسقاطية [28, 29, 30, 31, 32, 33].

6.1.4 المزامنة العامة

تعتبر المزامنة العامة تعميم للمزامنة الكاملة، المزامنة العكسية و المزامنة الإسقاطية في حالة الأنظمة الفوضوية ذات الأبعاد المختلفة [34].
ليكن :

$$\begin{cases} X(k+1) = F(X(k)) \\ Y(k+1) = G(Y(k)) + U \end{cases} \quad (9.4)$$

حيث $X(k) \in \mathbb{R}^n, Y(k) \in \mathbb{R}^m$ هي حالات النظامين الرئيسي والتابع على الترتيب، $\mathbb{R}^n \rightarrow F$ إذا وجد شعاع تحكم U و دالة $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، حيث جميع المسارات للنظامين الرئيسي و التابع، مع الشروط الابتدائية $x(0)$ و $y(0)$ تحقق :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Y(k) - \phi(X(k))\| = 0, \quad \forall x(0), \forall y(0) \quad (10.4)$$

فإن، النظامين الرئيسي والتابع (رقم النظام) متزامنين بالمعنى العام بالنسبة للدالة ϕ . إذا كانت الدالة ϕ معرفة بـ $\phi(X(k)) = \Lambda X(k)$ حيث $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{m \times n}$ فإننا نتكلم عن مزامنة عامة إسقاطية.

7.1.4 مزامنة Q-S

تعتبر مزامنة Q-S بمثابة تعميم لجميع أنواع المزامنات السابقة [35] ، نقول عن رئيسي $X(k)$ بعده n و نظام تابع $Y(k)$ بعده m أنهما متزامنين بمعنى Q-S في البعد d إذا وجد شعاع تحكم $U = (u_i)_{1 < i < m}$ و دالتين $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^d, S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$. حيث خطأ المزامنة

$$e(k) = Q(X(k)) - S(Y(k)) \quad (11.4)$$

يحقق $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e(k)\| = 0$

2.4 طريقة المتحكم النشط

هذا القسم مخصص لطريقة المزامنة الأكثر فعالية بالنسبة للأنظمة الديناميكية المتقطعة والتي تسمى بطريقة المتحكم النشط إن تطبيق المتحكم النشط لمزامنة الانظمة الفوضوية تم اقتراحه من طرف باي ولونجران [36]. حيث انها تقنية فعالة والتي اثبتت نجاعتها ليس فقط على الأنظمة المتطابقة بل أيضا على الأنظمة غير المتطابقة. بالإضافة إلى أن هذه الطريقة توفر سهولة في تطبيق الخوارزمية [37,38]. ليكن لدينا النظامين الفوضويين الرئيسيين و التابع المعرفين على الترتيب ب :

$$x(k+1) = F(x(k)) \quad (12.4)$$

و

$$y(k+1) = G(y(k)) + U \quad (13.4)$$

حيث: $y(k) \in \mathbb{R}^n, x(k) \in \mathbb{R}^n$ هي حالات النظامين الرئيسيين و التابع على الترتيب حيث $U = (u_i)_{1 \leq i \leq n}$ هو متحكم يطلب تحديده. من أجل مزامنة النظامين ، يجب أن يتقارب الخطأ بين مسارات النظامين من الصفر، عندما يؤول الزمن نحو اللانهاية، هذا الخطأ يمكن الحصول عليه ب

$$\begin{aligned} e(k+1) &= y(k+1) - x(k+1) \\ &= G(y(k)) - F(x(k)) + U. \end{aligned} \quad (14.4)$$

إذا استطعنا كتابة القيمة $G(y(k)) - F(x(k))$ بالطريقة التالية :

$$G(y(k)) - F(x(k)) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) \quad (15.4)$$

الخطأ يمكن تعريفه كالتالي :

$$e(k+1) = Ae(k) + N(x(k), y(k)) + U \quad (16.4)$$

حيث: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ هي مصفوفة ثابتة و N دالة ليست خطية. المتحكم U يمكن فرضه كما يلي :

$$U = V - N(x(k), y(k)) \quad (17.4)$$

حيث V هو المتحكم النشط المعرف بـ:

$$V = -Le(k) \quad (18.4)$$

حيث L هي مصفوفة تحكم مجهولة، نتحصل اذن على العبارة النهائية للخطأ

$$e(k+1) = (A-L)e(k) \quad (19.4)$$

إذن مشكلة المزامنة بين النظام الرئيسي (12.4) والنظام التابع (13.4) تحولت إلى مشكلة دراسة استقرار النظام الخطي المتقطع (19.4).

مبرهنة 4.2.1:

النظام الرئيسي (12.4) والنظام التابع (13.4) متزامنان كلياً بموجب قانون التحكم (17.4). إذا فقط إذا تم اختيار مصفوفة التحكم L بحيث تكون القيم الذاتية من $A-L$ داخل قرص الوحدة.

3.4 أمثلة

في هذا القسم نعرض مثالين بسيطين حول المزامنة [39].

1.3.4 مثال 1

أولاً، سنقوم بمزامنة النظام الرئيسي ثلاثي الأبعاد المعمم لهينون المعرف بـ:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = -0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 1.76 \\ x_2(k+1) = x_1(k) \\ x_3(k+1) = x_2(k) \end{cases} \quad (20.4)$$

و النظام التابع لهينون المعرف في المستوي بـ:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = y_2(k) - ay_1^2(k) + 1 + u_1, \\ y_2(k+1) = by_1(k) + u_2, \end{cases} \quad (21.4)$$

حيث $(a, b) = (1.4, 0.3)$ و (u_1, u_2) هو شعاع التحكم.

نعرف خطأ المزامنة بين النظام الرئيسي و النظام التابع كما يلي:

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - x_1(k) \\ e_2(k) = y_2(k) - x_2(k) \end{cases} \quad (22.4)$$

والذي يمكن إعادة كتابته على الشكل التالي:

$$\begin{cases} e_1(k+1) = y_2(k) - ay_1^2(k) + 0.1x_3(k) + x_2^2(k) - 0.76 + u_1 \\ e_2(k+1) = by_1(k) - x_1(k) + u_2 \end{cases} \quad (23.4)$$

لنفرض شعاع التحكم U كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}y_2(k) - \frac{1}{2}x_2(k) + ay_1^2(k) - 0.1x_3(k) - x_2^2(k) + 0.76 \\ u_2 = (1-b)x_1(k) \end{cases} \quad (24.4)$$

بتعويض مركبتي شعاع التحكم (24.4) في النظام (23.4) نجد:

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_2(k) \\ e_2(k+1) = be_1(k) \end{cases} \quad (25.4)$$

نعتبر دالة ليابونوف التالية:

$$V(e(k)) = \sum_{i=1}^3 e_i^2(k), \quad (26.4)$$

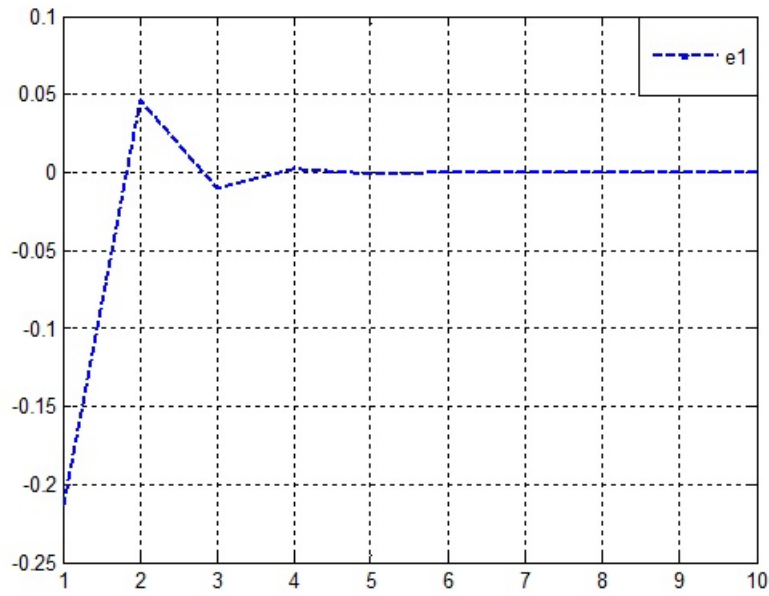
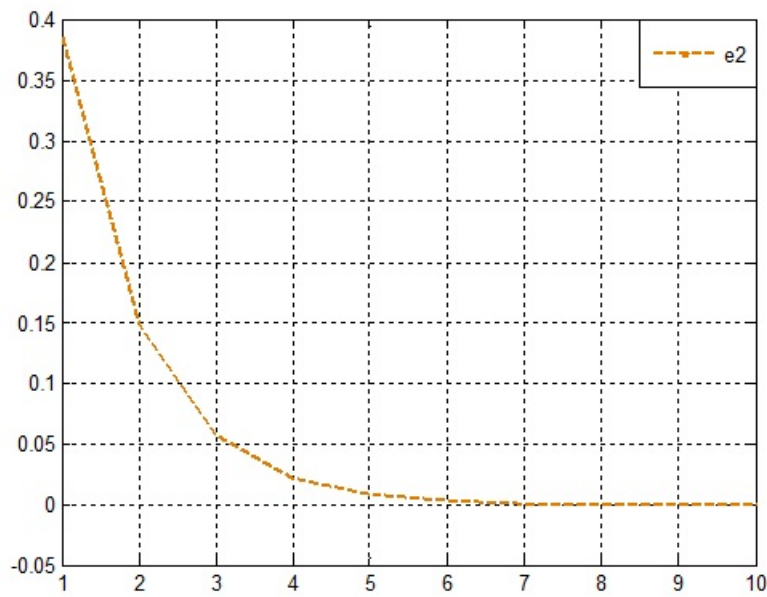
نحصل على:

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= \sum_{i=1}^3 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^3 e_i^2(k) \\ &= \frac{1}{4}e_2^2(k) + b^2e_1^2(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) \\ &= (b^2 - 1)e_1^2(k) - \frac{1}{4}e_2^2(k) < 0. \end{aligned} \quad (27.4)$$

ومنه، حسب مفهوم الإستقرار لليابونوف فمن الواضح أن

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0, \quad (i = 1, 2). \quad (28.4)$$

ومنه نستنتج أن النظامين الرئيسي (20.4) و التابع (21.4) متزامنين كما هو موضح في الشكلين 1.4 و 2.4.

شكل 1.4: خطأ المزامة e_1 شكل 2.4: خطأ المزامة e_2

2.3.4 مثال 2

ثانياً، نعتبر النظام الرئيسي للوزي المعرف في المستوي كمايلي:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_2(k) \\ x_2(k+1) = 1 + x_1(k) - a|x_2(k)| \end{cases} \quad (29.4)$$

والنظام التابع لهينون في الفضاء المعرف كمايلي:

$$\begin{cases} y_1(k+1) = 1 + y_3(k) - \alpha y_2^2(k) + u \\ y_2(k+1) = 1 + \beta y_2(k) - \alpha y_1^2(k) + u_2 \\ y_3(k+1) = \beta y_1(k) + u_3 \end{cases} \quad (30.4)$$

حيث: $(\alpha, \beta) = (1.4, 0.2)$ و (u_1, u_2) هو شعاع التحكم.
نعرف خطأ المزامنة بين النظام الرئيسي و النظام التابع كمايلي:

$$\begin{cases} e_1(k) = y_1(k) - x_1(k) \\ e_2(k) = y_2(k) - x_2(k) \\ e_3(k) = y_3(k) - x_1(k) \end{cases} \quad (31.4)$$

والذي يمكن إعادة كتابته على الشكل التالي:

$$\begin{cases} e_1(k+1) = 1 + y_3(k) - \alpha y_2^2(k) - x_2(k) + u_1 \\ e_2(k+1) = \beta y_2(k) - \alpha y_1^2(k) - x_1(k) + a|x_2(k)| + u_2 \\ e_3(k+1) = \beta y_1(k) - x_2(k) + u_3 \end{cases} \quad (32.4)$$

لفرض شعاع التحكم U كمايلي:

$$\begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2}y_3(k) + x_2(k) - \frac{1}{2}x_3(k) + \alpha y_2^2(k) - 1 \\ u_2 = -\beta x_2(k) + \alpha y_1^2(k) + x_1(k) - a|x_2(k)| \\ u_3 = -\beta x_1(k) + x_2(k) \end{cases} \quad (33.4)$$

بتعويض مركبتي شعاع التحكم (33.4) في النظام (32.4) نجد:

$$\begin{cases} e_1(k+1) = \frac{1}{2}e_3(k) \\ e_2(k+1) = \beta e_2(k) \\ e_3(k+1) = \beta e_1(k) \end{cases} \quad (34.4)$$

نعتبر دالة ليابونوف التالية:

$$V(e(k)) = \sum_{i=1}^3 e_i^2(k), \quad (35.4)$$

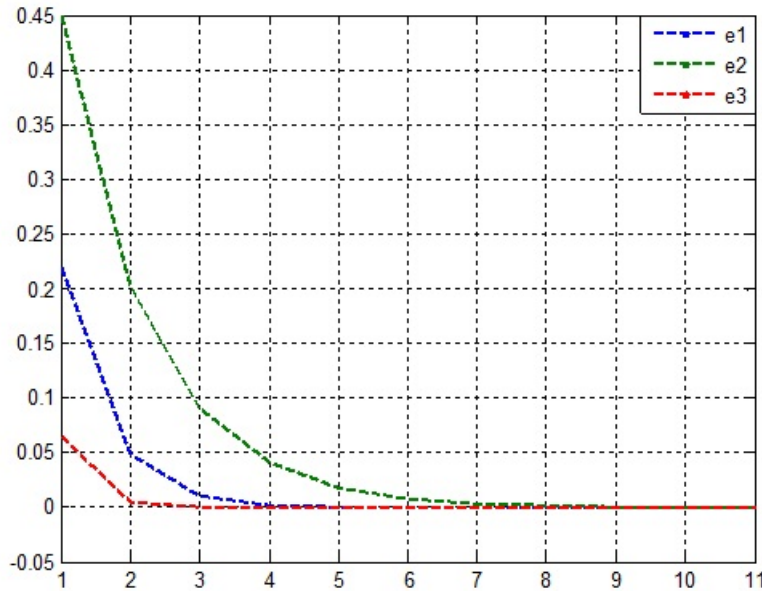
نجد أن:

$$\begin{aligned} \Delta V(e(k)) &= \sum_{i=1}^3 e_i^2(k+1) - \sum_{i=1}^3 e_i^2(k) \\ &= \frac{1}{4}e_3^2(k) + \beta^2 e_2^2(k) + \beta^2 e_1^2(k) - e_1^2(k) - e_2^2(k) - e_3^2(k) \\ &= (\beta^2 - 1)e_1^2(k) + (\beta^2 - 1)e_2^2(k) - \frac{3}{4}e_3^2(k) < 0 \end{aligned} \quad (36.4)$$

ومنه، حسب مفهوم الإستقرار لليابونوف فمن الواضح أن أخطاء المزامنة تتوّل إلى الصفر عند اللانهاية

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_i(k) = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (37.4)$$

ومنه نستنتج أن النظامين الرئيسي (29.4) و التابع (30.4) متزامنين كما هو موضح في الشكل 3.4 .



شكل 3.4: أخطاء المزامنة e_1 ، e_2 و e_3

خاتمة

فكرة الفوضى مفيدة جدا في عدة مجالات. في الواقع، في الفيزياء، في علم الأرصاد الجوية بشكل واضح، ولكن أيضا في علم الأحياء والكيمياء، في الاقتصاد في تقدير معاملات التوزيعات، وكذلك دراسة سلوكهم على المدى الطويل، وفي العلوم الاجتماعية. في علم التشفير، يمكن لاكتشاف الإشارات الفوضوية أن يصعب من عمليات التعقب، وأيضا إتلافها في حال تم التسلسل إليها، وأحدثت أيضا ثورة كبيرة في عالم الاتصالات، فهذه الإشارات، التي لا يمكن التنبؤ بطبيعتها والتي ليس السهل التحكم فيها، ولكنها حساسة للغاية للشروط الابتدائية وتقدم مظهراً شبه عشوائياً، مما يجعل الفوضى ظاهرة مهمة جدا لإخفاء إشارات المعلومات من أجل نقلها بطريقة آمنة.

الهدف الرئيسي من هذه الأطروحة هو تقديم الأنظمة الديناميكية المنفصلة بعمق، وإعطاء لمحة حول المفاهيم الأساسية لدراسة هذا النظام، مثل النقاط الثابتة، واستقرارها، ثم الأنواع المختلفة للمفارقات، مما يقودنا إلى اكتشاف السلوك الفوضوي عبر عدة خصائص بما في ذلك الحساسية للشروط الابتدائية، ثوابت ليابونوف والجاذب الفوضوي.

بعد ذلك، نركز على السلوك الفوضوي في أشهر الأنظمة ذات تقريبات لا يمكن التنبؤ بها لمجموعة من المعاملات، والتي لها فائدة كبيرة في العديد من التخصصات، مثل تطبيق الدعم، نموذج هينون، نظام لوزي. تطرقنا أيضا إلى الأنواع المختلفة من المزامنات ومختلف طرق المزامنة الأفضل، فقمنا بتحليل مشكلة المزامنة للأنظمة الديناميكية الفوضوية المتقطعة ذات الأبعاد المختلفة. تم اقتراح طريقة تحكم جديدة وتم إجراء عمليات محاكاة رقمية لإظهار كفاءة المخطط المقترح. جمعنا بين ظاهرتين يتم تمثيلهما بنظامين ديناميكين لهما أبعاد مختلفة، علاوة على ذلك بخصائص طوبولوجية مختلفة، وبنية مفارقات مختلفة. أثبتنا أن الأخطاء تتقارب نحو الصفر.

العلمية المراجع

- [1] Ouannas, Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets, Thèse de Doctorat, Université de constantine, 2015.
- [2] Boukhafla El-Hafsi, Sur La Synchronisation Des Systèmes Chaotiques Discrets, Thèse de Doctorat, Université de Annaba, 2017.
- [3] Lotfi JOUINI, Quantification et synchronisation de chaos dans les systèmes dynamiques discrets, Thèse de Doctorat, Université de tebessa, 2021.
- [4] Guckenheimer, J., Holmes, P. ,(1983) Nonlinear Oscillators, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Applied Mathematical Sciences. Springer verlag édition.
- [5] Hale, J.K., Kocak, H. ,(1991) Dynamics and Bifurcations. Applied Mathematics, Publisher SpringerVerlag New York.
- [6] Hale, J.K., Kocak, H. ,(1991) Dynamics and Bifurcations. Applied Mathematics, Publisher SpringerVerlag New York.
- [7] Kuznetsov, Y. ,(2004) Elements of Applied Bifurcation Theory. Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag New York.
- [8] Assia BERKANE, Transmission sécurisée à base de la synchronisation impulsive de deux systèmes chaotiques discrets, mémoire de master, Université de tizi-ouzou.

- [9] Mira, C., Gardini, L., Bugola, A., Cathala, J-C. ,(1996) Chaotic dynamics in twodimensional noninvertible maps. World Scienii...c Publishing Company.
- [10] Alligood, K.T., Sauer, T.D., Yorke, J.A. ,(1996) Chaos : an Introduction to Dynamical Systems, Springer-Verlag édition.
- [11] Rosenstein, M., Collins, J., Deluca, C. ,(1993) A practical method for calculating largest Lyapunov exponents for small data sets, Physica, Vol. ,(2-1)65 pp. .134-117
- [12] Wofl, A., Swfit, J., Swinney, H., Vastano, J. ,(1985) Determining Lyapunov exponents from a time series, Physica, Vol. ,(3)16 pp. .317-285
- [13] Parker, T.S., Chua, L.O. ,(1989) Pratical Numerical Algorithms For Chaotic Systems. Edition Springer-Verlay.
- [14] Li, T-Y., York, J.A. ,(1975) Period three implies chaos, Amer. Math. Mon., Vol. ,(10)82 pp. .992-985
- [15] Guckenheimer, J., Holmes, P. ,(1986) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bfiurcations of Vector Fields, New York Springer-Verlag.
- [16] Gasri, A., Ouannas, A., Ojo, K. S., Pham, V.-T. (2018) Coexistence of generalized synchronization and inverse generalized synchronization between chaotic and hyperchaotic systems, Nonlinear Analysis : Modelling and Control, ,(4)23 pp. .598-583
- [17] Wofl, A. ,(1984) Determining Lyapunov exponents from a time series, Department of Physics, University of Texas, Austin, Texas ,78712 USA.
- [18] Lozi, R., ,(1978) “Un Attracteur étrange du Type Attracteur de Hénon,” Journal de Physique, Vol. ,39 pp.10-9.

- [19] Itoh, M., Yang, T., Chua, L.O. ,(2001) “Conditions for impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic systems,”*Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, Vol. ,11 pp. .8-551
- [20] Zeraoulia, E., Sprott, J. C. ,(2009) “The discrete hyperchaotic double scroll,” *Int. J. Bifurcation Chaos*, Vol. ,19 pp. .1027-1023
- [21] K. Stefanski, ,(1998) “Modelling chaos and hyperchaos with 3D maps,”*Chaos Solitons Fractals*, Vol. ,(2-1)9 pp. .93-83
- [22] Li, P. Min, L. Hu, Y. Zhao, G. Li, X. : Novel two dimensional discrete chaotic maps and simulations, 2012 IEEE 6th International Conference on Information and Automation for Sustainability .(2012)
- [23] Itoh, M., Yang, T., Chua, L.O. ,(2001) “Conditions for impulsive synchronization of chaotic and hyperchaotic systems,”*Int. J. Bifurcation Chaos Appl. Sci. Eng.*, Vol. ,11 pp. .8-551
- [24] Lu, J. ,(2008) “Generalized (complete, lag, anticipated) synchronization of discrete-time chaotic systems,”*Commun. Nonlinear. Sci. Numer. Simulat.*, Vol. 13 ,(9) pp. .1859-1851
- [25] Adeli, M., Zarabadipoor, H. ,(2011) “Anti-synchronization of discrete-time chaotic systems using optimization algorithms,” *International Journal of Electronic Signals and Systems*, pp -143 .147
- [26] Diao, M., Yu, Y-G., Wang, S., Yu, J-Z. ,(2010) “Hybrid lag function projective synchronization of discrete chaotic systems with different orders,”*Inter. J. Nonl. Sci. Num. Simu.*, Vol. 11 ,(7) pp. .508–503
- [27] Xin, B., Wu, Z. ,(2015) “Projective synchronization of chaotic discrete dynamical systems via linear state error feedback control,”*Entropy*, Vol. ,17 pp. .2687-2677

- [28] Hu M, Xu Z, Zhang, R. ,(2008) “Full state hybrid projective synchronization in continuous time chaotic (hyperchaotic) systems,” *Commun Nonlinear Sci Numer Simul.*, Vol. ,13 pp. .464–456
- [29] Zhang Q, Lu, J. ,(2008) “Full state hybrid lag projective synchronization in chaotic (hyperchaotic) systems,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 372 ,(9) pp. .1421–1416
- [30] Hua M, Xua Z, Zhang R, Hua, A. ,(2007) “Parameters identification and adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic (hyperchaotic) systems,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 361 ,(3) pp. .237–231
- [31] Hua M, Xua Z, Zhang R, Hua, A. ,(2007) “Adaptive full state hybrid projective synchronization of chaotic systems with the same and different order,” *Phys. Lett. A.*, Vol. 365 ,(4) pp. .327–315
- [32] Chu Y-D, Chang Y-X, Zhang J-G, Li X-F, An, X-L. ,(2009) “Full state hybrid projective synchronization in hyperchaotic systems,” *Chaos Solitons Fractals*, Vol. 42 ,(3) pp. .1510–1502
- [33] Wang X-Y, Song, J. ,(2009) “Adaptive full state hybrid projective synchronization in the unified chaotic system,” *Mod. Phys. Lett. B.*, Vol. ,23 pp. .1921–1913
- [34] Ma, Z., Liu, Z., Zhang, G. ,(2007) “Generalized synchronization of discrete systems,” *Appl. Math. Mech.*, Vol. 28 ,(5) pp. -609 .614
- [35] Grassi, G., Miller. D.A. ,(2012) “Dead-beat full state hybrid projective synchronization for chaotic maps using a scalar synchronizing signal,” *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat.*, Vol. 17 ,(4) pp. .1830–1824

- [36] Bai, E., Lonngren, K.E. ,(2008) "Sequential synchronization of two Lorenz systems using active control,"Chaos Solitons Fractals, Vol. ,11 pp. ,1044-1041
- [37] Yassen, M.T. ,(2005) "Chaos synchronization between two different chaotic systems using active control,"Chaos Solitons Fractals, Vol. 23 ,(1) pp. ,140–131
- [38] Khan, M.A. ,(2012) "Synchronization of different 3D chaotic systems by generalized active control,"J. Infor. Comp. Sci., Vol. 7 ,(4) pp. ,283-272
- [39] boukhafla el-hafsi and laskri yamina,Quasi-controlling of chaotic discrete dynamical systems,Global journal of pure and applied mathematics,vol 12 ,4323,2016-4317,(5)