République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique
Université Larbi Tébessi - Tébessa
Faculté des Sciences Exactes et des Sciences de la Nature et de la Vie
Département : Mathématiques et Informatique

Mémoire de fin d'études
Pour l'obtention du diplôme de MASTER
Domaine : Mathématiques et Informatique
Filière : Mathématiques
Option : Equations aux dérivées partielles et applications

Thème:

Théorèmes de point fixe pour des applications multivoques dans un espace métrique complet.

Présenté Par :

Hadjadj Randa **Bouznad Ikram**

Devant le jury :

Président	**Khaled Berrah**	MCB	UnivérsitéLarbi Tébessi
Examinateur	**Hannachi Fareh**	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi
Encadreur	**Merghadi Faycel**	MCA	UnivérsitéLarbi Tébessi

Date de soutenance : 19/06/2021

بسم الله الرحمن الرحيم

Remerciements

Tout d'abord merci à *ALLAH SOBHANO* de nous avoir donné la force pour terminer ce travail .

Nous tenons à remercier vivement notre encadreur *Dr.Merghadi Faycel* M.C.A à l'université Larbi Tébessi pour ses conseils pertinents, et ses orientations judicieuses.

Nos remerciements distingués vont à *Dr. Khaled Berrah* M.C.A à l'université Larbi Tébessi pour nous avoir fait l'honneur de présider le jury.

Nos remerciements vivement a *Dr.Hannachi Fareh* M.C.B à l'université Larbi Tébessi pour avoir accepté d'examiner ce mémoire.

Enfin , il nous reste à remercier nos familles et nos amis pour leurs soutients .

Résumé

Dans ce mémoire, on a détaillé l'essentiel de contenu de quelques articles qui ont généralisé le Théorème de point fixe pour des applications multivoques définies sur un espace métrique complet. Nous avons commencé dans le premier chapitre par des préliminaires et définitions des applications multivoques, et quelques Théorèmes de base de point fixe comme le Théorème de Banach, le Théorème de Caristi et le Théorème de Nadler. Et dans le deuxième chapitre, Nous avons étudié la généralisation du principe de contraction de Banach et le Théorème du point fixe de Caristi aux cas des applications multivoques. Enfin, dans le dernier chapitre de ce travaille onconsidère le point fixe pour les contractions en Z généralisées via une classe des fonctions de simulation.

Mots clés: point fixe commun, point coïncidence, application multivoque, espace métrique complet, principe de contraction de Banach, Théorème du point fixe de Caristi, Théorème du point fixe de Nadler, application α-admissible .

Abstract

In this work , we have study some articles that generalized the fixed point Theorem for multivalued mappings defined on a complete metric space. We began in the first chapter with preliminaries and definitions of multivalued mappings, and some basic fixed point Theorems as Banach fixed point Theorem, Caristi fixed point Theorem and Nadler fixed point Theorem. Then in the second chapter we have studied the generalization of the principle of Banach contraction and the Fixed Point Theorem of Caristi in the cases of multivalued mappings. Finally, in the last chapter we have considered the fixed point for generalized Z-contractions via a class of simulation functions.

Keywords : common fixed point, coincidence point, multivalued mappings, complete metric space, Banach contraction principle, Caristi fixed point Theorem, Nadler fixed point Theorem, α-admissible mapping .

.

ملخص

في هذه المذكرة ، قمنا بدراسة عدد من المقالات التي عممت نظرية النقطة الثابتة للتطبيقات متعددة القيم المعرفة على فضاء متري تام .حيث قدمنا في الفصل الأول تمهيدات وتعاريف للتطبيقات متعددة القيم ، وبعض النظريات الأساسية للنقطة الثابتة مثل نظرية بناخ ، نظرية كاريستي ونظرية نادلر. أما في الفصل الثاني درسنا تعميم مبدأ التقليص لبناخ ونظرية النقطة الثابتة لكاريستي في حالة تطبيقات متعددة القيم . وأخيرا درسنا النقطة الثابتة للتقلصات المعممة عبر فئة من توابع المحاكاة.

الكلمات الرئيسية: النقطة الثابتة المشتركة, تطبيق متعدد القيم , فضاء متري تام ,مبدأ التقلص لبناخ, نظرية النقطة الثابتة لكاريستي , نظرية النقطة الثابتة لنادلر.

Table des matières

Introduction

Un Théorème de point fixe donne des conditions suffisantes d'existence d'un point fixe pour une fonction, ces Théorèmes permettent d'affirmer qu'une fonction$f$ définie sur X et a valeur dans X admet sous certaines conditions un élément x de X tel que $fx = x$.

Ces Théorèmes se révèlent être des outils très utiles en mathématique principalement dans le domaine de la résolution des équations différentielles.

Le Théorème de point fixe de Banach est un outil important qui garantit l'existence et l'unicité des points fixes et fournit une méthode constrictive pour trouver ces points fixes , le Théorème de Nadler est une généralisation du Théorème de Banach pour les fonctions multivoques.

Le Théorème de point fixe de Caristi est un Théorème étend le Théorème du point fixe de Banach , en garantissant l'existence de points fixes pour une plus large classe d'applications d'un espace métrique complet dans lui-même, a plus tard été généralisé aux fonctions multivoques .

Une fonction multivoque (aussi appelée fonction multivaluée, fonction multiforme ou simplement multifonction) est une relation binaire qui a chaque élément d'un ensemble elle associe un ou plusieurs éléments d'un second ensemble (si l'image de chaque point est un singleton, on dit que l'application est univoque

Un exemple simple de fonction multivoque est la fonction réciproque d'une application non injective.

L'objet de l'Analyse multivoque est l'étude des propriétés des applications multivoques, le besoin de l'Analyse multivoque s'est révélé pour résoudre des problèmes émergents d'autres domaines : la Théorie du controle, l'économie et la gestion, la biologie et les sciences des systémes, l'intelligence artificielle etc ... Les fonctions multivaluées servent aussi en combinatoire, Théorie des graphes, Théorie des jeux .

Le présent travail est composé d'une introduction et de trois chapitres :

Le premier chapitre de ce mémoire contient les éléments indispensables dont on aura besoin pour les chapitres suivants et aussi nous allons rappeler :

* Le Théorème de Banach et le Théorème de Nadler qui généralisé le principe de contraction pour les applications mutivoques .
* Le Théorème de Caristi .

Le deuxième chapitre est dédié aux applications multivoques . Nous introduirons leThéorème du point fixe pour des applications contractives multivoques généralisées et le Théorème du point fixe pour les applications multivoques de type Carsiti.

Enfin, dans le dernier chapitre on considre des points fixes de contractions multivoques via une classe généralissée des fonctions de simulation .

Chapitre 1

Notions préliminaires

Dans ce chapitre , quelques définitions, lemmes et théorémes de point fixe pour des fonctions multivoques qu'on aura besoin dans les chapitres suivants.

1.1 Quelques définitions d'analyse multivoque

Soit X un espace normé . On désigne par 2^X l'ensemble des parties de X.

Comme nous l'avons dit précédemment, nous nous intéressons dans ce mémoire aux applications dites multivoques . Ce sont des applications dont les images ne sont pas nécessairement des points comme en analyse classique, mais des ensembles. Plus présicement, dans cette section nous allons présenter quelques définitions et propriétés relatives à ces fonctions.

Définition 1.1 *Le couple (X, d) est dit un espace métrique si X un ensemble non vide et $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty[$ une application vérifie les conditions suivant :*
pour tout x, y et z de X :

$$\begin{aligned} d(x,y) &= 0 \Leftrightarrow x = y \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,y) &\leq d(x,z) + d(z,y) \end{aligned}$$

Un espace métrique (X, d) est dit complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X.
Une suite (x_n) est dite de cauchy ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tout $n, m > N$.

Définition 1.2 [29] *Une fonction multivoque* $F : X \longrightarrow Y$ *est une application qui à chaque* $x \in X$ *associe* $F(x)$.
$F(x)$ *est un ensemble non vide de* Y.

Définition 1.3 *Un point* $x_0 \in X$ *est dit un point fixe de* F *si :*

$$x_0 \in F(x_0)$$

Dans la littérature, ces applications sont aussi appélles multi-applications, fonctions multivaluées, multifonctions ou encore correspondances.

Remarque 1.1 *Remarquons qu'une application univoque est aussi une application multivoque puisque pour* $x \in X$ *le singleton*

$$f(x) = \{y\}$$

est un sous-ensemble de Y.

Exemple 1.1 *Toute application univoque est une image d'une application multivoque.*
Soit $f : X \longrightarrow Y$ *une application univoque, on définit* $F : X \longrightarrow 2^Y$ *par* $F(x) = \{f(x)\}$.

Définition 1.4 [29] *Soient* X *et* Y *deux ensembles et* $F : X \longrightarrow 2^Y$ *une application multivoque.*
(1) *On appelle domaine de* F, *l'ensemble :*

$$domF := \{x \in X \ / \ F(x) \neq \phi\}$$

(2) *On appelle image de* F, *l'ensemble :*

$$\operatorname{Im} F := \{y \in Y \ / \ \exists x \in X; \ y = F(x)\}$$

(3) On appelle image d'une partie A de X par F l'ensemble :

$$F(A) := \bigcup_{x \in A} F(x)$$

(4) Le graphe de F est le sous-ensemble de $X \times Y$ défini par :

$$gphF := \{(x, y) \in X \times Y \ / \ y \in F(x)\}$$

Définition 1.5 [29]*Une fonction* $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *est dite semi-continue inférieurement en* x_0 *si pour tout* $x \in X$

$$\varphi(x_0) \leq \liminf_{x \longrightarrow x_0} \varphi(x).$$

Ou de façon équivalente, si l'ensemble $\{x \in X : \varphi(x) \leq \alpha\}$ *est fermé pour tout* $\alpha \in \mathbb{R}$.
Elle est semi-continue supérieurement si $(-\varphi)$ *est semi-continue inférieurement.*

Définition 1.6 [29] *(Semi-continue supérieure) . On dit qu'une application multivoque* $F : X \longrightarrow Y$ *est semi-continue supérieure (scs)en un point* x_0 *de son domaine si pour tout voisinage* V *de* $F(x_0)$ *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $F(x) \subset V$ *, pour tout* $x \in B_\alpha(x)$

l'application F sera dite scs si elle l'est en chaque point de son domaine.

Définition 1.7 [29] *(Semi-continue inférieure). Une application multivoque* $F : X \longrightarrow Y$ *est dite semi-continue inférieurement (sci)en un point* x_0 *de son domaine* F*, si pour tout* $y_0 \in F(x_0)$ *et pour tout suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset domF$ *convergeant vers* x_0*, il existe une suite d'éléments* $y_n \in F(x_n)$ *qui converge vers* y_0.

On dira que F est sci si elle l'est en chaque point de son domaine.

Définition 1.8 *Une application* $F : X \longrightarrow Y$ *est dite continue en un point* $x_0 \in domF$*, si elle est à la fois scs et sci en ce point . Elle sera dite continue si et seulement si elle l'est en chaque point de son domaine.*

Exemple 1.2 *Considerons la fonction* f *définie par :*

$$\begin{cases} f(x) = 0 & pour \quad x \neq 0 \\ f(x) = 1 & pour \quad x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est semi-continue superieurement.

Définition 1.9 *Une fonction* $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *est dite sous additive si* $\eta(s + t) \leq \eta(s) + \eta(t)$ *pour tout* $s, t \in [0, \infty)$.

Définition 1.10 *Soit* (X, d) *un espace métrique, on note:*

$CB(X)$ l'ensemble de tous les sous-ensembles fermés et bornés dans X.
$B(X)$ l'ensemble des sous-ensembles bornés dans X.
$C(X)$ l'ensemble des sous-ensembles fermés dans X.

Définition 1.11 [31]*Pour tout* $x \in X$ *et* $A \subseteq X$*, on définit la fonction* $D : X \times CB(X) \longrightarrow [0,+\infty[$ *par :*

$$D(x,A) = \inf_{y \in A} d(x,y)$$

qui est la distance entre x *et* A*.*
Pour tout A *et* $B \in B(X)$*, on définit la fonction* $D : B(X) \times B(X) \longrightarrow [0,+\infty[$ *par :*

$$D(A,B) = \inf\{d(a,b);\ a \in A, b \in B\}.$$

Définition 1.12 [31]*Pour deux parties* A *et* $B \in CB(X)$*, on définit la fonction :*

$$H : CB(X) \times CB(X) \longrightarrow [0,+\infty[$$

par :

$$H(A,B) = \max\left\{\sup_{x\in A} D(x,B), \sup_{y\in B} D(y,A)\right\} \tag{1.1}$$

H est appelée la distance de hausdorff induite par la métrique d.

Remarque 1.2 $(CB(X),H)$ *est un espace métrique complet si* (X,d) *est un espace métrique complet.*

Définition 1.13 *Soit* (X,d) *un espace métrique, on dit que* $T : X \longrightarrow CB(X)$ *est une contraction, s'il existe* $0 \leq \lambda < 1$ *tel que :*

$$H(Tx,Ty) \leq \lambda d(x,y)$$

pour tout $x,y \in X$*.*

Définition 1.14 *Soient* (X,d) *un espace métrique et* $F : X \longrightarrow X$ *une application, on dit que* F *est lipschitzienne ou K-lipschitzienne s'il existe un nombre réel* $k > 0$ *tel que :*

$$\forall x,y \in X : d(F(x),F(y)) \leq kd(x,y)$$

Le plus petit réel k *qui vérifi l'inegalité est appelé la constante de lipschitz.*
F *est une application contractante s'il existe* $k \in [0,1[$*, tel que :*

$$\forall x,y \in X : d(F(x),F(y)) \leq kd(x,y)$$

Elle est non expansive si $k = 1$. Enfin est dite contractive si pour tout $x,y \in X$ et $x \neq y$, on a :

$$d(F(x),F(y)) < d(x,y)$$

Notons que contraction $\Rightarrow$ contractive $\Rightarrow$ non expansive $\Rightarrow$ lipschitzienne, et que toutes ces fonctions sont
uniformément continues

1.2 Quelques Théoremèmes fondamentaux de point fixe :

1.2.1 Théorème du point fixe de Banach

Le Théorème du point fixe de Banach connu aussi sous le nom du Théorème de l'application contractante est un théorème simple à prouver et possède de nombreuses applications, qui incluent les théorème d'existences pour les équations différentielles, les équations intégrales et convergence de certaines méthodes numériques comme celle de Newton pour la résolution d'équation non linéaires.

Théorème 1.1 [3] *(Banach 1922) Soient (X, d) un espace métrique complet non vide et $f : X \longrightarrow X$ une application contractante, alors f admet un point fixe unique dans X c-à-d :*

$$\exists! u \in X \ ; \ f(u) = u$$

En outre ce point peut-etre obtennu comme limite de toute suite engendrée par l'itération :

$$x_{n+1} = f(x_n) \, / n \in \mathbb{N}$$

avec x_0 élément arbitraire de X, tel que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} x_n = u \quad et \quad d(x_n, u) \leq k^n (1-k)^{-1} d(x_1, x_0) \, ; \ n \geq 1$$

Preuve. voir [3] . ■

1.2.2 Théorème du point fixe de Nadler

Le théorème de Nadler est une généralisation du principe de contraction de Banach pour les fonctions multivoques.

Théorème 1.2 [23]. *(Nadler 1969) . Soit (X, d) est un espace métrique complet, si $F : X \longrightarrow CB(X)$ est une application contractante multivoque . Alors F a un point fixe.*

Preuve. Soit $\alpha < 1$ est une constante de Lipshitz pour F, (on peut supposer que $\alpha > 0$) et soit $p_0 \in X$. On choisit $p_1 \in F(p_0)$. Comme $F(p_0), F(p_1) \in CB(X)$ et $p_1 \in F(p_0)$, alors il exist un point $p_2 \in F(p_1)$ tel que

$$d(p_1, p_2) \leq H(F(p_0), F(p_1)) + \alpha$$

(Voir la remarque qui suite). Maintenant, ayant

$$F(p_1), F(p_2) \in CB(X) \text{ et } p_2 \in F(p_1)$$

il existe un point $p_3 \in F(p_2)$ tel que $d(p_2, p_3) \leq H(F(p_1), F(p_2)) + \alpha^2$. En continuant sous cette même ligne, en construit une suite $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ de point de X tel que $p_{i+1} \in F(p_i)$ et $d(p_i, p_{i+1}) \leq H(F(p_{i-1}), F(p_i)) + \alpha^i$ pour tout $i \geq 1$. Notons que :

$$\begin{aligned} d\left(p_i, p_{i+1}\right) & \leqq H\left(F\left(p_{i-1}\right), F\left(p_i\right)\right) + \alpha^i \leqq \alpha d\left(p_{i-1}, p_i\right) + \alpha^i \\ & \leqq \alpha\left[H\left(F\left(p_{i-2}\right), F\left(p_{i-1}\right)\right) + \alpha^{i-1}\right] + \alpha^i \\ & \leqq \alpha^2 d\left(p_{i-2}, p_{i-1}\right) + 2\alpha^i \leqq \cdots \leqq \alpha^i d\left(p_0, p_1\right) + i \cdot \alpha^i \end{aligned}$$

pour tout $i \geq 1$. D'où

$$\begin{aligned} d\left(p_i, p_{i+j}\right) \leqq & \ d\left(p_i, p_{i+1}\right) + d\left(p_{i+1}, p_{i+2}\right) + \cdots + d\left(p_{i+j-1}, p_{i+j}\right) \\ \leqq & \ \alpha^i d\left(p_0, p_1\right) + i \cdot \alpha^i + \alpha^{i+1} d\left(p_0, p_1\right) + (i+1) \cdot \alpha^{i+1} + \cdots \\ & + \alpha^{i+j-1} d\left(p_0, p_1\right) + (i+j-1) \cdot \alpha^{i+j-1} \\ = & \left(\sum_{n=i}^{i+j-1} \alpha^n\right) d\left(p_0, p_1\right) + \sum_{n=i}^{i+j-1} n\alpha^n \end{aligned}$$

Pour tout $i, j \geq 1$.
Il s'ensuit que la suite $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Puisque (X, d) est complet, la suite $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge vers un point $x_0 \in X$. Par conséquent, la suite $\{F(p_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge vers $F(x_0)$ et, puisque $p_i \in F(p_{i-1})$ pour tout i, il s'ensuit que $x_0 \in F(x_0)$. Ceci complète la démonstration du Théorème.
■

Remarque 1.3 *Soit $A, B \in CB(X)$ et soit $a \in A$. Si $\eta > 0$, alors c'est une simple conséquence de la définition de $H(A, B)$ qu'il existe $b \in B$ tel que $d(a, b) \leq H(A, B) + \eta$ (dans la démonstration du théorème précédent la constante de Lipschitz α et par la suite ______ $\underline{c}$ _α^i joue le role d'un tel η) . Cependant, il peut ne pas y avoir de point $b \in B$ tel que $d(a, b) \leq H(A, B)$ (si B est compact, alors un tel point b existe).*

1.2.3 Théorème du point fixe de Caristi

En 1976, à l'aide d'induction transfinie, Caristi a obtenu un Théorème de point fixe .

Théorème 1.3 [8] (*Caristi 1976*) *Soient* (X, d)*un espace métrique complet et* $f : X \longrightarrow X$ *une application continue, on suppose qu'il existe*

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

fonction semi-continue inférierement et bornée inférierement telle que pour tout $x \in X$ *on a :*

$$d(x, f(x)) \leq \varphi(x) - \varphi(f(x))$$

Alors f *admet au moin un point fixe* $u \in X$.

Remarque 1.4 *Encore, le Théorème* (1.1) *est un cas particulier du Théorème* (1.2) *il suffit de prendre*

$$\varphi(x) = \frac{d(x, f(x))}{1-k}$$

Preuve. *voir [8] .* ■

Il existe une généralisation du Théorème de Caristi aux fonctions multivoques.

Théorème 1.4 *(Caristi multivoque). Soient* (X, d) *un espace métrique complet et* $\phi : X \to (-\infty, +\infty)$ *une fonction propre semi-continue inférieurement bornée inférieurement. Soit* $F : X \to 2^X$ *une fonction multivoque telle que pour tout* $x \in X$ *; il existe* $y \in F(x)$ *tel que :*

$$d(x, y) < \phi(x) - \phi(y).$$

Alors F *a un point fixe.*

Preuve. Pour chaque $x \in X$ posons $f(x) = y$ où y est un élément de X tel que $y \in F(x)$ et

$$d(x, y) < \phi(x) - \phi(y)$$

Alors, f est une fonction de X dans X qui satisfait

$$d(x, f(x)) < \phi(x) - \phi(f(x))$$

pour tout $x \in X$.

Puisque ϕ est une fonction propre, il existe $u \in X$ tel que $\phi(u) < +\infty$. Alors, posons :

$$X' = \{x \in X : \phi(x) \leq \phi(u) - d(u, x)\}$$

$X\prime$ n'est pas vide puisque $u \in X'$. De plus, par la semi-continuité inférieure de ϕ . X' est fermé et est donc un espace métrique complet .

Remarquons que la fonction ϕ restreinte au domaine $X\prime$ est à valeurs réelles et qu'elle est aussi semi-contimue inférieurement et bornée inférieurement.
Montrons maintenant que$X\prime$ est invariant sous f . Pour tout $x \in X\prime$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\phi\left(f(x)\right) &\leq \phi(x) - d(x, f(x)) \\
&\leq \phi\left(u\right) - \left(d(u, x) + d(x, f(x)\right) \\
&\leq \phi\left(u\right) - d\left(u, f(x)\right)
\end{aligned}$$

Donc, $f(x) \in X\prime$ pour tout $x \in X\prime$.
Le Théorème 1.1.4 nous permet de conclure que f a un point fixe $x \in X\prime$. Donc, $x = f(x) \in F(x)$. ■

Chapitre 2

Théorèmes de point fixe pour des applications contractives multivoques généralisées

Dans ce chapitre, le fameux principe de contraction de Banach et le Théorème du point fixe de Caristi sont généralisé aux cas des applications à valeurs multiples . Nos resultats sont des extensions du célèbre Théorème du point fixe de Nadler ainsi que quelques types de Théorème de Caristi pour les applications multivoques .

Théorème 2.1 *Soit (X,d) un espace metrique complet et T une application multivoque sur X avec Tx un sous-ensemble fermé borné non vide de X pour tout $x \in X$. S'il existe $c \in [0,1)$ tel que :*

$$H(Tx,Ty) \leq cd(x,y)$$

Alors T a un point fixe dans X.

Dans [21], les auteurs ont prouvé le Théorème 2.2 qui est une généralisation duThéorème 2.1 et qui s'énonce comme suit :

Théorème 2.2 *Soit (X,d) un espace metrique complet et T une application multivoque sur X avec Tx un sous-ensemble fermé borné non vide X pour tout $x \in X$. S'il existe $c \in [0,1)$ tel que pour tout $x,y \in X$*

$$H(Tx,Ty) \leq c\max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{1}{2}\{d(x,Ty)+d(y,Tx)\}\right\},$$

Alors T a un point fixe dans X de sorte que $x \to d(x,Tx)$ soit inférieurement semicontinue.

En particulier, dans [29] les auteurs ont donné une généralisation du Théorème 2.1. Dans cet article, nous donnons une généralisation du Théorème 2.2 sans la condition $x \to d(x, Tx)$ est semi-continu inférieurement. Cela sera fait dans le Théorème 2.3.

Dans [18], les auteurs ont prouvé le Théorème 2.3 qui suit et qui est une réponse positive de la conjecture proposée par Reich [24]. Dans [18], les auteurs ont remplacé la condition $\lim_{r\to t^+} k(r) < 1$ pour tout $0 < t < \infty$ par $\lim_{r\to t^+} k(r) < 1$ pour tout $0 < t < \infty$ avec $k : [0, \infty) \to [0, 1]$. Les auteurs ont donné une preuve alternative du Théorème 5 de [18].

Théorème 2.3 *Soit (X, d) un espace metrique complet et T une applications multivoques sur X avec Tx un sous-ensemble fermé borné non vide X pour tout $x \in X$. Si pour tout $x, y \in X$*

$$H(Tx, Ty) \leq k(d(x, y))d(x, y)$$

Où $k : (0, \infty) \to [0, 1)$ une fonction tel que $\limsup_{r\to t^+} k(r) < 1$ pour tout $t \in [0, 1)$, alors T a un point fixe dans X

Lemme 2.1 (cite :49) *Soit (X, d) un espace métrique et $A, B \in CB(X)$ avec $H(A, B) < \epsilon$. Alors, pour tout $a \in A$, il existe un $b \in B$ tel que $d(a, b) < \epsilon$.*

A partir de maintenant, notons $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ une fontion strictement croissante telle que :
(φ_1) $\phi(0) = 0$,
(φ_2) $0 < \phi(t) < t$ pour tout $t > 0$,
(φ_3) $\sum_{n=1}^{\infty} \phi^n(t) < \infty$ pour tout $t \in (0, \infty)$.

2.1 Point fixe commun des applications multivoques

Théorème 2.4 *Soit (X, d) un espace métrique et $T, S : X \to CB(X)$ des applications multivoques satisfaisant pour tout $x, y \in X$; $c \in [0, \infty[$*

$$H(Sx, Ty) \leq \phi \max\left\{d(x, y), d(x, Sx), d(y, Ty), \frac{1}{2}\{d(x, Ty) + d(y, Sx)\}\right\}, \tag{2.1}$$

alors, T et S ont un point fixe commun dans X. Cela veut dire qu'il existe un point $p \in X$ tel que $p \in Tp \cap Sp$.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ et $x_1 \in Sx_0$. Soit $c \in [0, \infty)$ tel que $\phi(d(x_0, x_1)) < \phi(c)$. On a :

$$\begin{aligned} d\left(x_1, Tx_1\right) &\leq H\left(Sx_0, Tx_1\right) \\ &\leq \phi\left(\max\left\{d\left(x_0, x_1\right), d\left(x_0, Sx_0\right), d\left(x_1, Tx_1\right), \tfrac{1}{2}\left\{d\left(x_0, Tx_1\right) + d\left(x_1, Sx_0\right)\right\}\right\}\right) \qquad (2.2) \\ &\leq \phi\left(\max\left\{d\left(x_0, x_1\right), d\left(x_0, x_1\right), d\left(x_1, Tx_1\right), \tfrac{1}{2}\left\{d\left(x_0, Tx_1\right) + d\left(x_1, x_1\right)\right\}\right\}\right) \end{aligned}$$

Si $d(x_0, x_1) \leq d(x_1, Tx_1)$ alors $d(x_1, Tx_1) \leq \phi\left(d(x_1, Tx_1)\right)$ et

$$\begin{aligned} d(x_0, x_1) &\leq d\left(x_0, x_1\right) + d(x_1, Tx_1) \\ &\leq 2d(x_1, Tx_1) \end{aligned}$$

donc :

$$0 \leq \frac{1}{2} d(x_0, x_1) \leq d(x_1, Tx_1)$$

et puis :

$$d(x_1, Tx_1) \leq \phi\left(d(x_1, Tx_1)\right) \leq d(x_1, Tx_1)$$

ce qui implique que $d(x_1, Tx_1) = 0$ et

$$0 \leq d(x_0, x_1) \leq 0$$

donc :

$$d(x_0, x_1) = 0 \Rightarrow x_0 = x_1$$

$$\Rightarrow Sx_0 = Sx_1$$

Alors $x_1 \in Tx_1 \cap Sx_1$, ce qui prouve que T et S possède un point fixe commun dans X .
Supposons que $d(x_1, Tx_1) \leq d(x_0, x_1)$, de 2.1 on a :

$$d(x_1, Tx_1) \leq \phi\left(d(x_0, x_1)\right) \prec \phi\left(c\right)$$

On prend $x_2 \in Tx_1$ tel que $d(x_1, x_2) < \phi(c)$. De façon similaire on a :

$$\begin{aligned} d\left(x_2, Sx_2\right) &\leq H\left(Sx_2, Tx_1\right) \\ &\leq \phi\left(\max\left\{d\left(x_1, x_2\right), d\left(x_2, Sx_2\right), d\left(x_1, Tx_1\right), \tfrac{1}{2}\left\{d\left(x_2, Tx_1\right) + d\left(x_1, Sx_2\right)\right\}\right\}\right) \\ &\leq \phi\left(\max\left\{d\left(x_1, x_2\right), d\left(x_2, Sx_2\right), d\left(x_1, x_2\right), \tfrac{1}{2}\left\{d\left(x_2, x_2\right) + d\left(x_1, Sx_2\right)\right\}\right\}\right) \\ &\leq \phi\left(d\left(x_1, x_2\right)\right) \\ &< \phi^2(c) \end{aligned}$$

On prend $x_3 \in Sx_2$ tel que $d(x_2, x_3) < \phi^2(c)$. Apres avoir effectué le processus plusieurs fois, on construit une sequence x_n dans X tel que :

$$x_{2n+1} \in Sx_{2n}, x_{2n+2} \in Tx_{2n+1}, d\left(x_n, x_{n+1}\right) < \phi^n(c).$$

Ainsi, on a $\sum_{n=0}^{\infty} d(x_n, x_{n+1}) < \sum_{n=0}^{\infty} \phi^n(c) < \infty$. Donc, x_n est une suite de Cauchy dans X et soit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$ de 2.2, on a :

$$\begin{aligned} d\left(x_{2n+1}, Tp\right) &\leq H\left(Sx_{2n}, Tp\right) \\ &\leq \phi\left(\max\left\{d\left(x_{2n}, p\right), d\left(x_{2n}, Sx_{2n}\right), d(p, Tp), \tfrac{1}{2}\left\{d\left(x_{2n}, Tp\right) + d\left(p, Sx_{2n}\right)\right\}\right\}\right) \\ &\leq \phi\left(\max\left\{d\left(x_{2n}, p\right), d\left(x_{2n}, x_{2n+1}\right), d(p, Tp), \tfrac{1}{2}\left\{d\left(x_{2n}, Tp\right) + d\left(p, x_{2n+1}\right)\right\}\right\}\right) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Quand $n \to \infty$ dans 2.3, on a $d(p, Tp) \leq \phi(d(p, Tp))$. Ainsi $d('Tp) = 0$ avec $p \in Tp$. De façon similaire, on peut démontrer que $p \in Sp$. Donc, on a $p \in Tp \cap Sp$. ■

Corollaire 2.1 *Soit (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to CB(X)$ une application multivoque satisfaisant pour tout $x, y \in X$,*

$$H(Tx, Ty) \leq \phi\left(\max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{1}{2}\{d(x, Ty) + d(y, Tx)\}\right\}\right)$$

Alors T possède un point fixe dans X .

Si on a $\phi(t) = kt$; $k \in [0, 1]$, dans le Theoreme 2.1 (Corllaire 2.1), alors la conclusion du Thorème 2.1 (Corrollaire 2.1) est satisfaite.

Théorème 2.5 *Soient (X, d) un espace métrique et $T, S : X \to CB(X)$ des applications multivoques et $f : X \to X$ une application satisfaisant :*

1. *$T(X) \subset f(X)$ et $S(X) \subset f(X)$,*
2. *$f(X)$ est complète,*
3. *Il existe une fonction $\varphi : (0, \infty) \to [0, 1)$ telle que :*

$$\limsup_{r \to t^+} \varphi(r) < 1 \text{ pour chaque } t \in [0, \infty) \tag{2.4}$$

et pour chaque $x, y \in X$:

$$H(Sx, Ty) \leq \varphi(d(fx, fy))\, d(fx, fy) \tag{2.5}$$

Alors T, S et f ont un point de coincidence dans X . C-à-d qu'il existe un $p \in X$ tel que $fp \in Sp \cap Tp$.

Preuve. Soit $x_0 \in X$ et $x_1 \in X$ de façon à ce que $fx_1 \in Sx_0$, de 2.5 on a :

$$d(fx_1, Tx_1) \leq H(Sx_0, Tx_1) \leq \varphi(d(fx_0, fx_1))\, d(fx_0, fx_1) < d(fx_0, fx_1)$$

à partir du Lemme 2.1 et (i), on prend $x_2 \in X$ tel que :

$$fx_2 \in Tx_1 \text{ et } d(fx_1, fx_2) < d(fx_0, fx_1)$$

De 2.5, on a :

$$\begin{aligned} d(fx_2, Sx_2) &\leq \\ H(Sx_2, Tx_1) &\leq \varphi(d(fx, fy))\, d(fx, fy) < d(fx_1, fx_2) \end{aligned}$$

Aussi ,à partir du Lemme 2.1 et (i), on prend $x_3 \in X$ tel que :

$$fx_3 \in Sx_2 \text{ et } d(fx_2, fx_3) < d(fx_1, fx_2)$$

En continuant le processus, on construit une suite $\{x_n\}$ dans X tel que pour $n = 0, 1, \cdots$

$$fx_{2n+1} \in Sx_{2n}, fx_{2n+2} \in Tx_{2n+1}, d\left(fx_{n+1}, fx_{n+2}\right) < d\left(fx_n, fx_{n+1}\right)$$

Puisque $\{d(fx_n, fx_{n+1})\}$ est une suite décroissante dans $(0, \infty)$, la suite $\{d(fx_n, fx_{n+1})\}$ est convergente. De 2.4 il existe un $r \in (0, 1)$ tel que $\limsup_{n\to\infty} \varphi(d(fx_n, fx_{n+1})) = r$. Ainsi, pour chaque $l \in (r, 1)$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$,$\varphi\left(d\left(fx_n, fx_{n+1}\right)\right) < l$. Par consequent, on a pour $n \geq n_0$;

$$\begin{aligned} d\left(fx_n, fx_{n+1}\right) \leq & \ \varphi\left(d\left(fx_{n-1}, fx_n\right)\right) d\left(fx_{n-1}, fx_n\right) \\ < l & \ \ d\left(fx_{n-1}, fx_n\right) \\ < & \ \ l^{n-n_0} d\left(fx_{n_0}, fx_{n_0+1}\right) \end{aligned}$$

Pour $m > n \geq n_0$,on a

$$\begin{aligned} d\left(fx_n, fx_m\right) \leq & \ d\left(fx_n, fx_{n+1}\right) + d\left(fx_{n+1}, fx_{n+2}\right) + \cdots + d\left(fx_{m-1}, fx_m\right) \\ \leq & \ \left(l^{n-n_0} + l^{n-n_0+1} + \cdots + l^{m-n_0-1}\right) d\left(fx_{n_0}, fx_{n_0+1}\right) \\ \leq & \ \tfrac{l^{n-n_0}}{1-l} d\left(fx_{n_0}, fx_{n_0+1}\right) \end{aligned}$$

Ce qui implique $\lim\limits_{m,n\to\infty} d(fx_n, fx_m) = 0$ .Par consequent, $\{fx_n\}$ est une suite de Cauchy dans $f(X)$. Soit $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n = u \in f(X)$, alors il existe un point $p \in X$ tel que : $fp = u$ et $\lim\limits_{n\to\infty} fx_n = fp$. De **??**, on a :

$$d(fx_{2n+2}, Sp) \leq H(Sp, Tx_{2n+1}) \leq \varphi\left(d(fp, fx_{2n+1})\right) d(fp, fx_{2n+1})$$

Quand $n \to \infty$, on obtient $d(fp, Sp) = 0$ ou $fp \in Sp$.
Similairement, On peut montrer que $fp \in Tp$, Ainsi, on a $fp \in Sp \cap Tp$. ■

Corollaire 2.2 *Soient (X, d) un espace métrique et $T : X \to CB(X)$ une application multivoque et $f : X \to X$ une application satisfaisant :*

1. *$T(X) \subset f(X)$,*
2. *$f(X)$ est complète,*
3. *Pour tout $x, y \in X$, $H(Tx, Ty) \leq \varphi\left(d(fx, fy)\right) d(fx, fy)$, où $\varphi : (0, \infty) \to [0, 1)$ est une fonction telle que $\limsup_{r\to t^+} \varphi(r) < 1$ pour chaque $t \in [0, \infty)$. Alors T et f ont un point de coincidence dans X. C-à-d, qu'il existe $p \in X$ tel que $fp \in Tp$.*

Dans le Theorème 2.5(Corrolaire 2.2), si on prend $f = id$ alors on obtient le résultat suivant, avec id l'application identique sur X.

Corollaire 2.3 *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T, S : X \to CB(X)$ des applications multivoques satisfaisants $x, y \in X$;*

$$H(Sx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y),$$

Avec $\varphi : (0, \infty) \to [0, 1)$ est une fonction telle que $\limsup_{r \to t^+} \varphi(r) < 1$ pour tout $t \in [0, \infty)$. Alors T et S ont un point fixe commun dans X . C-à-d, qu'il existe un $p \in X$ tel que $p \in Sp \cap Tp$.

Corollaire 2.4 *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to CB(X)$ une application multivoque satisfaisant pour tout $x, y \in X$, $H(Tx, Ty) \leq \varphi(d(x, y))d(x, y)$ avec $\varphi : (0, \infty) \to [0, 1)$ est une fonction telle que $\limsup_{r \to t^+} \varphi(r) < 1$ pour tout $t \in [0, \infty)$. Alors T possède un point fixe dans X, c'est à dire qu'il existe un $p \in X$ tel que $p \in Tp$.*

2.2 Théorème de point fixe pour les applications multivoques de type Caristi

L'objectif de cette partie est double. On va étudier un théorème du point fixe pour des applications contractives multivoque et un autre qui généralise le théorème du point fixe de type Caristi pour le cas des applications multivoques. Ensuite un exemple est fourni pour nous démontre que ce résultat est une extension non triviale du Théorème du point fixe de Nadler.

2.2.1 Théorème de point fixe pour des applications contractives multivoques

Soit $T : X \to N(X)$ une application multivoque. On définit une fonction $f : X \to R$ comme $f(x) = d(x, T(x))$.
Pour une constante positive b ($b \in (0, 1)$), on définit un ensemble $I_b^x \subset X$ par :

$$I_b^x = \{y \in T(x) |\ bd(x, y) \leq d(x, T(x))\}$$

Le Theorème suivant est le résultat principal de cette section.

Théorème 2.6 *Soit (X, d) un espace métrique complet, $T : X \to C(X)$ une application multivoque, s'il existe une constante $c \in (0, 1)$ telle que pour tout $x \in X$ il y'a un $y \in I_b^x$ satisfaisant $d(y, T(y)) \leq cd(x, y)$, alors T possède un point fixe dans X. Sachant que $c < b$ et f inférieurement semi-continue.*

Preuve. Puisque $T(x) \in C(X)$ pour tout $x \in X$, I_b^x est non vide pour tout constant $b \in (0,1)$ et tout point initial $x_0 \in X$, il existe un $x_1 \in I_b^{x_0}$ tel que :

$$d(x_1, Tx_1) \leq cd(x_0, x_1)$$

Et pour $x_1 \in X$, il existe un $x_2 \in I_b^{x_1}$ satisfaisant :

$$d(x_2, Tx_2) \leq cd(x_1, x_2)$$

En continuant le processus, on obtient une suite itérative $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, avec $x_{n+1} \in I_b^{x_n}$ et $d(x_{n+1}, T(x_{n+1})) \leq cd(x_n, x_{n+1})$ $n = 0, 1, 2, \cdots$.
Dans ce qui va suivre, on vérifiera que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. En outre,

$$d(x_{n+1}, T(x_{n+1})) \leq cd(x_n, x_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

D'un autre coté $x_{n+1} \in I_b^{x_n}$ implique :

$$bd(x_{n+1}, x_{n+1}) \leq d(x_n, T(x_n)) \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Avec les deux inégalités, on a :

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \frac{c}{b} d(x_n, x_{n+1}) \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$d(x_{n+1}, T(x_{n+1})) \leq \frac{c}{b} d(x_n, T(x_n)) \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Il est facile de prouver que

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \frac{c^n}{b^n} d(x_0, x_1) \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$d(x_n, T(x_n)) \leq \frac{c^n}{b^n} d(x_0, T(x_0)) \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Ensuite pour $m, n, \in N, m > n$,

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq a^{m-1} d(x_0, x_1) + a^{m-2} d(x_0, x_1) + \cdots + a^n d(x_0, x_1) \\ &\leq \frac{a^n}{1-a} d(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Avec $a = c/b$, Du au fait que $c < b$, on a $a^n \to 0 (n \to \infty)$, ce qui veut dire que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. Selon la complétude de X, il existe un $x \in x$ tel que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers x . On affirme que x est un point fixe de T.

En fait, De la preuve ci-dessus, on obtient que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers x . D'un autre coté, $\{f(x_n)\}_{n=0}^{\infty} = \{d(x_n, T(x_n))\}_{n=0}^{\infty}$ est décroissante et converge vers 0. Puisque f est inférieurement semi-continue, on a :

$$0 \leq f(x) \leq \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) = 0.$$

D'ou $f(x) = 0$, finalement, la fermeture de $T(x)$ implique $x \in T(x)$. ■

Remarque 2.1 *Le Théorème 2.6 est une généralisation de Theorème du point fixe de Nadler.*

1. En fait, si T satisfait la condition du Theorème de Nadler, alors :
   (a) f est inférieurement semi-continue, ce qui suit du fait que T, étant une contraction à valeurs multiples soit supérieurement semi-continue.
   (b) Pour tout $x \in X, y \in T(x)$,
   $$d(y, T(y)) \leq H(T(x), T(y)) \leq cd(x, y)$$
   D'où, T satisfait les conditions du Théorème 2.6, donc l'existence d'un point fixe a été prouvée.
2. L'exemple suivant montre que le Théorème 2.6 est une extension du Theorème du point fixe de Nadler.

Soit :

$$X = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\} \cup \{0, 1\},\ d(x, y) = |x - y|$$

Pour $x, y \in X$, alors X est un espace métrique complet. On définit une application $T : X \to C(X)$ comme :

$$T(x) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2^{n+1}}, 1\right\}, & \text{si} \quad x = \frac{1}{2^n}, n = 0, 1, 2, \ldots, \\ \left\{0, \frac{1}{2}\right\}, & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Évidemment, T est une application non contractive dans le sens de Nadler, en effet :

$$H\left(T\left(\frac{1}{2^n}\right), T(0)\right) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^n} = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = d\left(\frac{1}{2^n}, 0\right), \quad n = 1, 2, \cdots$$

D'autre part, il est facile de calculer :

$$f(x) = d(x, T(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}, & x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & x = 0, 1 \end{cases}$$

D'ou f est continue.
En outre, il existe $y \in I_{0,7}^x$ pour tout $x \in X$ tel que :

$$d(y, T(y)) = \frac{1}{2} d(x, y)$$

Alors l'existence un point fixe suit du Théorème 2.6
D'après le Théorème 2.6 est une extension du Theorème de Nadler.

Remarque 2.2 *Il est nécessaire de noter que le Theorème 2.6 n'assure pas l'unicité du point fixe même si T est à valeur simple.*
Pour instance, soit :

$$X = \left\{\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, 1+\frac{1}{2^n}, \cdots\right\} \cup [0,1], d(x,y) = |x-y|$$

Pour $x, y \in X$ alors X est un espace métrique complet. on définit $T : X \to X$ par :

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}, & x = \frac{1}{2^n}, \\ 1+\frac{1}{2^{n+1}}, & x = 1+\frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \ldots. \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

Puisque T est continue, alors $f(x) = |x - T(x)|$ est continue, par ailleurs :

$$d(T(x), T^2(x)) = \frac{1}{2} d(x, T(x)), \forall x \in X$$

Alors T possède un point fixe selon le Théorème 2.1 ; en fait $T(0) = 0, T(1) = 1$. Puisque $I_b^x \subset T(x)$, On a ce qui suit.

Corollaire 2.5 *Soit (X, d) un espace métrique complet, $T : X \to C(X)$ une application multivoque. Si il existe une constante $c \in (0,1)$ tel que pour tout $x \in X, y \in T(x)$:*

$$d(y, T(y)) \geq cd(x, y),$$

Alors T possède un point fixe dans X à condition que f soit inférieurement semi-continue.

Le Corollaire ci-dessous est aussi une extension du principe contractif de Nadler .

Théorème 2.7 *Soit (X, d) une espace métrique complet, $T : X \to C(X)$ une application multivoque . Assumons, qu'il existe une constante $c \in (0,1)$ telle que pour tout $x \in X, y \in T(x)$ il existe $z \in T(y)$ satisfaisant :*

$$\int_0^{d(y,z)} \varphi(t)dt \leq c \int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt$$

Avec $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ une application Lebesgue intégrable qui est sommable (e.g avec une intégral finie) dans chaque ensemble compacte de $[0,\infty)$, et tel que pour chaque $\epsilon > 0$,

$$\int_0^{\epsilon} \varphi(t)dt > 0$$

Alors T possède un point fixe dans X à condition que f soit inférieurement semi-continue.

Preuve. Pour tout point initial $x_0 \in X$ et $x_1 \in T(x_0)$, on peut construire une suite itérative $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ avec $x_{n+1} \in T(x_n)$ et

$$\int_0^{d(x_{n+1},x_{n+2})} \varphi(t)dt \leq c \int_0^{d(x_n,x_{n+1})} \varphi(t)dt, n = 0, 1, 2, \cdots$$

On vérifie que $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge vers un point fixe de T en trois étapes.

Etape 1 $f(x_n) \to 0 (n \to \infty)$

Il est facile de vérifier que $\{d(x_n, x_{n+1})_{n=0}^{\infty}\}$ est décroissante et

$$\int_0^{d(x_n,x_{n+4})} \varphi(t)dt \leq c^n \int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

Soit $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$, on affirme que $u_n \to 0(n \to \infty)$.

En fait, $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ est convergente parce-que $\{u_n\}_{n=0}^{\infty}$ est non négative est décroissante. On suppose $u_n \to \epsilon(n \to \infty), \epsilon > 0$, Alors

$$\int_0^{u_n} \varphi(t)dt \geq \int_0^{\epsilon} \varphi(t)dt, \quad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Donc on a

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{u_n} \varphi(t)dt \geq \int_0^{\epsilon} \varphi(t)dt > 0$$

Qui est en contradiction avec le fait que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{u_n} \varphi(t)dt = \lim_{n\to\infty} c^n \int_0^{d(x_0,x_1)} \varphi(t)dt = 0$$

On notera que $0 \leq f(x_n) \leq d(x_n, x_{n+1})$, donc on a $f(x_n) \to 0(n \to \infty)$.

Etape 2 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ est une suite de Cauchy. La preuve de cette affirmation suit la méme manière de celle de l'étape 3 du théorème 2.1 dans [1]. Puisque X est un espace métrique complet, il existe un $x \in X$ tel que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Etape 3 Cette affirmation suit de la infériorité semi-continue de f, la convergence de $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ et la fermeture de T.

■

Remarque 2.3 *On définit $\Phi = \{\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)\}$ comme étant Lebesgue-Intégrable et elle satisfait $\int_0^{\epsilon} \varphi(t)dt > 0$ pour chaque $\epsilon > 0$. Soit $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ qui satisfait :*

1. *ψ est nen décroissante dans $[0, \infty)$.*
2. *$\psi(t) < t$ pour chaque $t > 0$.*

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ *pour chaque* $t > 0$.

On définit $\Psi = \{\psi : \psi$ satisfait (i-iii)$\}$[20]
Il est clair que le Theorème 2.9 peut être remplacé par le résultat général suivant, qui contient le Theorème 2.9.

Théorème 2.8 *Soit* (X, d) *un espace métrique,* $T : X \to C(X)$ *une application multivoque telle que pour tout* $x \in X, y \in T(x)$*, il existe un* $z \in T(y)$ *satisfaisant :*

$$\int_0^{d(y,z)} \varphi(t)dt \leq \psi\left(\int_0^{d(x,y)} \varphi(t)dt\right)$$

Alors T *possède un point fixe dans* X *à condition que* f *soit inférieurement semi-continue.*

Remarque 2.4 *Dans la preuve du Théorème ci-dessus, l'hypothèse que* $f(x) = d(x, T(x))$ *soit inférieurement semi-continue est cruciale. Sans cette hypothèse,* T *pourrait ne pas avoir de point fixe même si une autre condition est satisfaite. Pour instance, soit*

$$X = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots\right\} \cup \{0|1\}, d(x, y) = |x - y|$$

Pour tout $x, y \in X$*, alors* (X, d) *est un espace métrique complet.*

On définit une application $T : X \to C(X)$ par :

$$T(x) = \begin{cases} \left\{\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^{n+2}}\right\}, & x = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \\ \{1\}, & x = 0 \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que pour tout $x \in X, y \in T(x)$:

$$d(y, T(y)) \leq \frac{1}{2} d(x, T(x))$$

Cependant,

$$f(x) = d(x, T(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n+1}}, & x = \frac{1}{2^n}, \quad n = 1, 2, \cdots \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

N'est pas inférieurement semi-continue en $x = 0$, il est évident que T n'a pas de point fixe dans X.

Remarque 2.5 *Si* $T : X \to CB(X)$*, alors* $f(x) = d(x, T(x))$ *est inférieurement semi-continue à condition que* T *soit supérieurement semi-continue.*

2.2.2 Théorème de point fixe pour les applications multivoques de type Carsiti

Afin d'obtenir le Théorème principale de cette section, on a besoin du Lemme suivant :

Lemme 2.2 *Soit (X, d) un espace métrique complet, $T : X \to N(X)$ une application multivoque , $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ une fonction sous additive, continue et croissante et telle que $\eta^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ et soit $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est une fonction . On définit la relation '$\leq$' dans X comme suit :*

$$x \leq y \Leftrightarrow \eta(d(x, y)) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

Alors '$\leq$' est ordonnée partiellement dans X et X est un espace partiellement ordonné.

Preuve.

1. Comme $\eta^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, on a :

$$\eta(d(x, x)) \leq \eta(0) = 0 = \varphi(x) - \varphi(x)$$

ce qui implique que $x \leq x$.

2. Si $x \leq y$ et $y \leq x$,

$$\eta(d(x, y)) \leq \varphi(x) - \varphi(y), \quad \eta(d(y, x)) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$$

Comme η est positive et $d(y, x) = d(x, y)$,

$$\eta(d(y, x)) = 0$$

De plus $\eta^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. D'ou $d(y, x) = 0$, i.e., $x = y$.

3. Si $x \leq y$ et $y \leq z$, alors :

$$\eta(d(x, y)) \leq \varphi(x) - \varphi(y), \quad \eta(d(y, z)) \leq \varphi(y) - \varphi(z)$$

Notons que η est croissante sous-additive, et donc on a :

$$\eta(d(x, z)) \leq \eta(d(x, y) + d(y, z) \leq \eta(d(x, y)) + \eta(d(y, z)) \leq \varphi(x) - \varphi(z)$$

De (1)-(3)," $\leq$ " est un ordre partiel dans X .

■

Théorème 2.9 *Soit (X, d) un espace métrique complet, $T : X \to N(X)$ une application multivoque, $\varphi : X \to \mathbb{R}$ une fonction semi-continue inférieurement et bornée supérieurement, et $\eta : [0, \infty) \to [0, \infty)$ une fonction continue croissante et sous-additive telle que $\eta^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Si pour tout $x \in X$ et tout $y \in T(x)$,*

$$\eta(d(x, y)) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

Alors, T a un point fixe dans X.

Preuve. D'une manière similaire Kirk dans [**?**], on obtient que l'ordre partiel de l'espace X a un élément maximal $x_0 \in X$. Par hypothèse, il existe $y_0 \in T(x_0)$ tel que :

$$\eta(d(x_0, y_0)) \leq \varphi(x_0) - \varphi(y_0)$$

Ce qui implique que $x_0 \leq y_0$. Comme x_0 est l'élément maximal de X, on a $x_0 = y_0$, d'ou $x_0 \in T(x_0)$. ■

Remarque 2.6 *Quand seulement l'existence du point fixe est considérée, le Théorème 2.9 peut être vu comme une extension du Théorème 2.7. En fait, si T satisfait les conditions du Théorème 2.7, alors, pour tout $x \in X$, il existe un $y \in I_b^x$ tel que :*

$$d(y, T(y)) \leq cd(x, y)$$

Comme $y \imath I_b^x$, on a :

$$bd(x, y) = d(x, T(x))$$

Soit $\eta(s) = (b - c)s$, $\varphi(x) = d(x, T(x))$, alors :

$$\eta d(x, y) = (b - c)d(x, y) = bd(x, y) - cd(x, y) \leq d(x, T(x)) - d(y, T(y) = \varphi(x) - \varphi(y)$$

De plus, φ semi-continue inférieurement et bornée supérieurement, alors T a un point fixe par le Théorème 2.9.

Corollaire 2.6 *Soient (X, d) un espace métrique complet et $T : X \to C(X)$ une application multivoque . Si il existe une constante $c \in (0, 1)$ tel que pour tout $x \in X$, $y \in T(x)$,*

$$d(y, T(y)) \geq cd(x, y)$$

Alors T possède un point fixe dans X à condition que f soit inférieurement semi-continue.

Le Corollaire ci-dessous est aussi une extension du principe contractif de Nadler.

Corollaire 2.7 *Soient (X,d) un espace métrique complet , $T : X \to N(X)$ est une application multivoque et $\varphi : X \to \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue inférieurement bornée supérieurement, et $\eta : [0,\infty) \to [0,\infty)$ est une fonction continue croissante et sous-additive telle que $\eta^{-1}(\{0\}) = \{0\}$. Si pour tout $x \in X$ et tout $y \in T(x)$*

$$\eta(d(x,y)) \leq \varphi(x) - \varphi(y)$$

alors, il existe $x_0 \in X$ tel que $T(x_0) = \{x_0\}$.

Remarque 2.7 *Dans le Théorème 2.9 , T ne satisfait pas forcément la condition de continuité, ce qui indique la différence avec les théorèmes obtenus dans [6, 26].*

Remarque 2.8 *Dans [17, 9], les auteurs ont établis des Théorèmes de points fixes pour les applications de type Caristi à valeurs multiples. Un Théorème de point fixe de type Caristi à valeur fixe formellement plus fort à été donné dans [25], tandis que de nouveaux résultats en relation avec certains opérateurs de type Caristi à valeur unique et à valeurs multiples ont été établis dans [2]. Le Théorème 2.9 et le Corollaire* **??** *étendent les résultats ci-dessus.*
En fait,soit $\eta(s) = s$, alors nous avons les Théorèmes des points fixes dans [17, 9, 25] et obtenons les mêmes résultats plus forts pour l'application satisfaisant les conditions du Théorème 2.9 d'une manière similaire à Zhang et Luo [25].

Exemple 2.1 *Soit $X = [0,1]$, $d(x,y) = |x-y|$; alors (X,d) est un espace métrique complet. Soit l'application $T : X \to N(X)$ définie par :*

$$T(x) = \begin{cases} y \in X \mid \frac{x}{5} \leq y \leq \frac{x}{4} & , \quad x \in X \cap Q, \\ y \in X \mid \frac{x}{3} \leq y \leq \frac{x}{2} & \quad\;\; x \in X - Q, \end{cases}$$

ou Q est l'ensemble des nombres rationnels. Soit$\eta(s) = s$, $\varphi(x) = |x|$, alors, φ est continue et bornée inférieurement. Notons que pour tout $x \in X$ et $y \in T(x)$.

$$\eta(d(x,y)) = \varphi(x) - \varphi(y)$$

Alors, T a un point fixe ; de plus, $T(0) = \{0\}$.

Chapitre 3

Points fixes de contractions multivoques via une classe généralissée des fonctions de simulation

Il est bien connu que la théorie des applications multivoque trouve des applications dans la théorie du contrôle, l'optimisation convexe, les équations différentielles et l'économie. Nadler a généralisé le principe de contraction bien connu de Banach aux points fixe d'applications multivoques qui sont devenus une grande source d'inspiration pour les chercheurs travaillant dans la théorie métrique des points fixes. De nombreux auteurs ont tenté de généraliser ce résultat dans des espaces métriques et autres. Certaines généralisations notables. Dans un travail récent, Khojasteh et Al. ont introduit la notion de $\mathcal{Z}$-contraction en utilisant une classe de fonctions de contrôle appelées fonctions de simulation et unifié plusieurs résultats de la littérature sur les applications univoques . Olgun et Coll. ont obtenu des résultats de point fixe pour les contractions en $\mathcal{Z}$ généralisées, voir [14], Samet et all. introduit le concept de α-admissibilité qui est intéressant car il ne nécessite pas que les conditions de contraction ou les conditions de type de contraction soient vérifiées pour chaque paire de points du domaine contrairement au BCP. Il inclut également le cas des applications discontinus. Il y a maintenant une croissance massive dans la littérature traitant des problèmes de point fixe via des applications α-admissibles .

La notion des applications α-admissibles et α-admissibles triangulaires a été introduite par Samet et al. [27] et Karapinar et Al. [11], respectivement comme suit.

Définition 3.1 *Soit $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$. Une auto-application $T : X \to X$ est dite α-admissible si* *la condition suivante est vérifiée :*

$$x, y \in X, \alpha(x, y) \geq 1 \implies \alpha(Tx, Ty) \geq 1.$$

De plus, a l'auto-application T est dite triangulaire α-admissible si T est α-admissible et

$$x, y, z \in X, \alpha(x, z) \geq 1 \text{ et } \alpha(z, y) \geq 1 \implies \alpha(x, y) \geq 1$$

Exemple 3.1 *Soit $X = [0\ +\infty)$. On définit $T : X \to X$ and $\alpha : X \times X \to [0\ +\infty)$ par*

$$\begin{aligned} Tx &= \sqrt{x} \text{ pour tout } x \in X \text{ et} \\ \alpha(x, y) &= \begin{cases} e^{x-y} \text{ si } x \geq y \\ 0 \text{ si } x \prec y \end{cases} \end{aligned}$$

alors T est α-admissible

De plus, Asl et Al. [5] a introduit le concept d'une α-application-admissible qui est une version à valeurs multiples de la cartographie α-admissible fournie dans [27].

Pour un ensemble non vide X, soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de puissance de X. Si (X, d) est un espace métrique, alors soit :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(X) &= \mathcal{P}(X) - \{\emptyset\} \\ \mathcal{CB}(X) &= \{A \in N(X) : A \text{ borné fermé } \} \end{aligned}$$

Définition 3.2 ([5]) *Soient X un ensemble non vide, $T : X \to \mathcal{N}(X)$ et $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ deux applications. On dit que T est α_*-admissible si la condition suivante est vérifiée :*

$$x, y \in X, \alpha(x, y) \geq 1 \implies \alpha_*(Tx, Ty) \geq 1$$

où $\alpha_*(Tx, Ty) := \inf\{\alpha(a, b) | a \in Tx, b \in Ty\}$.

D'autre part, Mohammadi et Al. [16] ont étendu le concept d'une application α_*-admissible à α-admissible comme suit.

Définition 3.3 ([16]) *Soient X un ensemble non vide, $T : X \to \mathcal{N}(X)$ et $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ deux applications données. Alors T est dite α-admissible si, chaque fois que pour chaque $x \in X$ et $y \in Tx$:*

$$\alpha(x, y) \geq 1 \implies \alpha(y, z) \geq 1, \text{ pour tout } z \in Ty$$

Remarque 3.1 *Il est clair que α_*-admissible est également α-admissible, mais l'inverse n'est pas vrai.*

Exemple 3.2 *Soit* $X = [-1, 1]$. *et On définit* $\alpha : X \times X \to [0\ +\infty)$ *par* $\alpha(x, x) = 0$ *et* $\alpha(x, y) = 1$ *pour tout* $x \neq y$.
On défini $T : X \to CB(X)$ *par*

$$Tx = \begin{cases} \{-x\}, x \notin \{-1, 0\} \\ \{0, 1\} \qquad , x = -1 \\ \{1\} \qquad , x = 0 \end{cases}$$

soit $x = -1$ *et* $y = 0 \in Tx = \{0, 1\}$ *, alors* $\alpha(x, y) \geq 1$ *mais* $\alpha_*(Tx, Ty) = \alpha_*(\{0, 1\}, \{1\}) = 0$ *donc* T *n'est pas* α_**-admissible . Maintenant on montre que* T *est* α*-admissible aves les cas suivants :*
Premier cas . Si $x = 0$*; alors* $y = 1$ *et* $\alpha(x, y) \geq 1$ *, aussi* $\alpha(y, z) \geq 1$ *tel que* $z = -1 \in Ty = \{-1\}$.
Deuxieme cas . Si $x = -1$*; alors* $y = \{0, 1\}$ *et* $\alpha(x, y) \geq 1$ *, aussi* $\alpha(y, z) \geq 1$ *pour tout* $z \in Ty$.
Troisieme cas . Si $x \notin \{-1, 0\}$*; alors* $y = -x$ *et* $\alpha(x, y) \geq 1$ *, aussi* $\alpha(y, z) \geq 1$ *pour tout* $z = x \in Ty = \{x\}$.

Définition 3.4 ([7]) *Soit* (X, d) *un espace métrique et* $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$. *L'espace métrique* (X, d) *est dit* α*-complet si et seulement si toute suite de Cauchy* $\{x_n\}$ *avec* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *converge dans* X.

Remarque 3.2 ([7]) *Si* X *est un espace métrique complet, alors* X *est aussi un espace métrique* α*-complet. Mais l'inverse n'est pas vrai.*

Exemple 3.3 *soit* $X = (0, +\infty)$ *et* $d(x, y) = |x - y|$ *. Soit* A *un ensmble borne de* X *on defini* $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ *par*

$$\begin{aligned} (x, y) &= \begin{cases} (x + y)^2, \text{ si } x, y \in A \\ 0, \qquad \text{si non} \end{cases} \\ \alpha(x, y) &= 2xy \end{aligned}$$

il est claire que (X, d) *n'est pas espace métrique complet ; en effet si* $\{x_n\}$ *une suite de cauchy de* X *telle que* $(x_n, x_{n+1}) \geq \alpha(x_n, x_{n+1})$ *pour tous* $n \in \mathbb{N}$*; alors* $x_n \in A$ *pour tous* $n \in \mathbb{N}$ *. Maintenant , puisque* (A, d)*est un espace métrique complet, alors il existe* $x^* \in A$ *tel que* $x_n \to x^*$*pour* $n \to \infty$.

Définition 3.5 ([13]) *Soient* (X, d) *un espace métrique,* $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ *et* $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ *deux applications données . Alors* T *est une application multivoque* α*-continue sur* $(\mathcal{CB}(X), \mathcal{H})$ *si, pour toutes les suites* $\{x_n\}$ *avec* $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ *quand* $n \to \infty$*, et* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a* $Tx_n \xrightarrow{\mathcal{H}} Tx$ *quand* $n \to \infty$*, c'est-à -dire :*

$$\lim_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0 \text{ et } \alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n \to \infty} \mathcal{H}(Tx_n, Tx) = 0$$

Remarque 3.3 *La continuité de T implique la α-continuité de T, pour toutes les applications α. En général, l'inverse n'est pas vrai (Voir dans l'exemple 2.2 [13]*

Dans [12], Khojasteh et Al, défini une nouvelle classe de cartographie de contraction en utilisant la classe suivante de fonctions de simulation.

Définition 3.6 ([12]) *Une fonction de simulation est une application $\zeta : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :*

(ζ1) $\zeta(0, 0) = 0$*,*

(ζ2) $\zeta(t, s) < s - t$ *pour tout* $t, s > 0$*,*

(ζ3) Si $\{t_n\}$ *et* $\{s_n\}$ *sont deux suites dans* $(0, \infty)$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n = l \in (0, \infty)$*, alors* $\lim_{n\to\infty} \sup \zeta(t_n, s_n) < 0$.

Argoubi et Al. [4] a légèrement modifié la définition de la fonction de simulation en désignant la condition (ζ1).

Définition 3.7 *Une fonction de simulation est une application $\zeta : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant ce qui suit :*

Définition 3.8 ((i)) $\zeta(t, s) < s - t$ *pour tout* $t, s > 0$*,*

(ii) Si $\{t_n\}$ *et* $\{s_n\}$ *sont deux suites dans* $(0, \infty)$ *tel que* $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$*, et* $t_n < s_n$ *alors* $\lim_{n\to\infty} \sup \zeta(t_n, s_n) < 0$.

Soit $\mathcal{Z}$ dénote la famille de toutes les fonctions de simulation .

Définition 3.9 *Soit T une auto-application sur un espace métrique X muni de la métrique d. Soit $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ telle que :*

$$\zeta(\alpha(x, y)d(Tx, Ty), d(x, y)) \geq 0, \text{ pour tout } x, y \in X. \tag{3.1}$$

Alors T est appelée une $\mathcal{Z}$-contraction α-admissible par rapport à ζ, où $\zeta \in \mathcal{Z}$.

Récemment, dans [22], Radenovic et Chandok et dans [14], Liu et Al, ont élargi la classe des fonctions de simulation et obtenu des résultats de concidences et de points fixes communs.

Définition 3.10 ([3]) *Une application $G : [0, \infty)^2 \to \mathbb{R}$ est appelée fonction de classe C si elle est continue et satisfait aux conditions suivantes :*

(i) $G(s, t) \leq s$*,*

(ii) $G(s,t) = s$ *implique que soit* $s = 0$*ou* $t = 0$*, pour tout* $s,t \in [0,\infty)$.

Définition 3.11 ([14, 22]) *Une C_G fonction de simulation est une application $\zeta : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ satisfaisant ce qui suit :*

(a) $\zeta(t,s) < G(s,t)$ *pour tout* $t,s > 0$ *, où* $G : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ *est une fonction de classe* C*,*

(b) *Si* $\{t_n\}$ *et* $\{s_n\}$ *sont des suites dans* $(0,\infty)$ *telles que* $\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} s_n > 0$ *et* $t_n < s_n$*, alors* $\lim_{n\to\infty} \sup \zeta(t_n, s_n) < C_G$.

Définition 3.12 ([14, 22]) *Une application $G : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$ a une propriété C_G, s'il existe un $C_G \geq 0$ tel que :*

(i) $G(s,t) > C_G$ *implique* $s > t$*,*

(ii) $G(t,t) \leq C_G$ *pour tout* $t \in [0,\infty)$.

Soit $\mathcal{Z}_G$ la famille de toutes les C_G fonctions de simulation $\zeta : [0,\infty)^2 \to \mathbb{R}$. On a les définitions suivantes en prenant $g = id$ (application identité) dans les définitions 2.1 et 2.2 dans [22].

Définition 3.13 ([22]) *Soient (X,d) un espace métrique et $T : X \to X$ une auto-application. L'application T est appelée $\mathcal{Z}_G$-contraction s'il existe $\zeta \in \mathcal{Z}_G$ tel que :*

$$\zeta(d(Tx,Ty), d(x,y)) \geq C_G \tag{3.2}$$

Pour tout $x,y \in X$ avec $x \neq y$.

Si $C_G = 0$, alors nous obtenons la $\mathcal{Z}$-contraction définie dans [12].

Définition 3.14 ([22]) *Soient (X,d) un espace métrique et $T : X \to X$ une auto-application. L'application T est appelée $\mathcal{Z}_G$-contraction généralisée s'il existe $\zeta \in \mathcal{Z}_G$ tel que :*

$$\zeta\left(d(Tx,Ty), \max\left\{d(x,y), d(x,Tx), d(y,Ty), \frac{d(x,Ty)+d(y,Tx)}{2}\right\}\right) \geq C_G \tag{3.3}$$

pour tout $x,y \in X$ avec $x \neq y$.

Si $C_G = 0$, alors nous obtenons la $\mathcal{Z}$-contraction définie dans [19].

Lemme 3.1 ([22]) *Soit (X,d) un espace métrique et $\{x_n\}$ une suite dans X telle que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Si $\{x_n\}$ n'est pas de Cauchy alors il existe $\varepsilon > 0$ et deux sous-suites $\{x_{m(k)}\}$ et $\{x_{n(k)}\}$ de $\{x_n\}$ où $n(k) > m(k) > k$ telles que :*

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{m(k)}, x_{n(k)+1}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}\right) = \varepsilon$$
$$\text{et } \lim_{k\to\infty} d\left(x_{m(k)-1}, x_{n(k)+1}\right) = \lim_{k\to\infty} d\left(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}\right) = \varepsilon$$

3.1 Principaux résultats

Définition 3.15 *Soit X un ensemble non vide, $T : X \to \mathcal{N}(X)$ et $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ deux applications. Alors T est dite triangulaire α_*-admissible si T est α_*-admissible et*

$$\alpha(x, y) \geq 1 \text{ et } \alpha_*(Tx, Ty) \geq 1 \implies (x, z) \geq 1, \forall z \in Ty.$$

Définition 3.16 *Soit X un ensemble non vide, $T : X \to \mathcal{N}(X)$ et $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ deux applications. Alors T est dite triangulaire α-admissible si T est α-admissible et*

$$\alpha(x, y) \geq 1 \text{ et } \alpha(y, z) \geq 1 \implies \alpha(x, z) \geq 1, \forall z \in Ty.$$

Une application triangulaire α_*-admissible est aussi triangulaire α-admissible, mais l'inverse peut ne pas à^{a}tre vrai.

Lemme 3.2 *Soit $T : X \to \mathcal{N}(X)$ une application triangulaire α-admissible. Supposons qu'il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$. Alors pour une suite $\{x_n\}$ telle que $x_{n+1} \in Tx_n$, on a $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$ avec $n < m$.*

Preuve. Puisqu'il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$, alors par α-admissibilité de T, on a $\alpha(x_1, x_2) \geq 1$. En poursuivant ce processus, on obtient $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supposons que $n < m$. Puisque $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ et $\alpha(x_{n+1}, x_{n+2}) \geq 1$, alors en utilisant la α-admissibilité triangulaire de T on a $\alpha(x_n, x_{n+2}) \geq 1$. Encore une fois, puisque $\alpha(x_n, x_{n+2}) \geq 1$ et $\alpha(x_{n+2}, x_{n+3}) \geq 1$, alors nous en déduisons $\alpha(x_n, x_{n+3}) \geq 1$. En poursuivant ce processus, nous obtenons $\alpha(x_n, x_m) \geq 1$. ■

Définition 3.17 *Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \to \mathcal{CB}(X)$. On dit que l'application T est une application α-admissible $\mathcal{Z}_G$-contractive multivaluée s'il existe $\zeta \in \mathcal{Z}_G$ et $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ tels que*

$$\zeta(\alpha(x, y)\mathcal{H}(Tx, Ty), d(x, y) \geq C_G \tag{3.4}$$

pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$.

Définition 3.18 *Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \to \mathcal{CB}(X)$. On dit que T est une application α-admissible généralisée $\mathcal{Z}_G$-contractive multivaluée s'il existe $\zeta \in \mathcal{Z}_G$ et $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ tels que*

$$\zeta(\alpha(x, y)\mathcal{H}(Tx, Ty), M(x, y)) \geq C_G \tag{3.5}$$

Pour tout $x, y \in X$ avec $x \neq y$, où

$$M(x, y) = \max\left\{d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}\right\}$$

Voici le premier résultat principal :

Théorème 3.1 *Soit (X,d) un espace métrique, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ une application α-admissible généralisée $\mathcal{Z}_G$-contractive multivaluée. Supposons que les conditions suivantes :*

(i) *(X,d) est un espace métrique α-complet,*

(ii) *il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$,*

(iii) *T est α triangulaire α-admissible,*

(iv) *T est α-continue et à valeurs multiples.*

Alors T a un point fixe.

Preuve. A partir de la condition (ii), nous avons $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0,x_1) \geq 1$. Si $x_0 = x_1$ ou $x_1 \in Tx_1$, alors x_1 est un point fixe de T et nous avons terminé. Supposons que $x_1 \notin Tx_1$. Maintenant, puisque T est une application de X dans $\mathcal{CB}(X)$, nous pouvons donc choisir un $x_2 \in Tx_1$ tel que :

$$d(x_1,x_2) \leq \mathcal{H}(Tx_0,Tx_1)$$

Encore une fois, nous pouvons choisir un point $x_3 \in Tx_2$ tel que :

$$d(x_2,x_3) \leq \mathcal{H}(Tx_1,Tx_2)$$

Ainsi, on obtient une suite $\{x_n\}$ dans X telle que $x_{n+1} \in Tx_n$, $x_n \notin Tx_n$ et :

$$d(x_{n+1},x_{n+2}) \leq \mathcal{H}(Tx_n,Tx_{n+1}) \tag{3.6}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $x_2 \in Tx_1$, $x_3 \in Tx_2$ et T est α-admissible, on a :

$$\alpha(x_1,x_2) \geq 1 \implies \alpha(x_2,x_3) \geq 1$$

De manière récursive, on obtient :

$$\alpha(x_n,x_{n+1}) \geq 1 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.7}$$

à partir de (**??**),

$$CG \leq \zeta(\alpha(x_n,x_{n+1})\mathcal{H}(Tx_n,Tx_{n+1}),M(x_n,x_{n+1}))$$
$$< G(M(x_n,x_{n+1}),\alpha(x_n,x_{n+1})\mathcal{H}(Tx_n,Tx_{n+1}))$$

De plus, en utilisant (i) de la définition 2.14, nous avons :

$$H(Tx_n,Tx_{n+1}) \leq \alpha(x_n,x_{n+1})\mathcal{H}(Tx_n,Tx_{n+1}) < M(x_n,x_{n+1}), \tag{3.8}$$

où

$$\begin{aligned} M(x_n, x_{n+1}) &= \max\left\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_n, Tx_n), d(x_{n+1}, Tx_{n+1}), \frac{d(x_n,Tx_{n+1})+d(x_{n+1},Tx_n)}{2}\right\} \\ &= \max\{d(x_n, x_{n+1}), d(x_{n+1}, Tx_{n+1})\} \end{aligned}$$

Si $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_{n+1}, Tx_{n+1})$, alors (3.8) donne :

$$\mathcal{H}(Tx_n, Tx_{n+1}) < d(x_{n+1}, Tx_{n+1})$$

une contradiction. D'où $M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1})$, et par conséquent à partir de (3.8), on a :

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) \leq \mathcal{H}(Tx_n, Tx_{n+1}) < M(x_n, x_{n+1}) = d(x_n, x_{n+1}) \tag{3.9}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, on a $d(x_n, x_{n+1}) > d(x_{n+1}, x_{n+2})$. Donc $\{d(x_n, x_{n+1})\}$ est une suite décroissante de nombres réels non négatifs, et donc il existe $L \geq 0$ tel que $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} M(x_n, x_{n+1}) = L$.

Supposons que $L > 0$. Puisque $\alpha(x_n, x_{n+1})\mathcal{H}(Tx_n, Tx_{n+1}) < M(x_n, x_{n+1})$, et de (3.8) et (3.9), on a

$$\lim_{n\to\infty} \alpha(x_n, x_{n+1})\mathcal{H}(Tx_n, Tx_{n+1}) = L \tag{3.10}$$

Puis en utilisant (3.5) et (b) de la définition 2.13, on obtient

$$\begin{aligned} C_G &\leq \lim_{n\to\infty} \sup \zeta\left(\alpha(x_n, x_{n+1})\mathcal{H}(Tx_n, Tx_{n+1}), M(x_n, x_{n+1})\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \sup \zeta\left(\alpha(x_n, x_{n+1})\mathcal{H}(Tx_n, Tx_{n+1}), d(x_n, x_{n+1})\right) < CG \end{aligned}$$

qui est une contradiction et donc $L = 0$.

Maintenant, nous montrons que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. Sinon, alors par le lemme 2.17 on a :

$$\lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \lim_{k\to\infty} d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) = \varepsilon \tag{3.11}$$

et par conséquent,

$$\lim_{k\to\infty} M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = \varepsilon \tag{3.12}$$

Soit $x = x_{m(k)}$, $y = x_{n(k)}$. Puisque T est une application α-orbitale triangulaire admissible, donc par le lemme 3.3, on a $\alpha(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \geq 1$. Alors par (3.5),

$$\begin{aligned} C_G &\leq \zeta(\alpha(x_{m(k)}, x_{n(k)})\mathcal{H}(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}), M(x_{m(k)}, x_{n(k)})) \\ &\prec G(M(x_{m(k)}, x_{n(k)})\alpha(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}), \mathcal{H}(x_{m(k)}, x_{n(k)})) \end{aligned}$$

Ici $M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = d(x_{m(k)}, x_{n(k)})$, donc plus loin par (i) de la définition 2.14, on obtient :

$$d(x_{m(k)+1}, x_{n(k)+1}) \leq \alpha(x_{m(k)}, x_{n(k)})\mathcal{H}(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}) \tag{3.13}$$

$$\prec M(x_{m(k)}, x_{n(k)}) = d(x_{m(k)}, x_{n(k)}) \tag{3.14}$$

En utilisant (3.11) et (3.12) dans (3.13), on obtient :

$$\lim_{k\to\infty} \alpha(x_{m(k)}, x_{n(k)})\mathcal{H}(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}) = \varepsilon$$

Par conséquent, en utilisant (3.5) et (b) de la définition 2.13, on obtient

$$C_G \leq \lim_{n\to\infty} \sup \zeta \left(\alpha \left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right) \mathcal{H} \left(Tx_{m(k)}, Tx_{n(k)}\right), M \left(x_{m(k)}, x_{n(k)}\right)\right) < C_G$$

Ce qui est une contradiction. Donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy. A partir de (33.7.4) et de l'α-complétude de (X, d), il existe $u \in X$ tel que $x_n \xrightarrow{d} u$ quand $n \to \infty$. Par α-continuité de l'application multivaluée T, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(Tx_n, Tx) = 0 \tag{3.15}$$

Ainsi on obtient :

$$d(u, Tu) = \lim_{n\to\infty} d\left(x_{n+1}, Tu\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}\left(Tx_n, Tu\right) = 0$$

Par conséquent, $u \in Tu$ et donc T a un point fixe. ■

Théorème 3.2 *Soit (X, d) un espace métrique et $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ une application α-admissible $\mathcal{Z}_G$-contractive multivaluée. Supposons que les conditions suivantes :*

(i) *(X, d) est un espace métrique α-complet,*

(ii) *il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$,*

(iii) *T est triangulaire α-admissible multivalués,*

(iv) *T est une application à valeurs multiples α-continue.*

Alors T a un point fixe.

Preuve. La preuve suit de la méme manière que dans le théorème 3.6. ■

Corollaire 3.1 *Soit (X, d) un espace métrique, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ une application multivaluée α-admissible généralisée $\mathcal{Z}_G$-contractive (ou, α-admissible $\mathcal{Z}_G$-contractive). Supposons que les conditions suivantes :*

(i) *(X, d) est un espace métrique α-complet,*

(ii) *il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$,*

(iii) *T est triangulaire α_*-admissible multivalués,*

(iv) *T est une application à valeurs multiples α-continue.*

Alors T a un point fixe.

Corollaire 3.2 *Soit (X, d) un espace métrique, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ une application multivaluée α-admissible généralisée $\mathcal{Z}_G$-contractive (ou, α-admissible $\mathcal{Z}_G$-contractive). Supposons que les conditions suivantes :*

(i) *(X, d) est un espace métrique α-complet,*

(ii) *il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$,*

(iii) *T est triangulaire α_*-admissible,*

(iv) *T est une application à valeurs multiples continue.*

Alors T a un point fixe.

Exemple 3.4 *Soit $X = (-10, 10)$ avec la métrique $d(x, y) = |x - y|$ et $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ est définie par :*

$$T(x) = \begin{cases} \{-2\} & \text{si } x \in (-10, 0), \\ [0, \frac{5x}{6}] & \text{si } x \in [0, 2], \\ [0, 2x - \frac{5}{3}] & \text{si } x \in (2, 5] \\ \{9\} & \text{si } x \in (5, 10) \end{cases}$$

Soit $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ défini par

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x, y \in [0, 2], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors l'espace (X, d) est α-complet et T n'est pas continu mais il est α-continu. Aussi T est une application triangulaire α-admissible multivaluée, puisque si $\alpha(x, y) \geq 1$, alors on a $x, y \in [0, 2]$, et donc $Tx, Ty \subseteq [0, \frac{5}{3}]$, ce qui implique $\alpha(p, q) \geq 1$ pour tout $p \in Tx$ et $q \in Ty$. Ainsi, T est α-admissible. De plus, si $\alpha(x, y) \geq 1$ alors $x, y \in [0, 2]$. Donc $x \in [0, 2]$ et $Ty \subseteq [0, \frac{5}{3}]$. Soit $z \in Ty$. Alors on a $\alpha(y, z) \geq 1$. Enfin, $x \in [0, 2]$ et $z \in [0, \frac{5}{3}]$ donne $\alpha(x, z) \geq 1$. Donc T est triangulaire α-admissible. Si nous choisissons $x_0 = 2$, alors la condition (ii) du théorème 3.2 est vraie. Considérons $\zeta(t, s) = \frac{5}{6}s - t$ et $G(s, t) = s - t$, alors T est une application α-admissible $\mathcal{Z}_G$-contractive généralisée multivaluée avec $C_G = 0$. Ainsi, toutes les conditions du théorème 3.2 sont satisfaits. Par conséquent, T a des points fixes dans X.

Les résultats suivants montrent que la α-continuité ou continuité de l'application T peut étre relâchée en supposant la condition (iv') comme suit.

Théorème 3.3 *Soit (X, d) un espace métrique, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ une application multivaluée α-admissible généralisée $\mathcal{Z}_G$-contractive. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaite :*

(i) *(X, d) est un espace métrique α-complet,*

(ii) *Il existe* $x_0 \in X$ *et* $x_1 \in Tx_0$ *tels que* $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$*,*

(iii) T *est triangulaire* α*-admissible,*

(iv) *Si* $\{x_n\}$ *est une suite dans* X *telle que* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ *quand* $n \to \infty$*, alors on a* $\alpha(x_n, x) \geq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*.*

Alors T *a un point fixe.*

Preuve. En suivant la démonstration du théorème 3.2, on sait que $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans X telle que $x_n \xrightarrow{d} u \in X$ quand $n \to \infty$ et $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. à partir de la condition (iv'), on obtient $\alpha(x_n, u) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (3.5), on a :

$$\zeta(\alpha(x_n, u)\mathcal{H}(Tx_n, Tu), M(x_n, u)) \geq C_G \tag{3.16}$$

Où

$$M(x_n, u) = \max\left\{d(x_n, u), d(x_n, Tx_n), d(u, Tu), \frac{d(x_n, Tu) + d(u, Tx_n)}{2}\right\}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ Supposons que $d(u, Tu) > 0$. Soit $\varepsilon = \frac{d(u,Tu)}{2}$. Puisque $x_n \xrightarrow{d} u \in X$ quand $n \to \infty$, on peut trouver $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d(u, x_n) < \frac{d(u, Tu)}{2} \tag{3.17}$$

Pour tout $n \geq n_1$. De plus, nous obtenons :

$$d(u, Tx_n) \leq d(u, x_{n+1}) < \frac{d(u, Tu)}{2} \tag{3.18}$$

Pour tout $n \geq n_1$. De plus, comme $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d(x_n, Tx_n) \leq d(x_n, x_{n+1}) < \frac{d(u, Tu)}{2} \tag{3.19}$$

Pour tout $n \geq n_2$. Il résulte de $d(x_n, Tu) \to d(u, Tu)$ quand $n \to \infty$ que l'on peut trouver $n_3 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d(x_n, Tu) < \frac{3d(u, Tu)}{2} \tag{3.20}$$

Pour tout $n \geq n_3$. Ainsi, en utilisant (3.17)-(3.20), nous obtenons :

$$M(x_n, u) = d(u, Tu) \tag{3.21}$$

Pour tout $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2, n_3\}$. Donc à partir de (3.16), on a :

$$C_G \leq \zeta\left(\alpha(x_n, u)\mathcal{H}(Tx_n, Tu), d(u, Tu)\right) < G\left(d(u, Tu), \alpha(x_n, u)\mathcal{H}(Tx_n, Tu)\right)$$

En utilisant (i) de la définition 2.14, nous obtenons :

$$\alpha(x_n, u)\mathcal{H}(Tx_n, Tu) < d(u, Tu)$$

De plus, puisque :

$$d(x_{n+1}, Tu) \geq \mathcal{H}(Tx_n, Tu) \leq \alpha(x_n, u)\mathcal{H}(Tx_n, Tu) < d(u, Tu) \tag{3.22}$$

En laissant $n \to \infty$, on obtient $d(u, Tu) < d(u, Tu)$, ce qui est une contradiction. Par conséquent, $d(u, Tu) = 0$, c'est-à -dire $u \in Tu$. Ceci complète la preuve. ■

Corollaire 3.3 *Soit (X, d) un espace métrique, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ une application multivaluée α-admissible généralisée $\mathcal{Z}_G$-contractive. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaite :*

- (i) *(X, d) est un espace métrique α-complet,*
- (ii) *Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$,*
- (iii) *T est triangulaire α_*-admissible,*
- (iv) *Si $\{x_n\}$ est une suite dans X telle que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ quand $n \to \infty$, alors on a $\alpha(x_n, x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors T a un point fixe.

Corollaire 3.4 *Soit (X, d) un espace métrique, $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ une application multivaluée α-admissible généralisée $\mathcal{Z}_G$-contractive. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaite :*

- (i) *(X, d) est un espace métrique α-complet,*
- (ii) *il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$,*
- (iii) *T est triangulaire α-admissible,*
- (iv) *si $\{x_n\}$ est une suite dans X telle que $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \xrightarrow{d} x \in X$ quand $n \to \infty$, alors on a $\alpha(x_n, x) \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors T a un point fixe.

Exemple 3.5 *Soit $X = (0, 1]$ avec la métrique $d(x, y) = |x - y|$ et $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ défini comme :*

$$Tx = \begin{cases} \left\{\frac{1}{10}\right\} \text{ si } x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \\ \left\{\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right\} \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right], \\ \left\{\frac{4}{5}\right\} \text{ si } x \in \left(\frac{3}{4}, 1\right]. \end{cases}$$

Définir : $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ par

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Alors (X, d) *est un espace métrique* α*-complet. La mise en correspondance* T *n'est pas* $\alpha - continu$ *(pour voir cela, considérons* $x_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{n}$*,* $x = \frac{3}{4}$*). De plus,* T *est triangulaire* α*-admissible. De plus, il existe* $x_0 = \frac{1}{2}$*, et* $x_1 = \frac{3}{4} \in Tx_0 = \left\{\frac{3}{5}, \frac{3}{4}\right\}$ *tel que* $\alpha(x_0, x_1) \geq 1$*. Soit* $\{x_n\}$ *toute suite dans* X *telle que* $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $x_n \to x$ *quand* $n \to \infty$*. Cela implique que* $x_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et donc* $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$*. Ainsi* $\alpha(x_n, x) \geq 1$ *et donc la condition* (iv') *est satisfaite. On peut facilement vérifier que* T *est une application* α*-admissible multivaluée* $\mathcal{Z}_G$*-contractive en prenant* $\zeta(t, s) = \frac{5}{6}s - t$*,* $G(s, t) = s - t$ *et* $C_G = 0$*. Ainsi,* T *satisfait toutes les conditions du théorème 3.11 ayant des points fixes.*

3.2 Conséquences

Définition 3.19 *Soit* X *un ensemble non vide doté d'un graphe* G *et* $T : X \to \mathcal{N}(X)$ *une application à plusieurs valeurs. Alors on dit que* T *est un bord riangulaire préservant si pour chaque* $x \in X$ *et* $y \in Tx$ *avec* $(x, y), (y, z) \in E(G)$*, on a* $(x, z) \in E(G)$ *pour tout* $z \in Ty$*.*

Définition 3.20 *Soit* (X, d) *un espace métrique doté d'un graphe* G*. L'espace métrique* X *est dit* $E(G)$*-complet si et seulement si toute suite de Cauchy* $\{x_n\}$ *dans* X *avec* $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, converge dans* X*.*

Définition 3.21 *Soit* (X, d) *un espace métrique doté d'un graphe* G*. On dit que* $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ *est une application* $E(G)$*-continue à* $(\mathcal{CB}(X), \mathcal{H})$ *si pour tout* $x \in X$ *donné et suite* $\{x_n\}$ *avec*

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0 \text{ et } (x_n, x_{n+1}) \in E(G) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \implies \lim_{n\to\infty} \mathcal{H}(Tx_n, Tx) = 0$$

Définition 3.22 *Soit* (X, d) *un espace métrique doté d'un graphe* G*. Une application* $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ *est dite* $E(G)$*-*$\mathcal{Z}_G$*-contractive s'il existe* $\zeta \in \mathcal{Z}_G$ *et* $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ *tels que*

$$x, y \in X,\ (x, y) \in E(G) \implies \zeta(\alpha(x, y)\mathcal{H}(Tx, Ty), d(x, y)) \geq C_G \tag{3.23}$$

De mà^{a}me, en prenant $M(x, y)$ au lieu de $d(x, y)$, nous pouvons définir l'application $E(G)$-$\mathcal{Z}_G$-contractive généralisée.

Théorème 3.4 *Soit* (X, d) *un espace métrique doté d'un graphe* G*, et* $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ *une application* $E(G) - \mathcal{Z}_G$*-contractive. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) (X, d) *est un espace métrique* $E(G)$*-complet,*

(ii) *Il existe* $x_0 \in X$ *et* $x_1 \in Tx_0$ *tels que* $(x_0, x_1) \in E(G)$*,*

(iii) T *est triangulaire et préserve les bords,*

(iv) *T est une application à valeurs multiples $E(G)$-continue.*

Alors T a un point fixe.

Preuve. Ce résultat peut étre obtenu à partir du théorème 3.7 en définissant une application $\alpha : X \times X \to [0, \infty)$ telle que

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ si } (x,y) \in E(G), \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Ceci complète la preuve . ■

En utilisant le théorème 3.11, nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 3.5 *Soit (X,d) un espace métrique doté d'un graphe G, et $T : X \to \mathcal{CB}(X)$ une application $E(G) - \mathcal{Z}_G$-contractive. Supposons que les conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *(X,d) est un espace métrique $E(G)$-complet,*

(ii) *Il existe $x_0 \in X$ et $x_1 \in Tx_0$ tels que $(x_0, x_1) \in E(G)$.*

(iii) *T est triangulaire et préserve les bords .*

(iv') *Si $\{x_n\}$ est une suite dans X telle que $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x_n \to x \in X$ quand $n \to \infty$, nous avons $(x_n, x) \in E(G)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

Alors T a un point fixe.

Bibliographie

[1] A. Branciari, A fixed point theorem for mappings satisfying a general contractive condition of integral type, Int. J. Math. Math. Sci. 29 (2002) 531-536

[2] A. Petrusel, A. Sintamarian, Single-valued and multi-valued Caristi type operators, Publ. Math. Debrecen 60 (2002) 167-177.

[3] Ansari A.H., Note on $\varphi-\ \psi\ -$contractive type mappings and related fixed point, The 2nd Regional Conference on Math. Appl. PNU, Sept. 2014, 377-380, (2014).

[4] Argoubi H., Samet B., Vetro C., Nonlinear contractions involving simulation functions in a metric space with a partial order, J. Nonlinear Sci. Appl. 8, 1082-1094, (2015).

[5] Asl J.H., Rezapour S., Shahzad N, On fixed points of $\alpha{-}\psi{-}$contractive multifunctions, Fixed Point Theory Appl. 2012, Article ID 212, (2012).

[6] C.K. Zhong, J. Zhu, P.H. Zhao, An extension of multi-valued contraction mappings and fixed points, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000) 2439-2444.

[7] Hussain N., Kutbi M.A., Salimi P., Fixed point Theory in $\alpha\ -$complete metric spaces with applications, Abstract and Applied Analysis 2014, Article ID 280817, (2014).

[8] J. Caristi, Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 215 (1976) 241-251.

[9] J.P. Aubin, Optima and Equilibria. An Introduction to Nonlinear Analysis, Grad. Texts in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1998

[10] Karapinar E., Fixed points results via simulation functions, Filomat 30(8), 2343-2350, (2016)..

[11] Karapinar E., Kumam P., Salimi P., On $\alpha-\psi-$Meir-Keeler contractive mappings, Fixed Point Theory and Applications 2013, Article ID 94, (2013).

[12] Khojasteh F., Shukla S., Radenovic S., A new approach to the study of fixed point theorems via simulation functions, Filomat, 29(6), 1189-1194, (2015).

[13] Kutbi M.A., Sintunavarat W., On new fixed point results for $(\alpha - \psi - \zeta)-$contractive multi-valued mappings on $\alpha-$ complete metric spaces and their consequences, Fixed Point Theory and Applications 2015, Article ID 2, (2015).

[14] Liu X-L, Ansari A.H., Chandok S., Radenovic S., On some results in metric spaces using auxiliary simulation functions via new functions, J. Computational Analysis And Applications 24(6), 1103-1114, (2018).

[15] Minak G., Acar O., Altun I., Multivalued pseudo-Picard operators and fixed point results, J. Funct. Spaces Appl. 2013, Article ID 827458, (2013).

[16] Mohammadi B., Rezapour S., Shahzad N., Some results on fixed points of $\alpha - \psi-$ Ciric generalized multifunctions, Fixed Point Theory Appl, Article ID 24, (2013).

[17] N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 141 (1989) 177-188.

[18] N. Mizoguchi, W. Takahashi, Fixed point theorems for multi-valued mappings on complete metric spaces, J. Math. Anal. Appl. 141(1989), 177-188.

[19] Olgun M., Bicer O., Alyildiz T., A new aspect to Picard operators with simulation functions, Turk. J. Math. 40, 832-837, (2016).

[20] P. Vijayaraju, B.E. Rhoades, R. Mohanraj, A fixed point theorem for a pair of maps satisfying a general contractive condition of integral type, Int. J. Math. Math. Sci. 15 (2005) 2359-2364.

[21] P. Z. Daffer, H. Kaneko, Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings, J. Math. Anal. Appl. 192(1995), 655-666.

[22] Radenovic S., Chandok S., Simulation type functions and coincidence point results, Filomat 32(1), 141-147, (2018).

[23] S. B. Nadler Jr., Multi-valued contraction mappings, Pacific J. Math. 30(1969), 475-478.

[24] S. Banach .Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur applications aux équations intégrales , Fund.Math,3(1922),133-181

[25] S. Reich, Some problems and results in fixed point theory, contemp. Math. 21(1983),179-187.

[26] S.S. Zhang, Q. Luo, Set-valued Caristi fixed point theorem and Ekeland's variational principle, Appl. Math. Mech. (in Chinese), English translation : Appl. Math. Mech. (English Ed.) 10 (2) (1989) 119-121.

[27] S.V.R. Naidu, Fixed-point theorems for a broad class of multimaps, Nonlinear Anal. 52 (2003) 961-969.

[28] Samet B., Vetro C., Vetro P., Fixed point theorem for $\alpha - \psi -$ Contractive type mappings, Non- linear Anal. 75, 2154-2165, (2012).

[29] Thése De Doctorat de L'université des antilles , Développements récents en analuse multivoque : prédérivées et optimisation multivoque .(22 juin 2016) .

[30] W.A. Kirk, Caristi's fixed-point theorem and metric convexity, Colloq. Math. 36 (1976) 81-86.

[31] Y.Feng, S. Liu, Fixed point theorems for multi-valued contractive mappings and multivalued Caristi type mappings, J. Math. Anal. Appl. 317(2006), 103-112.

Conclusion

En guise de conclusion, on en déduit que le théorème de point fixe pour les applications multivoque joue un rôle important dans l'analyse multivoque non telles que l'existence et l'unicité des solutions de divers problèmes mathématiques.

On en déduit également que la combinaison entre les théorèmes classiques de point fixe pour les applications univoques et la notion d'applications multivoque nous permet d'établir plusieurs nouveaux résultats de manière similaire.

En outre, on constate que les conditions sur les fonctions et l'espace étudiés restreignent le nombre de cas auxquels on peut appliquer le théorème.