Cheikh Larbi Tebessi University
2024/2025
Faculty SC
Department of Mathematics

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الشيخ العربي التبسي تبسة
2024/.2025

.

كلية: العلوم الدقيقة وعلوم الطبيعة والحياة

قسم: الرياضيات

اعداد الا ستاذ مشري حسن

ملخص دروس في الاحتمالات و الاحصاء

موجه لطلبة الرياضيات- الاعلام الالي-علوم المادة علوم الارض و الكون

الفهرس

الفصل الاول

نظرية المجموعات

مقدمة:

ندرس في هذا المحور اساسيات حول المجموعات و خصائصها والتي تعتبر ضرورية في دراسة الاحتمالات

المجموعات – العناصر:

.

نرمز عادة للمجموعة بأحد الحروف الكبيرة : A، B، C، X، Y،... أما عناصرها بأحد الحروف الصغيرة : a، b، c، x، y،...

ونكتب : $x \in A$ إذا كان x عنصر من المجموعة A. وإذا كان كل عنصر في المجموعة A ينتمي أيضا إلى المجموعة B، أي أن $x \in A$ يستلزم $x \in B$ فإن A تسمى مجموعة جزئية من B ونقول أن A محتواة في B ونكتب $A \subset B$.

وتتساوى مجموعتان إذا احتوت احداهما الأخرى هذا يعني : $A = B$ إذا وفقط إذا كان $A \subset B$ و $B \subset A$.

ونكتب نفي العلاقات: $a \in A$، $A \subset B$، $A = B$ بالتوالي على الصورة التالية: $a \not\subset A$، $A \not\subset B$، $A \neq B$.

ولتخصيص مجموعة ما فإننا إما أن نذكر كل عناصرها أو نذكر الخواص التي تحققها عناصر هذه المجموعة.

مثال1:

$A = \{1,3,5,7,9\}$ تدل على أن A هي المجموعة المكونة من الأعداد 1، 3، 5، 7، 9، كما أن :

$B = \{x \ / \ $ عدد أولي x ، $x < 15\}$ تدل على أن B هي مجموعة الأعداد الأولية التي تقل عن 15.

مثال2:

المجموعتان A و B السابق ذكرهما يمكن أيضا كتابتهما على الصورة التالية:

$$A = \{x \ / \ \text{عدد فردي } x \text{ و } x < 10\}$$

$$B = \{2,3,5,7,11,13\}$$

لاحظ أن $9 \in A$ لكن $9 \notin B$ و $11 \in B$ لكن $11 \notin A$ بينما $3 \in A$ و $3 \in B$ وأيضا $6 \notin A$ و $6 \notin B$.

عمليات على المجموعات

نفرض أن A، B مجموعتان اختياريتان. يعرف اتحاد A و B (ويرمز له بالرمز $A \cup B$) بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو B :

$$A \cup B = \{x : x \in A \quad \text{أو} \quad x \in B\}$$

ويعرف تقاطع A و B (ويرمز له بالرمز $A \cap B$) بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى كل من A و B :

$$A \cap B = \{x : x \in A \quad \text{و} \quad x \in B\}$$

وإذا كان $A \cap B = \varnothing$ أي إذا لم يوجد أي عنصر مشترك في كل من A، B يقال أن A و B منفصلتان.

ويعرف الفرق بين A و B (ويرمز له بالرمز $A \setminus B$) بأنه مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و لا تنتمي إلى B.

لاحظ أن $A \setminus B$ و B منفصلتان أي أن $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$.

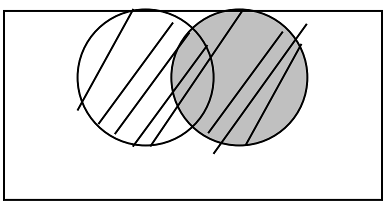
ويعرف المتمم للمجموعة A (ويرمز له بالرمز A^c) بأنه مجموعة العناصر التي لا تنتمي إلى A :

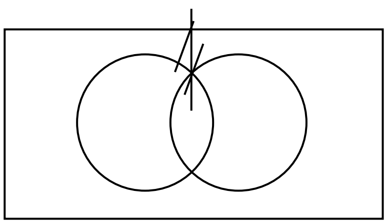
$$A^c = \{x : x \in U \quad \text{و} \quad x \notin A\}$$

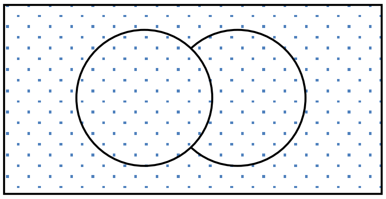
ويدل هذا على أن A^c هو الفرق بين المجموعة الكلية U والمجموعة A.

مثال1:

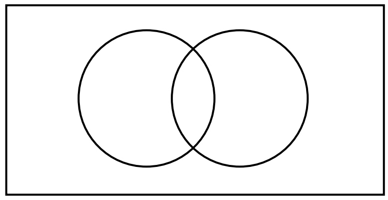
توضح الأشكال التالية والتي تسمى أشكال في عمليات المجموعات السابقة وقد مثلت المجموعات هنا بمساحات مبسطة على المستوى. ومثلت المجموعة الكلية U بالمساحة الموجودة داخل المستطيل.







A\B



مثال3:

نفرض أن $A=\{1,2,3,4\}$ وأن $B=\{3,4,5,6\}$ حيث $U=\{1,2,3,...\}$ فيكون :

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5,6\} \quad ، \quad A\cap B=\{3,4\}$$

$$A\setminus B=\{1,2\} \qquad A^{C}=\{5,6,7,\ldots\}$$

تحقق المجموعات بالنسبة إلى العمليات السابقة القوانين أو المتساويات المختلفة التي توجد في الجدول التالي، وعلى التحديد فإن.

تحقق المجموعات القوانين الموضوعة في الجدول التالي:

	$A\cap A=A$	$A\cup A=A$
التجميع	$A\cap(b\cap C)=(A\cap B)\cap C$	$A\cup(b\cup C)=(A\cup B)\cup C$
التبديل	$A\cap B=B\cap A$	$A\cup B=B\cup A$
قوانين التوزيع	4a. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$	4b. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$
قوانين الوحدة	5b. $A\cap U=A$	5a. $A\cup\varnothing=A$
	6b. $A\cap\varnothing=\varnothing$	6a. $A\cup U=U$
قوانين الإتمام	7b. $A\cap A^{c}=\varnothing$	7a. $A\cup A^{c}=U$
	8b. $U^{c}=\varnothing,\varnothing^{c}=U$	8a. $(A^{c})^{c}=A$
قوانين دي مورجان	9b. $(A\cap B)^{c}=A^{c}\cup B^{c}$	9a. $(A\cup B)^{c}=A^{c}\cap B^{c}$

نظرية1.1.:

اذا كان $A\subset B$ فانه:

$$\text{(i)}\ A\cap B=A \qquad \text{(iii)}\ B^c\subset A^c \qquad \text{(v)}\ B\cup A^c=U$$
$$\text{(ii)}\ A\cup B=B \qquad \text{(iv)}\ A\cap B^c=\varnothing$$

المجموعات المنتهية والمجموعات القابلة للعد :

تكون المجموعة منتهية أو غير منتهية أي لا نهائية. وتكون المجموعة منتهية إذا كانت فارغة أو إذا كانت تحتوي n عنصرًا بالضبط حيث n عدد صحيح موجب وإلا تكون المجموعة لا نهائية.

مثال4:

نفرض أن Aهي مجموعة $A=\{1,2,6,9\}$

في هذه الحالة تكون M مجموعة منتهية.

مثال5 :

نفرض أن $P=\{x : x$ هو نهر من أنهار الأرض$\}$ وعلى الرغم من صعوبة إحصاء عدة أنهار الأرض إلا أن P مجموعة منتهية.

مثال6:

نفرض أن Y هي مجموعة الأعداد الصحيحة الزوجية (الموجبة) أي أن : $Y=\{2,4,6,\ldots\}$. فتكون Y مجموعة لانهائية.

مثال7:

نفرض أن I هي فترة طولها الوحدة من مجموعة الأعداد الحقيقية مثلا $I=\{x : 0\le x\le 1\}$. عندئذ I مجموعة لانهائية

تعتبر المجموعة قابلة للعد إذا كانت منتهية، أو إذا أمكن ترتيب عناصرها على صورة متتابعة، وفي هذه الحالة يقال أنها لانهائية قابلة للعد، وبخلاف ذلك تعتبر المجموعة غير قابلة للعد. وعلى ذلك تكون المجموعة المذكورة في المثال 6 مجموعة لانهائية وإن كانت قابلة للعد بينما يمكن إثبات المجموعة المعرفة في المثال 7 مجموعة غير قابلة للعد.

مجموعات حاصل الضرب :

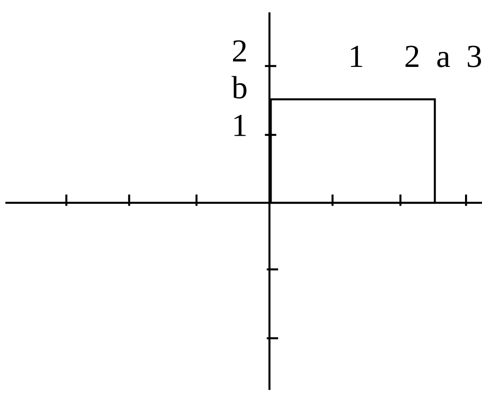
نفرض أن A و B مجموعتان فتعرف مجموعة حاصل ضرب A و B والتي يرمز لها بالرمز $A\times B$ بأنها المجموعة المكونة من جميع الأزواج المرتبة (a, b) بحيث يكون $a\in A$ و $b\in B$:

$$A\times B=\{(a,b) : a\in A \text{ و } b\in B\}$$

ويرمز لحاصل ضرب مجموعة في نفسها مثل $A\times A$ بالرمز A^2.

مثال8:

سوف نفترض أن القارئ على علم بالمستوى الكارتيزي $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ (كما هو مبين في الرسم التالي). وتمثل كل نقطة P هنا زوجا مرتبا (a,b) من الأعداد الحقيقية وبالعكس.



مثال9:

نفرض أن $A=\{1,2,3\}$ وأن $B=\{a,b\}$.

عندئذ يكون:

$$A \times B = \{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$$

ويمكن التوسع في تعريف مفهوم مجموعة حاصل الضرب إلى أي عدد محدد من المجموعات بشكل طبيعي فتعرف مجموعة حاصل الضرب المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_m$ والتي تكتب على الصورة $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_m$ بأنها مجموعة جميع العناصر المرتبة ذات الصورة $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ حيث $a_1 \in A_1$ لكل i.

فصول (أو عائلات) من المجموعات:

يحدث كثيرا أن تكون عناصر المجموعة هي نفسها مجموعات، فمثلا كل خط في مجموعة الخطوط هو نفسه مجموعة نقط. وللمساعدة على توضيح مثل هذه الحالات فإننا عادة نستعمل كلمة فصل أو عائلة لمثل هذه المجموعة. وتكون لكلمتي الفصل الجزئي أو العائلة الجزئية معنى مماثل لكلمة المجموعة الجزئية.

مثال10:

عناصر الفصل $\{\{2,3\},\{2\},\{5,6\}\}$ هي المجموعات $\{2,3\}$ و $\{2\}$ و $\{5,6\}$.

مثال11:

A مجموعة فتعرّف مجموعة أجزاء المجموعة A (و يرمز لها بالرمز $P(A)$) بأنّها فصل جميع المجموعات الجزئية للمجموعة A.

وبصفة خاصة إذا كان $A = \{x, y, z\}$ فإن :

$$P(A) = \{A, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}\{y, z\}, \emptyset\}$$

وبصورة عامة إذا كانت A مجموعة منتهية وعدد عناصرها n فإن الفصل $\mathscr{P}(A)$ يتكون من 2^n عنصر.

مثال12:

اعتبر فصول المجموعات الجزئية التالية للمجموعة X حيث : $X = \{1,2,\ldots,8,9\}$.

$$\text{(i)}\ [\{1,3,5\},\{2,6\},\{4,8,9\}]$$

$$\text{(ii)}\ [\{1,3,5\},\{2,4,6,8\},\{5,7,9\}]$$

$$\text{(iii)}\ [\{1,3,5\},\{2,4,6,8\},\{7,9\}]$$

(i) ليست تجزئة للمجموعة X إذ أن $7 \in X$ بينما لا تنتمي 7 إلى أي خلية. وعلاوة على ذلك. (ii) ليست تجزئة للمجموعة X حيث أن $5 \in X$ بينما تنتمي 5 إلى كل من $\{1,3,5\}$ و $\{5,7,9\}$. تعتبر (iii) تجزئة للمجموعة X إذ أن كل عنصر من X ينتمي إلى خلية واحدة بالضبط.

.

تعريف:

نسمي مجموعة غير خالية σA من المجموعات الجزئية للمجموعة الكلية Ω بجبر المجموعات (σ - جبر المجموعات) إذا حقق ما يلي :

(i) المجموعة المتممة لأي مجموعة في σA تنتمي إلى σA.

(ii) اتحاد أي عدد منته (قابل للعد) من مجموعات σA ينتمي إلى σA.

أي أن الفصل σA يحقق شرط الانغلاق بالنسبة لعمليتي الإتمام واتحاد عدد منته (قابل للعد) من المجموعات.

ومن السهل أن نثبت أن جبر المجموعات (σ - جبر المجموعات) يحتوي على Ω وعلى $\emptyset$ وأنه أيضا يحقق شرط الانغلاق بالنسبة إلى تقاطع عدد منته (قابل للعد) من المجموعات.

الفصل الثاني

التحليل التوفيقي

أصلي مجموعة منتهية:

تعريف : لتكن E مجموعة منتهية و n عدد عناصرها.
يسمى العدد n بالتعريف أصلي المجموعة E ونرمز له بالرمز $Card\,(E)$.

مثال1:
أصلي المجموعة الخالية ϕ هو 0.
أصلي المجموعة $\{3,1,0\}$ هو 3.

أصلي اتحاد مجموعتين منتهيتين :

نتيجة:
إذا كان : $A \cap B = \phi$ فإن :

$$\boxed{Card\,(A \cup B) = Card\,(A) + Card\,(B)}$$

ملاحظات:
1) إذا كانت $\bar{A}$ متمّمة A في E فإن : $A \cap \bar{A} = \varnothing$ و $A \cup \bar{A} = E$ وبالتالي :
$Card\,(A \cup \bar{A}) = Card\,(A) + Card\,(\bar{A})$
ومنه:

$$\boxed{Card\,(\bar{A}) = Card\,(E) - Card\,A}$$

2) بما أن:

$$\overline{A \cap B}^{B} = B - A$$

فإن:

$$(1)\quad \boxed{Card\,(B-A)=Card\,B-Card\,(A\cap B)}$$

وبما أن:

$$A\cap(B-A)=\phi \text{ و } A\cup B=A\cup(B\setminus A)$$

فإن:

$$(2)\quad \boxed{Card\,(A\cup B)=Card\,A+Card\,(B-A)}$$

3) من (1) و (2) نجد:

$$\boxed{Card\,(A\cup B)=Card\,A+Card\,B-Card\,(A\cap B)}$$

أصلي جداء ديكارتي:

نتيجة

إذا كانت A و B مجموعتين منتهيتين فإن المجموعة $(A\times B)$ منتهية و:

$$\boxed{Card\,(A\times B)=Card\,(A)\times Card\,(B)}$$

حالة خاصة:

إذا كان $B=A$

وبالتراجع نجد:

$$\square \ni n,\ \forall n\geq 1\ :\ Card\,A^{n}=[Card\,A]^{n}$$

عدد القوائم ذات m عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا:

تعريف:
لتكن E مجموعة ذات n عنصرا وليكن m عدد طبيعي غير معدوم.

نسمي قائمة ذات m عنصرا من E كل عنصر $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ من الجداء الديكارتي E^m.

عدد القوائم:

عدد القوائم ذات m عنصرا من المجموعة E ذات n عنصرا هو n^m.

مثال2:

ما هو عدد القوائم ذات 3 عناصر التي يمكن تشكيلها من المجموعة: $E = \{a, b, c, d\}$ ؟

الإجابة:
$4^3 = 654$.

مثال3:

عيّن كل القوائم ذات عنصرين من المجموعة: $E = \{a, b, c, d\}$.

عددها هو : $4^2 = 16$ وهي :

$$\begin{Bmatrix} (a,a),(a,b),(a,c),(a,d) \\ (b,a),(b,b),(b,c),(b,d) \\ (c,a),(c,b),(c,c),(c,d) \\ (d,a),(d,b),(d,c),(d,d) \end{Bmatrix}$$

مثال4:
يحتوي كيس على 9 قريصات مرقمة على التوالي من 1 إلى 9 حيث نعيد في كل مرة القريصة المسحوبة إلى الكيس قبل السحب الموالي ونكتب في كل مرة وحسب ترتيب السحب رقم القريصة المسحوبة ونكوّن هكذا عددًا ذا أربعة أرقام.
- عدد الأعداد المختلفة التي يمكن تشكيلها بهذه الكيفية هو: $9^4 = 6561$.

الترتيبات (Arrangements)

تعريف:

لتكن E مجموعة ذات n عنصرا و m عدد طبيعي غير معدوم حيث $n \geq m$.

نسمي ترتيبة m عنصرا من E كل قائمة ذات m عنصرا من E بحيث تكون هذه العناصر متمايزة مثنى مثنى (غير متكررة).

مثال5:

إذا كانت $E = \{a,b,c,d\}$ فإن القوائم ذات 3 عناصر (a,b,c)، (a,c,b)، (a,c,d) هي ترتيبات ذات 3 عناصر من E، بينما القائمة (a,a,b) ليست ترتيبة لأن العنصر a يتكرر.

عدد الترتيبات :

نتيجة:

ليكن n، m عددان طبيعيان غير معدومين حيث $n \geq m$.

عدد ترتيبات m عنصرا من مجموعة ذات n عنصرا هو العدد الطبيعي A_n^m المعرَّف كما يلي:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1)$$

حالة خاصة:

إذا أخذنا $m = n$ نجد:

$$A_n^n = n(n-1)\ldots\times 2\times 1 = n!$$

التبديلات :

تعريف:

نسمي تبديلة لمجموعة E ذات n عنصرا مختلفا كل ترتيبة n عنصرا من E

مثال6:

تبديلات المجموعة $\{a,b,c\}$ هي (a,b,c)، (a,c,b)، (b,a,c)، (b,c,a)، (c,a,b)، (c,b,a) وعددها $3! = 6$.

نتيجة:

عدد تبديلات مجموعة ذات n عنصرا مختلفا هو

$$n! = n\times (n-1)\times (n-2)\ldots\ldots\ldots\times 1.$$

التبديلات مع التكرار :

يراد أحيانا معرفة عدد تبديلات (تباديل) مجموعة من العناصر يكون بعضها متماثلا. وتنتج الصيغة العامة لهذا العدد من النتيجة التالية :

نتيجة:

عدد تبديلات n عنصر والتي يكون من بينها n_1 عنصرا متماثلا و n_2 عنصرا متماثلا و . . . و n_r عنصرا متماثلا هو :

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$$

مثال7:

ما هو عدد الإشارات المختلفة التي يمكن تكوينها من مجموعة مكونة من أربعة أعلام حمراء متماثلة وثلاثة أعلام بيضاء متماثلة وعلم أزرق. وتتركب كل إشارة من تعليق ثمانية أعلام في خط رأسي؟

الحل:

في هذا المثال نبحث عن تبديلات ثمانية أشياء من بينها أربعة متماثلة (الأعلام الحمراء) وثلاثة متماثلة (الأعلام البيضاء). ومن النتيجة السابقة نجد :

$$\frac{8!}{4!\,3!} = 280$$ إشارة مختلفة

العينات المرتبة :

تدور الكثير من مشاكل التحليل التوفيقي وبصفة خاصة في علم الاحتمالات حول اختيار كرة من وعاء به n من الكرات (أو اختيار ورقة من حزمة من الورق أو اختيار شخص من مجتمع). تسمى عملية اختيار كرة من الوعاء عدد r من المرات بعينة مرتبة حجمها r.

ندرس حالتين مختلفتين :

(i) **<u>المعاينة مع الإحلال (الإرجاع)</u>**:

في هذه الحالة تعاد كل كرة إلى الوعاء قبل اختيار الكرة التالية وحيث أنه يوجد n طريقة مختلفة لاختيار كل كرة فبتطبيق القاعدة الأساسية للعد (القوائم) نجد أن عدد العينات المرتبة والمختلفة ذات الحجم r مع الإحلال هو:

$$\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{n \text{ مرة}} = n^r$$

(ii) المعاينة بدون إحلال (إرجاع):

في هذه الحالة لا تعاد الكرة إلى الوعاء قبل اختيار الكرة التالية وبذلك لا توجد تكرارات في العينة المرتبة أو بعبارة أخرى فإن العينة ذات الحجم r بدون إحلال هي تبديلة من الأشياء الموجودة في الوعاء مأخوذة منه وبذلك يوجد :

$$A_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

عينة مرتبة مختلفة حجمها r بدون إحلال من مجتمع به n من الأشياء.

التوفيقات (Combinaison) :

تعريف:

لتكن E مجموعة ذات n عنصرا وليكن p عددا طبيعيا حيث $n \geq p$.

نسمي توفيقة p عنصرا من المجموعة E كل جزء كيفي (مجموعة جزئية) من E يشمل p عنصرا.

أو بعبارة أخرى، توفيقة p عنصرا هو اختيار كيفي لـ p عنصرا من بين n عنصر معطاة وذلك بدون أخذ بعين الاعتبار ترتيب هذه العناصر.

مثال7:

توفيقات الحروف a، b، c، d مأخوذة 3 في كل مرة هي : $\{a,b,c\}$، $\{a,b,d\}$، $\{a,c,d\}$، $\{b,c,d\}$ أو بصورة أبسط: abc، abd، acd، bcd.

لاحظ أن التوفيقات التالية كلها متساوية :

$$abc،acb،bac،bca،cab،cba$$

والمقصود بهذا أن كل توفيقة هي نفس المجموعة الجزئية $\{a,b,c\}$.

ترميز:

نرمز لعدد توفيقات n عنصرا مأخوذ منها r عنصرا في كل مرة بالرمز C_n^r المعرف بالعلاقة التالية :

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{A_n^r}{r!} \quad (r!C_n^r = A_n^r)$$

مثال8:

كم لجنة ثلاثية يمكن تكوينها من ثمانية أشخاص؟

الحل:

كل لجنة هي بالضرورة توفيقة من الثمانية أشخاص مأخوذ منهم ثلاثة في كل مرة.

إذن يوجد :

$$C_8^3 = \frac{(8)(7)(6)}{1\cdot 2\cdot 3} = 56$$

لجنة ثلاثية مختلفة يمكن تكوينها.

التجزيئات المرتبة (Partitions ordonnées) :

نفرض أن وعاء فيه 7 كرات مرقمة من 1 إلى 7. نريد إيجاد عدد الطرق التي يمكن، بها، أولا سحب كرتين من الوعاء ثم سحب ثلاث كرات وأخيرًا سحب كرتين من الوعاء، وبعبارة أخرى نريد حساب عدد التجزيئات المرتبة (A_1, A_2, A_3) لمجموعة الكرات السبع إلى خلايا : A_1 تحتوي كرتين، A_2 تحتوي على ثلاث كرات و A_3 تحتوي على كرتين. تسمى هذه العملية بالتجزيئات المرتبة لأننا نميز بين :

$\left(\{6,7\},\{3,4,5\},\{1,2\}\right)$ وَ $\left(\{1,2\},\{3,4,5\},\{6,7\}\right)$ مثلا.

والتي تعطي كل منهما نفس التجزئة للمجموعة A.

بما أنه في البداية توجد 7 كرات في الوعاء فإنه توجد C_7^2 طريقة لسحب كرتين الأوليتين وذلك لتحديد المجموعة الأولى A_1، يبقى بعد ذلك 5 كرات في الوعاء، إذن توجد C_5^3 طريقة لسحب ثلاث كرات وذلك لتحديد المجموعة الثانية A_2 وأخيرًا تبقى كرتان في الوعاء إذن توجد C_2^2 طريقة لسحب الخلية الأخيرة A_3 ومنه توجد :

$$\frac{7!}{2!\,3!\,2!} = C_7^2 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{7!}{2!\,5!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{2!}{2!\,0!}$$

تجزيئات مرتبة ومختلفة للمجموعة A إلى الخلايا A_1 التي تحتوي على كرتين و A_2 التي تحتوي على 3 كرات و A_3 التي تحتوي على كرتين. ومنه:

نظرية:

نفرض أن مجموعة A تحتوي على n عنصرًا وأن n_1 ، n_2 ،...، n_r هي أعداد صحيحة موجبة حيث $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$.

يوجد $\dfrac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdots n_r!}$ تجزيئات مختلفة للمجموعة A على الصورة $(A_1,\cdots,A_r)$ حيث تحتوي A_1 على n_1 عنصرا A_2 على n_2 عنصرا ،...، A_r على n_r عنصرًا.

مثال9:

بكم طريقة يمكن توزيع 9 لعب على أربعة أطفال بحيث يتلقى الطفل الأصغر ثلاث لعب وكل طفل آخر لعبتين؟

الحل:

في هذا المثال يراد معرفة عدد الجزيئات المرتبة لتسع لعب إلى أربع خلايا تحتوي على 3، 2، 2، 2 من الألعاب على التوالي. من النظرية السابقة نجد :

$$\frac{9!}{3!2!2!2!} = 7960$$ تجزئة مرتبة

الاحتمال هو دراسة التجارب العشوائية، فإذا رمي حجر النرد في الهواء فمن المؤكد أنه سوف يسقط على الأرض ولكن ليس من المؤكد مثلا أن العدد 6 سوف يظهر. لنفرض أننا كرّرنا التجربة عدة مرات، ليكن s عدد مرات النجاح أي عدد مرات ظهور الرقم 6 وأن n هو عدد رميات حجر النرد، لقد لوحظ تجريبيا أن النسبة $f = \frac{s}{n}$ والتي تسمى التكرار النسبي تصبح مستقرة في المدى الطويل أي أنها تقترب من نهاية ما، يعتبر هذا الاستقرار أساس نظرية الاحتمال.

الفصل الثالث

الاحتمالات

مقدمة

الاحتمال هو دراسة التجارب العشوائية، فإذا رمي حجر النرد في الهواء فمن المؤكد أنه سوف يسقط على الأرض ولكن ليس من المؤكد مثلا أن العدد 6 سوف يظهر. لنفرض أننا كرّرنا التجربة عدة مرات، ليكن s عدد مرات النجاح أي عدد مرات ظهور الرقم 6 وأن n هو عدد رميات حجر النرد، لقد لوحظ تجريبيا أن النسبة $f = \frac{s}{n}$ والتي تسمى التكرار النسبي تصبح مستقرة في المدى الطويل أي أنها تقترب من نهاية ما، يعتبر هذا الاستقرار أساس نظرية الاحتمال.

فضاء العينة والأحداث :

تعريف:

تسمى مجموعة كل النتائج الممكنة Ω لأي تجربة معطاة بفضاء العينة. كل عنصر من Ω أي كل نتيجة معينة تسمى نقطة العينة.

الحدث هو مجموعة من النتائج أو بعبارة أخرى الحدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة Ω.

الحدث $\{a\}$ المكون من نقطة واحدة $a \in \Omega$ يسمى بحدث أولي. تعتبر المجموعة الخالية ϕ والفضاء Ω حدثين، يسمى ϕ بالحدث المستحيل و Ω بالحدث المؤكد.

يمكننا أن نربط بين الأحداث لكي نكوّن أحداثا باستعمال عمليات على المجموعات المختلفة.

(i) $A \cup B$ هو الحدث الذي يقع بوقوع A أو B (أو كلاهما).

(ii) $A \cap B$ هو الحدث الذي يقع بوقوع A و B.

(iii) A^c (متمّم A) هو الحدث الذي يقع إذا لم يقع A.

تعريف:

يسمى الحدثان A و B متنافيين (أو مستقلين) إذا كانا غير متقاطعين أي إذا كان : $A \cap B = \phi$ أو بعبارة أخرى يكون A و B متنافيان إذا كان من غير الممكن حدوثهما معًا.

مثال1:

ألق حجر النرد ولاحظ العدد الذي يظهر. يتكون فضاء العينة لهذه التجربة من الأعداد الستة الممكنة : $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

نفرض أن A هو حدث ظهور عدد زوجي، B هو حدث ظهور عدد فردي و C حدث ظهور عدد أولي :

$$A = \{2,4,6\}\ ,\ B = \{1,3,5\}\ ,\ C = \{2,3,5\}$$

ويكون : $A \cup C = \{2,3,4,5,6\}$ هو حدث ظهور عدد زوجي أو عدد أولي.

$B \cap C = \{3,5\}$ هو حدث ظهور عدد أولي.

$C^c = \{1,4,6\}$ هو حدث عدم ظهور عدد أولي.

لاحظ أن A و B متنافيان أي : $A \cap B = \phi$ وبعبارة أخرى لا يمكن ظهور عدد زوجي وعدد فردي في آن واحد.

مثال2:

تجربة : ألقيت قطعة نقود ثلاث مرات ولاحظنا تتابع ظهور الصورة (P) والوجه (F).

يتكون فضاء العينة Ω من 8 عناصر :

$$\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$$

نفرض أن A هو حدث وقوع صورتين أو أكثر على التوالي ونعتبر B هو حدث ظهور 3 صور أو 3 أوجه.

نجد أنّ:

$$A = \{PPP, PPF, FPP\}$$

$$B = \{PPP, FFF\}$$

مثال3:

نلقي قطعة نقود حتى تظهر الصورة لأول مرة ثم نحسب عدد مرات إلقاء قطعة النقود. عندئذ يكون فضاء العينة لهذه التجربة هو:

$$\Omega = \{1,2,3,\ldots,\infty\}$$

يشير الرمز ∞ إلى حالة عدم ظهور الصورة أبدا ولذلك فإن قطعة النقود تلقى عددًا لانهائيا من المرات. تعطي هذه التجربة مثالاً لفضاء عينة غير منته وإن كان قابلا للعد.

مسلَّمات الاحتمال :

ليكن Ω فضاء عينة، $\sum$ عائلة من الأحداث و P تابع حقيقي معرف على $\sum$.
نقول أن P دالة احتمال وأن $P(A)$ احتمال الحدث A إذا تحققت المسلَّمات التالية :

$[P_1]$ لكل حدث A : $0 \le P(A) \le 1$

$[P_2]$ $P(\Omega) = 1$

$[P_3]$ إذا كان A و B حدثين متنافي

$[P_4]$ إذا كانت A_1، A_2، ...، A_n متتالية من الأحداث المتنافية مثنى مثنى فإن:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots$$

ملاحظة:

(i) باستخدام $[P_3]$ وبالاستنتاج الرياضي يمكن أن نبرهن أنه لأي أحداث متنافيA_1، A_2، ...، A_n ة مثنى مثنى يكون :

(ii) نؤكد هنا أن المسلَّمة لا يمكن استنتاجها من المسلَّمة على الرغم أن العلاقة صحيحة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة n. ولكن إذا كان فضاء العينة منتهيا فمن الواضح أن المسلمة لا تضيف شيئًا جديدًا.

نتائج :

نستنتج مباشرة من المسلمات السابقة النتائج التالية :

نتيجة 1:
إذا كانت $\emptyset$هي المجموعة الخالية فإن : $P(\emptyset) = 0$

الإثبات:
لتكن A أي مجموعة، فيكون A و $\emptyset$ متنافيين و. باستخدام $[P_3]$ نحصل على :

$$P(A) = P(A \cup \phi) = P(A) + P(\phi)$$

نتيجة 2:

إذا كان A^c هو الحدث المتمم للحدث A فإن :

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

الإثبات:

يمكن تجزئة فضاء العينة Ω إلى حدثين متنافيين A و A^c أي : $\Omega = A \cup A^c$.

نجد أن:

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

وهو المطلوب إثباته.

نتيجة 3:

إذا كان: $A \subseteq B$ فإن:

$$\boxed{P(A) \leq P(B)}$$

الإثبات:

إذا كان: $A \subseteq B$ فإن الحدث B يمكن تجزئته إلى حدثين متنافيين هما A و $B \setminus A$. إذن:

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

ونستنتج العلاقة المطلوب لأن:

$$P(B \setminus A) \geq 0$$

نتيجة 4:

إذا كان A، B حدثين كيفيين فإن:

$$\boxed{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

الإثبات:

يمكن تجزئة الحدث A إلى حدثين متنافيين: $A \setminus B$ و $A \cap B$ أي:

$$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$$

ومنه حسب $[P_3]$ نجد:

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

وهو المطلوب إثباته.

نتيجة5:

إذا كان A، B حدثين كيفيين فإن:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

الإثبات:

نلاحظ أنه يمكن تجزئة الحدث $A \cup B$ إلى حدثين متنافيين $A \setminus B$ و B، أي أن:

$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B$$

إذن باستخدام $[P_3]$ نجد:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A \setminus B) + P(B) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) \end{aligned}$$

وهو المطلوب إثباته.

تعميم: بتطبيق النتيجة السابقة مرة ثانية نحصل على :

نتيجة 6 :

لتكن A، B، C حوادث كيفية. لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned} &P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ &-P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}}$$

فضاء الاحتمال المنته:

تعريف

ليكن Ω فضاء عينة منته : $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

يمكن الحصول على فضاء احتمال منته وذلك بتعيين عدد حقيقي P_i لكل نقطة $a_i \in \Omega$ (ويسمى هذا العدد باحتمال a_i) بحيث تتحقق الخواص التالية :

(i) جميع الأعداد P_i غير سالبة $(P_i \geq 0)$.

(ii) مجموع الأعداد P_i يساوي الواحد : $P_1 + P_2 + \cdots + P_n = 1$

تعريف :

نعرف الاحتمال $P(A)$ للحدث A كمجموع احتمالات العناصر التي تنتمي إلى A ($P(A) = \sum_{a_i \in A} P(\{a_i\}) = \sum P(a_i)$. ولتبسيط الرموز نكتب $P(a_i)$ بدلا من $P(\{a_i\})$.

مثال4:

إذا لقينا ثلاث قطع من النقود ولاحظنا عدد الصور في هذه التجربة ، يكون فضاء العينة Ω هو: $\Omega = \{0,1,2,3\}$ ونحصل على فضاء الاحتمال بالتخصيص التالي:

$$P(0) = \frac{1}{8} \ , \ P(1) = \frac{3}{8} \ , \ P(2) = \frac{3}{8} \ , \ P(3) = \frac{1}{8}$$

حيث أن جميع الاحتمالات غير سالبة ومجموعها يساوي 1.

نفرض أن A هو حدث ظهور صورة واحدة على الأقل وأن B هو حدث ظهور 3 صور أو 3 أوجه:

$$A = \{1,2,3\} \ , \ B = \{0,3\}$$

إذن بالتعريف لدينا:

$$P(A) = P(1) + P(2) + P(3) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

$$P(B) = P(0) + P(3) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

مثال5:

تتسابق ثلاثة أحصنة A، B، C معا. إذا كان احتمال فوز A هو ضعف احتمال فوز B واحتمال فوز B هو ضعف احتمال فوز C، فما هو احتمال فوز كل واحد منها أو بعبارة أخرى ما هي الاحتمالات $P(A)$، $P(B)$ و $P(C)$؟

الحل:

نفرض أن: $P(C)=p$.

بما أن احتمال فوز B هو ضعف احتمال فوز C يكون: $P(B)=2p$.

وبما أن احتمال فوز A هو احتمال فوز B فإن

$$P(A)=2P(B)=4p$$

ولكن مجموع الاحتمالات يجب أن يساوي 1 فيكون:

$$p+2p+4p=1 \Leftrightarrow 7p=1 \Leftrightarrow p=\frac{1}{7}$$

وتبعا لذلك:

$$P(B)=2p=\frac{2}{7} \text{ ، } P(A)=4p=\frac{4}{7}$$

$$P(C)=p=\frac{1}{7}$$

سؤال:

ما هو احتمال فوز B أو C أي ما هو $P(\{B,C\})$؟

الجواب:

من التعريف نجد:

$$P(\{B,C\})=P(B)+P(C)=\frac{2}{7}+\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$$

الفضاء المنته ذو الاحتمالات المتساوية:

كثيرا ما توحي الخواص الطبيعية (الفيزيائية) لتجربة ما بأن نتائج فضاء العينة لها نفس الاحتمال.

وفي هذه الحالة يسمى فضاء العينة المنته Ω عندما تكون لكل نقطة نفس الاحتمال بالفضاء ذي الاحتمالات المتساوية أو الفضاء المنتظم، وعلى وجه الخصوص إذا كان الفضاء Ω يحتوي على n نقطة فإن

احتمال كل نقطة هو $\frac{1}{n}$ وبالإضافة إلى ذلك إذا احتوى الحدث A على r نقطة فإن احتماله هو $r \cdot \frac{1}{n} = \frac{r}{n}$ أي أن:

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}$$

(أو)

$$P(A) = \frac{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها الحدث } A}{\text{عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها فضاء العينة } \Omega}$$

ملحوظتان:

1) الصيغة السابقة للاحتمال $P(A)$ لا تستخدم إلا في حالة فضاء ذي احتمالات متساوية ولا يمكن استخدامها في الحالة العامة.

2) نستخدم التعبير "بطريقة عشوائية" في حالة الفضاء ذي احتمالات متساوية.

مثال6:

نفرض أننا اخترنا وحدتين بطريقة عشوائية من صندوق به 12 وحدة من بينها 4 وحدات معيبة وأن : A = {الوحدتان المختارتان معيبتان}.

وَ B = {الوحدتان المختارتان سليمتان}.

أوجد $P(A)$ و $P(B)$.

الحل:

نعلم أن Ω يمكن أن يقع بطرق عددها: $C_{12}^{2} = 66$ طريقة وهي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار وحدتين من بين 12 وحدة.

A يمكن أن تقع بطرق عددها : $C_4^2 = 6$ طرق وهي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار وحدتين معيبتين من بين 4 وحدات معيبة.

B يمكن أن تقع بطرق عددها : $C_8^2 = 28$ طريقة وهي عدد الطرق التي يمكن بها اختيار وحدتين سليمتين من بين 8 وحدات سليمة.

إذن:

$$P(B) = \frac{C_8^2}{C_{12}^2} = \frac{28}{66} = \frac{14}{33} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{6}{66} = \frac{1}{11}$$

سؤال:

ما هو احتمال اختيار وحدة معيبة على الأقل؟

الجواب:

نعرف C الحدث : C = {وحدة معيبة على الأقل}.

الحدث C هو الحدث المكمل للحدث B أي أن : $C = B^c$ باستعمال النتيجة 2) نجد:

$$P(C) = P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{14}{33} = \frac{19}{33}$$

فضاء العينة الغير منته (اللانهائي):

نفرض أن الفضاء Ω غير منته ولكنه قابل للعد مثلا: $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots\}$

كما في حالة الفضاء المنته يمكن الحصول على فضاء احتمال بتعيين عدد حقيقي P_i لكل نقطة $a_i \in \Omega$ (ويسمى باحتمال a_i) بحيث يكون :

$$\text{(i)} \quad P_i \geq 0 \quad \text{وَ} \quad \text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{+\infty} P_i = 1$$

ويكون الاحتمال $P(A)$ للحدث A هو مجموع احتمالات العناصر المنتمية إلى A.

مثال7:

اعتبر فضاء العينة $\Omega = \{1, 2, 3, \ldots \infty\}$ والخاص بتجربة إلقاء قطعة نقود حتى ظهور الصورة لأول مرة. هنا ترمز n لعدد مرات إلقاء قطعة النقود.

يمكن الحصول على فضاء احتمال بالتخصيص التالي :

$$P(1)=\frac{1}{2}\ ,\ P(2)=\frac{1}{2}\ ,\ldots,\ P(n)=\frac{1}{2^n}\ ,\ldots,\ P(\infty)=0$$

ملاحظة هامة:

في حالة فضاءات عينات غير قابلة للعد نعتبر تلك التي يكون لها مقياس هندسي محدود $m(\Omega)$ كالطول أو العرض أو المساحة أو الحجم وبفرض أو شرط أن نختار النقط فيه بطريقة عشوائية وفي هذه الحالة الأخيرة يكون احتمال الحدث A أي احتمال أن تنتمي النقط المختارة إلى A هو النسبة بين المقياسين $m(A)$ وَ $m(\Omega)$ أي:

$$P(A)=\frac{\text{حجم } A}{\text{حجم } \Omega}$$

(أو)

$$P(A)=\frac{\text{مساحة } A}{\text{مساحة } \Omega}$$

(أو)

$$P(A)=\frac{\text{طول } A}{\text{طول } \Omega}$$

ويسمى فضاء العينة في هذه الحالة بالفضاء المنتظم.

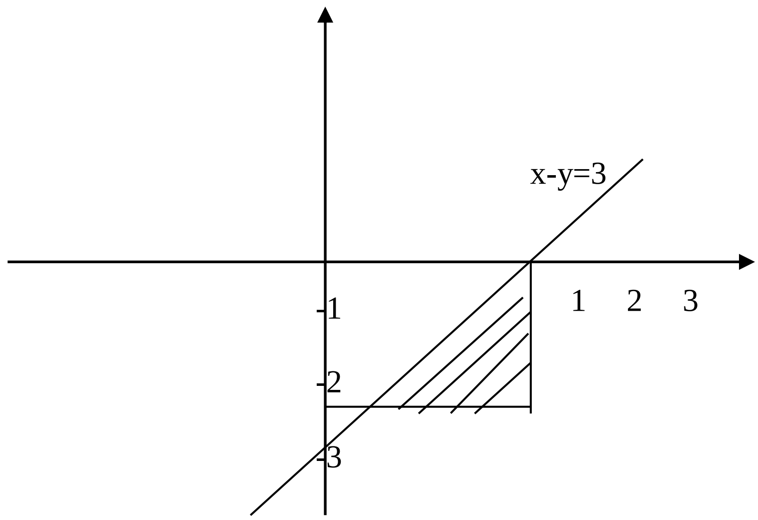
مثال8:

اختيرت نقطتان a، b بطريقة عشوائية على الخط الحقيقي • بحيث $0\le a\le 3$، $-2\le b\le 0$.

اوجد الاحتمال p بحيث تكون المسافة d بين a و b أكبر من 3.

الحل:

يتكون فضاء العينة Ω من الأزواج المرتبة (a,b) بحيث $0\le a\le 3$، ولذلك فهو يكوّن المنطقة المستطيلة المبينة في الشكل التالي:



ومن جهة أخرى فإن المجموعة A المكونة من النقطة (a,b) التي تحقق الشرط $d = a - b > 3$ تتكون من نقطة من Ω التي تقع تحت الخط $x - y = 3$ وهي إذن تكون المساحة المظللة في الشكل. ومنه :

$$P = P(A) = \frac{A \text{ مساحة}}{\Omega \text{ مساحة}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

ملاحظة:

يسمى فضاء الاحتمال المنته أو فضاء الاحتمال الغير منته والقابل للعد بالفضاء المتقطع، أما فضاء الاحتمال الغير قابل للعد بالفضاء الغير متقطع.

الفصل الرابـع

الاحتمال الشرطي

تعريف:

ليكن E حدث كيفي في فضاء العينة Ω بحيث $P(E) > 0$.

يعرّف احتمال وقوع الحدث A بفرض أن E قد وقع أو بعبارة أخرى الاحتمال الشرطي (المشروط) للحدث A عند وقوع E (إذا وقع E) (ويكتب $A \setminus E$) كما يلي :

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

حالة خاصة:

إذا كان Ω فضاءً منتظما منتهيًا وكان $|A|$ يرمز لعدد العناصر الموجودة في الحدث A فإن:

$$\boxed{P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{|A \cap E|}{|E|}}$$

لأن:

$$P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} \quad \text{وَ} \quad P(A \cap E) = \frac{|A \cap E|}{|\Omega|}$$

نتيجة :

ليكن Ω فضاء (احتمالي) منتظم منته وليكن A و E حدثان.

لدينا:

$$P(A/E) = \frac{\text{عدد عناصر } A \cap E}{\text{عدد عناصر } E}$$

(أو)

$$P(A/E) = \frac{\text{عدد الطرق التي يقع بها } A \text{ و } E}{\text{عدد الطرق التي يقع بها } E}$$

مثال1:

نفرض أننا ألقينا زوج من زهرة نرد منتظمتين، إذا كان مجموع الرقمين الظاهرين مساويًا 6 فأوجد احتمال أن يكون الرقم الظاهر في إحدى الزهرتين هو 2.

أو بعبارة أخرى إذا كان :

$$E = \{\text{المجموع } 6\} = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$$

وكان : A = {ظهور الرقم 2 في زهرة نرد واحدة على الأقل}.

فأوجد : $P(A/E)$.

الحل:

تتكون E من خمسة عناصر اثنان منها فقط (2,4) و (4,2) ينتميان إلى A. وبالتالي : $A \cap E = \{(2,4),(4,2)\}$.

و عليه:

$$P(A/E) = \frac{2}{5}$$

من ناحية أخرى، بما أن A يتكون من 11 عنصرًا:

$$A = \{(2,1),\ldots,(2,6),(1,2),(3,2),(4,2),(5,2),(6,2)\}$$

و Ω يتكون من 36 عنصرًا، فإن:

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

نظرية الجداء للاحتمال الشرطي:

انطلاقا من المعادلة التي تعرّف الاحتمال الشرطي، إذا ضربنا الطرفين في الوسطين نحصل على العلاقة التالية المفيدة.

نظرية:

$$P(E \cap A) = P(E) \cdot P(A/E)$$

تعميم: يمكن تعميم النظرية بالاستنتاج الرياضي التالي:

نظرية :

لأي مجموعة من الأحداث A_1، A_2،....، A_n فإن:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) =$$
$$P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)\ldots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

مثال2:

صندوق يحتوي على 12 وحدة إنتاج من بينها 4 وحدات معيبة، اختيرت عشوائيا ثلاث وحدات من هذا الصندوق وحدة تلو الأخرى.

أوجد الاحتمال P أن تكون الثلاث وحدات سليمة.

الحل:

احتمال أن تكون الوحدة الأولى سليمة هو $\frac{8}{12}$ لأن هناك 8 وحدات سليمة من بين 12 وحدة.

إذا كانت الوحدة الأولى سليمة فإن احتمال أن تكون الوحدة الثانية سليمة هو $\frac{7}{11}$ لأن هناك 7 وحدات فقط سليمة من بين 11 وحدة باقية.

إذا كانت الوحدة الأولى والثانية سليمتين فإن احتمال أن تكون الوحدة الأخيرة سليمة هو $\frac{6}{10}$ لأن هناك 6 وحدات فقط سليمة من بين 10 وحدات باقية.

إذن، باستخدام نظرية حاصل الضرب نجد:

$$P = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

أو بصيغة أخرى بوضع:

A_1 "الوحدة الأولى المسحوبة سليمة"،

A_2 "الوحدة الثانية المسحوبة سليمة"،

A_3 "الوحدة الثالثة المسحوبة سليمة" يكون لدينا:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2/A_1)P(A_3/A_1 \cap A_2)$$
$$= \frac{8}{12}\frac{7}{11}\frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

العمليات العشوائية والأشجار البيانية

تعريف:

تسمى أية متتالية من التجارب بحيث يكون لكل تجربة عدد منته من النتائج مع احتمالات معطاة بعملية عشوائية.

من بين الطرق المناسبة لوصف مثل هذه العمليات ولحساب احتمالات أي حدث نستعمل طريقة الأشجار البيانية الموضحة فيما يلي (مثال3) وتستخدم نظرية حاصل الضرب المذكورة سابقا لحساب احتمال ظهور أية نتيجة ممثلة في مسار معطى في هذه الشجرة.

مثال3:

ليكن لدينا ثلاثة صناديق كما يلي :

بالصندوق I 10 مصابيح إضاءة من بينها 4 معيبة.

بالصندوق II 6 مصابيح إضاءة من بينها 1 معيبة.

بالصندوق III 8 مصابيح إضاءة من بينها 3 معيبة.

اختير صندوق بطريقة عشوائية وبعد ذلك سحب مصباح منه بطريقة عشوائية أيضًا، ما هو الاحتمال P أن يكون المصباح معيبًا.

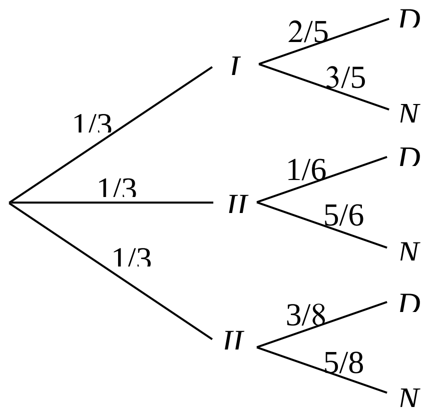
الحل:

في هذا المثال نكوّن متتالية من تجربتين:

(i) نختار صندوق من الثلاثة صناديق.

(ii) نختار مصباحا ويحتمل أن يكون معيبا (D) أو سليما (N).

تمثل الشجرة البيانية التالية هذه العملية وتعطي الاحتمال لكل فرع أو مسار الشجرة.



ويكون احتمال حدوث أي مسار خاص في هذه الشجرة وفق نظرية حاصل الضرب مساويا لحاصل ضرب الاحتمالات لكل فرع من هذا المسار، فمثلا احتمال اختيار الصندوق I ثم اختيار مصباح معيب هو:

$$P(I)P(D/F)=P(I\cap D)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2}{15}$$

وبما أنه توجد ثلاثة مسارات متنافية (مستقلة) مثنى مثنى تؤدي إلى مصباح معيب فإن مجموع احتمالات هذه المسارات الثلاثة وهو الاحتمال المطلوب يكون:

$$P=\frac{13}{3}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}=\frac{113}{360}$$

مثال4:

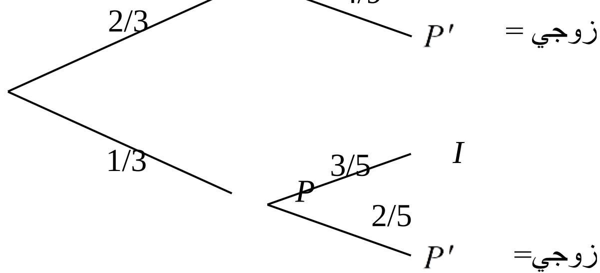
صنعت قطعة نقود بحيث يكون احتمال ظهور الصورة : $P(F)=\frac{2}{3}$ والوجه $P(P)=\frac{1}{3}$.

ألقيت هذه القطعة مرة واحدة، نختار بعد ذلك عددًا عشوائيًا من 1 إلى 9 إذا ظهرت الصورة F. أما إذا ظهر وجه P نختار بطريقة عشوائية عددًا من 1 إلى 5.

(*) ما هو الاحتمال P أن يكون العدد المختار زوجيا؟

الحل:

الشجرة البيانية مع الاحتمالات المرفقة هي :



نلاحظ أن احتمال اختيار عدد زوجي من بين الأعداد 1 إلى 9 هو $\frac{4}{9}$ لأنه يوجد أربعة أعداد زوجية من بين هذه الأعداد التسعة، بينما احتمال ظهور عدد زوجي من الأعداد 1 إلى 5 هو $\frac{2}{5}$ حيث أنه يوجد عددان زوجيان من بين هذه الأعداد الخمسة.

يوجد مساران يؤديان إلى عدد زوجي : FP', PP'.

وبالتالي:

$$P = P(P') = \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5}$$
$$= \frac{58}{135}$$

السؤال (*) يعني إيجاد احتمال (اختيار عدد زوجي مع ظهور F أو P) أو بصيغة أخرى، بوضع:

A الحدث: "اختيار عدد زوجي"،

B الحدث: "ظهور صورة F"،

و C الحدث: "ظهور وجه P" يكون المطلوب هو إيجاد:

$$P(A \cap (B \cup C))$$

لدينا:

$$\begin{aligned} P(A \cap (B \cup C)) &= P((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= P(A \cap B) + P((A \cap C) \\ &= P(B)P(A/B) + P(C)P(A/C) \\ &= \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{5} \\ &= \frac{58}{135} \end{aligned}$$

التجزيئات ونظرية بابيز Partitions et théorème de Bayes

نفرض أن الأحداث A_1، A_2،...، A_n تمثل تجزئة لفضاء العينة Ω، أي أن الأحداث A_i متنافية مثنى مثنى واتحادهم هو Ω.

ليكن B حدث آخر كيفي فيكون :

$$B=\Omega\cap B=(A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n)\cap B$$
$$=(A_1\cap B)\cup(A_2\cap B)\cup\ldots\cup(A_n\cap B)$$

حيث أن الأحداث $A_i\cap B$ متنافية مثنى مثنى، وبالتالي:

$$P(B)=P(A_1\cap B)+P(A_2\cap B)+\cdots+P(A_n\cap B)$$

باستخدام نظرية حاصل الضرب نجد :(*)

$$\boxed{P(B)=P(A_1)+P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+\cdots+P(A_n)P(B/A_n)}$$

من ناحية أخرى، من أجل كل i يكون الاحتمال الشرطي للحدث A_i عند وقوع B هو:

$$(**)\quad \boxed{P(A_i/B)=\frac{P(A_i\cap B)}{P(B)}}$$

بتعويض عبارة $P(B)$ في العلاقة (**) نحصل على:

نظرية بابيز:

ليكن A_1، A_2،...، A_n تجزئة لفضاء العينة Ω و B أي حدث.

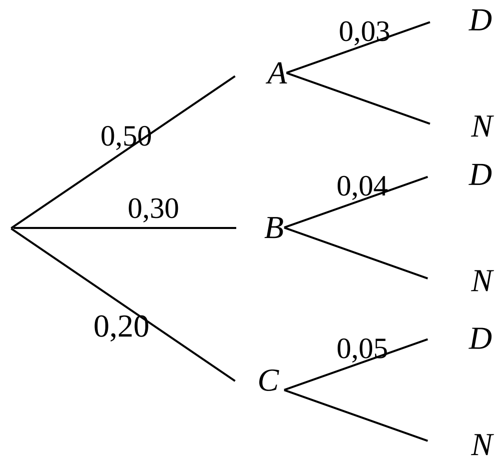
لكل i، يكون لدينا :

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i)P(B/A_i)}{P(A_1)P(B/A_1)+P(A_2)P(B/A_2)+\cdots+P(A_n)P(B/A_n)}$$

مثال5:

تُنتج ثلاث ماكينات A، B و C على التوالي 50%، 30% و 20% من الإنتاج الكلي لمصنع. نسبة الإنتاج المعيب لهذه الماكينات هي 3%، 4% و 5% على التوالي.

إذا اختيرت بطريقة عشوائية قطعة واحدة، ما احتمال أن تكون معيبة؟



الحل: نفرض أن X هو الحدث : "القطعة المختارة معيبة".

من العلاقة (*) نجد :

$$\begin{aligned} P(X) &= P(A)P(X/B) + P(B)P(X/B) + P(C)P(X/C) \\ &= (0,50)(0,03) + (0,30)(0,04) + (0,20)(0,05) \\ &= 0,37 \end{aligned}$$

مثال6 :

في المثال السابق، إذا اختيرت قطعة بطريقة عشوائية ووجد أنها معيبة، فما هو الاحتمال أن تكون من إنتاج الماكينة A أي : $P(A/X)$.

الحل:

من نظرية باييز نجد:

$$P(A/X)=\frac{P(A)P(X/A)}{P(A)P(X/A)+P(B)P(X/B)+P(C)P(X/C)}$$
$$=\frac{(0,50)(0,03)}{(0,50)(0,03)+(0,30)(0,04)+(0,20)(0,05)}$$
$$=\frac{15}{37}$$

أي أنه قد و جدنا حاصل قسمة احتمال المسار المطلوب على احتمال فضاء العينة المختزل وهو احتمال المسارات التي تؤدي إلى قطعة معيبة.

الاحداث المستقلة

يقال أن الحدث B مستقل عن الحدث A إذا كان احتمال حدوث B لا يتأثر بحدوث A أو عدم حدوثه.
وبمعنى آخر، B مستقل عن A إذا كان احتمال B يساوي الاحتمال الشرطي للحدث B عند وقوع A أي : $P(B)=P(B/A)$. بتعويض هذه العلاقة في نظرية حاصل الضرب: $P(A\cap B)=P(A)P(B/A)$ نحصل على:

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

تعريف:

نقول أن الحدثان A و B مستقلان إذا تحقق :

$$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$$

وإذا لم يتحقق هذا الشرط نقول أنهما مرتبطان.

مثال7:

احتمال أن يصيب A الهدف هو $\frac{1}{4}$ واحتمال أن يصيب B الهدف هو $\frac{2}{5}$. ما هو احتمال إصابة الهدف إذا صوّب كل من A و B نحو الهدف مرة واحدة؟

الحل:

لدينا فرضا : $P(A)=\frac{1}{4}$ و $P(B)=\frac{2}{5}$ المطلوب إذن إيجاد:

$$P(A\cup B)$$

بما أن احتمال أن يصيب A أو B الهدف لا يتأثر بنتيجة الآخر، هذا يعني أن الحدث "A يصيب الهدف" مستقل عن الحدث "B يصيب الهدف" وبالتالي: $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

إذن:

$$\begin{aligned}P(A\cup B)&=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\\&=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)\\&=\frac{1}{4}+\frac{2}{5}-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{5}\right)=\frac{11}{20}\end{aligned}$$

تعريف:

نقول أن ثلاثة أحداث A، B و C مستقلة إذا تحقق:

(i) $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ ، $P(A\cap C)=P(A)\cdot P(C)$

و $P(B\cap C)=P(B)\cdot P(C)$

أي أن الأحداث A، B و C مستقلة مثنى مثنى.

(ii) $P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$

ملاحظة:

لا يمكن استنتاج الشرط (ii) من الشرط (i)، أو بعبارة أخرى توجد ثلاثة أحداث مستقلة مثنى مثنى ولكنها غير مستقلة معًا.

مثال8:

ألقيت قطعة نقود منتظمة مرتين. فضاء العينة لهذه التجربة هو:

$$\Omega=\{FF,FP,PF,PP\}$$

وهو فضاء منتظم، نعرّف الأحداث A، B و C على النحو التالي:

A = {الرمية الأولى تعطي صورة} = $\{FF,FP\}$

B = {الرمية الثانية تعطي صورة} = $\{FF,PF\}$

C = {ظهور الصورة مرة واحدة بالضبط} = $\{FP,PF\}$

إذن :

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

كذلك :

$$P(B\cap C)=P(\{PF\})=\frac{1}{4}$$

وبذلك يتحقق الشرط (i)، أي هذا يعني أن الأحداث مستقلة مثنى مثنى.

ولكن :

$$P(A\cap B\cap C)=P(\phi)=0\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$$

أي أن الشرط (ii) غير محقق. ومنه الأحداث الثلاثة ليست مستقلة معًا

الاستقلال والمحاولات المستقلة أو المتكررة

تعريف:

ليكن Ω فضاء احتمال منته. نقصد بعدد n من التجارب المكررة أو المستقلة فضاء الاحتمال T المكوّن من عناصر Ω المرتبة على الشكل $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$.

ويكون احتمال أي عنصر من T بالتعريف هو حاصل ضرب احتمالات مكونات هذا العنصر:

$$P\left[(S_1, S_2, \ldots, S_n)\right] = P(S_1) \cdot P(S_2) \ldots P(S_n)$$

مثال9:

عندما تتسابق ثالثة أحصنة A، B، C فإن احتمال فوز كل منها على التوالي هو : $\frac{1}{2}$ ، $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{6}$.

أو بمعنى آخر:

$$\Omega = \{A, B, C\} \text{ حيث } P(A) = \frac{1}{2} \text{ ، } P(B) = \frac{1}{3} \text{ ، } P(C) = \frac{1}{6}$$

إذا تسابقت هذه الأحصنة مرتين فإن فضاء العينة للسباق المكرّر مرتين هو:

$$T = \{AA, AB, AC, BA, BB, BC, CA, CB, CC\}$$

وللتبسيط استخدمنا الرمز AC مثلا للدلالة على الزوج المرتبة (A, C).

احتمال عنصرما في T هو:

$P(AA) = P(A)P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ، $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{6}$ ،

$P(AC) = P(A)P(C) = \frac{1}{12}$ ، $P(BA) = P(B)P(A) = \frac{1}{6}$ ، $P(BB) = \frac{1}{9}$ ، $P(BC) = \frac{1}{18}$ ،

$P(CA) = \frac{1}{12}$ ، $P(CB) = \frac{1}{18}$ ،

$P(CC) = \frac{1}{36}$.

وبذلك يكون احتمال فوز C بالسباق الأول و A بالسباق الثاني هو : $P(CA) = \frac{1}{12}$.

ومن وجهة نظر أخرى، فإن عملية التجارب المكررة هي عملية عشوائية تكون لشجرتها البيانية الخواص التالية، كل فرع يؤدي إلى نفس النتيجة له نفس الاحتمال، كل نقطة تفرع لها نفس النتيجة.

الفصل الخامس

المتغيرات العشوائية

مقدمة:

نفرض Ω فضاء عينة لتجربة ما. رأينا فيما سبق أن نتائج التجربة، أي نقط العينة Ω ليست بالضرورة أعدادًا. ولكن كثيرًا ما نرغب في تخصيص عدد معين لكل نتيجة. فمثلا مجموع العددين الظاهرين عند رمي زهرتا نرد، طول عمر مصباح كهربائي بالساعات. يسمّى مثل هذا التخصيص بمتغير عشوائي.

وبصورة أوضح :

تعريف:

المتغير العشوائي X على فضاء عينة Ω هو دالة معرفة على Ω وتأخذ قيمها في مجموعة الأعداد الحقيقية، بحيث تكون الصورة العكسية لأي مجال من $\mathbb{R}$ حدثا في Ω.

ملاحظة:

يجب التنبيه على أنه إذا كان Ω فضاءً متقطعا حيث تعرف كل مجموعة جزئية حدثا، فإن كل دالة حقيقية على Ω هي متغير عشوائي.

ومن ناحية أخرى يمكن إثبات أنه إذا كان Ω فضاءً غير قابل للعد، فإن بعض الدوال الحقيقية على Ω ليست بمتغيرات عشوائية.

تعريف:

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين معرفين على نفس فضاء العينة Ω فإن: $X+y$ ، $X+k$ ، hX ، Xy (حيث h عدد حقيقي)

هي دوال معرفة على Ω كما يلي :

$$(X+Y)(s)=X(s)+Y(s) \qquad (hX)(s)=hX(s)$$
$$(X+h)(s)=X(s)+h \qquad (XY)(s)=X(s)Y(s)$$

لأي $s\in\Omega$.

يمكن إثبات أن هذه الدوال متغيرات عشوائية (وهذا بديهي في الحالة التي يكون فيها كل جزء من Ω حدثا).

ترميز:

نستعمل الرمز المختصر $P(X=a)$ و $P(a\leq X\leq b)$ لندل على احتمال الحدث المكوّن "X يأخذ القيمة a" و "x يأخذ قيمته في المجال $[a,b]$.

أي :

$$P(X=a)=P\left(\left\{s\in\Omega / X(s)=a\right\}\right)$$
$$P(a\leq X\leq b)=P\left(\left\{s\in\Omega / a\leq X(s)\leq b\right\}\right)$$

ويمكن إعطاء الرموز التالية معاني مشابهة :

الخ... $P(X\leq a)$, $P(X=a,Y=b)$, , $P(a\leq X\leq b, c\leq Y\leq d)$

دالة توزيع متغير عشوائي منته وتوقعه الرياضي:

ليكن X متغير عشوائي معرّف على فضاء عينة Ω مجموعة قيمه منتهية مثلا:

$$X(\Omega)=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$$

نكوّن من $X(\Omega)$ فضاء احتمالي بتعريف احتمال x_i على أنه $P(X=x_i)$ والذي نكتبه على الشكل $P(x_i)$.

تعريف:

تسمى الدالة f المعرفة على $X(\Omega)$ كما يلي :

$$f(x_i)=P(X=x_i)$$

بدالة التوزيع أو بدالة الاحتمال أو التوزيع الاحتمالي للمتغير X، وتعطى عادة على صورة جدول:

x_1	x_2	. . .	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	. . .	$f(x_n)$

وتحقق دالة التوزيع f الشروط التالية:

$$\text{(i)} \quad f(x_i)\geq 0\,,\ \forall i$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{n} f(x_i)=1$$ و

تعريف:

إذا كان X متغير عشوائي له دالة التوزيع السابقة فإن المتوسط أو التوقع الرياضي (أو القيمة المتوقعة) للمتغير X والذي يرمز له بالرمز $E(X)$ أو μ_x أو اختصارا μ يعرّف كما يلي:

$$\boxed{\begin{aligned} E(X) &= x_1 f(x_1)+x_2 f(x_2)+\cdots+x_n f(x_n) \\ &= \sum_{1}^{n} x_i f(x_i) \end{aligned}}$$

ملاحظة:

يمكن إعطاء $E(X)$ المعنى التالي: $E(X)$ هو الوسط المرجّح للقيم الممكنة للمتغير العشوائي حيث ترجّح كل قيمة من المتغير باحتمال.

مثال1:

إذا ألقينا زهرتا نرد متّزنتين مرة واحدة فإننا نحصل على الفضاء المنتظم Ω المكون من 36 زوجا مركبا من الأعداد 1 إلى 6.

نفرض أن X تخصص لكل نقطة (a, b) من Ω القيمة العظمى للعددين a، b.

هذا يعني أن $X(a,b) = Max(a,b)$. وبذلك يكون X متغيرًا عشوائيًا مجموعة قيمه هي:

$$X(\Omega) = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$f(1) = P(X=1) = P\left(\{(1,1)\}\right) = \frac{1}{36}$$

$$f(2) = P(X=2) = P\left(\{(2,1),(2,2),(1,2)\}\right)$$

$$= \frac{3}{36}$$

$$f(3) = P(X=3) = P\left(\{(3,1),(3,2),(3,3),(2,3),(1,3)\}\right)$$

$$= \frac{5}{36}$$

$$f(4) = P(X=4) = P\left(\{(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(3,4),(2,4),(1,4)\}\right)$$

و $$= \frac{7}{36}$$

$$f(6) = P(X=6) = \frac{11}{36}$$

$$f(5) = P(X=5) = \frac{9}{36}$$

ويمكن وضع هذه المعلومات على صورة جدول كما يلي :

x_i	1	2	3	4	5	6	Σ
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

ويكون توقّع X هو:

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \frac{161}{36} = 4.47$$

نفرض الآن أن Y يخصص لكل نقطة (a, b) من Ω مجموع العددين أي: $Y((a,b)) = a + b$.(Y دالة ترفق لكل نقطة (a, b) مجموع مركباتها).

يكون Y متغيرا عشوائيا معرفا على Ω مجموعة قيمه هي :

$$Y(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

ويكون التوزيع g للمتغير y كما يلي :

y_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$g(y_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

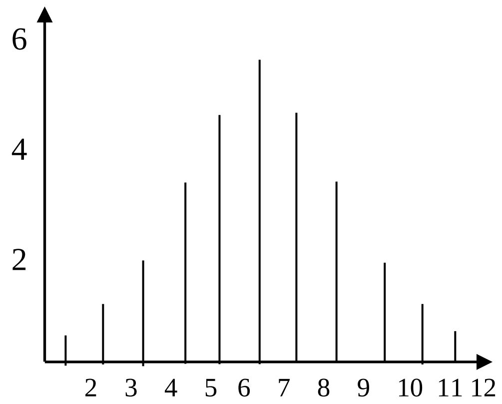
نحصل مثلا على $g(4) = \frac{3}{36}$ من حقيقة أن : $(1, 3)$، $(2, 2)$ و $(3, 1)$ هي نقط Ω التي يكون مجموع مكوناتها 4 حيث :

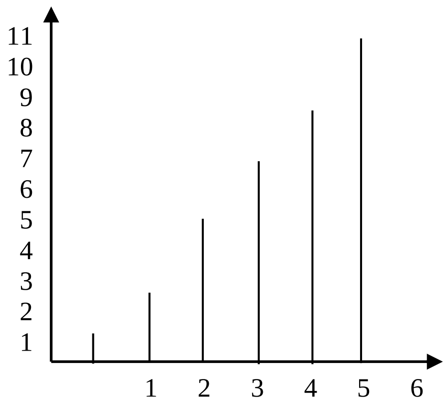
$$g(4) = P(y = 4) = P\left[\{(1,3),(2,2),(1,3)\}\right] = \frac{3}{36}$$

ويكون توقع Y هو:

$$E(Y) = \sum_i y_i g(y_i) = 2 \cdot \frac{1}{36} + \cdots = 7$$

ويمثل الرسم البياني التالي التوزيعين السابقين :





ملاحظة:

في ألعاب المراهنة يمثل التوقع E_x عائد اللعبة (gain) على اللاعب وتسمى اللعبة ملائمة بالنسبة إلى اللاعب إذا كان E_x موجب وغير ملائمة إذا كان E_x سالبا وإذا كان $E_x = 0$ سميت اللعبة عادلة أو نزيهة.

مثال2:

يلقي لاعب زهرة نرد إذا ظهر عدد أولي فإنه يكسب مثل هذا العدد بالدينارات وإذا ظهر عدد غير أولي فإنه يخسر مثل هذا العدد من الدينارات.

النتائج الممكنة x_i لهذه اللعبة واحتمالاتها $f(x_i)$ ممثلة كما يلي :

x_i	2	3	5	-1	-4	-6
$f(x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$X(1) = -1 \ , \ X(2) = 2 \ , \ X(3) = 3$$

$$X(4) = -4 \ , X(5) = 5 \ , \ X(6) = -6$$

الأعداد السالبة تمثل الحالات عندما يظهر عدد غير أولي ويخسر اللاعب.

تكون القيمة المتوقعة لهذه اللعبة هي :

$$E = 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} - 1\cdot\frac{1}{6} - 4\cdot\frac{1}{6} - 6\cdot\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

ولذلك فإن اللعبة غير ملائمة للاعب حيث أن القيمة المتوقعة سالبة.

تربط النتائج التالية بين التوقع الرياضي والعمليات المعرفة على المتغيرات العشوائية.

نتيجة1:

نفرض أن X متغير عشوائي وأن k عدد حقيقي.

لدينا:

$$\boxed{E(hX) = h\,E(X)} \qquad \text{(i)}$$

و:

$$\boxed{E(X+k) = E(X) + k} \qquad \text{(ii)}$$

إثبات

لتكن f دالة التوزيع (أو دالة الاحتمال) للمتغير X.

بالتعريف نجد:

$$\begin{aligned} E(hX) &= \sum_i h\,x_i f(x_i) = h\sum_i x_i f(x_i) \\ &= h\,E(X) \end{aligned}$$

كذالك:

$$\begin{aligned} E(X+h) &= \sum_i (x_i+h) f(x_i) = \sum_i x_i f(x_i) + h\sum_i f(x_i) \\ &= E(X) + h \end{aligned}$$

نتيجة2:

نفرض أن X و Y متغيران عشوائيان معرفان على نفس فضاء العينة Ω.

لدينا:

$$\text{(2)} \qquad \boxed{E(X+Y) = E(X) + E(Y)}$$

البرهان:

يمكن بالاستنتاج الرياضي أن نحصل على:

نتيجة3:

نفرض أن X_1، X_2،...، X_n متغيرات عشوائية معرفة على نفس الفضاء Ω.

لدينا:

$$\text{(3)} \qquad \boxed{E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)}$$

التباين والانحراف المعياري:

يقيس توقع المتغير العشوائي X، بطريقة ما، متوسط قيم X، ويقيس تباين المتغير العشوائي X "انتشار" أو "تشتت" أو "امتداد" X.

ليكن X متغيرا عشوائيا له دالة التوزيع التالية :

x_1	x_2	x_3	. . .	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$f(x_3)$	. . .	$f(x_n)$

تعريف:

يُعرّف تباين X ويرمز له بالرمز $Var(X)$ كما يلي :

$$\boxed{Var(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 f(x_i) = E\left((X - \mu)^2\right)}$$

حيث μ هو توقع X. ويعرّف الانحراف المعياري والذي يرمز له بالرمز σ_X بأنه الجذر التربيعي (الموجب) لتباين X أي:

$$\boxed{\sigma_X = \sqrt{Var(X)}}$$

تعطينا النتيجة التالية صيغة أخرى قد تكون أكثر فائدة لحساب تباين متغير عشوائي X.

نتيجة:

$$\boxed{Var(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2}$$

الإثبات:

باستعمال التعريف $E(X) = \sum_i x_i f(x_i)$ و $\sum_i f(x_i) = 1$ نحصل على:

$$
\begin{aligned}
\sum_i (x_i-\mu)^2 f(x_i) &= \sum_i (x_i^2 - 2\mu x_i + \mu^2) f(x_i) \\
&= \sum_i x_i^2 f(x_i) - 2\mu \sum_i x_i f(x_i) + \mu^2 \sum_i f(x_i) \\
&= \sum_i x_i^2 f(x_i) - 2\mu^2 + \mu^2 \\
&= \sum_i x_i^2 f(x_i) - \mu^2
\end{aligned}
$$

وهو المطلوب إثباته.

مثال3:

اعتبر المتغير العشوائي X المذكور في المثال السابق (وهو الذي

يخصص القيمة العظمى للعددين الظاهرين إلى أعلى عند رمي زهرتي النرد).

من جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X :

x_i	1	2	3	4	5	6	$\sum$
$f(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$	1

نجد:

$$E(X) = \sum_i x_i f(x_i) = \frac{161}{36} \approx 4.47$$

و:

$$E(X^2) = \sum_i x_i^2 f(x_i) = \frac{791}{36} \approx 21.97$$

و عليه يكون لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \\ &= 21.97 - (4.47)^2 \approx 1.99 \approx 2 \end{aligned}}$$

خواص التباين :

قضية:

نفرض X متغير عشوائي و h عدد حقيقي.

لدينا:

$$Var(h+X)=Var(X) \quad \text{(i)}$$
$$Var(hX)=h^2 Var(X) \quad \text{(ii)}$$

وبالتالي:

$$\sigma_{hX}=|h|\sigma_X \quad \text{و} \quad \sigma_{X+h}=\sigma_X$$

الإثبات

لدينا:

$$\begin{aligned} Var(h+X) &= E\left(\left[h+X-E(h+X)\right]^2\right) \\ &= E\left(\left[h+X-h-E(X)\right]^2\right) \quad \text{(i)} \\ &= E\left((X-E(X))^2\right)=Var(X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(hX) &= E\left(\left[hX-E(hX)\right]^2\right)=E\left(\left[hX-hE(X)\right]^2\right) \\ &= E\left(h^2\left[X-E(X)\right]^2\right)=h^2E\left(\left[X-E(X)\right]^2\right) \quad \text{(ii)} \\ &= h^2 Var\,X \end{aligned}$$

ملاحظات:

1) يمكن إعطاء التوقع والتباين المعنى الطبيعي التالي: نفرض أنه عند كل نقطة x_i على محور الفواصل ox وضعت كتلة مقدارها $f(x_i)$. يكون عندئذ التوقع هو مركز ثقل هذا النظام والتباين هو عزم القصور الذاتي للنظام. (لعديد من المتغيرات العشوائية نفس التوزيع الاحتمالي).

2) تؤدي متغيرات عشوائية مختلفة إلى نفس التوزيع (لها نفس التوزيع الاحتمالي) ولذلك نتحدث غالبا عن المتوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري للتوزيع بدلا من المتغير العشوائي.

3) نفرض أن X متغير عشوائي توقعه الرياضي μ وانحرافه المعياري σ. يعرّف المتغير العشوائي المعياري X^* المناظر للمتغير X كما يلي:

$$\boxed{X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}}$$

ونبرهن أن:

$$\boxed{E(X^*)=0} \quad و \quad \boxed{Var(X^*)=1}$$

التوزيع الاحتمالي المشترك:

نفرض أن X و Y متغيران عشوائيان معرّفان على نفس فضاء العينة Ω حيث:

$$Y\ (\Omega)=\{y_1, y_2,\ldots, y_n\} \quad \text{و} \quad X\ (\Omega)=\{x_1, x_2,\ldots, x_n\}$$

تعريف:

نحوّل مجموعة حاصل الضرب :

$$X(\Omega)\times Y(\Omega)=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)\}$$

إلى فضاء احتمالي وذلك بتعريف احتمال لكل زوج (x_i, y_i) كما يلي:

$P(X = x_i, Y = y_j)$ ونكتب ذلك $h(x_i, y_j)$.

تسمى الدالة h المعرفة على مجموعة حاصل الضرب $X\ (\Omega)\times Y\ (\Omega)$ بالتوزيع المشترك أو بدالة الاحتمال المشتركة للمتغيرين X و Y. وتعطى عادة على صورة الجدول التالي:

المجموع	y_m	. . .	y_2	y_1	$Y \backslash X$
$f\ (x_1)$	$h(x_1,y_m)$	. . .	$h(x_1,y_2)$	$h(x_1,y_1)$	x_1
$f\ (x_2)$	$h(x_2,y_2)$	. . .	$h(x_2,y_2)$	$h(x_2,y_1)$	x_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
$f\ (x_n)$	$h(x_n,y_m)$				x_n
1	$g(y_m)$	. . .	$g(y_2)$	$g(y_1)$	المجموع

وتعرّف الدوال f و g السابق ذكرها كما يلي:

$$\boxed{g(y_j)=\sum_{i=1}^{n}h(x_i,y_j)}$$

$$\boxed{f(x_i)=\sum_{j=1}^{m}h(x_i,y_j)} \quad \text{و}$$

أي أن $f(x_i)$ هو مجموع مكونات السطر رقم i و $g(y_j)$ هو مجموع مكونات العمود رقم j. تُسمى هذه التوزيعات بالتوزيعات الهامشية وهي في الواقع التوزيع الخاص لكل من X و Y على التوالي.

يُحقق التوزيع المشترك h الشروط التالية :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}h(x_i,y_j)=1 \quad \text{(i)}$$

$$\forall i,j,h(x_i,y_j)\geq 0 \quad \text{(ii)} \quad \text{و}$$

التغاير:

تعريف:

إذا كان X و Y متغيرين عشوائيين لهما التوزيع المشترك (الكثافة المشتركة) السابق $h(x,y)$ وكان توقع كل منهما على التوالي μ_X و μ_Y، فإن التغاير بين X و Y والذي يرمز له بالرمز $Cov(X,Y)$ يعرّف كما يلي:

$$\boxed{\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E\left[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)\right] \\ &= \sum_{i,j}(x_i-\mu_X)(y_j-\mu_Y)\,h(x_i,y_j) \end{aligned}}$$

نتيجة:

$$\boxed{\begin{aligned} Cov(X,Y) &= E(XY)-\mu_X\mu_Y \\ &= \sum_{i,j}x_iy_j\cdot h(x_i,y_j)-\mu_X\mu_Y \end{aligned}}$$

حيث h هي الكثافة المشتركة للمتغيرين العشوائيين X و Y، μ_X توقع X و μ_Y توقع Y.

البرهان:

بما أن:

$$\mu_Y=\sum_{i,j}y_jh(x_i,y_j)=\sum_j y_j\sum_i h(x_i,y_j)=\sum_j y_jg(y_j)$$

و:

$$\mu_X=\sum_{i,j}x_ih(x_i,y_j)=\sum_i x_i\sum_i f(x_i)$$

$$\sum_{i,j}h(x_i,y_j)=1 \quad \text{و}$$

فإن:

$$\sum_{i,j}(x_i-\mu_X)(y_j-\mu_Y)h(x_i,y_j)$$
$$=\sum_{i,j}(x_iy_j-\mu_X y_j-\mu_Y x_i+\mu_X\mu_Y)h(x_i,y_j)$$
$$=\sum_{i,j}x_iy_jh(x_i,y_j)-\mu_X\sum_{i,j}y_jh(x_i,y_j)-\mu_Y\sum_{i,j}x_ih(x_i,y_j)$$
$$+\mu_X\mu_Y\sum_{i,j}h(x_i,y_j)$$
$$=\sum_{i,j}x_iy_jh(x_i,y_j)-\mu_X\mu_Y-\mu_y\mu_x+\mu_X\mu_Y$$
$$=\sum_{i,j}x_iy_jh(x_i,y_j)-\mu_X\mu_Y=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)$$

معامل الارتباط:

تعريف:

يُعرّف معامل الارتباط بين متغيرين عشوائيين والذي يرمز له بالرمز $\rho(X,Y)$ أو اختصارًا ρ كما يلي:

$$\boxed{\rho=\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}}$$

ويعتبر ρ نسبة بلا تمييز وله الخواص التالية :

خواص:

(i) $\rho(X,Y)=\rho(Y,X)$

(ii) $-1\le\rho\le1$

(iii) $\rho(X,X)=1$ ، $\rho(X,-X)=-1$

(iv) إذا كان $a,c\neq0$ فإن : $\rho(aX+b,cY+d)=\rho(X,Y)$

ملاحظة:

توجد أزواج من المتغيرات العشوائية التي لها نفس التوزيعات الهامشية لكنها تختلف في التغاير (Cov) وفي الارتباط ρ، ولهذا فإن $Cov(X,Y)$ و $\rho(X,Y)$ يقيسان التداخل بين X و Y.

مثال4:

إذا ألقينا زهرتي نرد متزنتين نحصل على الفضاء المنتظم المكون من 36 زوج مرتب من الأرقام المحصورة بين 1 و 6.

$$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$$

نفرض أنّ X و Y متغيران عشوائيان معرّفان على الفضاء Ω والمذكوران في المثال السابق أي X هو الذي يُعطي القيمة العظمى للعددين الظاهرين و Y هو الذي يعطي مجموع العددين الظاهرين لأية نقطة من Ω.

إذن يمكن حساب توزيع X و Y كما يلي:

$X \backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	المجموع
1	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
2	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
3	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$
4	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{7}{36}$
5	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{9}{36}$
6	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{11}{36}$
المجموع	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

مكوّنات الجدول يمكن حسابها كما يلي:

مثلا $h(3,5)=\frac{2}{36}$ نتيجة لأن $(3,2)$ و $(2\,,3)$ هما النقطتان الوحيدتان من Ω اللتان تكونان نهايتهما العظمى 3 و مجموعهما 5 إذن:

$$h(3,5)=P(X=5,Y=5)=P\left(\{(3,2),(2,3)\}\right)=\frac{2}{36}$$

ويمكن إيجاد بقية عناصر الجدول بنفس الطريقة.

لنحسب الآن التغاير والارتباط للمتغيرين X و Y.

نحسب أولا $E(XY)$:

$$E(XY)=\sum_{i,j}x_i y_j h(x_i,y_j)=1\cdot 2\cdot\frac{1}{36}+2\cdot 3\cdot\frac{2}{36}+2\cdot 4\cdot\frac{1}{36}$$
$$+\cdots+6\cdot 12\cdot\frac{1}{36}=\frac{1232}{36}=34,2$$

من جهة أخرى لدينا:

$$\mu_X=E(X)=\sum_i x_i f(x_i)=4,47,\ E(Y)=\sum_j y_j g(y_j)=7$$

و:

$$\sigma_X=\sqrt{E(X^2)-\left(E(X)\right)^2}=\sqrt{\sum_i x_i^2 f(x_i)-\mu_X^2}$$

كذلك:

$$=\sqrt{\sum_i x_i^2 f(x_i)-\mu_X^2}=\sqrt{\frac{791}{36}-(4,47)^2}$$
$$=\sqrt{21,97-19,98}=\sqrt{1,99}=1,4\sigma_Y=2,4$$
$$\sigma_Y=\sqrt{E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2}=\sqrt{\sum_i y_i^2 g(y_i)-\mu_Y^2}=2.4$$

و منه:

$$Cov(X,Y)=E(XY)-\mu_X\mu_Y=2,9$$

و:

$$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}=\frac{2,9}{(1,4)(2,4)}=0,86$$

مثال5:

نفرض أن X، Y، X'، Y' متغيرات عشوائية لها التوزيعات المشتركة التالية:

	10	4	X' \ Y'
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1

المجموع	10	4	X \ Y
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	3
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	المجموع

نلاحظ أن ل X و X' ثم لY و Y' نفس التوزيع.

3	1	x_i
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$f(x_i)$

توزيع X و X'

10	4	y_i
$g(y_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

توزيع Y و Y'

نبرهن أنه (بالرغم من ذاك):

$$Cov(X,Y) \neq Cov(X',Y')$$

ومن ثم:

$$\rho(X,Y) \neq \rho(X',Y')$$

لنحسب أولا $E(XY)$ و $E(X'Y')$.

ادينا:

$$E(XY) = 1\cdot 4\cdot \frac{1}{4} + 1\cdot 10\cdot \frac{1}{4} + 3\cdot 4\cdot \frac{1}{4} + 3\cdot 10\cdot \frac{1}{4} = 14$$

$$E(X'Y') = 1\cdot 4\cdot 0 + 1\cdot 10\cdot \frac{1}{2} + 3\cdot 4\cdot \frac{1}{2} + 3\cdot 10\cdot 0 = 11$$

وبما أن:

$$\mu_X = \mu_{X'} = 2$$

و:

$$\mu_Y = \mu_{Y'} = 7$$

فإن:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - \mu_X \mu_Y = 0$$

و:

$$Cov(X',Y') = E(X'Y') - \mu_{X'} \mu_{Y'} = -3$$

ملاحظة:

يمكن تعميم فكرة التوزيع المشترك h إلى أي عدد محدود من المتغيرات العشوائية X، Y،...، Z بطريقة مماثلة. وهذا يعني أن h تكون دالة على مجموعة حاصل الضرب

: $X(\Omega)\times Y(\Omega)\times\cdots\times Z(\Omega)$

معرفة كما يلي :

$$h(x_i, y_j, \ldots, z_h) = P(X = x_i, Y = y_j, \ldots, z = z_h)$$

المتغيرات العشوائية المستقلة

تعريف:

نقول أن عددا منتهيا من المتغيرات العشوائية X، Y،...،Z المعرّفة على فضاء العينة Ω مستقلة إذا كان:

$$\boxed{\begin{aligned}&P(X=x_i,Y=y_j,\ldots,Z=z_h)\\&=P(X=x_i)\cdot P(y=y_j)\ldots P(Z=z_h)\end{aligned}}$$

لجميع قيم x_i، y_j، ...، z_h.

وبصفة خاصة يكون X و Y مستقلين إذا تحقق:

$$(*)\quad \boxed{P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)}$$

وإذا كان توزيع X و Y على التوالي هو f و g والتوزيع المشترك هو h فإن المعادلة السابقة (*) يمكن كتابتها على الشكل:

$$\boxed{h(x_i,y_j)=f(x_i)g(y_j)}$$

أي أن X و Y مستقلان إذا كان كل الحد $h(x_i,y_j)$ هو حاصل ضرب الحدين الهامشين له

الفصل السادس

التوزيع ذو الحدين – التوزيع الطبيعي
توزيع يواسون

توزيع ذو الحدّين (أو توزيع برنولي)

نفرض أننا كرّرنا محاولات مستقلة لتجربة ذات ناتجين وأسمينا أحد الناتجين نجاحا والآخر فشلا .

ليكن p احتمال النجاح . يكون عندئذ احتمال الفشل. $q=1-P$:

فإذا كان يهمّنا عدد مرات النجاح وليس ترتيب وقوع النجاح فإن النظرية التالية يمكن تطبيقها.

نظرية:

احتمال وقوع h من النجاحات في n من المحاولات المكرّرة هو:

$$\boxed{B(h;n,P)=C_n^h P^h q^{n-h}, 0\le h\le n}$$

يسمى العدد C_n^h معامل ذو الحدين.

ملاحظة:

نلاحظ أن احتمال الفشل في كل المحاولات (أي $h=0$) هو: q^n، ولهذا فإن احتمال نجاح واحد على الأقل هو. $1-q^n$:

مثال1:

ألقيت قطعة نقود 6 مرات أو بطريقة مكافئة ألقيت 6 قطع من النقود مرة واحدة.

نفرض أن الصورة (F) هي النجاح إذن $n=6$: و. $p=q=\frac{1}{2}$

(i)احتمال وقوع صورتين بالضبط(أي أن $h=2$) : هو:

$$B\left(2\,;6\,,\frac{1}{2}\right)=C_6^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{15}{64}$$

(ii)احتمال وقوع أربع صور على الأقل (أي أن $h=4$: أو 5 أو6) هو:

$$b\left(4\,;6\,,\frac{1}{2}\right)+b\left(5\,;6\,,\frac{1}{2}\right)+b\left(6\,;6\,,\frac{1}{2}\right)$$

$$=C_6^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^2+C_6^5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)+C_6^6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{15}{64}+\frac{6}{64}+\frac{1}{64}=\frac{11}{32}$$

(iii)احتمال عدم وقوع الصورة (أي الفشل في جميع المحاولات) هو:

$$q^6=\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{64}$$

إذن احتمال وقوع صورة واحدة على الأقل هو:

$$1-q^6=1-\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

مثال2:

ألقيت زهرة نرد 7 مرات .نفرض أن النجاح هو الحصول على الرقم 5 أو 6 في أية رمية .إذن $n=7$:،

$$q=1-P=\frac{2}{3}\text{ ، }P=P\left(\{5,6\}\right)=\frac{1}{3}$$

(i)احتمال الحصول على الرقم 5 أو 6 ثلاث مرات بالضبط (أي$h=3$) هو :

$$b\left(3;7,\frac{1}{3}\right)=C_7^3\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{560}{2187}$$

(ii)احتمال عدم الحصول على 5 أو 6 (أي الفشل في جميع المحاولات) هو:

$$q^7=\left(\frac{2}{3}\right)^7=\frac{128}{2187}$$

وبالتالي احتمال الحصول على 5 أو 6 مرة واحدة على الأقل هو:

$$1-q^7=\frac{2059}{2187}$$

تعريف:

إذا اعتبرنا أن n و p ثوابت فإن الدالة $P(h)=B(h;n,P)$ تكوّن توزيعا احتمالا متقطعا:

n	$\cdots$	2	1	0	H
P^n	$\cdots$	$C_n^2P^2q^{n-2}$	$C_n^1Pq^{n-1}$	q^n	$P(k)$

يُسمى هذا التوزيع بتوزيع ذي الحدين (p،n) وذلك لأن الاحتمالات لقيم $h=0,1,2,\ldots,n$ هي الحدود المتتالية في مفكوك ذي الحدين:

$$\begin{aligned}(q+p)^n &= \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k}\\ &= q^n + C_n^1 q^{n-1}p + C_n^2 q^{n-2}p^2 + \cdots + p^n\end{aligned}$$

و يسمى أيضا هذا التوزيع بتوزيع برنولي .وتسمى التجارب المستقلة ذات الناتجين أيضا بتجارب برنولي.

خواص توزيع برنولي

ليكن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي $B(h;n,P)$ لدينا:

نظرية :

الحدين ذو التوزيع	
$\mu=nP$	التوقع
$\sigma^2=nPq$	التباين
$\sigma=\sqrt{nPq}$	المعياري الانحراف

البرهان:

لدينا:

$$E(X)=\sum_{h=0}^{n} hP(X=k)=\sum_{k=0}^{n} hB(h;n,p)=\sum_{k=0}^{n} hC_n^k p^k q^{n-q}$$

$$=\sum_{k=1}^{n} h\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}=np\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k-1}$$

$$=np\sum_{s=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{s!(n-s-1)!}p^s q^{n-s-1}=np\sum_{s=0}^{n-1}C_{n-1}^s p^s q^{n-1-s}=np(p+q)^{n-1}$$

$$=np(p+q)^{n-1}=np(1)^{n-1}=np$$

$$E(X^2)=\sum_{k=0}^{n}k^2P(X=k)=\sum_{k=0}^{n}k^2C_n^k p^k q^{n-k}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^2\frac{n!}{k!(n-k)!}p^k q^{n-k}$$

$$=np\sum_{k=1}^{n}k\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}p^{k-1}q^{n-k}$$

$$=np\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\frac{(n-1)!}{s!(n-s-1)!}p^s q^{n-s-1}$$

$$=np\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)C_{n-1}^s p^s q^{n-s-1}$$

$$=np\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)B(s;n-1,p)$$

$$=np\left[\sum_{s=0}^{n-1}sB(s;n-1,p)+\sum_{s=0}^{n-1}B(s;n-1,p)\right]$$

$$=np\left[\sum_{s=0}^{n-1}sP(X=s)+\sum_{s=0}^{n-1}P(X=s)\right]$$

$$=np\left[(n-1)p+1\right]=np(np+1-p)$$

$$=np(np+q)=(np)^2+npq$$

و:

$$\sigma_X^2=E(X-\left(E(X)\right)^2=(nP)^2+nPq-(nP)^2=nPq$$

مثال3

ألقي حجر نرد 180 مرة .يكون عندئذ توقع عدد مرات الحصول على الرقم 6 هو:

$$\mu=nP=180\frac{1}{6}=30$$

و يكون الانحراف المعياري هو:

$$\sigma = \sqrt{nPq} = \sqrt{180\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}} = 5$$

2 – التوزيع الطبيعي

تعريف:

يُعرّف التوزيع الطبيعي (أو توزيع لبلاص – غوص) كما يلي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

حيث μ و $\sigma > 0$ ثابتان اختياريان.

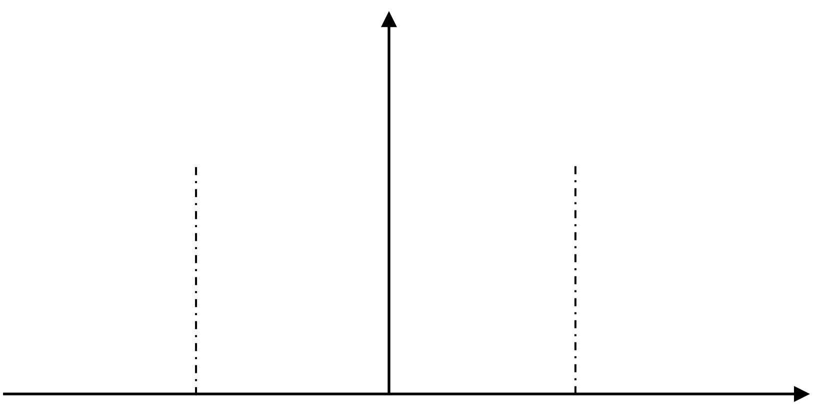
تعتبر هذه الدالة من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة .نرمز للتوزيع الطبيعي الذي توقعه μ وتباينه σ^2 بالرمز $\aleph(\mu,\sigma^2)$.

أي أنه إذا كان X يتبع $\aleph(\mu,\sigma^2)$ حيث μ توقع X و σ انحرافه المعياري فإن:

$$P(X = x) = f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu)^2/\sigma^2}$$

ملاحظة:

يبين المنحنيان التاليان التغير في f كلما تغيرت μ وσ وبصفة خاصة فإننا نلاحظ أن هذه المنحنيات شبيهة لشكل الجرس وأنها متماثلة حول المستقيم. $x = \mu$



خواص التوزيع الطبيعي:

ليكن X متغير عشوائي مستمر توزيعه الاحتمالي. $\aleph(\mu,\sigma^2)$

نظرية :

الطبيعي التوزيع	
التوقع	μ
التباين	σ^2
الانحراف المعياري	σ

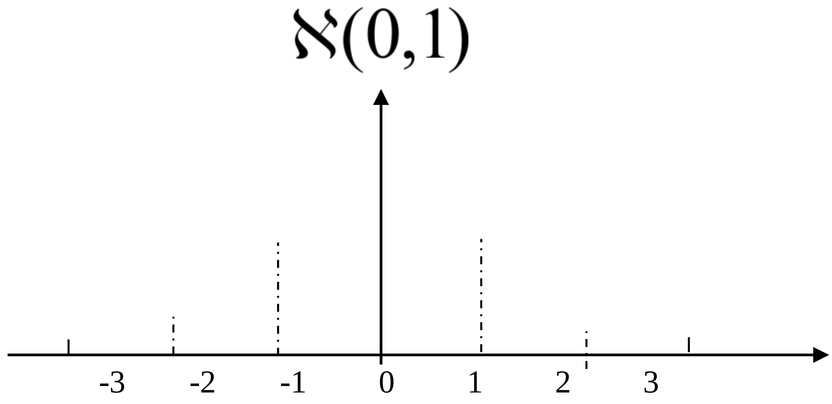
ملاحظة :

إذا أجرينا التغيير التالي $t=\dfrac{x-\mu}{\sigma}$: في الصيغة السابقة للتوزيع الطبيعي . $\aleph(\mu,\sigma^2)$ نحصل على التوزيع الطبيعي القياسي (المعياري) التالي:

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

الذي توقعه $\mu=0$: وتباينه . $\sigma^2=1$:

منحنى هذا التوزيع مرسوم فيما يلي، حيث يمكن إثبات أن المساحة الواقعة تحت المنحنى وبين الخطين $t=-1$ و $t=1$ تمثل 68,2% من المساحة الكلية الواقعة تحت المنحنى وأن المساحة الواقعة تحت المنحنى بين الخطين $t=-2$ و $t=2$ تمثل 95,4% من المساحة الواقعة تحت المنحنى.



حساب: $P(a \le X \le b)$

نفرض أن X متغير عشوائي مستمر توزيعه طبيعي(يقال عادة أن X موزع توزيعا طبيعيا).

لحساب احتمال أن يقع المتغير X بين قيمتين a و b والذي يرمز له $P(a \le X \le b)$ نغيرّ a و b إلى وحدات قياسية وذلك بوضع:

$$a' = \frac{a-\mu}{\sigma} \quad \text{و} \quad b' = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

وبالتالي:

$$P(a \le X \le b) = P(a' \le X^* \le b')$$

تساوي المساحة الواقعة تحت المنحنى الطبيعي القياسي بين a' و b'.

ويكون المتغير X^* هو المتغير العشوائي القياسي (المعياري) المناظر للمتغير X ومنه فإن X^* توزيعه طبيعي قياسي. $\aleph(0,1)$

مثال4:

ليكن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي طبيعي قياسي.ϕ

احسب:

$$\text{(i)} \quad P(0 \le X \le 1,42)$$

$$\text{(ii)} \quad P(-1,79 \le X \le -0,54)$$

الحل:

(i) $P(0 \le X \le 1,42)$ تساوي المساحة الموجودة أسفل المنحنى الطبيعي القياسي بين 0 و $1,42$.
من الجدول مباشرة نجد:

$$P(0 \le X \le 1,42) = 0,4222$$

(ii)

$$\begin{aligned} P(-1,79 \le X \le -0,54) &= P(0,54 \le X \le 1,79) \\ &= P(0 \le X \le 1,79) - P(0 \le X \le 0,54) \\ &= 0,4633 - 0,2054 = 0,2579 \end{aligned}$$

مثال5:

ليكن X متغير عشوائي توزيعه الاحتمالي طبيعي قياسي.ϕ
احسب قيمة t علما أن:

$$\text{(i)} \quad P(0 \le X \le t) = 0,4236$$

$$\text{(ii)} \quad P(t \le X \le 2) = 0,1000$$

الحل :

(i) من الجدول نجد مباشرة $t = 1,43$:

(ii)

$$\begin{aligned} P(0 \le X \le t) &= P(0 \le X \le 2) - P(t \le X \le 2) \\ &= 0,4772 - 0,1000 = 0,3772 \end{aligned}$$

ومن الجدول نجد. $t = 1,16$:

التقريب الطبيعي للتوزيع ذي الحدين – نظرية النزعة المركزية

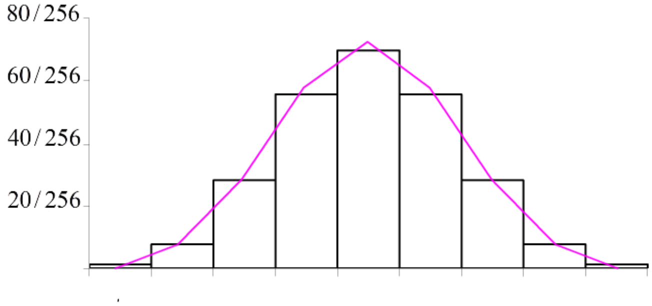
يمكن تقريب توزيع ذي الحدين $P(h) = \mathcal{B}(h;n,P)$: تقريبا جيدا بواسطة التوزيع الطبيعي إذا كانت n كبيرة ولم تكن أي من p أو q قريبة من الصفر.

يبين الشكل التالي هذه الخاصية حيث اخترنا توزيع ذي الحدين المناظر لقيم $n=8$: و. $p=q=\frac{1}{2}$

$$P(h)=\mathcal{B}(h;n,p)=C_n^k p^k q^{n=k}$$

H	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P(h)$	$\frac{1}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{70}{256}$	$\frac{56}{256}$	$\frac{28}{256}$	$\frac{8}{256}$	$\frac{1}{256}$

توزيع ذو الحدين عندما تكون $n=8$ و $p=q=\frac{1}{2}$



يمكن تعميم الخاصية السابقة للتوزيع الطبيعي بنظرية النزعة المركزية التالية:

نظرية النزعة المركزية

نظرية:

نفرض أن X_1 ، X_2 ، ....، متتالية من متغيرات عشوائية مستقلة وأن لها نفس التوزيع والتوقع μ والتباين. σ^2

ليكن:

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\,\sigma}$$

عندئذ يكون لأي فترة (مجال): $\{a \le x \le b\}$

$$\lim_{n\to+\infty} P(a \le Z_n \le b) = P(a \le \phi \le b) = \frac{1}{\sqrt{2n}} \int_a^b e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

حيث ϕ هو المتغير الطبيعي القياسي.

ملاحظة:

نذكّر هنا أننا سمينا $S_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ بمتوسط عينة المتغيرات العشوائية X_1 ، ....، X_n أي أن (و بالتالي) Z_n في النظرية السابقة هو المتوسط القياسي للعينة. وبشكل تقريبي فإن نظرية النهاية المركزية تنص على أنه في أي متتالية من التجارب أو المحاولات المكررة يقترب متوسط العينة القياسي من المنحنى الطبيعي القياسي كلما زادت عدد المحاولات.

مثال6:

نلقي قطعة نقود منتظمة 12 مرة .عيّن الاحتمال P أن نحصل على الصورة عددًا من المرات يتراوح بين 4 و 7بما في ذلك 4 و 7 باستخدام:

(i) :التوزيع ذي الحدين، (ii) التقريب الطبيعي للتوزيع ذي الحدين.

الحل:

(i) : من النظرية السابقة مع $n = 12$ و $P = q = \frac{1}{2}$ نجد:

$$P(\text{صور } 4) = C_{12}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{8} = \frac{495}{4096}$$

$$P(\text{صور } 5) = C_{12}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{7} = \frac{792}{4096}$$

$$P(\text{صور } 6) = C_{12}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{6} = \frac{924}{4096}$$

$$P(\text{صور } 7) = C_{12}^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{792}{4096}$$

ومنه:

$$P = \frac{495+792+924+792}{4096} = \frac{3003}{4096} = 0,7332$$

(ii)لدينا هنا :

$$\mu = nP = 12\cdot\frac{1}{2} = 6 \text{ و } \sigma = \sqrt{nPq} = \sqrt{12\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = 1,73$$

نفرض أن X يمثل عدد مرات ظهور الصورة .نبحث إذن عن: $P(4 \le X \le 7)$ فإذا فرضنا أن القراءات مستمرة لكي يمكننا تطبيق التقريب الطبيعي يجب أن نجد $P(3,5 \le X \le 7,5)$: كما هو مبين في الرسم البياني السابق وحيث أن:

$$3{,}5 \text{ بالوحدات القياسية} = \frac{3,5-6}{1,73} = -1,45$$

$$7{,}5 \text{ بالوحدات القياسية} = \frac{7,5-6}{1,73} = 0,87$$

نجد إذن:

$$\begin{aligned} p &\approx P(3,5 \le X \le 7,5) = P(-1,45 \le X^{*} \le 0,87) \\ &= 0,4265 + 0,3078 = 0,7343 \end{aligned}$$

3- توزيع بواسون

تعريف:

يعرف توزيع بواسون كما يلي:

$$P(h;\lambda)=\frac{\lambda^{h}}{h!}e^{-\lambda}\ ,\ h=0,1,2,\ldots$$

حيث $0<\lambda$ ثابت اختياري. ويظهر هذا التوزيع في كثير من الظواهر الطبيعية مثل عدد المكالمات الهاتفية في الدقيقة في مركز هاتفي، أو عدد الأخطاء المطبعية في الصفحة من كتاب كبير، أو عدد جسيمات ألفا التي يطلقها مركب نشيط إشعاعيًا.

خواص توزيع بواسون:

نظرية

ليكن X متغير عشوائي توزيعه توزيع بواسون. $P(h;\lambda)$

توزيع بواسون	
التوقع	$\mu=\lambda$
التباين	$\sigma^2=\lambda$
الانحراف المعياري	$\sigma=\sqrt{\lambda}$

ملاحظة:

بالرغم من أن توزيع بواسون له فوائده الخاصة إلا أنه يعطينا أيضا تقريبًا جيدًا لتوزيع ذي الحدين عندما يكون hكبيرًا وبفرض أن p صغير وأن. $\lambda=np$:

تمارين على المجموعات

التمرين الأول:

نفرض $U=\{a,b,c,d,e\}\ ,\ B=\{b,d,e\}\ ,\ A\{a,b,d\}$

أوجد:

$(i)A\bigcup B\ ,\ (ii)\ A\bigcap B\ ,\ (iii)B^c\ ,\ (iv)B\setminus A\ ,$

$(v)A^c\bigcap B(vi)A\bigcup B^c\ ,(vii)A^c\bigcap B^c\ ,\ (viii)B^c\setminus A^c$

التمرين الثاني:

أثبت أنّه لأي مجموعتين B,A يكون:

ا) $B\setminus A=B\bigcap A^c$

ب) $(A\bigcap B)C\ A C\ A\bigcup B$

ج) $A\ \ B$ إذا كان و فقط إذا كان $A=A\bigcap B$

التمرين الثالث:

1) نفرض أنّ: $C=\{3,4,5\},B=\{2,4\},\ A=\{1,2,3\}$. أوجد:

$A\times B\times C$

2) نفرض أنّ: $C=\{3,4\},B=\{2,3\},A=\{a,b\}$. أوجد:

ا) $A\times(B\bigcup C)$. ب) $(A\times B)\bigcup(A\times C)$. ج) $A\times(B\bigcap C)$.

3) أثبت أنّه لأي المجموعات C,B,A فإنّ:

ا) $A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C)$

ب) $A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C)$

التمرين الرابع:

أوجد كل تجزيئات المجموعة: $Y = \{a,b,c,d\}$

تمارين على التحليل التوفيقي

التمرين الأول:

بكم طريقة يمكن لمجموعة من سبعة أشخاص في حفل أن يرتّبوا أنفسهم بحيث يجلسون:

(i) في صف به 7 مقاعد؟

(ii) حول مائدة مستديرة؟

التمرين الثاني:

1) بكم طريقة يمكن أن يجلس ثلاثة أولاد و بنتان في صف؟
2) بكم طريقة يمكن أن يجلسوا في صف إذا جلس الأولاد معا و البنات معا؟
3) بكم طريقة يمكن أن يجلسوا في صف إذا جلست البنتان فقط معا؟

التمرين الثالث:

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة تتكون من ثلاثة رجال و سيّدتين من بين سبعة رجال و خمس سيدات؟

التمرين الرابع:

يختار كل عام في إحدى الكليات وفد مكوّن من أربعة طلبة لتمثيل الكلية في الاجتماع لنقابة الطلبة.

1) بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا كان الطلبة الذين تتوفّر فيهم الشروط 12؟
2) بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا كان إثنان من الطلبة الملائمين لن يستطيع حضور الاجتماع معا؟
3) بكم طريقة يمكن اختيار الوفد إذا كان هناك طالب و طالبة متزوّجين و لا يستطيع أحدهما حضور الاجتماع منفردا؟

تمارين على مقدمة في الاحتمال

التمرين الأول:

نفرض أن فضاء العينة Ω نكون من 4 عناصر $\Omega=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. أي من الدوال التالية تعرّف فضاء احتمال على Ω؟

$$(i)\ P(a_1)=\frac{1}{2},P(a_2)=\frac{1}{3},P(a_3)=\frac{1}{4},P(a_4)=\frac{1}{5}$$
$$(ii)\ P(a_1)=\frac{1}{2},P(a_2)=\frac{1}{4},P(a_3)=-\frac{1}{4},P(a_4)=\frac{1}{2}$$
$$(iii)\ P(a_1)=\frac{1}{2},P(a_2)=\frac{1}{4},P(a_3)=\frac{1}{8},P(a_4)=\frac{1}{8}$$
$$(iv)\ P(a_1)=\frac{1}{2},P(a_2)=\frac{1}{4},P(a_3)=\frac{1}{4},P(a_4)=0$$

التمرين الثاني

نفرض أنّ $\Omega=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$ و أنّ P دالة احتمال معرّفة على Ω.

1) أوجد $P(a_1)$ إذا كان $P(a_4)=\frac{1}{9},P(a_3)=\frac{1}{6},P(a_2)=\frac{1}{3}$

2) أوجد $P(a_1)$ و $P(a_2)$ أذا كان $P(a_3)=P(a_4)=\frac{1}{4}$ و كان $P(a_1)=2P(a_2)$.

3) أوجد $P(a_1)$ إذا كان: $P(\{a_2,a_4\})=\frac{1}{2},P(\{a_2,a_3\})=\frac{2}{3}$ و كان: $P(a_2)=\frac{1}{3}$.

التمرين الثالث:

عيّن الاحتمال p لكل من الأحداث التالية:

1) أن يظهر عدد زوجي عند رمي زهرة نرد متّزنة.

2) أن تظهر الصورة (F) على الأقل مرّة واحدة عند رمي ثلاث قطع متّزنة من النقود.

3) ظهور كرة بيضاء عند سحب كرة من وعاء فيه 4 كرات بيضاء و 3 كرات حمراء و 5 كرات زرقاء.

سلسلة تمارين حول
الاحتمالات الشرطية – المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

التمرين الأول:

في إحدى الكليات رسب 25% من الطلبة في امتحان الرياضيات ورسب 15% من الطلبة في امتحان الكيمياء ورسب 10% في امتحان الرياضيات والكيمياء. اختير أحد الطلبة بطريقة عشوائية.

1) إذا كان راسبا في الكيمياء فما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات ؟

2) إذا كان راسبا في الرياضيات فما هو احتمال أن يكون راسبا في الكيمياء ؟

3) ما هو احتمال أن يكون راسبا في الرياضيات أو في الكيمياء ؟

التمرين الثاني :

ألقيت زهرة نرد منتظمة مرة واحدة. ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل ضعف العدد المحصل عليه، و Y المتغير العشوائي الذي يأخذ القيمة 1 أو 3 حسبما يكون العدد الظاهر فرديا أو زوجيا على الترتيب.

أوجد دالة التوزيع الاحتمالي، التوقع الرياضي، التباين والانحراف المعياري لكل من :

(i) X ، (ii) Y ، (iii) $X+Y$ ، (iv) XY

التمرين الثالث :

اعتبر أن X متغير عشوائي وأن له التوزيع التالي:

X	-2	-1	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

واعتبر أن $Y = X^2$. أوجد :

1) التوزيع الاحتمالي g للمتغير Y ،

2) التوزيع المشترك h للمتغيرين X و Y ،

3) $Cov(X,Y)$ وأيضا معامل الارتباط $\rho(X,Y)$.

التمرين الرابع :

نفرض أن الحدث A هو "بالعائلة أطفال من النوعين (ذكر وأنثى)" والحدث B هو "بالعائلة ولد واحد على الأكثر".

1) أثبت أن الحدثين A و B مستقلان إذا كان بالعائلة ثلاثة أطفال.

2) أثبت أن الحدثين A و B غير مستقلان إذا كان بالعائلة طفلان.

التمرين الخامس :

لفريق كرة القدم احتمال الفوز (V) في مباراة مساويا 0.6 واحتمال الانهزام (D) مساويا 0.3 واحتمال التعادل (N) مساويا 0.1. إذا لعب هذا الفريق ثلاث مباريات.

1) حدد عناصر الحدث A وهو فوز الفريق مرتين على الأقل وعدم هزيمته ثم أجد $P(A)$.

2) حدد عناصر الحدث B وهو فوز الفريق وهزيمته وتعادله ثم أوجد $P(B)$.

التمرين السادس :

تلقى قطعة نقود متزنة حتى تظهر الصورة لأول مرة أو يظهر الوجه خمس مرات متتالية، أوجد القيمة المتوقعة E لعدد مرات إلقاء القطعة.

التمرين السابع :

ليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل المجموع المحصل عليه من خلال إلقاء زهرتي نرد منتظمتين.

1) أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير X ثم ارسم منحناها.

2) عين الدالة التراكمية $F(x)$ للمتغير العشوائي المتقطع X ثم ارسم بيانها.

التمرين الثامن :

إذا كانت الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي X هي :

$$f(x) = \frac{c}{x^2+1} \quad \text{حيث} \quad x \in \mathbb{R}$$

1) أوجد قيمة الثابت c.

2) أوجد احتمال أن يكون x^2 محصور بين $\frac{1}{3}$ و 1

3) أوجد الدالة التراكمية F المرفقة للكثافة الاحتمالية f.

التمرين التاسع :

نفرض أن X متغير عشوائي وأن له التوزيع الطبيعي القياسي ϕ. أوجد:

(i) $P(0 < X < 1,42)$ (ii) $P(-0,73 < X < 0)$

(iii) $P(-1,37 < X < 2,01)$ (iv) $P(0,65 < X < 1,26)$

(v) $P(-1,79 < X < -0,54)$ (vi) $P(X > 1,13)$

المراجع

1) Cours de probabilite, Pierre Hammad CUJAS

Theory and problems of Probability S. Lipschutz schaum's outline series (3

3) Introduction au calcul des Probabilités, Charles SUQUET. Université des sciences et technologie de Lille