



الأستاذ الدكتور شمام فيصل

# مقدمة في الفيزياء الإحصائية

أفريل 2024

---

إلى أبي وأمي

# المحتويات

|    |                                            |
|----|--------------------------------------------|
| 6  | I مفاهيم حرارية حول الإحتمالات             |
| 6  | I مفهوم الإحتمال                           |
| 6  | II الأحداث المتعارضة                       |
| 7  | III الأحداث المتساوية الإحتمال             |
| 7  | IV الأحداث المستقلة                        |
| 7  | V توزيع ثنائي الحدين                       |
| 7  | VI قانون ستيرلينغ                          |
| 8  | VII القيمة المتوسطة لمتغير عشوائي          |
| 9  | VIII توزيع غوس                             |
| 12 | II النظرية الحركية للغازات                 |
| 12 | I تمهيد                                    |
| 12 | II نص الفرضيات                             |
| 12 | III ضغط الغاز                              |
| 13 | IV تعيين عبارة الضغط                       |
| 14 | V حساب $\gamma$                            |
| 15 | VI حالة جزيء أحادي الذرة                   |
| 15 | VII حالة جزيء ثنائي الذرة                  |
| 15 | VIII حالة جزيء متعدد الذرات                |
| 15 | IX توزيع السرعات لماكسويل                  |
| 15 | IX-1 وضعية المشكل                          |
| 18 | III القصور الحراري الاحصائي                |
| 20 | I التحقق من صحة العلاقة $S = k \ln \Omega$ |
| 20 | II المنظومة المعزولة عند الإتزان           |
| 25 | III Micro-canonical Ensemble               |
| 25 | IV مجموعة من التمارينات                    |
| 27 | IV المجموعة القانونية                      |
| 28 | I متوسط طاقة المنظومة                      |
| 29 | II عبارة القصور الحراري                    |
| 30 | III أمثلة                                  |

|    |                                                      |      |
|----|------------------------------------------------------|------|
| 31 | النظرية الكمية للبارامغناطيسية                       | IV   |
| 33 | دراسة حالة هزاز توافقي                               | V    |
| 35 | مفهوم كثافة الحالات                                  | VI   |
| 35 | أمثلة على حساب كثافة الحالات                         | VII  |
| 37 | الضغط P وكمية الحرارة                                | VIII |
| 38 | دراسة غاز مثالي أحادي الذرة                          | IX   |
| 40 | الدراسة الكلاسيكية للجزئ ثنائي الذرة                 | X    |
| 41 | الدراسة الكمية للجزئ ثنائي الذرة                     | XI   |
| 41 | 1- تأثير التكميم على الطاقة الإنسحابية               | XI   |
| 41 | 2- تأثير التكميم على الطاقة الإهتزازية               | XI   |
| 41 | 3- تأثير التكميم على الطاقة الدورانية                | XI   |
| 42 | XII مجموعة من التمارينات                             |      |
| 45 | V النهاية التقليدية للتوزيع الإحصائية                |      |
| 45 | I مقدمة                                              |      |
| 45 | II تمثيل الحالات المجهرية في فضاء الأطوار            |      |
| 48 | III دالة التقسيم عند النهاية التقليدية               |      |
| 49 | IV دالة القسمة لجزئ موجود داخل علبة حجمه             |      |
| 50 | VI المنظومات ذات الجسيمات المتشابهة                  |      |
| 50 | I توزيع ماكسوال بولتزمان                             |      |
| 51 | II الإحصاء الكمي ل- فيرمي ديراك و بوز أنشتاين        |      |
| 52 | III توزيع بوز أنشتاين                                |      |
| 52 | IV توزيع فيرمي ديراك                                 |      |
| 53 | VII الإحصاء المكمم Statistiques Quantiques           |      |
| 54 | I دراسة حالة الفيرميونات                             |      |
| 55 | II الجهد الكيميائي                                   |      |
| 55 | III توزيع بوز أنشتاين                                |      |
| 56 | IV خواص توزيع فيرمي ديراك                            |      |
| 56 | V خلاصة التوزيعات الكلاسيكية و الكمية                |      |
| 58 | VIII دراسة غاز من الفيرميونات                        |      |
| 58 | I طاقة فيرمي                                         |      |
| 59 | II الطاقة الاساسية والكمون الكيميائي عند صفر كلفن    |      |
| 59 | III تعيين الكمون الكيميائي عند درجة حرارة غير معدومة |      |
| 61 | IV حوصلة للعمليات السابقة                            |      |
| 61 | V حساب الطاقة الداخلية U                             |      |
| 64 | VI مسألة شاملة للمجموعة القانونية وإحصاء فيرمي-ديراك |      |
| 66 | VII تطبيق توزيع فيرمي ديراك على أنصاف النواقل        |      |

|    |      |                                            |
|----|------|--------------------------------------------|
| 69 | VIII | مسألة حول نصف ناقل نقي                     |
| 70 | IX   | الجسم الأسود                               |
| 71 | I    | قانون بلانك                                |
| 71 | II   | خواص الجسم الأسود                          |
| 72 | III  | المقادير الحرارية للجسم الأسود             |
| 73 | IV   | الديناميك الحرارية الكلاسيكية للجسم الأسود |

## مقدمة

نقدم في هذا العمل برنامج الفيزياء الإحصائية للسنة الثالثة فيزياء ليسانس بجميع تخصصاتها. إن هدي من هذه العمل البيداغوجي الذي أضعه بين أيدي الطلبة هو تبسيط دراسة الفيزياء الإحصائية والتي إقتصرت سوى على حالات التوازن ومجتنباً الإحصاء خارج حالات التوازن الذي له سنقوم بإنجاز عمل بيداغوجي آخر مستقبلاً.

لقد قمت منذ سنة 1997 بتدريس هذا المقياس بقسم الفيزياء ذلك الوقت، البرنامج القديم للدراسات العليا في الفيزياء و أيضاً بدايات سنوات نظام الجديد LMD حيث في كل سنة من التدريس قمت بتحيين طريقة عرض البرنامج لجعله ملائماً لطلبتنا الأعزاء.

يتكون هذا العمل من تسعة فصول حيث يناقش الفصل الأول الربط بين مفاهيم الإحتمالات مع المفاهيم الحرارية، الفصل الثاني يناقش النظرية الحرة للغازات وتوزيع السرعات لماكسوال. اما الفصل الثالث فيناقش القصور الحراري من وجهة نظر الإحصاء، الفصل الرابع فهو مخصص لدراسة المجموعة القانونية و موضحة و ميسرة بالعديد من الأمثلة البيداغوجية. الفصل الخامس والسادس فيناقش النهاية التقليدية للتوزيعة الإحصائية مع ربطها بالجسيمات المتشابهة و غير متميزة. الفصل السابع يوضح الإحصاء المكمم للتوزيعات الإحصائية لـ Fermi-Dirac و Boss-Einstein . الفصل الثامن فهو مخصص لدراسة نموذج الالكترونات الحرة و انصاف النواقل. أما الفصل الأخير فهو يهتم بدراسة الجسم الأسود.

سيكون هذا العمل البيداغوجي متبوع بعمل خاص بمجموعة من التمارينات الخاصة بكل فصل مع حلولها المفصلة.

أفريل 2024

الأستاذ الدكتور شمام فيصل

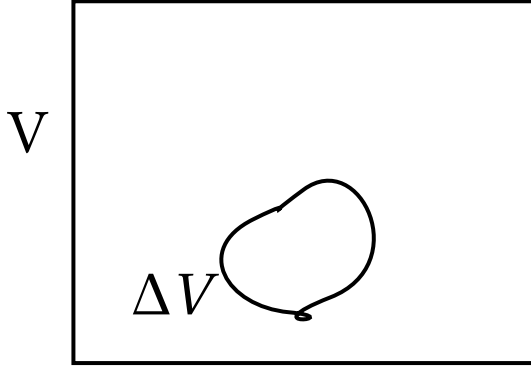
# I

## مفاهيم حرارية حول الإحتمالات

### I مفهوم الإحتمال

بحيث أن  $m$  يمكن أن تأخذ القيم من داخل المجال  $[0, M]$   
إذا كان  $m = 0 \Rightarrow P = 0$  و  $m = M \Rightarrow P = 1$ .

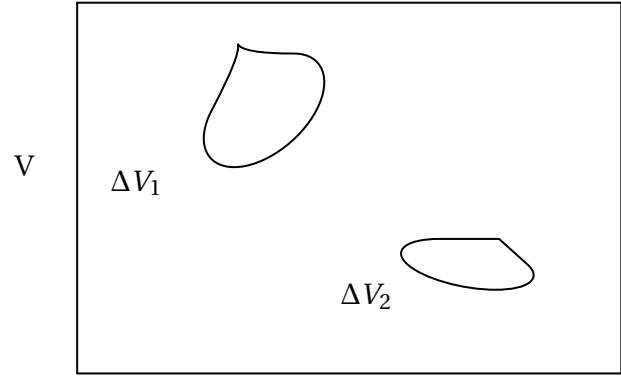
لنعتبر جزئ  $A$  من غاز يتحرك داخل علبة مغلقة حجمها  $V$ .  
و لنفرض أن داخل الحجم  $V$  حجم آخر  $\Delta V$  بحيث أن  
 $V \gg \Delta V$



إن وجود  $A$  داخل الحجم  $V$  هو حدث أكيد و وجوده خارج الحجم  $V$  هو حدث مستحيل. أما وجود  $A$  داخل  $\Delta V$  هو حدث عشوائي بأن يمكن أن يكون داخل  $\Delta V$  أو لا . إذا كان بإمكاننا متابعة الجزئ  $A$  داخل  $\Delta V$  بالتصوير. إذا كان  $M$  هو العدد الإجمالي للصور و  $m$  هو عدد الصور التي يكون فيها الجزئ داخل  $\Delta V$  نعرف أن إحتمال وجود جزئ داخل الحجم  $\Delta V$  هو  $P = \frac{m}{M}$ .

### II الأحداث المتعارضة

يقال عن حدثين أنهما متعارضين إذا كان حدوث الاول ينفي حدوث الحدث الثاني. إذا كان لدينا داخل حجم  $V$  حجمان  $\Delta V_1$  و  $\Delta V_2$  وإذا كان الحجمان غير متقاطعين فإن وجود  $A$  داخل  $\Delta V_1$  ينفي وجوده داخل  $\Delta V_2$ . نقول عندئذ أن وجود  $A$  داخل  $\Delta V_1$  و  $\Delta V_2$  هما حدثان متعارضان . أما إذا كان الحجمان متقاطعين , و كان  $A$  داخل منطقة التقاطع , إذن الحدثان متفقان. إذا كان إحتمال وجود  $A$  داخل  $\Delta V$  هو  $p$  وإحتمال وجود  $A$  داخل الحجم  $V - \Delta V$  هو  $q = 1 - p$ .



برهان

يساوي احتمال لحدثين متعارضين هو مجموع الاحتمالين  $P = P_1 + P_2$ . إن احتمال وجود  $A$  داخل  $\Delta V_1$  هو  $P_1 = \frac{m_1}{M}$  إن احتمال وجود  $A$  داخل  $\Delta V_2$  هو  $P_2 = \frac{m_2}{M}$

$$\left\{ P = \frac{m_1 + m_2}{M} = \frac{m_1}{M} + \frac{m_2}{M} \right\}$$

### III الأحداث المتساوية الاحتمال

يقال عن أحداث أنها متساوية الاحتمال إذا كان لهما نفس احتمال وقوعهم. مثلاً: إذا قسمنا الحجم  $V$  إلى ثلاثة أقسام متساوية فإن وجود  $A$  داخل الاجسام الثلاثة لها نفس الاحتمال  $P = \frac{1}{3}$

### IV الأحداث المستقلة

نقول عن حدثين أنهما مستقلين إذا كان احتمال حدوث الاول لا يؤثر على حدوث الثاني. إذا كان الجزئ  $A$  داخل  $\Delta V_1$  و الجزئ  $B$  داخل  $\Delta V_2$  فإن  $P_1 = \frac{\Delta V_1}{V}$  و  $P_2 = \frac{\Delta V_2}{V}$  فإن وقوعهما الإثنين هما  $P = P_1 P_2$

### V توزيع ثنائي الحدين

لنبحث عن احتمال  $P(n)$  لوجود عدد من الجزئيات داخل الحجم  $\Delta V$  و على  $N$  من الجزئيات .

| P(n) | إحتمال الحدث | $V - \Delta V$ | $\Delta V$ | رقم الحدث | الحالة المجهرية |
|------|--------------|----------------|------------|-----------|-----------------|
| p    | p            | 0              | 1          | 1         | 1               |
| q    | q            | 1              | 0          | 2         | 1               |

$N = 1$

| P(n)  | إحتمال الحدث | $V - \Delta V$ | $\Delta V$ | رقم الحدث | الحالة المجهرية |
|-------|--------------|----------------|------------|-----------|-----------------|
| $p^2$ | $p^2$        | 0              | (2) (1)    | 1         | 1               |
| pq    | pq           | (2)            | (1)        | 2         | 2               |
| pq    | pq           | (1)            | (2)        | 3         | 2               |
| $q^2$ | $q^2$        | (2) (1)        | 0          | 4         | 1               |

$N = 2$

نعم عدد الحالات المجهرية لحدث معين هي التوفيقات  $C_n^N = \frac{N!}{n!(N-n)!} = \Omega(n)$  وأن الاحتمال يكتب على الشكل

$$P(n) = \left( \frac{N!}{n!(N-n)!} \right) p^n q^{N-n}$$

### VI قانون ستيرلينغ

ينص على أنه إذا كانت  $N$  كبيرة جداً فإنه

| P(n)   | إحتمال الحدث | $V - \Delta V$ | $\Delta V$ | رقم الحدث | الحالة المجهرية |
|--------|--------------|----------------|------------|-----------|-----------------|
| $p^3$  | $p^3$        | 0              | (3)(2)(1)  | 1         | 1               |
| $p^2q$ | $p^2q$       | (3)            | (2)(1)     | 2         | 3               |
| $p^2q$ | $p^2q$       | (1)            | (3)(2)     | 3         | 3               |
| $p^2q$ | $p^2q$       | (2)            | (3)(1)     | 4         | 3               |
| $pq^2$ | $pq^2$       | (3)(2)         | (1)        | 5         | 3               |
| $pq^2$ | $pq^2$       | (3)(1)         | (2)        | 6         | 3               |
| $pq^2$ | $pq^2$       | (2)(1)         | (3)        | 7         | 3               |
| $q^3$  | $q^3$        | (3)(2)(1)      | 0          | 8         | 1               |

$N = 3$

$$\ln N! \sim N \ln N - N$$

البرهان

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln N! = \ln(N(N-1)(N-2)\dots\dots\dots 1) \\ = \ln N + \ln(N-1) + \ln(N-2) + \dots\dots\dots + \ln 1 \\ = \sum_n^N \ln n \longrightarrow \int_1^N \ln x dx \\ \Rightarrow \ln N! \sim N \ln N - N \end{array} \right\}$$

## VII القيمة المتوسطة لمتغير عشوائي

لنهتم الآن بالقيمة المتوسطة للمتغير العشوائي  $n$  الذي يمثل عدد الجزيئات داخل حجم  $\Delta V$ . إذا كان  $M$  هو عدد التجارب (الصور) الكلية وإذا سجل  $n_1$  لـ  $m_1$  و  $n_2$  لـ  $m_2$  و .... إنج

$$\bar{n} = \frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 + \dots\dots\dots}{M}$$

$$\bar{n} = n_1 \frac{m_1}{M} + n_2 \frac{m_2}{M} + \dots\dots\dots$$

$$\bar{n} = n_1 P(n_1) + n_2 P(n_2) + \dots\dots\dots = \sum_{n=0}^N n_i P(n_i)$$

لحساب  $\bar{n}$  المتوسطة نعرف الدالة

$$f(x) = (q + xp)^N = \sum_{n=0}^N C_n^N x^n p^n q^{(N-n)}$$

$$\frac{df}{dx} = NP(q + xp)^{(N-1)} = \sum_{n=0}^N C_n^N n x^{(n-1)} p^n q^{(N-n)}$$

$$\frac{df}{dx}_{x=1} = NP = \sum_{n=0}^N n P(n) = \bar{n} = NP$$

تعطى عبارة المحدد التربيعي المتوسط بالعبارة التالية :

$$\sigma^2 = \overline{(n - \bar{n})^2}$$

و التي نستطيع كتابتها كما يلي

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \overline{(n^2 - 2\bar{n}n + \bar{n}^2)} \\ &= \bar{n}^2 - 2\bar{n}^2 + \bar{n}^2 \\ &= \bar{n}^2 - \bar{n}^2 \\ &= \overline{n(n-1)} + \bar{n} - \bar{n}^2\end{aligned}$$

و بالرجوع للدالة

$$f(x) = (q + xp)^N = \sum_{n=0}^N C_n^N x^n p^n q^{(N-n)}$$

و بإستخدام المشتق الثاني للدالة  $f(x)$

$$\begin{aligned}\frac{d^2 f}{dx^2} &= N(N-1)p^2(q + xp)^{N-2} \\ &= \sum_{n=0}^N n(n-1)C_n^N x^{n-2} p^n q^{N-n}\end{aligned}$$

و من جهة أخرى لدينا أن

$$\overline{n(n-1)} = \sum_{n=0}^N C_n^N x^{n-2} p^n q^{N-n}$$

و بوضع  $x = 1$  نجد أن

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = N(N-1)p^2 = \sum_{n=0}^N n(n-1)C_n^N p^n q^{N-n} = \overline{n(n-1)}$$

و بالتعويض في عبارة الانحراف التريبي نجد أن

$$\sigma^2 = Npq$$

## VIII توزيع غوس

عندما يكون  $N$  و  $n$  كبيراً جداً في هذه الحالة إستعمال توزيع تقريبي آخر يسمى بتوزيع غوس. إن إحتمال  $P(n)$  في توزيع ثنائي الحدين يكون ذو قيمة عظمى  $\frac{dP(n)}{dn} = 0$

$$P(n) = \frac{(N)!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n}$$

$$\ln P(n) = \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! + n + (N-n)$$

يستخدم قواعد sterling نجد أن

$$\begin{aligned}\frac{d \ln P(n)}{dn} &= -\ln n + \ln(N-n) + \ln \frac{p}{q} = 0 \\ \Rightarrow \ln \frac{N-n}{n} &= \ln \frac{p}{q} n = NP = \bar{n}\end{aligned}$$

و باستخدام المشتق الثاني لـ  $P(n)$  نجد أن

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \ln P(n)}{dn^2} &= -\frac{1}{n} - \frac{1}{N-n} \\ n = \bar{n} &= NP \\ &= \frac{-1}{\sigma^2}\end{aligned}$$

يستخدمنا للنشر المحدود للدالة  $P(n)$  بجوار  $n = \bar{n}$  نجد أن

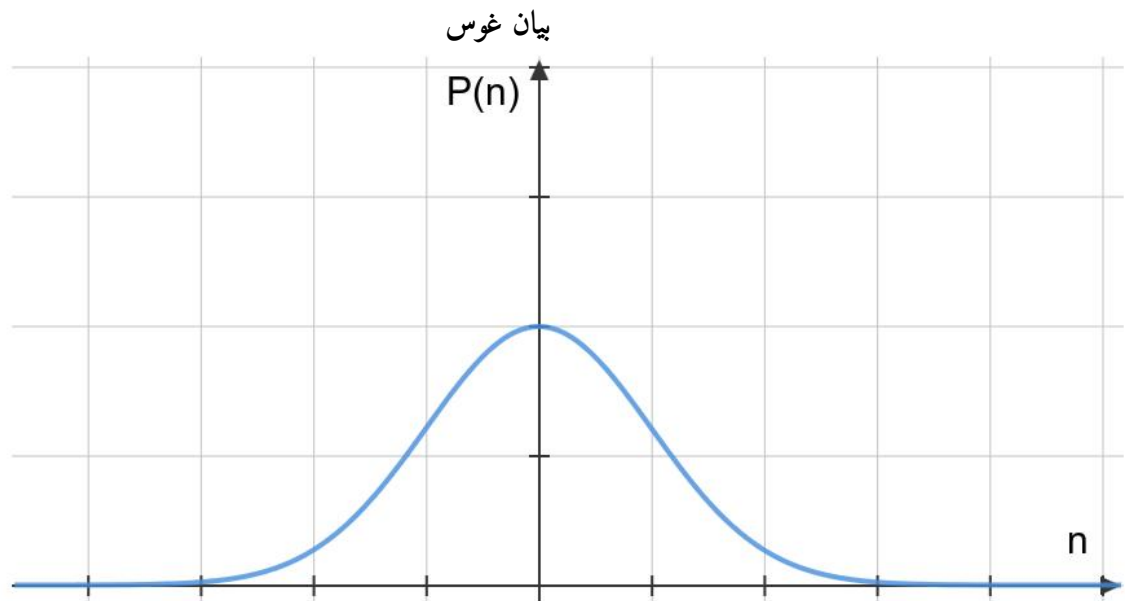
$$\ln P(n) = \ln P(\bar{n}) + (n - \bar{n}) \left[ \frac{d \ln P(n)}{dn} \right]_{n=\bar{n}} + \frac{(n - \bar{n})^2}{2!} \left[ \frac{d^2 \ln P(n)}{dn^2} \right]_{n=\bar{n}} \dots$$

و بالإكتفاء بالحدود من الدرجة الثانية نجد أن

$$\begin{aligned}\ln P(n) &= \ln P(\bar{n}) + \frac{(n - \bar{n})^2}{2!} \\ \Rightarrow P(n) &= P(\bar{n}) \exp\left(\frac{(n - \bar{n})^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$

ولدينا أن  $\sum P(n) = 1$  وحساب  $P(\bar{n})$  نعوض المجموع بتكامل

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} P(\bar{n}) \exp\left(\frac{(n - \bar{n})^2}{2\sigma^2}\right) dn &= 1 \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi} \\ \Rightarrow P(\bar{n}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\ P(n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(\frac{(n - \bar{n})^2}{2\sigma^2}\right)\end{aligned}$$



## II

# النظرية الحركية للغازات

## I تمهيد

بما أن الغازات تتكون من جزيئات في حالة حركة دائمة في جميع الاتجاهات, فقد عند دراسة حركتها وفق النظرية الحركية للغازات المثالية ( وهي تلك الغازات التي تهمل عند دراستها أبعاد جزيئتها بالنسبة للحجم الإجمالي التي تشغله عينة الغاز تحت الدراسة و أيضا قوى التجاذب الجزيئية بين جزيئات الغاز). وقد وجد أن الغازات الحقيقية تتبع نفس قوانين التي تتبعها الغازات المثالية و ذلك عند الضغوط المنخفضة و درجات الحرارة المنخفضة مثل قوانين بويل و شارل. و كأى نظرية فيزيائية تتأسس على فروض لتسهيل إمكانية الحصول على صيغة مقننة لتفسير ظاهرة ما , بأكبر قدر من التماشي مع النتائج العملية أخذه بعين الاعتبار أكثر العوامل تأثيرا.

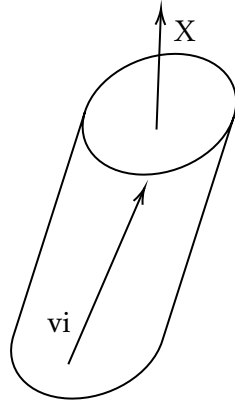
## II نص الفرضيات

1. يتكون الغاز الواحد من جزيئات متشابهة تماما من حيث خواصها الأساسية
2. نعتبر جزيئات الغاز ملساء تماما و تامة المرونة تحدث تصادمات مع بعضها و مع جدران الإناء الحاوى لها
3. تهمل القوى الجزيئية بين جزيئات الغاز بعضها البعض
4. يهمل حجم جزيئات الغاز بالنسبة لحجم الإناء الحاوى له
5. ليس هناك ضغط للغاز سوى ذلك الناشئ عن حركة جزيئات

## III ضغط الغاز

إذا أخذنا الغاز الموضوع داخل إناء مغلق, إن ضغط المطبق من طرف الغاز على جدار الإناء ناتج عن تصادم الجزيئات بجدار الإناء. في كل مرة يصدم جزيء بجدار الإناء يطبق قوة معينة, فإذا كان عدد الجزيئات كبير جدا فإن مجموع هته التصادمات يؤدي إلى قوى صغيرة جدا المطبقة على بكل جزيء على جدار الإناء و منه ينتج قوة محصلة وثابتة. إن هته المحصلة هي عبارة على قوى متوسطة خلال الزمن و هي عبارة على ضغط الغاز الذي يدرس في الفيزياء الجهرية.

## IV تعيين عبارة الضغط



ليكن لدينا غاز مكون من جزيئات متشابهة تماما و أن لها سرعات مختلفة. نقسم مجموعة الجزيئات إلى أفواج بحيث في كل لحظة زمنية معينة جميع الجزيئات التي تنتمي لكل فوج لها نفس السرعات تقريبا.

• لتكن  $v_i$  سرعة الجزيئات للمجموعة رقم  $i$  و  $n_i$  عدد الجزيئات لوحدة الحجم. إذا أخذنا على جدار الإناء سطح صغير و هو  $\sigma$ . فإذا كانت مجموعة الجزيئات رقم  $i$  تتجه نحو السطح  $\sigma$  إذن نحسب عدد الجزيئات التي تصل السطح  $\sigma$  خلال الزمن  $dt$  و ليكن عددها  $Z_i$

كل جزيء ينتمي إلى المجموعة  $i$  الذي يوجد داخل أسطوانة يمكنه خلال زمن  $dt$  الإصطدام بالسطح  $\sigma$ . فإن  $Z_i$  هو عدد التصادمات خلال السطح  $\sigma$ ، فإنه يساوي عدد الجزيئات للمجموعة  $i$  الموضوعة داخل الأسطوانة

$$Z_i = n_i dV$$

حيث  $dV$  حجم الأسطوانة. بمأن سطح الأسطوانة موجه وفق محور  $X$  إذن إرتفاع الأسطوانة هو  $v_{ix} dt$  و منه الحجم  $dV = \sigma v_{ix} dt$

$$Z_i = n_i \sigma v_{ix} dt$$

مجموعة الجزيئات  $i$  التي تصطدم بالسطح  $\sigma$  خلال الزمن  $dt$  فإن قبل الصدم كمية الحركة هي

$$Z_i \vec{P}_i = \sigma n_i v_{ix} \vec{P}_i dt$$

حيث أن  $P_i$  هي كمية الحركة للجزيء.

إذن لدينا أن القوة المطبقة على الإناء و بأخذ مجموع العبارات من أجل المجموعة في إتجاه  $v_{ix} > 0$

$$\vec{F}_1 = \sum_{v_{xi} > 0} \sigma n_i v_{ix} \vec{P}_i$$

وإذا أخذنا في الإتجاه المعاكس حيث أن  $v_{ix} < 0$  فإننا نجد أن

$$\vec{F}_2 = \sum_{v_{xi} > 0} \sigma n_i v_{ix} \vec{P}_i$$

حيث أن

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F} = \sigma \sum n_{ix} \vec{P}_i$$

حيث أن المجموع أخذ كل المجموعة  $i$ ، التي تتجه نحو الجدار و المبتعدة عنه. إذا أخذنا مركبة  $\vec{F}$  وفق كل من  $F_y, F_z, F_x$  نجد أن

$$\left\{ \begin{array}{l} F_y = \sigma \sum n_i v_{ix} P_{iy} = 0 \\ F_z = \sigma \sum n_i v_{ix} P_{iz} = 0 \\ F_x = \sigma \sum n_i v_{ix} P_{ix} \end{array} \right.$$

في المعادلة الأخيرة المجموع غير معدوم وأن جميع الحدود موجبة وأن الجداء  $P_{ix}$  و  $v_{ix}$  دائماً موجب . إذا أخذنا النسبة  $F_x$  على  $\sigma$  لوجدنا قيمة الضغط على جدار الإناء.

$$P = \sum n_i v_{ix} P_{ix}$$

من أجل التبسيط هته العلاقة نبحث عن القيمة المتوسطة لـ  $v_x P_x$

$$\langle v_x P_x \rangle = \overline{v_x P_x} = \frac{1}{n} \sum n_i v_{ix} P_{ix} \Rightarrow P = n \langle v_x P_x \rangle$$

لدينا أن  $\vec{v} \cdot \vec{P} = v_x P_x + v_y P_y + v_z P_z$

$$\overline{\vec{v} \cdot \vec{P}} = \overline{v_x P_x} + \overline{v_y P_y} + \overline{v_z P_z}$$

بما أن السرعات للغاز لها نفس الاحتمال

$$\overline{v_x P_x} = \overline{v_y P_y} = \overline{v_z P_z} = \frac{1}{3} \overline{\vec{v} \cdot \vec{P}}$$

$$P = \frac{1}{3} n \langle \vec{v} \cdot \vec{P} \rangle = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle \vec{v} \cdot \vec{P} \rangle$$

$$PV = \frac{1}{3} N \langle \vec{v} \cdot \vec{P} \rangle$$

إذا وضعنا أن  $p = mv$  نجد أن

$$PV = \frac{2}{3} N \langle E_{Trans} \rangle$$

حيث أن هي الطاقة المتوسطة لمجموع الطاقات الحركية لجميع الجزيئات الغاز  $\langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$  من أجل غاز مثالي ذي المعادلة  $PV = RT$  من أجل 1 مول.

$$PV = RT = \frac{2}{3} N \left( \frac{1}{2} m \overline{v^2} \right)$$

$$\langle E_{Trans} \rangle = 3/2 kT$$

## V حساب $\gamma$

الطاقة الحركية لجزيء هي  $\bar{E} = 3/2 kT$ . حيث أن هته الطاقة هي الطاقة الإنسحابية للجزيء. وأن للجزيء في الفراغ ثلاث درجات حرية، وأن الطاقة الحركية لكل درجة حرية هي  $\bar{E} = 1/2 kT$ . الطاقة الداخلة للغاز يتكون من الطاقة الحركية الأنسحابية والدورانية والإهتزازية وأيضا الطاقة الكامنة الناتجة عن التفاعل الداخلي بين الذرات.

بما أننا في حالة غاز مثالي فإننا نهمل قوى التجاذب وتهمل الطاقة الكامنة لتفاعل الجزيئات.

## VI حالة جزيء أحادي الذرة

إذا أخذنا جزيئات الغاز أحادي الذرة على أنها نقاط مادية، فإنها تقوم بحركة إنسحابية فقط و أن ثلاث درجات حرية إذن:

$$U = 3/2 NkT = 3/2 RT \Rightarrow \gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5}{3} = 1.67$$

## VII حالة جزيء ثنائي الذرة

في هذه الحالة لدينا خمسة درجات حرية و أن لكل درجة حرية طاقة قدرها  $1/2 kT$  ومنه نجد أن

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{7}{5} = 1.4$$

## VIII حالة جزيء متعدد الذرات

إذا كان للجزيء  $f$  درجة حرية فإن الطاقة الداخلية تساوي  $U = \frac{f}{2} RT$  و منه نجد أن

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{f+2}{f} = 1.4$$

## IX توزيع السرعات لماكسوال

### IX-1 وضعية المشكل

من أجل جملة تحتوي على عدد كبير جدا من الجسيمات فإنه لا يمكن تفسير هذه الجملة من وجهة نظر ميكانيك تقليدي، يجب علينا وضع  $10^{24}$  معادلة. من أجل تطور الجملة خلال الزمن  $t$ . في هذه الحالة نستخدم الإحصاء لشرح هذه الظاهرة. نقوم الآن بحساب إحتمال وجود جزيء يتحرك بسرعة محدودة داخل مجال معين. نفرض خلال هذه الدراسة ان حقل القوى المؤثر على الجزيئات مهمل. إن إحتمال وجود جزيء له سرعة محصورة بين  $[v_x; v_x + dv_x]$ ، إن إحتمال في هذه الحالة يساوي  $dP_x = f(v_x) dv_x$  حيث أن  $f(v_x)$  هي دالة التوزيع وحيدة البعد بحيث أن نستطيع إعطاء عبارات الإحتمالات في البعدين الآخرين كما يلي

$$\begin{cases} dP_x = f(v_x) dv_x \\ dP_y = f(v_y) dv_y \\ dP_z = f(v_z) dv_z \end{cases}$$

نفرض أن إحتمال وجود جزيء داخل حجم متوازي الأسطح هي تساوي  $dP = dP_x dP_y dP_z$

$$dP = f(v_x) f(v_y) f(v_z) dv_x dv_y dv_z \dots (1)$$

و من ناحية أخرى نستطيع كتابة المعادلة السابقة كمايلي

$$dP = F(\|\vec{v}\|)dv_x dv_y dv_z$$

$$dP = F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)dv_x dv_y dv_z \dots (2)$$

بمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$f(v_x)f(v_y)f(v_z) = F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

باستخدام تبديل المتغير التالي  $v_x = v_y = v_z = u$  نجد أن

$$(f(u))^3 = F(3u^2)$$

أو أن

$$F(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) = [F(3v_x^2)F(3v_y^2)F(3v_z^2)]$$

باستخدام تبديل المتغير التالي  $a = v_x^2; b = v_y^2; c = v_z^2$  وبالتعويض نجد أن

$$F(a + b + c) = [F(3a)F(3b)F(3c)]^{1/3}$$

$$3\ln F(a + b + c) = [\ln F(3a) + \ln F(3b) + \ln F(3c)]$$

بوضع  $\ln F = \chi$  نجد

$$3\chi(a + b + c) = \chi(3a) + \chi(3b) + \chi(3c)$$

و لحل المعادلة السابقة نضع أن  $b = c = 0$  نجد أن  $3\chi(a) = \chi(3a) + 2\chi(0)$

و بوضع أن  $a = c = 0$  نجد أن  $3\chi(b) = \chi(3b) + 2\chi(0)$

و بوضع ان  $a = b = 0$  نجد أن  $3\chi(c) = \chi(3c) + 2\chi(0)$

وحل المعادلات السابقة هو حل خطي و تكتب كمايلي

$$\chi(a) = Aa + B; \chi(b) = Ab + B; \chi(c) = Ac + B$$

حيث أن

$$F(a) = e^B e^{Aa} = C_1 e^{Aa} = C_1 e^{Av_x^2}$$

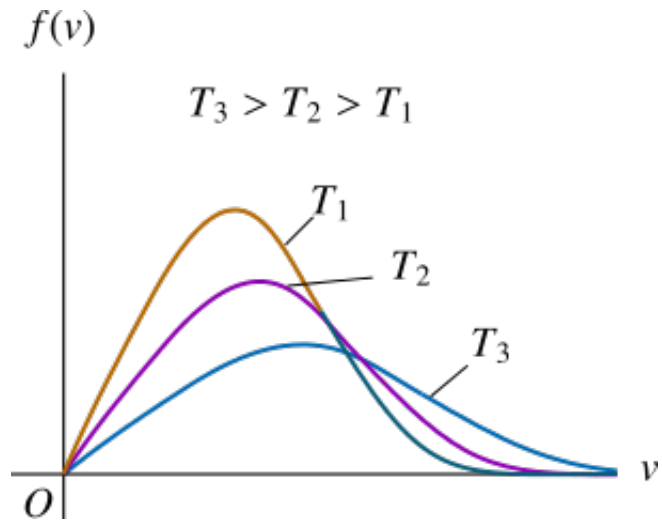
إن الثابت  $A$  هو مقدار سالب لأن الدالة تقبل التنظيم حيث  $A = -\alpha$ . وأن أيضا دالة التوزيع هي عبارة على احتمال

محصور بين  $[0, 1]$ . و بالتالي نجد أن

$$\begin{cases} F(v_x^2) = C_1 e^{-\alpha v_x^2} \\ F(v_y^2) = C_1 e^{-\alpha v_y^2} \\ F(v_z^2) = C_1 e^{-\alpha v_z^2} \end{cases}$$

لدينا أن

$$f(u) = [F(3u^2)]^{1/3}$$



بالتعويض نجد أن

$$\begin{cases} f(v_x) = C e^{-\alpha v_x^2} \\ f(v_y) = C e^{-\alpha v_y^2} \\ f(v_z) = C e^{-\alpha v_z^2} \end{cases}$$

نبحث عن قيم الثوابت  $\alpha, C$ . لدينا أن تكامل دالة الاحتمال بالنسبة للمحور  $x$  هو  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = 1$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v_x) dv_x = C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = 1 \Rightarrow C = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}}$$

و باستخدام نظرية التوزيع المتساوي للطاقات

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT \Rightarrow \bar{v}_x^2 = \frac{kT}{m}$$

ومن ناحية أخرى لدينا أن

$$\bar{v}_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 f(v_x) dv_x = \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha v_x^2} dv_x = \frac{kT}{m}$$

نعلم أن التكامل  $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^3}}$  نجد بعد الحساب أن  $\alpha = \frac{m}{2kT}$ .

### III

## القصور الحراري الاحصائي

لنأخذ وعاء حجمه  $V$  يحتوي على عدد  $N$  من الجزيئات لغاز مثالي. نفرض أنه بإمكاننا تقسيم الحجم  $V$  إلى خلايا صغيرة حجمها  $V_0$  ولا يمكنها أن تحتوى على جزئ واحد على الأكثر. يكون عدد الخلايا الموفرة للجزيئات يساوى  $M = \frac{V}{V_0}$  و منه عدد الحالات المجهرية الممكنة لتوزيع  $N$  جزئ في  $M$  مكان يساوي

$$C_N^M = \frac{M!}{N!(M-N)!}$$

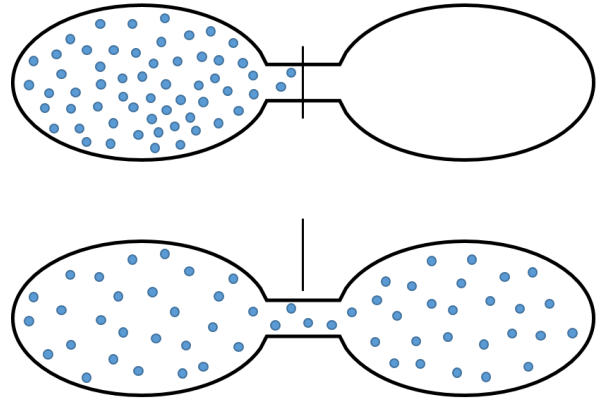
بما أنه لدينا غاز مثالي فإن عدد الخلايا يكون أكبر من عدد الجزيئات , و منه فإن

$$\ln C_N^M = \ln \frac{M!}{N!(M-N)!}$$

$$\ln C_N^M = N \ln \frac{(M-N)}{N} - M \ln \frac{(M-N)}{M} = N \ln \left( \frac{M}{N} - 1 \right) - M \ln \left( 1 - \frac{N}{M} \right)$$

بما أن  $M \gg N$  فإن  $\ln C_N^M = N \ln \frac{M}{N} + N$  إن عدد التوزيعات لـ  $N$  جزئ داخل  $M$  خلية أوغرفة هو  $\Omega_N = \frac{M!}{N!(M-N)!}$  هذا صحيح إذا إعتبرنا الجزيئات عن كريات موزعة داخل غرفة, لكن نعرف أن الجزيئات تتحرك باستمرار و أن منظومة الغاز لها طاقة داخلية من الشكل  $U = N \frac{m}{2} \bar{v}^2 = f(T)$  إن عدد الحالات لكي تتحقق الطاقة هو أيضا كبير جدا وفي مثالنا سوف نهتم بالمنظومة التي تتطور تحت درجة حرارة ثابتة أي الطاقة الداخلية الثابتة و بالتالي يكون عدد الحالات المجهرية الممكنة لتحقيق الطاقة  $U$  ثابتة و ليكن  $\Omega_U$  الذي لايهمنا مقداره

$$\begin{aligned} \Omega(N, U) &= \Omega_N \Omega_U \\ \ln \Omega(N, U) &= \ln \Omega_N + \ln \Omega_U \\ &= N \ln \frac{M}{N} + N + \ln \Omega_U \end{aligned}$$



الآن نهتم بتمدد غاز مثالي من الحجم  $V_1$  إلى الحجم  $V_2$  . بفرض أن لدينا  $N$  جزيء.  
لدينا توزيع  $N$  جزيء في

$$M_1 = \frac{V_1}{V_0}$$

$$\ln \Omega_1(N, U) = N \ln \frac{M_1}{N} + N + \ln \Omega_U$$

$$M_2 = \frac{V_2}{V_0}$$

$$\ln \Omega_2(N, U) = N \ln \frac{M_2}{N} + N + \ln \Omega_U$$

$$\ln \Omega_2 - \ln \Omega_1 = N \ln \frac{M_2}{M_1}$$

$$= N \ln \frac{V_2}{V_1}$$

#### وجهة النظر التقليدية

التغير في القصور الحراري لتمدد غاز من  $V_1$  إلى  $V_2$  تحت درجة حرارة  $T$  ثابتة ومنه  $dU = 0$

$$\delta Q = -\delta W = PdV = nRT \frac{dV}{V}$$

$$\Delta S = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\delta Q}{T} = nR \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Delta S = Nk_B \ln \frac{V_2}{V_1}$$

$$\Rightarrow \Delta S = k_B (\ln \Omega_2 - \ln \Omega_1)$$

## I التحقق من صحة العلاقة $S = k \ln \Omega$

ندرس تجربة مزج غازين مثاليين (1) و (2) : الغاز (1) معروف  $U_1, V_1, N_1$  و الغاز (2) معروف بـ  $U_2, V_2, N_2$

قبل المزج عدد الحالات المجهرية قبل المزج للغاز (1)  $\ln \Omega_1(U_1, V_1, N_1) = N_1 \ln \frac{M_1}{N_1} + N_1 + \ln \Omega(u_1)$

عدد الحالات المجهرية قبل المزج للغاز (2)  $\ln \Omega_2(U_2, V_2, N_2) = N_2 \ln \frac{M_2}{N_2} + N_2 + \ln \Omega(u_2)$

بعد المزج  $\ln \Omega_f = N_1 \ln \frac{M_1 + M_2}{N_1} + N_1 + \ln \Omega(u_1) + N_2 \ln \frac{M_1 + M_2}{N_2} + N_2 + \ln \Omega(u_2)$

قبل المزج عدد الحالات الكلي هو

$$\ln \Omega_i = \ln \Omega_1 + \ln \Omega_2 = N_1 \ln \frac{M_1}{N_1} + N_2 \ln \frac{M_2}{N_2} + (N_1 + N_2) + \ln(\Omega(u_1)\Omega(u_2))$$

$$\ln \Omega_f - \ln \Omega_i = N_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + N_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

### وجهة النظر التقليدية

التغير في القصور الحراري عند ثبوت درجة الحرارة لمزج غازين مثاليين يعطى بـ  $(S_f - S_i)_1 = (\Delta S)_1$  يتغير القصور الحراري للغاز من الحالة  $i$  نحو الحالة  $f$  معناه تمدد الغاز من  $V_1 \leftarrow V_1 + V_2$  ونفس الشيء بالنسبة للغاز 2.  $(S_f - S_i)_2 = (\Delta S)_2$   $V_2 \leftarrow V_1 + V_2$

$$(\Delta S)_1 = N_1 k_B \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1}$$

$$(\Delta S)_2 = N_2 k_B \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2}$$

التغير في القصور الحراري الكلي  $\Delta S$  لمنظومة الغازين

$$\Delta S = (\Delta S)_1 + (\Delta S)_2$$

$$\Delta S = k_B (N_1 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + N_2 \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2})$$

$$\Delta S = k_B (\ln \Omega_f - \ln \Omega_i)$$

$$\Rightarrow S = k_B \ln \Omega$$

## II المنظومة المعزولة عند الإتزان

لتعيين حالة منظومة معزولة عند الإتزان بعدد الحالات الممكنة (الوزن الإحصائي)  $\Omega(U, V, N)$  عند الإتزان.

تعريف إن المنظومة المعزولة تعني أن لا تكون هناك تبادل في الطاقة ولا الحجم ولا في عدد الجزيئات وهذا معناه أن المنظومة المعزولة  $U = , V = , N =$

### المسألة الأولى

الحالات المجهرية الممكنة لحالة جهرية معينة لمنظومة معزولة هي مساوية الإحتمال، وهذا يعني بالطبع أن إحتمال وجود المنظومة في حالة مجهرية معينة يتناسب مع عدد الحالات الممكنة  $\Omega(U, V, N)$

$$P = \frac{\Omega(U, V, N)}{\Omega_{tot}} = C \Omega(U, V, N)$$

### المسألة الأولى

عندما تتطور منظومة معينة او مميزة بـ  $\Omega(U, V, N, \alpha)$  يمكننا إيجاد قيمة الوسيط  $\alpha$  التي تجعل  $\Omega$  عظمي.

و من جهة أخرى نقول أن القصور الحراري لمنظومة معزولة إلى أن يصل إلى قيمته العظمى عند الإتزان تساعدنا مسألة القصور الحراري عند الإتزان على تعريف درجة حرارة المنظومة  $T$ . لنأخذ منظومة مميزة بالطاقة  $U$ , الحجم  $V$  و عدد الجزيئات  $N$  تتكون من نوعين (1), (2) و المنظومة معزولة. بحيث أن

|     |     |
|-----|-----|
| (1) | (2) |
| U1  | U2  |
| V1  | V2  |
| N1  | N2  |

$$\begin{cases} U = U_1 + U_2 = \text{ثابت} \\ V = V_1 + V_2 = \text{ثابت} \dots \\ N = N_1 + N_2 = \text{ثابت} \end{cases}$$

لتعيين درجة الحرارة نفرض أن الحاجزين الفرعين يسمح بتبادل الحرارة  $V_1, N_1, V_2, N_2$  مقادير ثابتة. بحيث أن المتغيرات في هذه الحالة  $U_2, N_2, V_2$  ليست مستقلة لأنها تتغير من العلاقات السابقة كما يلي

$$\begin{cases} U_2 = U - U_1 \\ V_2 = V - V_1 \\ N_2 = N - N_1 \end{cases}$$

لدينا أن  $\Omega = \Omega_1 \Omega_2$  ومنه فإن  $S = k_B \ln \Omega$  فمنه نستنتج أن الوسيط  $\alpha$  هو مرتبط بـ  $(U_1, V_1, N_1)$  و أن من مسألة أعظمية القصور الحراري

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial U_1} |_{U, V, N, V_1, N_1} &= 0 \\ &= \frac{\partial S_1}{\partial U_1} |_{V_1, N_1} + \frac{\partial S_2}{\partial U_1} |_{V_2, N_2} \frac{\partial U_2}{\partial U_1} = 0 \\ \Rightarrow \frac{\partial S_1}{\partial U_1} |_{V_1, N_1} &= \frac{\partial S_2}{\partial U_1} |_{V_2, N_2} \end{aligned}$$

إن من طبيعة الإتزان الحراري يوافق تعادل درجة حرارة المنظومتين عند الإتزان و تحقق المنظومة المعزولة العلاقة أعلاه (إن المتغيرات ممكن تتغير ويمكن أن تصبح عبارة على حقل كهربائي، حقل مغناطيسي ..... إلخ) . و من جهة أخرى عند الإتزان تتعادل درجتى حرارة الفرعين (1) و (2) أي عند الإتزان يكون  $T_1 = T_2$  و يمكننا في هذه الحالة إستعمال علاقة القصور الحراري للفرعين لدرجة الحرارة.

$$\left. \frac{\partial S_1}{\partial U_1} \right|_{V_1, N_1} = \frac{1}{T_1}$$

$$\left. \frac{\partial S_2}{\partial U_2} \right|_{V_2, N_2} = \frac{1}{T_2}$$

$T_1 = T_2 = T$  فعند الإتزان تصبح و للتحقق من العلاقة السابقة نحاول إستعمال مبدأ كلاوزيس لتطور منظومه معزولة و هذا النص :

#### مبدأ كلاوزيس

القصور الحراري في تزايد مستمر

$$\frac{dS}{dt} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{dS_1}{dt} + \frac{dS_2}{dt} > 0$$

$$\frac{dS_1}{dt} = \frac{dS_1}{dU_1} \frac{dU_1}{dt} = \frac{1}{T_1} \frac{dU_1}{dt}$$

$$\frac{dS_2}{dt} = \frac{dS_2}{dU_2} \frac{dU_2}{dt} = -\frac{1}{T_2} \frac{dU_1}{dt} / U_2 = U - U_1$$

بالتعويض نجد أن

$$\left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \frac{dU_1}{dt} > 0$$

إذا كان  $(T_1 > T_2) \Leftrightarrow \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) < 0$  يجب أن يكون  $\frac{dU_1}{dt} < 0$

إذا كان  $(T_1 < T_2) \Leftrightarrow \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) > 0$  يجب أن يكون  $\frac{dU_1}{dt} > 0$

يعنى أن الحرارة في كلتا الحالتين تنتقل من الفرع الساخن إلى الفرع البارد و هذا يتفق مع التطور الطبيعي للمنظومة. لنفرض أن الحرارة يمكن أن تنتقل بين الفرعين (1) و (2) و أن الحاجز يمكن كذلك التحرك مما يسمح في تغيير حجم الفرعين (1) و (2) مع الإحتفاظ بالشرط التالي

$$U = U_1 + U_2 = \text{ثابت}$$

$$V = V_1 + V_2 = \text{ثابت}$$

$$N = N_1 + N_2 = \text{ثابت}$$

أما القصور الحراري للمنظومة هو  $S(U, V, N, U_1, V_1, N_1) = S_1(U_1, V_1, N_1) + S_2(U_2, V_2, N_2)$  عند الإتزان تحقق العلاقة التالية  $\left. \frac{\partial S_1}{\partial V_1} \right|_{U_1, N_1} = \left. \frac{\partial S_2}{\partial V_2} \right|_{U_2, N_2}$  ان يحصل بين الفرعين عندما يتعادل ضغطا الفرعين أي عند الإتزان يكون

$$P_1 = P_2 \text{ و منه نجد العلاقة التالية } \frac{\partial S_1}{\partial V_1}|_{U_1, N_1} = \frac{\partial S_2}{\partial V_2}|_{U_2, N_2} \text{ كمقياس للضغط}$$

$$P_1 = T_1 \frac{\partial S_1}{\partial V_1}|_{U_1, N_1}$$

$$P_2 = T_2 \frac{\partial S_2}{\partial V_2}|_{U_2, N_2}$$

هذا الاختيار يتفق مع قوانين الغاز المثالي عند الإتزان  $P = P_1 = P_2$

#### مثال

لنعتبر جسم بارامغناطيسي موجود داخل حقل مغناطيسي  $\vec{B}$  تظهر طاقة التفاعل بين العزم والحقل وهي مثل  $\epsilon_i = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  هذه الطاقة تحاول التغلب على الطاقة الحرارية للمنظومة التي تتعلق بدرجة الحرارة ومدى هذا التغلب يتعلق بشدة الحقل  $\vec{B}$  وحفظ درجة الحرارة.

إن ميكانيك الكم تنص على أنه عند وضع  $\vec{\mu}$  داخل حقل مغناطيسي  $\vec{B}$  لا يمكن للعزم المغناطيسي أن يأخذ إلا قيمتين. يتكون هذا الجسم من  $N$  عزم وذرة و كان  $n = n_+$  هو عدد العزوم التي هي في الاتجاه المباشر للحقل  $\vec{B}$  و  $n_- = N - n$  هو العدد الباقي بالاتجاه المعاكس لـ  $\vec{B}$  وتكون طاقة التفاعل للجسم هي

$$U(n) = -n\mu B + (N - n)\mu B = (N - 2n)\mu B$$

إذا كان  $N = 4$  فإن  $n$  تأخذ القيم من 1, 2, 3, 4

الحالة المجهرية I التي توافق  $n=4$  والتي توافق  $U_I = -4\mu B$

الحالة المجهرية II التي توافق  $n=3$  والتي توافق  $U_{II} = -2\mu B$

الحالة المجهرية III التي توافق  $n=2$  والتي توافق  $U_{III} = 0$

الحالة المجهرية IV التي توافق  $n=1$  والتي توافق  $U_{IV} = 2\mu B$

الحالة المجهرية V التي توافق  $n=0$  والتي توافق  $U_{IV} = 4\mu B$

يقسم الجسم إلى قسمين فرع (1) يتعلق بالطاقة التفاعل للعزوم المغناطيسية مع  $\vec{B}$  والفرع (2) يتعلق بالطاقة الإهتزازية ..... إلخ، وبهنا في هذه الدراسة سوى حالة الفرع (1). عند الإتزان يكون القصور الحراري الكلي عند قيمته العظمى أما القصور الحراري  $S_2$  للفرع (2) يحقق العلاقات التالية

| عدد الحالات المجهرية | الحالات المجهرية |    |    |    | الطاقة    | الحالة الجهرية |
|----------------------|------------------|----|----|----|-----------|----------------|
|                      | S4               | S3 | S2 | S1 |           |                |
| $C_4^4 = 1$          | +                | +  | +  | +  | $-4\mu B$ | I              |
| $C_3^4 = 4$          | +                | +  | +  | -  | $-2\mu B$ | II             |
|                      | +                | +  | -  | +  |           |                |
|                      | +                | -  | +  | +  |           |                |
|                      | -                | +  | +  | +  |           |                |
| $C_2^4 = 6$          | +                | +  | -  | -  | 0         | III            |
|                      | +                | -  | -  | +  |           |                |
|                      | -                | +  | +  | -  |           |                |
|                      | -                | -  | +  | +  |           |                |
|                      | +                | -  | +  | -  |           |                |
|                      | -                | +  | -  | +  |           |                |
| $C_1^4 = 4$          | +                | -  | -  | -  | $2\mu B$  | IV             |
|                      | -                | +  | -  | -  |           |                |
|                      | -                | -  | +  | -  |           |                |
|                      | -                | -  | -  | +  |           |                |
| $C_0^4$              | -                | -  | -  | -  | $4\mu B$  | V              |

$$\frac{\partial S_2}{\partial U_2} = \frac{1}{T}$$

$$U(n) = (N - 2n)\mu B$$

$$S_2 = k_B \ln \Omega_2$$

$$\Omega_2^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

برهان

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_2}{\partial U_2} &= \frac{1}{T} \\ \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial U_2} &= \frac{1}{kT} \\ \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial U_2} &= \frac{1}{2\mu B} \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial n} \\ \frac{\partial \ln \Omega_2}{\partial U_2} &= -\frac{1}{2\mu B} \ln\left(\frac{N}{n} - 1\right) = \frac{1}{kT} \\ n &= n_+ = \frac{N}{1 + \exp\left(\frac{-2\mu B}{kT}\right)} \\ n_- &= N\left(\frac{1}{1 + \exp\left(\frac{-2\mu B}{kT}\right)}\right) \end{aligned}$$

بالتعريف العزم المغناطيسي الكلي هو  $M = n_+\mu + n_-(-)\mu$  و أيضا الطاقة الكلية للجسيم البارامغناطيسي هو  $U(n) = (N - 2n)\mu B$  بالتعويض بقيمة  $n$  نجد أن الطاقة الكلية تساوي  $U = -N\mu B \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$  وأن العزم المغناطيسي الكلي

$$M = N\mu \tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$$

### III المجموعة القانونية المجهرية

تعريف تتميز المجموعة القانونية المجهرية المنظمومات المعزولة بحيث لا يمكنها أن تبادل المحيط الخارجي الطاقة و عدد جزيئاتها و الحجم ..... إلخ في منظومة معزولة كل الحالات المجهرية لحالة جهرية متساوية الاحتمال. القصور الحراري في المنظومة المعزولة يتزايد دوماً و يصل إلى قيمته العظمى عند الإتزان و يكون  $\frac{\partial S_1}{\partial U_1}|_{V_1, N_1} = \frac{\partial S_2}{\partial U_2}|_{V_2, N_2}$  أو  $T = T_1 = T_2$

### IV مجموعة من التمارينات

#### التمرين الأول

ليكن لدينا جملة ذات  $N$  جسيم مستقل مع إهمال التأثير المتبادل بينهم. نفرض أن  $N \gg 1$ . لكل جسيم مستويين للطاقة  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . النظام معزول و طاقته الكلية مساوية لـ  $E$ . باستخدام المجموعة المجهرية القانونية.

1. إحسب عدد الحالات الممكنة  $\Omega(E)$
2. إحسب القصور الحراري المجهر والقانوني  $S(E)$
3. إستنتج درجة الحرارة المجهرية والقانونية  $T$  بدلالة كل من  $\epsilon_1, \epsilon_2$ . أوجد عدد الجسيمات لكل مستوي طاقي بدلالة كل من  $T, \epsilon_1, \epsilon_2$
4. أوجد عدد الجسيمات عند درجات الحرارة المنخفضة و المرتفعة إذا علمت أن  $\epsilon > 0 = -\epsilon_1 = \epsilon_2$
5. أوجد العلاقة بين الطاقة الكلية  $E$  و درجة الحرارة  $T$ .

## التمرين الثاني

لتكن لدينا جملة معزولة مكونة من جملتين تحتيتين sous-système متماثلتين مفصولتين بحاجز عازل. المستويات الطاقوية لكل جسيم لكل sous-système تعطى طاقتها بالعلاقة التالية  $\epsilon_{n_x, n_y} = \epsilon_0(n_x^2 + n_y^2)$  حيث أن  $n_x, n_y$  هي أعداد طبيعية موجبة.

1. أوجد المستويات الطاقوية لكل الجسيم و مقدار إنحلالها أو بعبارة أخرى عدد الحالات المجهرية لكل مستوي.

2. عند اللحظة الزمنية  $t = 0$  النظامين التحتيتين يحتويان على الطاقات التالية على الترتيب  $E_1 = 15\epsilon_0, E_2 = 10\epsilon_0$  إحسب عدد الحالات المجهرية الخاصة بالنظام الأول ثم النظام الثاني ثم النظام الكلي.

3. الجدار الفاصل بين النظامين الآن يسمح بتبادل كمية الحرارة. إذن الجملة تتطور نحو حالة أخرى من التوازن.

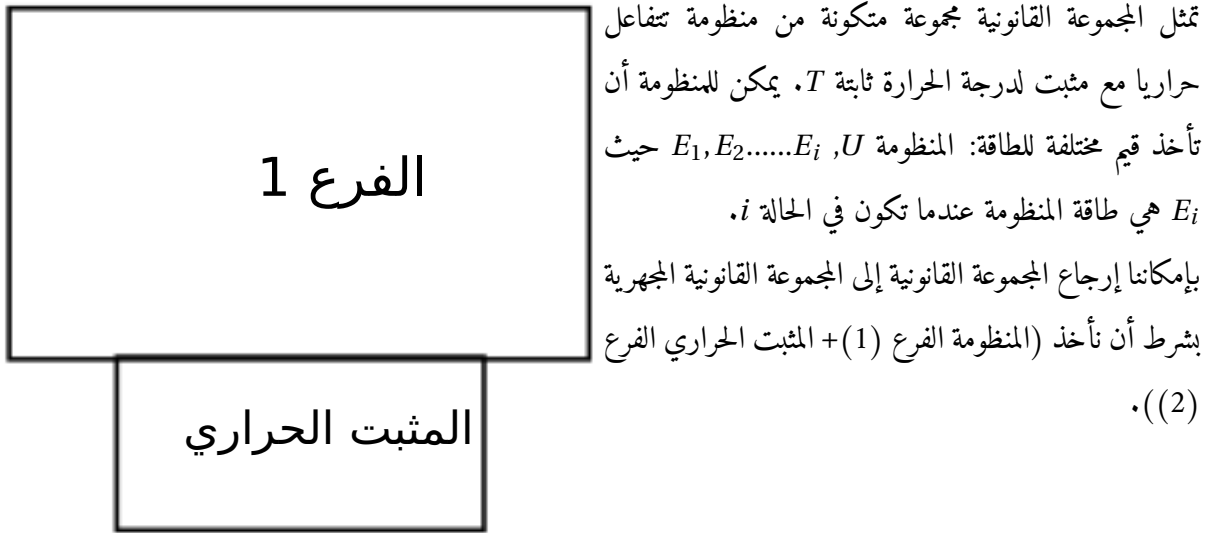
- ماهي الكمية المحفوظ عليها في هذا التحول.
- ماهو عدد الحالات المجهرية لهذا النظام.
- إحسب الطاقات الممكنة للنظام الأول. إحسب عدد الحالات المجهرية بالنسبة للطاقة.

## التمرين الثالث

ليكن لدينا في جسم صلب عدد المواقع النظامية يساوي إلى عدد المواقع الخلالية ويساوي  $N$ . المطلوب تعيين بدلالة درجة الحرارة  $T$  و عدد  $n$  للمواقع الخلالية الطاقة الداخلية  $U$  وأيضا السعة الحرارية عند حجم ثابت.

## IV

### المجموعة القانونية



كمنظومة معزولة طاقتها  $U_0$  و بالتالي تكون طاقة المثبت الحراري (2) عندما تكون المنظومة في الحالة  $i$  طاقتها  $E_i$  معطاة بـ  $U^2 = U_0 - E_i$  و حسب مسلمة تساوي الإحتمالات للحالات يكون الإحتمال لكي تكون المنظومة في الحالة  $E_i$  معطى بـ الاحتمال  $P_i$  بوجود المنظومة في الحالة  $i$  و بالتالي المثبت في الحالة  $U_0 - E_i$  يساوي  $P_i = \frac{\Omega_2(U_0 - E_i)}{\Omega_{tot}} = C \Omega_2(U_0 - E_i)$

ملاحظة بسبب كبر المثبت الحراري فإن عدد الحالات الممكنة للمنظومة ككل يساوي تقريبا عدد الحالات الممكنة للمثبت. و من التعريف الإحصائي للقصور الحراري لدينا أن

$$S_2(U_0 - E_i) = k \ln \Omega_2(U_0 - E_i) \implies \Omega_2(U_{- \{0\}} - E_{- \{i\}}) = \exp \frac{S_2(U_0 - E_i)}{k}$$

في حالة الإحتمال  $P_i$  لوجود منظومة في الحالة  $E_i$  هو  $P_i = C \exp \frac{S_2(U_0 - E_i)}{k}$  نحلل الدالة  $S_2(U_0 - E_i)$  إلى سلسلة تايلور بجوار  $E_i = U_0$  .....  $E_i = U_0$   $S_2(U_0 - E_i) = S_2(U_0) - E_i \frac{\partial S_2}{\partial E_i} |_{E_i=U_0} + \dots$

$$\frac{\partial S_2}{\partial E_i} \Big|_{E_i=U_0} = \frac{1}{T} \text{ لكن أن } \frac{\partial S_2}{\partial E_i} \Big|_{E_i=U_0} = \frac{1}{T}$$

$$P_i = C \exp \frac{-E_i}{kT} \text{ بالتعويض في دالة الإحتمال نجد أن}$$

$$\sum P_i = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{Z} \text{ لتعيين الثابت } C \text{ نستخدم شرط التنظيم بحيث المجموع الكلي للحالات الممكنة للمنظومة}$$

$$Z = \sum_i \exp \frac{-E_i}{kT} \text{ حيث } Z \text{ هي دالة التقسيم و تساوي}$$

$$P_i = \frac{\exp \frac{-E_i}{kT}}{Z}$$

## مثال

منظومة لها 5 مستويات طاقة  $E_1, E_2, \dots, E_5$  بحيث  $E_1 = \epsilon, E_2 = E_3 = E_4 = 2\epsilon, E_5 = 3\epsilon$

$$\begin{aligned} Z &= \sum_i \exp \frac{-E_i}{kT} = \exp \frac{-E_1}{kT} + \exp \frac{-E_2}{kT} + \exp \frac{-E_3}{kT} + \exp \frac{-E_4}{kT} + \exp \frac{-E_5}{kT} \\ &= \exp \frac{-\epsilon}{kT} + \exp \frac{-2\epsilon}{kT} + \exp \frac{-2\epsilon}{kT} + \exp \frac{-2\epsilon}{kT} + \exp \frac{-3\epsilon}{kT} \\ &= 1 \exp \frac{-\epsilon}{kT} + 3 \exp \frac{-2\epsilon}{kT} + 1 \exp \frac{-3\epsilon}{kT} = \sum_{E_i} g_i \exp \frac{-E_i}{kT} \end{aligned}$$

الفرق بين المجموعة القانونية المجهرية و المجموعة القانونية هو أن الأولى مجموعة معزولة و درجة حرارتها عند الإتزان يتعين من القصور الحراري أما في الثانية طاقة المنظومة متغيرة و درجة حرارتها مفروضة من المثلث لدرجة حرارة هي  $T$ . في المجموعة القانونية كل المعلومات تستخرج من دالة القسمة  $Z$ .

## I متوسط طاقة المنظومة

تتغير طاقة المنظومة و تأخذ كل القيم  $E_i$  بإحتمال  $P_i$  فالقيمة المتوسطة بالتعريف هي

$$\begin{aligned} \bar{U} &= E_1 P_1 + E_2 P_2 + \dots + E_i P_i \\ &= \sum_i P_i E_i = \frac{1}{Z} \sum_i E_i \exp \frac{-E_i}{kT} \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{1}{kT} \text{ بوضع أن}$$

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \frac{1}{Z} \sum_i E_i \exp -\beta E_i \\ &= \frac{1}{Z} \sum_i \frac{-\partial}{\partial \beta} (\exp -\beta E_i) = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \sum_i (\exp -\beta E_i) \Rightarrow \bar{U} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \end{aligned}$$

## II عبارة القصور الحراري

لنعتبر منظومة كلية تتكون من  $N$  مع وجود  $n_1$  منظومة متشابهة في الحالة (1) ،  $n_2$  منظومة متشابهة في الحالة (2) ..... إلى  $n_i$  منظومة متشابهة في الحالة (i) بحيث أن عدد الحالات المجهرية الممكنة لتوزيع  $n_1$  منظومة متشابهة في الحالة (1) ،  $n_2$  منظومة متشابهة في الحالة (2) ..... إلى  $n_i$  منظومة متشابهة في الحالة (i) من بين العدد الكلي  $N$  .

$$\Omega(n_1, n_2, \dots, n_i) = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_i!}$$

فإن القصور الحراري الكلي

$$S = k \ln \Omega = k \ln \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_i!}$$

بإستخدام تقريب ستيرلينغ نجد أن

$$S = k(N \ln N - \sum_i^n (n_i \ln n_i))$$

ولدينا أن  $\sum n_i = N$

لدينا أن  $P_i = \frac{n_i}{N}$  وبالتعويض نجد أن

$$S = -k \sum_i P_i \ln P_i$$

في المجموعة القانونية لدينا الإحتمال لوجود منظومة في حالة طاقة مميزة بـ  $E_i$  هي معرفة كما يلي  $P_i = \frac{\exp -\beta E_i}{Z}$  و حيث أن  $Z = \sum_i \exp -\beta E_i$  ومنه القصور الحراري يصبح بعد التعويض

$$S = -k \sum_i \frac{\exp -\beta E_i}{Z} \ln \frac{\exp -\beta E_i}{Z} = \frac{-k}{Z} \sum_i \exp -\beta E_i (-\beta E_i - \ln Z) = \frac{1}{T} \sum_i P_i E_i + k \ln Z = \frac{\bar{U}}{T} + k \ln Z$$

وأن بالتعريف الطاقة الحرة لهلموتز المعرفة  $F = U - TS$  و بالتعويض بعبارة القصور الحراري نجد أن  $F = -kT \ln Z$ .

## III أمثلة

## مثال الأول

الجسم البارامغناطيسي الجسم البارامغناطيسي: لدينا جسم يتكون من  $n$  ذرة و تحمل كل واحدة منها عزم مغناطيسي دائم  $\mu$  موجودة داخل حقل مغناطيسي  $\vec{B}$  متجه من الأسفل إلى الأعلى. الطاقة تعطى بالعلاقة التالية  $\epsilon_i = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  بالتعويض في دالة القسمية  $z$  نجد أن

$$z = \sum_i \exp -\beta E_i = e^{\beta \mu B} + e^{-\beta \mu B} = 2 \cosh(\beta \mu B)$$

أن طاقة التفاعل لكل عزم هي  $\bar{u} = -\frac{\partial \ln z}{\partial \beta}$  فتصبح الطاقة للجسم البارامغناطيسي كما يلي  $\bar{u} = -\mu B \tanh(\beta \mu B)$  ومنه فطاقة التفاعل بين العزوم والحقل المغناطيسي هي  $\bar{U} = N\bar{u} = -N\mu B \tanh(\beta \mu B)$ . إن الإحتمال لكي يتجه العزم المغناطيسي نحو الأعلى هو  $P_+ = \frac{e^{-\beta(-\mu B)}}{2 \cosh(\beta \mu B)}$  ويساوى أيضا  $P_- = 1 - P_+$  ومنه نستطيع كتابة أن  $\frac{1}{1 + e^{-2\beta \mu B}}$ . متوسط المغنطة أو العزم الكلي إن بالتعريف متوسط المغنطة أو العزم الكلي هو  $\bar{M} = N\bar{m}$  و أن العزم لكل ذرة هو

$$\bar{\mu} \equiv \bar{m} = \sum_i m P_i = \mu P_+ - \mu P_- = \mu \frac{e^{\beta \mu B} - e^{-\beta \mu B}}{e^{\beta \mu B} + e^{-\beta \mu B}} = \mu \tanh(\beta \mu B)$$

$$\bar{M} = N\mu \tanh(\beta \mu B)$$

إذا كان  $B \rightarrow 0$  و  $T \rightarrow \infty$  فإن  $\tanh(\beta \mu B) \approx \beta \mu B$  و منه تصبح المغنطة مساوية لـ

$$\bar{M} = N\mu \frac{\mu B}{kT} = \frac{N\mu^2 B}{kT} = \frac{C}{T}$$

المغنطة هي دالة في  $\frac{1}{T}$  و يسمى بقانون Curie للمغنطة.

### مثال الثاني

إهتزاز ذرات جسم صلب تمثل إهتزاز ذرات الجسم الصلب بإهتزازات هزاز توافقي متماثل الاتجاهات و يهتز بنفس النبض  $\omega$  في الاتجاهات الثلاثة  $x, y, z$ .  
في الاتجاه  $x$  تكون طاقة الهزاز هي  $\epsilon_x = (n_x + 1/2)\hbar\omega$  بحيث مستويات الطاقة منفصلة بمقدار ثابت  $\hbar\omega$ . و أن  $n_x$  تأخذ القيم  $n_x = 1, 2, 3, \dots$  بالمثل يكون لدينا في الاتجاهين  $y, z$ . بحيث أن  $\epsilon_y = (n_y + 1/2)\hbar\omega$ ,  $\epsilon_z = (n_z + 1/2)\hbar\omega$  طاقة الهزاز التوافقي الكلية  $\epsilon = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$  دالة التقسيم تساوي

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = \sum_i e^{-\beta(\epsilon_x^i + \epsilon_y^i + \epsilon_z^i)} = \sum_x e^{-\beta \epsilon_x} \sum_y e^{-\beta \epsilon_y} \sum_z e^{-\beta \epsilon_z} = Z_x Z_y Z_z$$

دالة التقسيم في الاتجاه  $x$  هي  $Z_x = \sum_{n_x=0}^{\infty} e^{-\beta(n_x+1/2)\hbar\omega}$

$$Z_x = e^{-\beta\hbar\omega/2} \sum_{n_x=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n_x} \dots y = e^{-\beta\hbar\omega}$$

المجموع يصبح

$$\sum_{n_x=0}^{\infty} y^{n_x} = 1 + y + y^2 + y^3 + \dots = \frac{1}{1-y}$$

$$Z_x = e^{-\beta\hbar\omega/2} \frac{1}{1 - e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2 \sinh(\beta\hbar\omega/2)}$$

$$Z = (Z_x)^3 = \left[ \frac{1}{2 \sinh(\beta\hbar\omega/2)} \right]^3$$

طاقة الإهتزازية لكل هزاز توافقي هي

$$\bar{u} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = (3/2)\hbar\omega \frac{1}{\tanh(\beta\hbar\omega/2)}$$

إذا كان الجسم يتكون من  $N$  ذرة تهتز بنفس النبض  $\omega$  فتكون الطاقة الإهتزازية الكلية مساوية

$$\bar{U} = N\bar{u} = (3/2)N\hbar\omega \frac{1}{\tanh(\beta\hbar\omega/2)}$$

إذا كانت الطاقة الإهتزازية أقل بكثير من الطاقة الحرارية  $kT$  فإن  $\hbar\omega \ll kT$   $\tanh(\beta\hbar\omega/2) = \beta\hbar\omega/2$  الطاقة  
الإهتزازية للجسم المتكون من  $N$  ذرة هي  $\bar{U} = 3NkT$  والسعة الحرارية عند ثبوت الحجم هي  $C_v = \frac{\partial \bar{U}}{\partial T} \Big|_v = 3Nk$

## IV النظرية الكمية للبارامغناطيسية

ليكن لدينا جملة تحتوي على  $N$  عزم مغناطيسي مستقل  $\mu$  الموضوع داخل حقل مغناطيسي  $B$  موازيا للمحور  $Oz$

$$\vec{\mu} = \gamma \hbar \vec{J} = -g_j \frac{e}{2m} \vec{J}$$

حيث أن  $\gamma$  هو المعامل الجيرومغناطيسي و  $g_j$  معامل Lande و  $\mu_B$  هو مغناطور Bohr المساوي لـ  $\mu_B = \frac{\hbar e}{2m}$  و أن

$$g_j = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}$$

بما أن الحقل المغناطيسي الضعيف  $B \parallel O_3$  المسماة بتأثير Zeeman .

$$E = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = g_j \frac{e}{2m} J_z B$$

$$E_{mj} = g_j \frac{e\hbar}{2m} m_j B$$

حيث  $m_j$  هو العدد الكمي المغناطيسي و أن بالتعريف العزم المغناطيسي لكل عزم مغناطيسي  $\mu_{m_j}$  هي مساوية لـ

$$\mu_{m_j} = -\frac{\partial E_{mj}}{\partial B} = -g_j \mu_B m_j$$

$$M_3 = \frac{N}{Z} \sum m_j \mu_{m_j} e^{\beta E_{mj}}$$

يعطى بالمعادلة التالية

$$Z = \sum_{m_j} e^{-\beta E_{mj}} \Rightarrow \frac{dZ}{dB} = -\beta \sum g_j \mu_B m_j e^{-\beta E_{mj}}$$

$$M_3 = -\beta \sum_{m_j} \frac{\partial E_{mj}}{\partial B} e^{-\beta E_{mj}} = \frac{N}{\beta} \frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial B}$$

$$M_3 = \frac{N}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial B}$$

سنقوم بحساب دالة القسمة  $Z$  التي تكتب على الشكل التالي  $Z = \sum_{m_j=-j}^{m_j=j} e^{-\beta g_j \mu_B m_j B}$  و بوضع أن  $x = \beta g_j \mu_B B j$

$$Z = \sum_{m_j=-j}^{m_j=j} e^{-x \frac{m_j}{j}}$$

$$Z = e^x + e^{x - \frac{x}{j}} + e^{x - \frac{2x}{j}} + \dots + e^{-x}$$

دالة القسمة عبارة على متتالية هندسية و تكتب كما يلي

$$Z = e^x \frac{1 - e^{-\frac{x}{j}(2j+1)}}{1 - e^{-\frac{x}{j}}}$$

وبعد التبسيط نجد أن

$$Z = \frac{e^{x(1+\frac{1}{2j})} - e^{-x(1+\frac{1}{2j})}}{e^{\frac{x}{2j}} - e^{-\frac{x}{2j}}}$$

$$Z = \frac{\sinh x(1 + \frac{1}{2j})}{\sinh \frac{x}{2j}}$$

وبالتعويض في القيمة المتوسطة للعزم المغناطيسي الكلي و المسماة بالمغطة  $M$  نجد أن

$$M_3 = Ng_j \mu_B j [(1 + \frac{1}{2j}) \coth x(1 + \frac{1}{2j}) - \frac{1}{2j} \coth \frac{x}{2j}]$$

تعطى دالة Brillouin كما يلي :  $B_J(x) = \frac{2J+1}{2J} \coth \left( \frac{2J+1}{2J} x \right) - \frac{1}{2J} \coth \left( \frac{1}{2J} x \right)$  و منه تكتب المغطة الكلية بدلالة دالة Brillouin

$$M_3 = Ng_j \mu_B j B_J(x)$$

عند درجات الحرارة العالية  $g_j \mu_B B J \gg kT$  و بالتالي  $x \ll 1$  و باستخدام النشر المحدود للدالة  $\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45}$  و بعد التعويض نجد أن

$$M_3 = \frac{Ng_j^2 \mu_B^2 B J(J+1)}{3kT}$$

نسمي المغطة المتوسطة لوحدة الحجم هي  $M_z = \frac{M_3}{V} = \frac{ng_j^2 \mu_B^2 B J(J+1)}{3kT}$  بحيث أن  $n = N/V$  و من ناحية أخرى تعطى عبارة المغطة لوحدة الحجم بدلالة الحساسية المغناطيسية بالمعادلة التالية  $M_z = \chi H = \chi \frac{B}{\mu_0}$  و نجد أن الحساسية البرامغناطيسية وفق للنظرية الكمية  $\chi = \frac{n\mu_0 g_j^2 \mu_B^2 j(j+1)}{3k} \frac{1}{T}$  نضع أن  $C = \frac{n\mu_0 g_j^2 \mu_B^2 j(j+1)}{3k}$  حيث  $C$  هو ثابت Curie للبارامغناطيسية.

$$\chi = \frac{C}{T}$$

## V دراسة حالة هزاز توافق

إذا أخذنا جزئ ثنائي الذرة في حركة إهتزازية وفق المحور  $x$  

تعرف الكتلة المختزلة  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  لدينا أن الهاملتونيان  $\mathcal{H} = \frac{p_x^2}{2\mu} + \frac{1}{2} kx^2$  ; و باستخدام معادلة شرودنجر التالية  $\mathcal{H}\psi_n = E_n\psi_n$

نستطيع كتابتها كما يلي

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - \frac{1}{2} kx^2) \psi = 0$$

وبوضع أن  $\alpha = \frac{2\mu}{\hbar^2} E$  و  $\beta^2 = \frac{\mu k}{\hbar^2}$  فتكتب المعادلة السابقة كما يلي

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi + (\alpha - \beta^2 x^2) \psi = 0$$

باستخدالن تبديل المتغير التالي  $\xi = \sqrt{\beta} x \Rightarrow d\xi = \sqrt{\beta} dx$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{\beta} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}$$

بالتعويض في المعادلة السابقة نجد أن معادلة الهزاز التوافقي تكتب كما يلي

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \psi + (\alpha/\beta - \xi) \psi = 0 \dots (1)$$

لحل المعادلة السابقة نفرض مايلي :  $\frac{dy}{dx} + 2xy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y = e^{-x^2}$  بمفاضلتها (n+1) فتكتب المعادلة كما يلي

$$\frac{d^{n+2}}{dx^{n+2}} y + [2x \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} y + 2(n+1) \frac{d^n y}{dx^n}] = 0$$

بأخذ أن  $z = \frac{d^n y}{dx^n}$  فتصبح المعادلة التفاضلية السابقة كما يلي

$$\frac{d^2}{dx^2} z + [2x \frac{dz}{dx} + 2(n+1)z] = 0$$

و بوضع أن  $u = e^{\frac{x^2}{2}} z$  وبالتعويض نجد أن

$$\frac{d^2}{dx^2} u + [(2n+1) - x^2] u = 0 \dots (2)$$

بمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن  $\frac{\alpha}{\beta} = 2n+1$  وبأخذ قيم  $\alpha$  و  $\beta$  المفروضة سابقا نجد أن

$$E_n = (n + 1/2) \hbar \omega$$

حيث n هو العدد الكمي التذبذبي و الحالة  $n = 0$  توافق المستوى الارضي الذي طاقته هي  $E = 1/2 \hbar \omega_0$  و أن  $\epsilon = h\nu_0 = \hbar \omega_0$  بعد تعيين طاقة هزاز توافقي نقوم الآن بتعيين السعة الحرارية لهذا الهزاز, نقوم بحساب دالة القسمة Z

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta(n+1/2)\hbar\omega} = e^{-\beta\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta\hbar\omega n}$$

بوضع أن  $y = e^{-\beta\hbar\omega}$  فإننا نجد أن

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n = 1 + y + y^2 + \dots = \frac{1}{1-y}$$

ومنه تصبح دالة القسمة Z كما يلي

$$Z = e^{-\beta\hbar\omega/2} \frac{1}{1-e^{-\beta\hbar\omega}} = \frac{1}{2 \sinh(\beta\hbar\omega/2)}$$

تعطى الطاقة المتوسطة بدلالة دالة القسمة  $\bar{E} = -\frac{d}{d\beta} \ln Z$  فبعد الحساب نجد أن متوسط الطاقة للهزاز التوافقي هي

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$$

وأن السعة الحرارية من أجل N من الهزازات المستقلة

$$C_v = N \frac{d\bar{E}}{dT} = Nk \left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)^2 \frac{1}{\sinh^2\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}$$

حالات خاصة : عند درجات الحرارة العالية :  $\hbar\omega \ll 2kT$  فإنه يكون  $\frac{\hbar\omega}{2kT} \ll 1$  وبالتالي فإستخدام النشر المحدود فإن نجد أن  $\coth x = 1/x + x/3$  فإن كل من متوسط الطاقة و السعة الحرارية تصبحان كما يلي

$$\bar{E} = kT + \frac{(\hbar\omega)^2}{12kT}$$

$$C_v/R = 1 - \frac{1}{12} \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2$$

عند درجات الحرارة المنخفضة:  $\hbar\omega \gg 2kT$  فإن كل من الطاقة المتوسطة

$$\bar{E} = \frac{\hbar\omega}{2} (1 + 2e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}})$$

و السعة الحرارية كما يلي

$$C_v/R = \left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right)^2 e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$$

## VI مفهوم كثافة الحالات

إذا كان للمنظومة طيف متصل فإن دالة القسمية  $Z$  تكتب على الشكل التالي

$$Z = \int e^{-\beta E} g(E) dE$$

نسمي بـ  $g(E)dE$  عدد الحالات الممكنة للحالات المجهرية الممكنة الموجودة في المجال  $[E, E + dE]$  هي  $g(E)dE$  و  $d\Omega(E)$  و أن  $g(E)$  تسمى بكثافة الحالات أوعبارة أخرى عدد الحالات الممكنة لوحدة الطاقة.

## VII أمثلة على حساب كثافة الحالات

### المثال الأول

هزاز توافقي ذي بعد واحد ليكن لدينا هزاز توافقي ذي بعد واحد و التي تعطى طاقته بالمعادلة التالية

$$\epsilon = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2$$

و أنه من ميكانيك الكم فإن طاقة الهزاز التوافقي هي  $\epsilon_n = (n + 1/2)\hbar\omega$  إذا كان  $n$  صغير جدا فإن المستويات الطاقوية الإهتزازية تبعد عن بعضها البعض بمقدار  $\Delta E = \hbar\omega$  . أما إذا كان  $n \gg 1$  فإن الطاقة تصبح عبارتها بالتقريب هي  $\epsilon \approx n\hbar\omega$  فإن عدد الحالات الممكنة لكي تكون طاقة الهزاز محصورة بين  $[\epsilon, \epsilon + d\epsilon]$  فإن عدد الحالات الممكنة هو

$$d\Omega = dn(\epsilon) = \frac{dn(\epsilon)}{d\epsilon} d\epsilon = \frac{1}{\hbar\omega} d\epsilon \Rightarrow g(\epsilon) = \frac{1}{\hbar\omega}$$

## المثال الثاني

هزاز توافقي ذي بعدين طاقة هزاز توافقي ذي بعدين تعطى بالمعادلة التالية:

$$\epsilon = (n_x + 1/2)\hbar\omega + (n_y + 1/2)\hbar\omega$$

$$\epsilon = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega$$

فعندما تكون كل من  $n_x, n_y \gg 1$  فإن طاقة الهزاز التوافقي هي بالتقريب تساوي  $\epsilon \approx (n_x + n_y)\hbar\omega$  و بالتالي نحصل على معادلة مستقيم من الشكل  $n_x + n_y = \frac{\epsilon}{\hbar\omega}$  وأن عدد الحالات الممكنة تمثل شبكة نقاط تقاطع قيم كل من  $n_x$  و  $n_y$  , و منه فإن عدد الحالات الممكنة هي مساحة المثلث على مساحة الوحدة و منه تساوي  $\Omega(\epsilon) = \frac{1}{2}(\epsilon/\hbar\omega)^2$  إن عدد الحالات الممكنة  $d\Omega(\epsilon)$  للهزاز التوافقي المحصورة بين المستقيمين  $\epsilon$  و  $\epsilon + d\epsilon$ .

$$\Omega(\epsilon) = \frac{1}{2}(\epsilon/\hbar\omega)^2$$

$$\Omega(\epsilon + \delta\epsilon) = \frac{1}{2}(\epsilon + \delta\epsilon/\hbar\omega)^2$$

$$\delta\Omega(\epsilon) = \frac{\epsilon}{\hbar\omega}\delta\epsilon$$

$$g(\epsilon) = \frac{\epsilon}{(\hbar\omega)^2} \text{ كما يلي كتبت الحالات كثافة}$$

## المثال الثالث

هزاز توافقي ذي ثلاث أبعاد من ميكانيك الكم تعطى طاقة هزاز توافقي بالمعادلة التالية  $\epsilon = (n_x + 1/2)\hbar\omega + (n_y + 1/2)\hbar\omega + (n_z + 1/2)\hbar\omega$  و عندما تكون  $n_x, n_y, n_z \gg 1$  فإن المعادلة السابقة تكتب كما يلي  $\epsilon = n_x\hbar\omega + n_y\hbar\omega + n_z\hbar\omega$  والتي نستطيع كتابتها

$$\frac{n_x}{\epsilon/\hbar\omega} + \frac{n_y}{\epsilon/\hbar\omega} + \frac{n_z}{\epsilon/\hbar\omega} = 1$$

هي معادلة مستوى من الشكل  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$  حيث  $a = b = c$  , فإن عدد الحالات الممكنة هي  $\Omega(\epsilon) = \frac{V}{\Delta V}$  حيث أن  $V = \frac{1}{8}\pi abc$

$$\Omega(\epsilon) = \frac{1}{6}\left(\frac{\epsilon}{\hbar\omega}\right)^3 \Rightarrow g(\epsilon) = \frac{d\Omega(\epsilon)}{d\epsilon} = \frac{\epsilon^2}{2(\hbar\omega)^2}$$

## المثال الرابع

جسم حر موجود داخل علبة ليكن لدينا جسم يتحرك داخل وفق مستقيم بين الحدود  $0 \rightarrow L$  و كأنه لدينا علبة ذات بعد واحد. فإن كمية الحركة وفق *DeBroglie* تعطى بالمعادلة التالية  $p_x = \frac{n_x h}{\lambda} \Rightarrow \epsilon_x = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n_x^2$  أو بطريقة أخرى و باستخدام معادلة شرودنجر  $\mathcal{H}\psi(x) = \epsilon\psi(x)$  حيث أن  $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$

$$\frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \frac{2m\epsilon_x}{\hbar^2} \psi(x) = 0$$

حل هذه المعادلة يكون من الشكل

$$\psi(x) = A \sin(k_x x) + B \sin(k_x x); k_x^2 = \frac{2m\epsilon_x}{\hbar^2}$$

فعند الشروط الحدية  $\psi(0) = \psi(L) = 0$  فإننا نجد أن  $k_x L = n_x \pi$  و منه نجد أن

$$\epsilon_x = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} n_x^2$$

فإذا كان الجزيء يتحرك داخل علبة حجمها  $L^3$  فإن طاقة الهزاز التوافقي في هذه الحالة تكتب كما يلي

$$\epsilon = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2mL^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

فكل طاقة معينة  $\epsilon$  فإن كل من  $n_x, n_y, n_z$  لا تأخذ سوى القيم التي تتحقق في وقت واحدة , بحيث نحصل على أن

$$(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = R^2 = \frac{2mL^2}{\pi^2 \hbar^2} \epsilon$$

فإن عدد الحالات الممكنة للطاقة  $\epsilon$  هو

$$\Omega(\epsilon) = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{\pi}{6} \frac{L^3}{\pi^3 \hbar^2} (2m)^{3/2} \epsilon^{3/2}$$

وأن

$$\delta\Omega(\epsilon) = \frac{1}{8} 4\pi R^2 dR; R = \frac{L}{\pi \hbar} (2m)^{1/2} \epsilon^{1/2} \Rightarrow g(\epsilon) = \frac{1}{4} \frac{L^3}{\pi^2 \hbar^3} (2m)^{3/2} \epsilon^{1/2}$$

## VIII الضغط P وكمية الحرارة

نعتبر منظومة تتبادل المحيط الخارجي في الحرارة و عدد جزيئاتها ثابت و يمكن أن يغير حجمها خلال التحولات الحرارية . إذا إنتقلت منظومة من حالة جهرية معينة المعروفة بـ  $(V, \beta)$  إلى حالة جهرية أخرى معروفة بـ  $(V + dV, \beta + d\beta)$  فتصبح لدينا أن  $d(U) = d \sum E_i \mathcal{P}_i$  هي دالة الإحتمال.

$$dU = \sum_i E_i d\mathcal{P}_i + \sum_i \mathcal{P}_i dE_i = dU_1 + dU_2$$

.....(1) نقوم الآن بحساب الحد الأول  $dU_1$  , لدينا أن

$$\mathcal{P}_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}; Z = \sum e^{-\beta E_i}; \Rightarrow E_i = -\frac{\ln Z}{\beta} - \frac{\ln \mathcal{P}_i}{\beta}$$

$$dU_1 = \sum_i \left( -\frac{\ln Z}{\beta} - \frac{\ln \mathcal{P}_i}{\beta} \right) d\mathcal{P}_i$$

$$dU_1 = -\frac{1}{\beta} \sum_i \ln \mathcal{P}_i d\mathcal{P}_i$$

نعلم أن  $S = -k \sum \mathcal{P}_i \ln \mathcal{P}_i$  منه نجد أن  $dS = -k \ln \mathcal{P}_i d\mathcal{P}_i$

$$\Rightarrow dU_1 = T dS = \delta Q$$

من المبدأ الاول للديناميك الحرارية (2).....

$$dU = \delta Q - P dV$$

بمقارنة المعادلتين (1) و (2) نجد أن

$$dU_2 = \sum \mathcal{P}_i dE_i = -P dV$$

ومنه نستنتج أن

$$P = - \sum \mathcal{P}_i \frac{E_i}{dV} = -\frac{1}{Z} \sum \frac{1}{\beta} \frac{d}{dV} e^{-\beta E_i}$$

ونجد أن الضغط P بدلالة دالة القسم Z

$$P = \frac{1}{\beta} \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial V} \right) |_T$$

## IX دراسة غاز مثالي أحادي الذرة

وجدنا أن طاقة الجسيم ذي كتلة m الموجودة داخل علبة ذات حجم  $V = a^3$  هي تساوي  $E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{h^2}{8ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$

$$Z_1 = \sum_{n_x, n_y, n_z} e^{-\beta \frac{h^2}{8ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)}$$

فعلى سبيل المثال من أجل ذرة الهليوم وعند درجة حرارة الغرفة  $T=300K$  لدينا أن  $\frac{h^2}{8ma^2} = 10^{-28} eV$  و  $kT = 2.5 \cdot 10^{-2} eV$  إذن تصبح لدينا  $\frac{h^2}{8mkTa^2} \ll 1$  إذن فإن مستويات الطاقة تكون متصلة ونعوض عن المجموع بتكامل بحيث تصبح أن

$$Z_1 = \int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{8mkTa^2} n_x^2} dn_x \int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{8mkTa^2} n_y^2} dn_y \int_0^\infty e^{-\frac{h^2}{8mkTa^2} n_z^2} dn_z$$

بعد الحساب نجد أن

$$Z_1 = V \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2}$$

إذا أدخلنا طول موجة حرارية لـ Debroglie  $\lambda = h/p$  والتي تساوي  $\lambda \approx \frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}}$  ومنه نجد أن  $Z_1 = \frac{V}{\lambda^3}$

مثال

ذرة الهليوم من أجل ذرة الهليوم و عند الضغط الجوي عدد ذرات لوحدة الحجم عند  $T=300K$   $n = 2.5 \times 10^{19} cm^{-3}$  و أن  $\frac{1}{\lambda^3} = 8 \times 10^{24} cm^{-3}$  فإننا نعرف التركيز الكمي بالمعادلة التالية وهي  $n_Q = \frac{1}{\lambda^3}$  إن هذا التركيز يوافق ذرة لكل حجم  $\lambda^3$  . لدينا أن  $1 \ll \frac{n}{n_Q} = 3 \times 10^{-6}$  . إذا كان  $n \ll n_Q$  أي أننا في الحالة الكلاسيكية ، لذلك في هذا النظام الغاز المثالي معروف على أنه غاز من الذرات أو الجزيئات دون تفاعل ، أو بعبارة أخرى هو عبارة على غاز كلاسيكي بتركيز ضعيف بحيث يمكن إهمال التفاعلات بين بعضها البعض.

$$\bar{E} = -\frac{d}{d\beta} \ln Z_1 = \frac{3}{2} k_B T$$

ففي حالة جسم ذي  $N$  جسم غير متميز فإن دالة القسم الكلية للنظام ككل تعطى بالعلاقة التالية  $Z = \frac{Z_1^N}{N!}$  فإن الطاقة الداخلية للجسم هي

$$U = -\frac{d}{d\beta} \ln Z = N\bar{E} = N \frac{3}{2} k_B T$$

و أن الطاقة الحرة  $F$  للجسم تساوي

$$F = -kT \ln Z = -Nk_B T \left( \ln \frac{V}{N} + \frac{3}{2} \ln \frac{2\pi mk_B T}{h^2} + 1 \right)$$

و أن الضغط  $P$  هو يعطى بالمعادلة

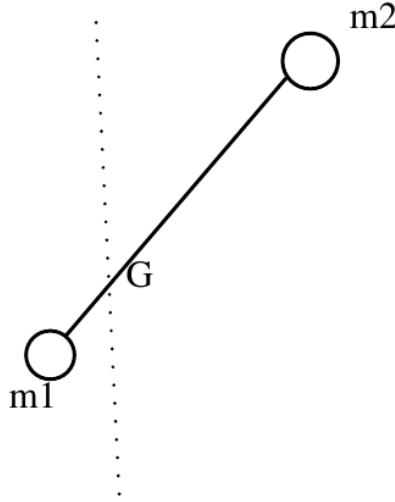
$$P = -\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right) = \frac{Nk_B T}{V} \Rightarrow PV = Nk_B T$$

و من ناحية أخرى نستطيع كتابة الطاقة الحرة  $F$  والقصور الحراري  $S$  بدلالة التركيز الكمي  $n_Q$

$$F = -Nk_B T \left( \ln \frac{n_Q}{n} + 1 \right)$$

$$S = Nk_B \left( \ln \frac{n_Q}{n} + 5/2 \right)$$

## X الدراسة الكلاسيكية للجزئ ثنائي الذرة



من أجل دراسة جزئ ثنائي الذرة نختار كمناسب للدراسة و الذي يعطى بالعلاقة التالية  $V(r) = D[(1 - e^{-\alpha(r-r_0)})^2 - 1]$  حيث أن  $r$  و  $r_0$  هي المسافة بين الذرتين و وضعية التوازن المستقر على الترتيب. حيث أن الهاملتونيان في هذه الحالة يساوي

$$\mathcal{H} = \frac{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}{2M} + \frac{1}{2\mu} \left( P_r^2 + \frac{P_\theta^2}{r^2} + \frac{P_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + V(r)$$

حيث أن  $\mu$  هي الكتلة المختصرة و  $M$  هي الكتلة الكلية للجزئ , إذا كتبنا الهاملتونيان على الشكل  $\mathcal{H} = E_t + E_i + V(r)$  إذن مجموع الحالات الكلاسيكية هو  $z = z_t z_i$

$$z_t = \int \int \int dX dY dZ \int \int \int dP_x dP_y dP_z e^{-\beta E_t} \Rightarrow z_t = V \left( \frac{2\pi M}{\beta} \right)^{3/2}$$

وأن

$$z_i = \int \int \int dr d\theta d\phi e^{-\beta V(r)} \int \int \int dP_r dP_\theta dP_\phi e^{-\beta E_i}$$

$$z_i = \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty r^2 e^{-\beta V(r)} dr$$

نعرف أن التكامل  $I$  بالمعادلة التالية

$$I = \int_0^\infty r^2 e^{-\beta V(r)} dr \approx \frac{e^{\beta D}}{\alpha \sqrt{\beta D}} \sqrt{\pi} \left[ 1 + \frac{1}{2\beta D} + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{\beta D} \right)^2 + \dots \right]$$

$$z = z_t z_i = V \left( \frac{2\pi M}{\beta} \right)^{3/2} \left( \frac{2\pi\mu}{\beta} \right)^{3/2} \frac{4\pi \sqrt{\pi}}{\alpha \sqrt{\beta D}} e^{\beta D} \left[ 1 + \frac{1}{2\beta D} + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{\beta D} \right)^2 + \dots \right]$$

وبالتالي يمكن أن نستنتج أن

$$\bar{E} = -\frac{d}{d\beta} \ln z = \frac{7}{2\beta} - D + \frac{(k_B T)^2}{2D} + \frac{5}{4} \frac{(k_B T)^3}{(D)^3} + \dots$$

$$C_v = R \left( \frac{7}{2} + \frac{k_B T}{D} + \frac{15}{4} \frac{(k_B T)^2}{D^2} + \dots \right)$$

عند درجات الحرارة المرتفعة يكون السعة الحرارية موافقا للتجربة ولكن عند درجات الحرارة المنخفضة تبدأ درجات

الحرية بالتجمد و تبدأ من الإهتزازية ثم الدورانية.... و تصبح الظاهرة مشروحة سوى من ميكانيك الكم.

## XI الدراسة الكمية لجزئ ثنائي الذرة

عند درجة الحرارة المنخفضة وجدنا أن  $C_v = 3/2R$  لكل مول وعند درجات الحرارة العالية وجدنا أن مستويات الطاقة الدورانية تصبح مثارة و منه  $C_v = 5/2R$  وعند درجات الحرارة العالية جدا تضاف إليها إثارة مستويات الطاقة الإهتزازية  $C_v = 7/2R$ .

### 1- XI تأثير التكميم على الطاقة الإنسحابية

تعطى الطاقة الإنسحابية بالمعادلة التالية  $E_{n_x, n_y, n_z} = \frac{h^2}{8ma^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$  و أن  $\Delta\epsilon = 10^{-18} eV$  و  $\theta_t = \frac{\Delta\epsilon}{k_B}$  و منه تأثير الطاقة الإنسحابية يعتبر مهملاً.

### 2- XI تأثير التكميم على الطاقة الإهتزازية

إذا كان لدينا أن أن تواتر الإهتزاز يساوي  $\nu = 10^{14} Hz$  و  $h\nu = 0.4 eV$  إذن يصبح لدينا أن  $\theta_v = \frac{h\nu}{k_B} = 4800 K$  و منه هذا المقدار كبير جدا غير قابل للتكميم.

### 3- XI تأثير التكميم على الطاقة الدورانية

ن ميكانيك الكم لدينا أن الطاقة الدورانية تكتب كما يلي  $\mathcal{H} = \frac{h^2 \vec{\ell}^2}{2I}$  والتي تكتب قيمه الخاصة كما يلي  $E_\ell = \frac{h^2}{2I} \ell(\ell+1)$  حيث  $\ell > 0$  و إنحلال مستوى الطاقة  $E_\ell$  هو  $(2\ell+1)$  و أن  $I$  هو عزم العطالة بالنسبة للمحور العمودي على المحور الحامل للذرتين و المار بمركز الثقل حيث أن  $\Delta E = \frac{h^2}{I}$  و أن  $\theta_R = \frac{\Delta E}{k_B} = 10 K$ . و منه فإن درجة الحرارة قابلة للقياس و لأيجاد دور السعة الحرارية الدورانية نقوم بقياس  $Z_r$ .

م

$$Z_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{-\frac{h^2}{2I} \frac{\ell(\ell+1)}{k_B T}}$$

$$\theta_r = \frac{h^2}{2Ik_B} \text{ بوضع أن}$$

$$Z_r = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{-\frac{\theta_r}{T} \ell(\ell+1)}$$

$$Z_r = e^{\frac{\theta_r}{4T}} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{-\frac{\theta_r}{4T} (2\ell+1)^2} = e^{\frac{\theta_r}{4T}} S$$

بحيث أن  $S = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) e^{-\frac{\theta_r}{4T} (2\ell+1)^2}$  و بوضع أن  $\alpha = \theta_r/4$  نستطيع كتابة  $S$  بالعبارة التالية  $S = 2 \sum_{\ell=0}^{\infty} (\ell+1) e^{-\alpha (2\ell+1)^2}$

$e^{-\alpha(\ell+1/2)^2}$  و باستخدام تكامل سلسلة  $Euler - MacLaurin$  التي تعطى بالمعادلة التالية

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(x_0 + n) = \int_{x_0}^{\infty} f(x) dx + 1/2 f(x_0) + \sum_{p=1}^m (-1)^p \frac{B_p}{(2p)!} f^{(2p-1)}(x_0)$$

حيث أن  $B_p$  هم أعداد  $Bernoulli$  و هم  $B_1 = 1/6$  ,  $B_2 = 1/30$  ,  $B_3 = 1/42$  و أن أيضا  $x_0 = 1/2$  و  $f(x) = xe^{-\alpha x^2}$  . الحد الاول من تكامل سلسلة  $Euler - MacLaurin$  يساوي

$$\int_{1/2}^{\infty} f(x) dx = \int_{1/2}^{\infty} xe^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha/4}$$

الحد الثاني من تكامل سلسلة  $Euler - MacLaurin$  يساوي  $1/2 f(x_0) = \frac{1}{4} e^{-\alpha/4}$  الحد الثالث من تكامل سلسلة  $Euler - MacLaurin$  نجزئه إلى جزئين :

الجزء الاول و يساوي  $\frac{B_1}{2} f'(x_0) = \frac{-1}{12} e^{-\alpha/4} (1 - \alpha/2)$  الجزء الثاني يساوي  $\frac{B_2}{24} f''(x_0) = \frac{-e^{-\alpha/4}}{120} + O(\alpha^2)$  . بجمع جميع الحدود والإكتفاء بالحدود من الدرجة الأولى فقط لـ  $\alpha$  نجد أن

$$Z_r = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{3} + \frac{\alpha}{15} + O(\alpha^2)$$

## XII مجموعة من التمارينات

### التمرين الأول

لدينا  $N$  من الجسيمات المتميزة يراد توزيعها على مستويين للطاقة لهما نفس الإنحلال  $g$  و طاقتيهما  $E_1$  و  $E_2$  و حيث أن  $E_2 > E_1$ ;  $E_2 - E_1 = E$

1. إحسب كل من  $N_1; N_2$  بدلالة درجة الحرارة  $T$  و حدد عبارة الإحتمال الإشغال لكل مستوي.

2. إحسب قيمة  $N_1 - N_2$

3. نعرف درجة الحرارة المميزة بـ  $\theta = \frac{E}{k_B}$  حدد عبارة كل من  $N_1; N_2; N_1 - N_2$  عند درجة الحرارة المنخفضة و المرتفعة

4. أوجد عبارة الطاقة الداخلية  $U$  ثم أرسم المنحنى البياني لـ  $(U, T/\theta)$

5. إحسب السعة الحرارية عند حجم ثابت ثم أرسم المنحنى البياني لـ  $(C_V/R, T/\theta)$

التمرين الثاني

لتالي  $g_1 = g_3 = 1; g_2 = 2$  و نريد توزيع  $N$  جسيم من الجسيمات المتميزة أثبت أن دالة القسمة  $Z =$

$$4 \cosh^2 \frac{\beta E}{2}$$

• إحسب كل من الطاقة الداخلية للجلمة والسعة الحرارية

## المسألة

تحتوي علبة حجمها  $V = L_x L_y L_z$  على عدد  $N$  من جزيئات غاز مثالي ثنائي الذرة ذات تأثير فعل متبادل ضعيف. نريد دراسة الغاز المثالي من وجهة النظر التقليدية ولذلك نستخدم قوانين التحريك التقليدية ونقسم الحركة إلى

(أ) حركة إنسحابية لمركز كتلته له طاقة إنسحابية  $\epsilon_{tr} = \frac{p^2}{2m}$ . إحسب دالة القسمة الإنسحابية  $\mathcal{Z}_{tr}$

(ب) حركة دورانية حول المحور المار بمركز الكتلة التي تتميز بالزاويتين  $\theta; \phi$ . أثبت أن الطاقة الدورانية الموافقة هي مساوية إلى  $\epsilon_{rot} = \frac{1}{2I} (p_\theta^2 + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta})$  حيث  $I$  هو عزم عطالة الجزيء. إحسب دالة القسمة الدورانية  $\mathcal{Z}_{rot}$ .

(ج) حركة إهتزازية بنفس النبض  $\omega$  تمثل بحركة هزاز توافقي ذو بعد واحد. إحسب دالة القسمة الإهتزازية  $\mathcal{Z}_{vib}$ .

• إذا إعتبرنا أن طاقة الجزيء الكلية تعطى بالعلاقة التالية  $\epsilon_{tot} = \epsilon_{tr} + \epsilon_{rot} + \epsilon_{vib}$  فإن دالة التقسيم الكلية للجزيء تعطى بـ  $\mathcal{Z}_{tot} = \mathcal{Z}_{tr} \mathcal{Z}_{rot} \mathcal{Z}_{vib}$  المطلوب حسابها، وإستنتج طاقة الغاز والسعة الحرارية تحت حجم و ضغط ثابتين. ماهي العلاقة التي تربط ضغط الغاز  $P$  بحجمه  $V$ .

• إحسب السعة الحرارية للهواء الذي يتكون كليا من الأوكسجين والنيتروجين.

2. ندرس الان الغاز من وجهة نظر ميكانيك الكم. إن دالة القسمة الإنتقالية تبقى كما في الحالة 1.

(أ) الطاقة الدورانية المكتمة وتقدر بـ  $\epsilon_{rot} = \frac{J^2}{2I}$  حيث أن  $J = 0, 1, 2, \dots$  وأن  $J$  هو العزم الحركي الكلي.

ماهو مقدار انحلال العزم الحركي  $J$ .

(ب) ماهي عبارة دالة القسمة المكتمة للحركة الدورانية للجزيء.

(ج) لا يمكن حساب دالة القسمة الدورانية بدقة، ولكن عندما تكون  $\theta_{rot} \ll T$  هو محقق لجميع الغازات الحقيقية، يمكننا إستخدام سلسلة ماكلوران-ألير التالية

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{2} f(0) - \frac{1}{12} f'(0) + \frac{1}{720} f'''(0) \dots$$

أثبت في هذه الحالة أن

$$\mathcal{Z}_{rot} = \frac{T}{\theta_{rot}} \left[ 1 + \frac{1}{3} \left( \frac{\theta_{rot}}{T} \right) + \frac{1}{15} \left( \frac{\theta_{rot}}{T} \right)^2 + \dots \right]$$

ماهي النهاية التقليدية لـ  $\mathcal{Z}_{rot}$

## النهاية التقليدية للتوزيع الإحصائية

### I مقدمة

يمكننا عند النهاية التقليدية للميكانيك إيجاد نهاية تقليدية للتوزيع القانوني المميزة بإحتمال  $P_i = \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$  حي  $Z$  هي دالة التقسيم التي تحتوي على كل المعلومات للتحريك الحراري للمنظومة و تساوي

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} = \sum_{E_i} g_i e^{-\beta E_i}$$

إن انفصال سويات الطاقة ليس أي معنى في الميكانيك التقليدي و بالتالي القانون السابق للتوزيع القانوني لا يمكن إستعماله على هذا الشكل و يجدر بنا أن نجد تعويضا يمكننا من إستعمال قوانين الميكانيك التقليدي

### II تمثيل الحالات المجهرية في فضاء الأطوار

كما هو معلوم قانون نيوتن يمكن الحصول عليه من قوانين الميكانيكا التحليلي و معادلات لاغرانج

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$

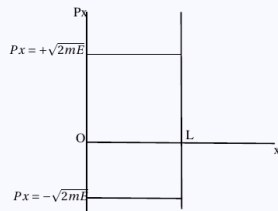
حيث أن  $\mathcal{L} \equiv \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i)$  هي دالة لاغرانج و  $q_i$  هي دالة الإحداثيات المعممة و  $\dot{q}_i$  دالة السرعات المعممة. ويعرف أن  $\mathcal{L}$  على أنه الفرق بين الطاقة الحركية والكامنة و يساوي  $\mathcal{L} = T - V$ .

أما في تمثيل هاملتون يحتفظ بالإحداثيات المعممة  $q_i$  ويعوض بـ  $\dot{q}_i$  بالإندفاعات المعممة  $p_i$  بحيث تصبح أن  $\dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}$  و أن  $p_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$  تعرف دالة هاملتون  $\mathcal{H}$  على أنها دالة في الإحداثيات المعممة  $q_i$  والإندفاعات المعممة  $p_i$  فقط أي  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}(q_i, p_i)$ . بإستعمال الإحداثيات المعممة  $q_i$  و  $p_i$  نستطيع وضع فضاء جديد المسمى بفضاء الأطوار. تتحدد أبعاد فضاء الأطوار بعدد درجات الحرية المتاحة للجسيم ويرمز لهذا الفضاء بفضاء  $\text{Louiville}$  كل مستويات الطاقة  $E \equiv E(q_i, p_i)$  تمثل داخل فضاء الأطوار بعد معرفة دالة الطاقة بدلالة الإحداثيات  $q_i$  و  $p_i$ . كما هو معلوم تسمح الميكانيك التقليدي للإحداثيات  $q_i$  و  $p_i$  بأن تأخذ كل القيم و بصفة مستمرة و أن هذه القيم ليس لها أي نهاية. أما

ميكانيك الكم فتعلن من خلال مبدأ الإرتياب لهيزنبرغ أن قيم  $p_i$  و  $q_i$  تخضع للقانون  $\delta p_i \delta q_i \sim h$ . تنص ميكانيك الكم على أن فضاء ليس أي معنى في ميكانيك الكم لأن إحداثيات فضاء الأطوار  $p_i$  و  $q_i$  تخضع للأرتياب المستمر ولكننا في هذه الحالة يمكننا الاحتفاظ بفضاء الأطوار وذلك بإجراء بعض الإصطلاحات و هي وضع خلايا عنصرية أبعادها الثابت  $h$  وبالتالي أقل قيمة يأخذها  $p_i$  و  $q_i$  هي  $h$  وبالتالي يقسم فضاء الأطوار إلى خلايا أبعادها  $h$ . إذا كان للجسيم درجات حرية مقدارها  $\alpha$  فأصغر خلية حجمها هو:  $h^\alpha$  إذا كان هناك  $N$  جسيم فأصغر خلية في هذه الحالة يقدر حجمها بـ  $h^{\alpha N}$  و يمكننا تعيين كثافة الحالات و ذلك بحساب عدد خلايا المحصورة في المجال  $E$  و  $E + \delta E$  و هي تساوى

$$g(E)dE = \frac{1}{h^\alpha} d\Gamma(E)$$

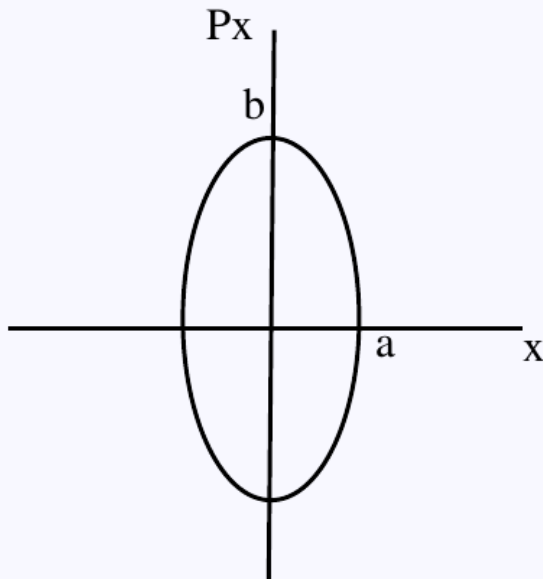
### جسيم حر



جسيم كتلته  $m$  وحر و يتحرك وفق محور  $Ox$ . طاقة الجسيم هي  $E = \frac{p_x^2}{2m}$  إذا تحرك الجسيم داخل علبة بعدها  $L$  فإن  $p_x = \pm \sqrt{2mE}$  و أن الحجم  $\Gamma(E)$  المسموح للجسيم هو

$$\Gamma(E) = 2L\sqrt{2mE} \Rightarrow g(E) = \frac{L}{h} \sqrt{2mE}^{-1/2}$$

### هزاز توافقي



لنأخذ هزاز توافقي ذي بعد واحد التي تعطى طاقته بـ

$$E = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{p_x^2}{2mE} + \frac{x^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} = 1$$

ومنه لدينا بالمقارنة مع معادلة قطع ناقص نجد أن  $a = \sqrt{2mE}$  و  $b = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ , إذن مستويات الطاقة هي عبارة على قطع ناقص و الحجم في فضاء الأطوار هو

$$\Gamma(E) = \pi ab \quad \text{و بالتعويض نجد أن} \quad g(E) = \frac{1}{h\omega}$$

### هزاز توافقي ذي بعدين الطريقة الأولى

طاقة الهزاز التوافقي ذي بعدين تساوي  $E = (n_x + 1/2)\hbar\omega_x + (n_y + 1/2)\hbar\omega_y$  بحيث دالة القسم تساوي

$$Z = \sum_{n_x=0}^{\infty} \sum_{n_y=0}^{\infty} e^{-\beta((n_x+1/2)\hbar\omega_x + (n_y+1/2)\hbar\omega_y)} = \sum_{n_x=0}^{\infty} e^{-\beta(n_x+1/2)\hbar\omega_x} \sum_{n_y=0}^{\infty} e^{-\beta(n_y+1/2)\hbar\omega_y}$$

$$Z = \frac{1}{4 \sinh(\beta\hbar\omega_x/2) \sinh(\beta\hbar\omega_y/2)}$$

و بوضع أن  $\omega_x = \omega_y$  نجد أن

$$Z = \frac{1}{4 \sinh^2(\beta\hbar\omega/2)}$$

### هزاز توافقي ذي بعدين الطريقة الثانية

تعتمد هذه الطريقة على انحلال مستويات الطاقة و تكتب دالة القسم في هذه الحالة كما يلي  $Z = \sum_{E_i} g_i e^{-\beta E_i}$  في حالة  $\omega_x = \omega_y$

$$E = (n_x + n_y + 1)\hbar\omega \quad // \quad n_x + n_y = n \quad // \quad E = (n + 1)\hbar\omega$$

سنقوم بحساب قيمة  $g_n$  وذلك بإستخدام القيمة الجدول التالي : و بتعميم العلاقة نحصل على  $g_n = n + 1$  و تصبح دالة

| $g_n$ | عدد الطرق | $n_y$ | $n_x$ | $n$ |
|-------|-----------|-------|-------|-----|
| 1     | 1         | 0     | 0     | 0   |
| 2     | 2         | 1     | 0     | 1   |
|       |           | 0     | 1     |     |
| 3     | 3         | 0     | 2     | 2   |
|       |           | 2     | 0     |     |
|       |           | 1     | 1     |     |
| 4     | 4         | 0     | 3     | 3   |
|       |           | 3     | 0     |     |
|       |           | 1     | 2     |     |
|       |           | 2     | 1     |     |

القسم كما يلي

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} g_n e^{-\beta E_n} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) e^{-\beta\hbar\omega(n+1)}$$

و بوضع أن  $x = e^{-\beta\hbar\omega}$

$$Z(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n = x \frac{d}{dx} \left( \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} \right) = \frac{x}{1-x^2}$$

بالتعويض بـ  $x$  بما يساويها نجد أن دالة القسمة  $Z$  بالنسبة لهزاز توافقي ذي بعدين هو

$$Z = \frac{1}{4 \sinh^2(\beta \hbar \omega / 2)}$$

### III دالة التقسيم عند النهاية التقليدية

إن دالة التقسيم  $Z = \sum_i$  عند النهاية التقليدية هو  $Z = \frac{1}{h^\alpha} \int e^{-\beta E(q_1, q_2, \dots, p_1, p_2, \dots)} dq_1 dq_2 \dots dp_1 dp_2 \dots$  بحيث أن  $d\Gamma = dq_1 dq_2 \dots dp_1 dp_2 \dots$  الحجم داخل فضاء الأطوار المحصور بين مستوى الطاقة  $E$  و  $E + dE$ . أما دالة التقسيم  $Z = \sum_{E_i} g_i e^{-\beta E_i}$  تنتهي عند النهاية التقليدية إلى  $Z = \int_{E_i} g(E) e^{-\beta E} dE$ .

#### دالة التقسيم التقليدية للهزاز التوافقي

تعطى طاقة الهزاز التوافقي ذي بعد واحد بما يلي

$$E = \frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

الطريقة الأولى: هي إعتبار أن  $E$  دالة في المتغيرات في  $x$  و  $P_x$  وهي في هذه الحالة دالة التقسيم

$$Z = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta(\frac{P_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2})} dx dP_x$$

$$Z = \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{P_x^2}{2m}} dP_x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \frac{m\omega^2 x^2}{2}} dx$$

الطريقة الثانية: تعتمد هذه الطريقة على كثافة الحالات : نحن نعلم أن كثافة الحالات للهزاز التوافقي ذو بعد واحد هي  $\frac{1}{\hbar \omega}$  وتكتب دالة القسمة كما يلي

$$Z = \int_0^{\infty} g(E) e^{-\beta E} dE = \frac{1}{\hbar \omega} \int_0^{\infty} e^{-\beta E} dE$$

و منه نجد أن دالة القسمة هي  $Z = \frac{kT}{\hbar \omega}$

ملاحظة من المجموعة القانونية لدينا أن عدد الجسيمات الموجودة في المستوى  $E_i$  تعطى بالمعادلة التالية

$$n_i = N \mathcal{P}_i = N g_i \frac{e^{-\beta E_i}}{Z}$$

أما في النهاية التقليدية فعدد الجسيمات فعدد الجسيمات التي لديها طاقة محصورة بين  $E, E + dE$  فتعطي بالعلاقة التالية

$$dn(E) = \frac{Ng(E)e^{-\beta E}dE}{Z};; Z = \int_0^\infty g(E)e^{-\beta E}dE$$

#### IV دالة القسمة لجزئ موجود داخل علبة حجمة

الطريقة الأولى إذا كانت طاقة الجزئ هي  $E = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$  إذن فدالة القسمة تكتب كما يلي

$$Z = \frac{1}{h^3} \int \int \int \int \int \int e^{-\beta E} dx dy dz dp_x dp_y dp_z$$

$$Z = \frac{1}{h^3} \int_0^{L_x} dx \int_0^{L_y} dy \int_0^{L_z} dz \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\beta}{2m} p_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\beta}{2m} p_y^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\beta}{2m} p_z^2}$$

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2}$$

الطريقة الثانية يمكننا أيضا حساب دالة القسمة من التعريف التالي  $Z = \int_0^\infty g(E)e^{-\beta E}dE$  حيث أن  $g(E) = \frac{1}{h^3} \frac{d\Gamma(E)}{dE}$  حيث أن  $\Gamma(E) = \frac{4}{3}\pi(2mE)^{3/2}V$

$$g(E) = \frac{1}{h^3} \frac{d\Gamma(E)}{dE} = \frac{V}{h^3} 2\pi(2m)^{3/2} E^{1/2}$$

و بالتالي تكتب دالة القسمة كما يلي

$$Z = \frac{2\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^\infty E^{1/2} e^{-\beta E} dE$$

باستخدام تبديل المتغير أن  $x = \beta E$

$$Z = \frac{2\pi V}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^\infty x^{3/2-1} e^{-x} dx = \frac{2\pi V}{h^3} \left(\frac{2m}{\beta}\right)^{3/2} I$$

حيث  $I$  هو تكامل الدالة  $\Gamma$  الذي يعطى بالمعادلة التالية  $\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx$  و أن  $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$  و أن  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$  بالتعويض نجد أن

$$Z = \frac{V}{h^3} (2\pi mkT)^{3/2}$$

## VI

### المنظومات ذات الجسيمات المتشابهة

لنعتبر منظومة تتكون من  $N$  جسيم متشابهة و متمايزة و أن كل جسيم يملك مستويات طاقة  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \dots$  و ذات إنحلال  $g_1, g_2, g_3, \dots$  إذا كانت لدينا أن

إذا كانت لدينا  $n_1$  جسيم في المستوى  $\epsilon_1$  ذو إنحلال  $g_1$   
 إذا كانت لدينا  $n_2$  جسيم في المستوى  $\epsilon_2$  ذو إنحلال  $g_2$

إذا كانت لدينا  $n_i$  جسيم في المستوى  $\epsilon_i$  ذو إنحلال  $g_i$

#### I توزيع ماكسوال بولتزمان

إن الجسيمات المتشابهة و المتمايزة تخضع لإحصاء ماكسوال-بولتزمان و ينص على أنه إذا كان لدينا جسيمين  $A$  و  $B$  فإذا كان  $A$  في الحالة الكمية  $I$  و  $B$  في الحالة الكمية  $II$  (حالة مجهرية) فإننا نحصل على حالة مجهرية ثانية بأخذ أن  $B$  في الحالة  $I$  و  $A$  في الحالة  $II$ .

إذا كان لدينا  $n_1$  جسيم من  $N$  جسيم فإن عدد الطرق هو  $C_{n_1}^N$ . إذا كان لدينا  $n_2$  جسيم من  $N - n_1$  جسيم فإن عدد الطرق هو  $C_{n_2}^{N-n_1}$ .

إذا كان لدينا  $n_i$  جسيم من  $N - n_1 - n_2 - n_3 - \dots - n_{i-1}$  جسيم فإن عدد الطرق هو  $C_{n_i}^{N-n_1-n_2-n_3-\dots-n_{i-1}}$ .  
 . فإن عدد الطرق لتوزيع الجسيمات لكل المستويات الطاقوية

$$\begin{aligned} & C_{n_1}^N C_{n_2}^{N-n_1} C_{n_3}^{N-n_1-n_2} \dots C_{n_i}^{N-n_1-n_2-\dots-n_{i-1}} \dots \\ &= \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!} \frac{(N-n_1)!}{n_2!(N-n_1-n_2)!} \dots \frac{(N-n_1-n_2-\dots-n_{i-1})!}{n_i!(N-n_1-\dots-n_i)!} \dots \\ & \quad \frac{N!}{n_1!n_2!\dots n_i!\dots} = \Pi_i \frac{N!}{n_i!} \end{aligned}$$

إذا أخذنا بعين الاعتبار إنحلال مستويات الطاقة بحيث أن للمستوى  $\epsilon_1$  له عدد الحالات الممكنة  $g_1$  أو عدد الخانات  $g_1$  . الجسم رقم 1 من  $n_1$  جسم له  $g_1$  طريقة لكي يحتل الخانات. الجسم رقم 2 من  $n_1$  جسم له  $g_1$  طريقة لكي يحتل الخانات. وهكذا حتى نصل إلى العدد الكلي لـ  $n_1$  جسم لـ  $g_1$  حالة هو  $g_1 g_1 g_1 \dots = g_1^{n_1}$  .

بالنسبة للمستوى  $\epsilon_i$  ذو الإنحلال  $g_i$  فإن عدد الطرق لتوزيع  $n_i$  جسم من  $g_i$  حالة هو بالطبع  $g_i^{n_i}$  بحيث يصبح عدد الحالات الممكنة هو  $\Omega_i = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_i! \dots} g_1^{n_1} g_2^{n_2} \dots$

$$\Omega_i = N! \prod_i \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}$$

توزيع جسمين A و B على ثلاث حالات كمية

|   |                                                  |
|---|--------------------------------------------------|
| 1 | $\frac{A}{ } \quad \frac{B}{ } \quad \frac{}{ }$ |
| 2 | $\frac{B}{ } \quad \frac{A}{ } \quad \frac{}{ }$ |
| 3 | $\frac{}{ } \quad \frac{A}{ } \quad \frac{B}{ }$ |
| 4 | $\frac{}{ } \quad \frac{B}{ } \quad \frac{A}{ }$ |
| 5 | $\frac{B}{ } \quad \frac{}{ } \quad \frac{A}{ }$ |
| 6 | $\frac{A}{ } \quad \frac{}{ } \quad \frac{B}{ }$ |
| 7 | $\frac{AB}{ } \quad \frac{}{ } \quad \frac{}{ }$ |
| 8 | $\frac{}{ } \quad \frac{AB}{ } \quad \frac{}{ }$ |
| 9 | $\frac{}{ } \quad \frac{}{ } \quad \frac{AB}{ }$ |

## II الإحصاء الكمي لـ فيرمي ديراك و بوز أنشتاين

البوزونات تخضع لتوزيع بوز أنشتاين و الفرميونات تخضع و ينص على أن كل حالة كمية لا يمكن أن تحتل إلا بجسيم لتوزيع فيرمي ديراك. إن هذا الإحصاء ينص على أنه عند واحد فقط أولاً. أما البوزونات فإن كل حالة كمية يمكن تبديل أمكنة الجسيمات لا يعطى حالة مجهرية جديدة. و أن يحتلها أي عدد من الجسيمات. بالإضافة إلى هذا فإن الفرميونات تخضع لمبدأ الإلتقاء لباولي

| S   | Fermions    | S | Bosons          |
|-----|-------------|---|-----------------|
| 1/2 | Electron    | 1 | Photon          |
| 1/2 | Proton      | 1 | Phonon          |
| 1/2 | Neutron     | 0 | <sup>4</sup> He |
| 1/2 | Neutrinos   | 0 | $\pi$ Meson     |
| 1/2 | $\mu$ Meson |   |                 |

### III توزيع بوز أنشتاين

إذا كان لدينا  $N$  جسيم غير متمايز على مستويات الطاقة  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_i, \dots$  ذات انحلال  $g_1, g_2, \dots, g_i, \dots$  على الترتيب  $\epsilon_i$  ، بما أن الجسيمات غير متميزة فإن التوزيع يتم سوى على الانحلال فقط. عدد الحالات  $\Omega_i$  لتوزيع  $n_i$  جسيم داخل  $\epsilon_i$  هو عدد الحالات  $\Omega_i$  لتوزيع  $n_i$  جسيم داخل  $g_i$  حالة أو غرفة هو نفسه عدد التباديلات لـ  $n_i$  جسيم مع  $g_i - 1$  وبالتالي فإن عدد التوزيعات الكلية هي  $(n_i + g_i - 1)!$ . بما أن  $n_i$  متشابهة فيما بينها وأن  $g_i - 1$  جدار متشابهة فيما بينها وأيضا من أجل تفادي التكرار فإن عدد الحالات الممكنة هي

$$\Omega_{BE} = \frac{(n_i + g_i - 1)!}{(g_i - 1)!(n_i)!}$$

### IV توزيع فيرمي ديراك

فأنه يكون لدينا للجسيم الاول  $g_i$  مكان و للجسم الثاني  $(g_i - 1)$  مكان .... فإذا كان لدينا  $N_i$  من الجسيمات للمستوى  $\epsilon$  فإن

$$g_i(g_i - 1)(g_i - 2) \dots (g_i - (n_i - 1)) = \frac{g_i!}{(g_i - n_i)!}$$

ولتفادي تكرار التوزيعات المتماثلة إذن نلتزم بقسمة على  $n_i!$  و منه نجد أن  $\Omega_i = \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$  و منه فجميع المستويات  $i$  نجد أن عدد الحالات الممكنة لتوزيع  $Fermi - Dirac$  هو

$$\Omega_{FD} = \prod_i \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!}$$

## VII

# الإحصاء المكم Statistiques Quantiques

لتحديد التوزيعات المكممة تعتبر منظومة مكونة من جسيمات متشابهة و غير متميزة (الفيرميونات و البوزونات) .  
 الفيرميونات هي الجسيمات التي تخضع لتوزيع لقيد و هو مبدأ الإستبعاد لبولي (Pauli) و ينص على أنه لا يمكن أن يكون  
 في حالة معينة  $i$  أكثر من فيرميون واحد.  $\epsilon_i \rightarrow n_i = 0; 1$   
 أما البوزونات فإنها لا تخضع لأي قيد معين و بالتالي في حالة معينة  $i$  يمكننا أن نضع ما نشاء من البوزونات أو بعبارة  
 أخرى الحالة  $i$  فإن  $\epsilon_i \rightarrow n_i = 0; 1; 2; 3; \dots$

إذا كان عدد الجسيمات في المستوى 1 هو  $n_1$   
 إذا كان عدد الجسيمات في المستوى 2 هو  $n_2$   
 إذا كان عدد الجسيمات في المستوى  $i$  هو  $n_i$   
 مع الشرط أن  $N = \sum_i = n_1 + n_2 + \dots + n_i + \dots$

طاقة الجسيمات في المستوى 1 هي  $E_1 = n_1 \epsilon_1$   
 طاقة الجسيمات في المستوى 2 هي  $E_2 = n_2 \epsilon_2$   
 وهكذا .....  
 طاقة الجسيمات في المستوى  $i$  هي  $E_i = n_i \epsilon_i$   
 فإن دالة القسمة الكلية هي

$$Z = \sum_1 e^{-\beta E_1} \sum_2 e^{-\beta E_2} \sum_3 e^{-\beta E_3} \dots \sum_i e^{-\beta E_i} \dots$$

$$Z = \sum_{n_i} e^{-\beta n_i \epsilon_i} [\sum_{n_1} e^{-\beta n_1 \epsilon_1} \sum_{n_2} e^{-\beta n_2 \epsilon_2} \dots]$$

$$Z = \sum_{n_i} e^{-\beta n_i \epsilon_i} Z^i$$

حيث أن  $Z^i$  هي دالة القسمة بالنسبة لكل الحالات التي حذفت منها الحالة  $i$ .

## I دراسة حالة الفيرميونات

$$Z = \left( \sum_{n_i=0}^1 e^{-\beta n_i \epsilon_i} \right) Z^i$$

$$Z = Z^i(N) + e^{-\beta \epsilon_i} Z^i(N-1) = Z^i(N) \left[ 1 + e^{-\beta \epsilon_i} \frac{Z^i(N-1)}{Z^i(N)} \right]$$

$$\Rightarrow \ln Z = \ln Z^i(N) + \ln \left[ 1 + e^{-\beta \epsilon_i} \frac{Z^i(N-1)}{Z^i(N)} \right]$$

يعطى متوسط عدد الفيرميونات  $\bar{n}_i$  في الحالة  $i$  ذات الطاقة  $\epsilon_i$  هي  $\bar{n}_i = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_i}$  بالتعويض بدالة القسمة  $Z$  نجد أن

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_i} \frac{Z^i(N)}{Z^i(N-1)} + 1}$$

نقوم بحساب المقدار  $\frac{Z^i(N)}{Z^i(N-1)}$

نحلل وفق سلسلة تايلور المقدار  $\ln Z^i(N - \Delta N)$  بحيث أن  $\Delta N < N$

$$\ln Z^i(N - \Delta N) \approx \ln Z^i(N) - \Delta N \frac{\partial \ln Z^i}{\partial N} + \dots$$

نضع أن  $\alpha = \frac{\partial \ln Z^i}{\partial N}$  حيث أن  $\alpha$  غير متعلق بالحالة  $i$ . إذن لدينا أن

$$\ln \frac{Z^i(N - \Delta N)}{Z^i(N)} = -\alpha \Delta N \Rightarrow \ln \frac{Z^i(N)}{Z^i(N - \Delta N)} = \alpha \Delta N$$

بوضع أن  $\Delta N = 1$  فإننا نجد أن  $\frac{Z^i(N)}{Z^i(N-1)} = e^\alpha$  بالتعويض في معادلة متوسط عدد الفيرميونات

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_i + \alpha} + 1}$$

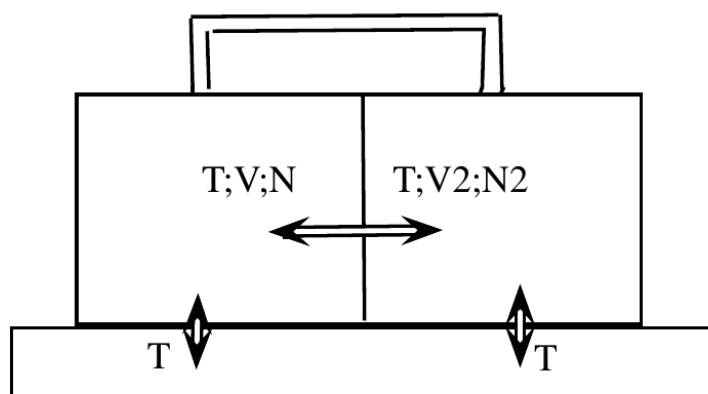
لتعيين قيمة الوسيط  $\alpha$  نقوم بحساب الطاقة الحرة  $F$  و المعطاة بالمعادلة التالية  $F = -kT \ln Z$

$$\alpha = -\frac{1}{kT} \frac{\partial F}{\partial N} = \frac{-\mu}{kT} = -\beta \mu$$

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}$$

حيث أن  $\mu$  هو الجهد الكيميائي.

## II الجهد الكيميائي



نأخذ جملة تتبادل الطاقة و عدد الجزيئات أو الجزيئات يستطيع الانتقال عن طريق الإنتشار عبر المنظومتين يصبحان متزنتين عندما يتعدم تدفق الكون الكيميائي أو الجهد الكيميائي هو الذي تدفق الجزيئات نفس الشيء مثل درجة الحرارة في الطاقة. إذا كان لدينا العديد من الجسيمات الكون الكيميائي يساوي  $\mu_i = \left( \frac{\partial F}{\partial N_i} \right)_{T, V, N_j}$

## III توزيع بوز أنشتاين

من التعريف الأولى لتوزيع بوز أنشتاين  $n_i = 0; 1; 2; 3; \dots; N$  فإن دالة القسمة  $Z$  تكتب كما يلي

$$Z = \left( \sum_{n_i=0}^N e^{-\beta n_i \epsilon_i} \right) Z^i$$

$$Z = Z^i(N) + e^{-\beta \epsilon_i} Z^i(N-1) + e^{-2\beta \epsilon_i} Z^i(N-2) + \dots$$

$$Z = Z^i(N) \left[ 1 + e^{-\beta \epsilon_i} \frac{Z^i(N-1)}{Z^i(N)} + e^{-2\beta \epsilon_i} \frac{Z^i(N-2)}{Z^i(N)} + \dots \right]$$

$$\frac{Z^i(N-1)}{Z^i(N)} = e^{-\alpha} \text{ نعلم أن}$$

$$Z = Z^i(N) \left[ 1 + e^{-(\beta \epsilon_i + \alpha)} + e^{-2(\beta \epsilon_i + \alpha)} + \dots \right]$$

$$Z = Z^i(N) \left[ \frac{1}{1 - e^{-(\beta \epsilon_i + \alpha)}} \right]$$

بإستخدام القيمة المتوسطة لعدد الجزيئات  $\bar{n}_i = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_i}$  نجد أن

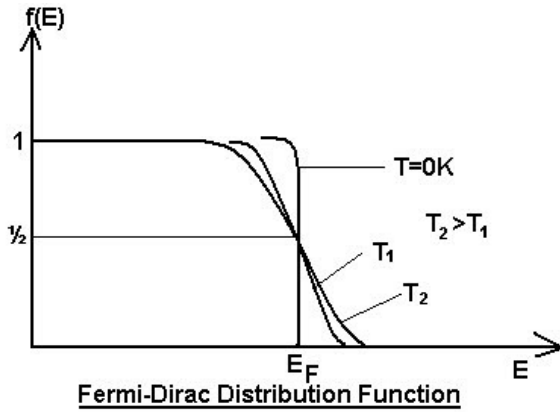
$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} - 1}$$

حيث أن  $\alpha = -\beta \mu$

## IV خواص توزيع فيرمي ديراك

لدينا أن  $f(\epsilon) = n_i = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + 1}$  عندما تكون  $T = 0$  نلاحظ مايلي :

$$\left\{ \begin{array}{l} T \rightarrow 0 \quad \epsilon > \mu \Rightarrow e^{\frac{(\epsilon - \mu)}{kT}} \rightarrow \infty \Rightarrow f(\epsilon) = 0 \\ T \rightarrow 0 \quad \epsilon < \mu \Rightarrow e^{\frac{(\epsilon - \mu)}{kT}} \rightarrow 0 \Rightarrow f(\epsilon) = 1 \\ T \rightarrow 0 \quad \epsilon = \mu \Rightarrow e^{\frac{(\epsilon - \mu)}{kT}} \rightarrow 1 \Rightarrow f(\epsilon) = 1/2 \end{array} \right\}$$



إذا وضعنا أن  $\mu_0 = \epsilon_F$  يسمى بجهد فيرمي أو مستوى فيرمي و هذا معناه أن كل الفيرميونات التي لها طاقة لا تتعدى القيمة القصوى  $\mu_0 = \epsilon_F$  عند  $T = 0K$  و الذي يسمى مستوى فيرمي.

## V خلاصة التوزيعات الكلاسيكية و الكمية

لدينا أن من توزيع ماكسوال بولتزمان أن متوسط عدد الجزيئات هو  $\bar{n}_i = \frac{Ng_i e^{-\beta\epsilon_i}}{\sum g_i e^{-\beta\epsilon_i}}$  و أن من توزيع فيرمي ديراك و بوز أنشتاين هي  $\bar{n}_i = \frac{g_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + \sigma}$  حيث أن

$$\sigma = \begin{array}{ll} +1 & \text{Fermi - Dirac} \\ -1 & \text{Bose - Einstein} \end{array}$$

لدينا أن عدد الذرات الكلي  $N$  و الذي يساوي  $N = \sum \bar{n}_i$  و الذي يساوي  $N = \sum_i \frac{g_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + \sigma}$  و أن الطاقة  $E$  هي تساوي  $\sum \bar{n}_i \epsilon_i$

$$E = \sum \frac{g_i}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + \sigma} \epsilon_i$$

إذا كان لدينا أن  $n_i \ll g_i$  ( عدد الجسيمات  $n_i$  أصغر بكثير من الأماكن المتوفرة ).

$$\frac{n_i}{g_i} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} + \sigma} \ll 1 \Rightarrow e^{\beta(\epsilon_i - \mu)} \gg 1$$

و بالتالي يصبح لدينا أن متوسط عدد الجزيئات يساوي

$$n_i \approx g_i e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} \Rightarrow N = \sum n_i = \sum_i g_i e^{-\beta(\epsilon_i - \mu)} = e^{\beta\mu} \sum_i g_i e^{-\beta\epsilon_i} \Rightarrow e^{\beta\mu} = \frac{N}{\sum_i g_i e^{-\beta\epsilon_i}}$$

ومنه نجد أن

$$n_i = \frac{Ng_i e^{-\beta \epsilon_i}}{\sum g_i e^{-\beta \epsilon_i}}$$

وهذا معناه أن الغاز الكمي يصبح كلاسيكيا عندما تكون درجة الإنحلال أكبر بكثير من عدد الجسيمات.

## VIII

### دراسة غاز من الفيرميونات

نقول عن غاز أنه غاز فيرمي إذا كان إذا كان منحلا أي أن  $E_F \gg kT$  أما إذا كان الغاز ليس له توالد أو انحلال فإن  $E_F \ll kT$  وبالتالي نصبح في حالة الغاز التقليدي أو الكلاسيكي. و من بين تطبيقات غاز فيرمي المنحل هي : الإلكترونات في المعادن, خواص الهيليوم السائل  $He^3$ , المادة النووية.

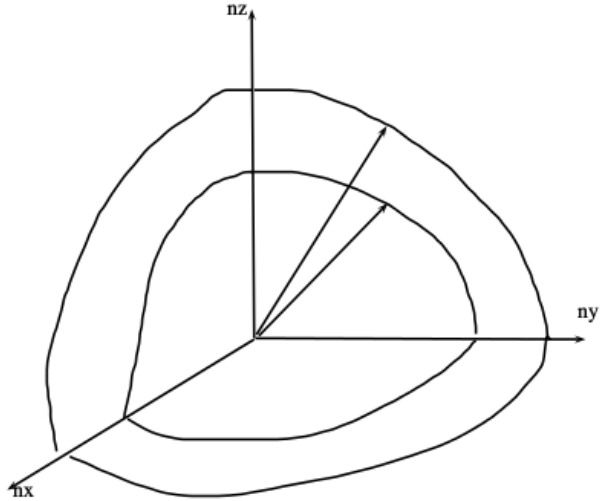
#### I طاقة فيرمي

إذا أخذنا  $N$  فيرميون ذات سبين  $s = 1/2$  بدون تفاعل مع بعضه البعض داخل كمن عرضه  $a$  بحيث أن  $E_{n_x} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n_x^2 = \epsilon n_x^2$  إذا أخذنا الحالة العامة هي  $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$  بحيث أن  $E_F = \frac{\hbar^2}{2m} (\frac{\pi n_F}{a})^2$  و أن  $n_F^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$  و  $n_F$  هو نصف قطر الكرة الفاصلة بين الحالات الفارغة والمملوءة . إذن فإن عدد الفيرميونات في حالة  $(m_s = 1/2)$

$$N = (2s + 1) \frac{1}{8} \frac{4}{3} \pi n_F^3 \Rightarrow n_F = \left( \frac{3N}{\pi} \right)^{1/3}$$

$$E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{V^{2/3}} \left( \frac{3N}{\pi} \right)^{2/3}$$

$$E_F = kT_F = \frac{\hbar^2}{2m} (3n\pi^2)^{2/3}$$



## II الطاقة الاساسية والكمون الكيميائي عند صفر كيلفن

لدينا أن طاقة كل فيرميون تعطى بالمعادلة التالية وهي  $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m}$  و أن كثافة الحالات تعطى بـ  $g(\epsilon) = \frac{1}{h^3} \frac{d\Gamma(\epsilon)}{d\epsilon}$  نجد أن

$$g(\epsilon) = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} E^{1/2}$$

و أن  $f(\epsilon) = 1$  عند  $T = 0K$  فعد  $N = \int_0^{\mu_0} g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$

$$N = \int_0^{\mu_0} g(\epsilon) d\epsilon = \frac{8\pi}{3} V (2m)^{3/2} \mu_0^{3/2}$$

$$\Rightarrow \mu_0 = \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \frac{h^2}{2m}$$

تعطى معادلة الطاقة الأساسية بالمعادلة التالية :  $\epsilon_0 = \int_0^{\mu_0} \epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$  بالتعويض بقيمة  $g(\epsilon)$  نجد أن

$$\epsilon_0 = \frac{4\pi V}{h^3} (2m)^{3/2} \int_0^{\mu_0} \epsilon^{3/2} d\epsilon$$

$$\epsilon_0 = \frac{3}{5} N \mu_0$$

## III تعيين الكمون الكيميائي عند درجة حرارة غير معدومة

نعرف أن كل من عدد الفيرميونات  $N$  و الطاقة الكلية  $E$  تساوي أن على الترتيب هي

$$N = \int_0^\infty f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon; E = \int_0^\infty f(\epsilon) \epsilon g(\epsilon) d\epsilon$$

في كلتا الحالتين لدينا أن  $\int_0^\infty f(\epsilon) \phi(\epsilon) d\epsilon$  بحيث أن في حالة  $N$  يكون لدينا أن  $\phi(\epsilon) = g(\epsilon)$  و في حالة  $E$  يصبح لدينا أن  $\phi(\epsilon) = \epsilon g(\epsilon)$ . بوضع أن  $I = \int_0^\infty f(\epsilon) \phi(\epsilon) d\epsilon$

نعتبر أن  $\Phi(\epsilon)$  هي دالة أصلية للدالة  $\varphi(\epsilon)$ . بالتعويض نجد أن

$$I = f(\epsilon)\Phi(\epsilon)|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \Phi(\epsilon) d\epsilon$$

$$J = \int_0^\infty \frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon} \Phi(\epsilon) d\epsilon$$

وبأخذ أن النشر المحدود للدالة  $\Phi(\epsilon)$  بجوار  $\mu = \epsilon$  نجد أن

$$\Phi(\epsilon) = \Phi(\mu) + (\epsilon - \mu)\Phi'(\mu) + 1/2(\epsilon - \mu)^2\Phi''(\mu) + \dots$$

بالتعويض داخل التكامل  $J$  نجد المعادلة التالية

$$J = \Phi(\mu) \int_0^\infty \left(-\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right) d\epsilon + \Phi'(\mu) \int_0^\infty (\epsilon - \mu) \left(-\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right) d\epsilon + \frac{\Phi''}{2} \int_0^\infty (\epsilon - \mu)^2 \left(-\frac{\partial f(\epsilon)}{\partial \epsilon}\right) d\epsilon + \dots$$

$$J = \frac{1}{kT} \int_0^\infty \frac{1}{\left(e^{\frac{\epsilon-\mu}{kT}} + 1\right)\left(e^{-\frac{\epsilon-\mu}{kT}} + 1\right)} \left[\Phi(\mu) + (\epsilon - \mu)\Phi'(\mu) + \dots\right] d\epsilon$$

$$J = \frac{1}{kT} \sum \frac{1}{n!} \Phi^n(\mu) \int_0^\infty \frac{(\epsilon - \mu)^n d\epsilon}{\left(e^{\frac{\epsilon-\mu}{kT}} + 1\right)\left(e^{-\frac{\epsilon-\mu}{kT}} + 1\right)}$$

$$x = \frac{\epsilon - \mu}{kT} \text{ بوضع أن}$$

$$J = \sum \frac{(kT)^n}{n!} \Phi^n(\mu) \int_0^\infty \frac{x^n dx}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)}$$

$$K = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} \text{ نضع أن نحصل على التكامل التالي}$$

$$K = \int_0^\infty \frac{x^n dx}{(e^x + 1)(e^{-x} + 1)} = \int_0^\infty \frac{x^n e^x dx}{(e^x + 1)^2} = - \int_0^\infty x^n \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{e^x + 1}\right) dx = n \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x + 1} dx$$

$$= n \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \int_0^\infty x^{n-1} e^{-(k+1)x} dx = n! \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{(k+1)^n}$$

بوضع أن  $\ell = k + 1$  نحصل على التكامل التالي  $K = n! \sum_{\ell=1}^\infty \frac{(-1)^{(\ell-1)}}{\ell^n}$  نقسم هذا المجموع إلى مجموع للأعداد الفردية والآخر للأعداد الزوجية.

$$K = n! \left( \sum_{\ell=impair} \frac{1}{\ell^n} - \sum_{\ell=pair} \frac{1}{\ell^n} \right)$$

و من ناحية أخرى لدينا أن  $\sum_1^\infty = (\sum_{impair} + \sum_{pair}) \frac{1}{\ell^n} \Rightarrow \sum_{impair} \frac{1}{\ell^n} = \sum_{\ell=1} \frac{1}{\ell^n} - \sum_{\ell=pair} \frac{1}{\ell^n}$  بالتعويض في معادلة  $K$  نجد أن

$$K = n! \left( \sum_1^\infty \frac{1}{\ell^n} - 2 \sum_{pair} \frac{1}{\ell^n} \right) = n! \left( \sum_1^\infty \frac{1}{\ell^n} - \frac{2}{2^n} \frac{1}{\ell^n} \right)$$

$$K = n!(1 - 2^{1-n}\xi(n))$$

$$\xi(2) = \frac{\pi^2}{6}; \xi(4) = \frac{\pi^4}{90} \text{ و } \xi(n) = \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{1}{\ell^n} \text{ حيث أن } \xi(n) \text{ هي تساوي}$$

## IV حوصلة للعمليات السابقة

$$\text{وجدنا فيما سبق أن عند } T = 0K \quad \mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \text{ و أن } \epsilon^{1/2} g(\epsilon) = 4\pi V \left( \frac{2m}{h^2} \right)^{3/2} \text{ و بالتعويض نجد أن}$$

$$g(\epsilon) = \frac{3}{2} \frac{N\epsilon^{1/2}}{\mu_0^{3/2}}$$

عند  $T \neq 0$  فإن

$$\int_0^{\infty} f(\epsilon) g(\epsilon) d\epsilon = \frac{3}{2} N \mu_0^{-3/2} \int_0^{\infty} \epsilon^{1/2} f(\epsilon) d\epsilon = N$$

$$\Phi(\epsilon) = \int_0^{\epsilon} \epsilon^{1/2} d\epsilon \text{ بالتعويض بقيمة}$$

$$I = \Phi(\mu) + \frac{\pi^2}{6} (kT) \Phi''(\mu) + \dots$$

$$N = \frac{3}{2} N \mu_0^{-3/2} \left[ \frac{2}{3} \mu^{3/2} + \frac{\pi^2}{6} (kT)^2 \frac{1}{2} \frac{1}{\mu^{1/2}} + \dots \right]$$

$$1 = \frac{\mu^{3/2}}{\mu_0^{3/2}} \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 + \frac{7\pi^4}{640} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^4 + \dots \right]$$

$$\mu = \mu_0 \left[ 1 + \frac{\pi^2}{8} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 + \frac{7\pi^4}{640} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^4 + \dots \right]^{-2/3}$$

باستخدام العلاقة التقريبية التالية  $(1+x)^n \approx (1+nx)$  عندما تكون  $x$  صغيرة جدا. نحصل على أن

$$\mu(T) = \mu_0 \left( 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right)$$

## V حساب الطاقة الداخلية U

لدينا أن  $N = \int_0^{\mu_0} g(\epsilon) d\epsilon$  عند  $T = 0K$  و  $N = \int_0^{\infty} g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon$  عند  $T \neq 0K$ . نستطيع إيجاد أن

$$N = \int_0^{\mu} g(\epsilon) d\epsilon + 1/6\pi^2 (kT) \left( \frac{\partial g(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=\mu} + \dots$$

باستخدام المعادلات السابقة نجد أن

$$0 = \int_{\mu_0}^{\mu} g(\epsilon) d\epsilon + 1/6\pi^2 (kT) \left( \frac{\partial g(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=\mu} + \dots$$

عند درجة حرارة  $T \ll T_F$  عند  $\mu = \mu_0$  نجد أن

$$0 = (\mu - \mu_0)g(\mu_0) + 1/6\pi^2(kT) \left( \frac{\partial g(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right) \Big|_{\epsilon=\mu} + \dots (1)$$

$$\mu = \mu_0 - 1/6\pi^2(kT) \left( \frac{\partial g(\mu_0)}{\partial \epsilon} \right) + \dots$$

عبارة الطاقة تكتب كما يلي

$$E = \int_0^\infty \epsilon g(\epsilon) f(\epsilon) d\epsilon = \int_0^\mu \epsilon g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \frac{d}{d\epsilon} \epsilon g(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\mu} + \dots$$

ومن ناحية أخرى نستطيع كتابة الطاقة كما يلي

$$\int_0^\mu \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\mu_0} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon + \int_{\mu_0}^\mu \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\mu_0} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon + (\mu - \mu_0)\mu_0 g(\mu_0)$$

بإستخدام المعادلة (1)

$$\int_0^\mu \epsilon g(\epsilon) d\epsilon = \int_0^{\mu_0} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon - \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \mu_0 \frac{d}{d\epsilon} \epsilon g(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\mu} + \dots$$

$$E = \int_0^{\mu_0} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon - \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \mu_0 \frac{d}{d\epsilon} \epsilon g(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\mu} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \frac{d}{d\epsilon} \epsilon g(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\mu}$$

$$E = \int_0^{\mu_0} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon - \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \mu_0 \frac{d}{d\epsilon} \epsilon g(\epsilon) \Big|_{\epsilon=\mu} + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \left[ \mu_0 \frac{\partial g(\epsilon)}{\partial \epsilon} + g(\mu_0) \right]$$

$$E = \int_0^{\mu_0} \epsilon g(\epsilon) d\epsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 g(\mu_0)$$

السعة الحرارية عند حجم ثابت تعطى بالمعادلة التالية

$$C_v = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_v = \frac{\pi^2}{3} k^2 T g(\mu_0)$$

إذا علمت أن  $g(\mu_0) = \frac{3}{2} \frac{N}{\mu_0}$

$$C_v = \frac{\pi^2}{2} N k \frac{T}{T_F}$$



## VI مسألة شاملة للمجموعة القانونية وإحصاء فيرمي-ديراك

## المسألة

1.

لنأخذ عينة من معدن الصوديوم ذي حجم  $V$  و درجة حرارة  $T$ . كدراسة تقريبية، إلكترونات النقل ذي عدد  $N$ ، نستطيع إعتبارها على أنها جسيمات لا تتفاعل مع بعضها البعض، و ذات طاقة  $\epsilon_i = \frac{p_i^2}{2m}$ . مستويات الطاقة الإنسحابية لجسيم داخل علة ذات شكل متوازي المستطيلات ذي أضلاع  $a, b, c$  و طاقتها تعطى بالمعادلة التالية:

$$\epsilon_i = \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} + \frac{n_3^2}{c^2} \right)$$

حيث أن  $n_1, n_2, n_3$  هي أعداد صحيحة موجية و  $\hbar$  ثابت بلانك. نضع أن مقدار الإنحلال  $g = 1$ . نفرض أن الإلكترونات تخضع لإحصاء ماكسوال بولتزمان.

1. أعطي عبارة  $N_i$  و إحسب دالة القسمة الإنسحابية  $\mathcal{Z}_{tr}$

2. عينة الصوديوم موضوعة داخل حقل مغناطيسي منتظم ذي تحريض  $B$  موجه وفق المحور  $z$ . الإلكترون له عزم مغناطيسي  $\vec{\mu}$  يتناسب طرديا مع سبينه. إسقاط  $\vec{\mu}$  على المحور  $z$  يعطي إلا قيمتين وهما  $+\mu_B$  و  $-\mu_B$ . حيث أن  $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m}$ . بالإضافة إلى طاقته الحركية  $\frac{p_i^2}{2m}$  للإلكترون له طاقة تتفاعل أيضا مع الحقل المغناطيسي المساوي  $\epsilon = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$  و تصبح الطاقة الكلية للإلكترون تساوي  $\epsilon'_i = \frac{p_i^2}{2m} - \mu_B B$  في حالة العزم المغناطيسي موازي للحقل  $B$  و  $\epsilon''_i = \frac{p_i^2}{2m} + \mu_B B$  في حالة العزم المغناطيسي ضد موازي للحقل.

• أكتب عبارة  $N'_i$  و  $N''_i$ ، نستخدم عبارة دالة القسمة  $\mathcal{Z}$  وهي دالة القسمة في حالة وجود المجال المغناطيسي في عبارات  $N'_i$  و  $N''_i$ ، حيث أن  $N = \sum (N'_i + N''_i)$ . أثبت أن  $\mathcal{Z}$  تكتب على شكل جداء بين دالة القسمة الإنسحابية و المغناطيسية  $\mathcal{Z}_m$ .

3. بوضع أن  $x = \frac{\mu_B B}{k_B T}$ ، أوجد عبارة العزم المغناطيسي  $M$  للعينة بدلالة  $N, \mu_B, x$ .

4. نعرف الحساسية المغناطيسية بـ  $\chi = \frac{I}{M}$ ؛ حيث أن  $I = \frac{M}{V}$  و  $H = \frac{B}{\mu_0}$ ؛  $\mu_0$  هو ثابت يساوي  $4\pi \times 10^{-7} SI$ . ماهي  $\chi$  في حالة الحقول المغناطيسية الضعيفة  $x \ll 1$ ؟

5. التجربة أثبتت أن إلكترونات تخضع لإحصاء فيرمي-ديراك و أن عدد الإلكترونات عند التوازن تتبع

$$\beta = \frac{1}{k_B T}, N_i = \frac{g_i}{C \exp(\beta \epsilon_i)}$$

• ماهو الشرط الموضوع على التوزيع لكي يؤول نحو توزيع ماكسوال-بولتزمان إذا تحقق الشرط. أوجد

$$\alpha = \frac{N}{\mathcal{Z}}$$

6. إحسب  $\alpha$ ؛ إذا علمت عند درجة حرارة الغرفة  $n = 2.5 \times 10^{28} m^{-3}$ ،  $\alpha = 4.2 \times 10^{-22} m^3 (deg)^{3/2}$

تابع المسألة

1. نأخذ الصوديوم في غياب الحقل المغناطيسي  $B = 0$ . نضع أن  $C = \exp(-\beta\epsilon_F)$ . ويصبح التوزيع يكتب كل يلي  $f(\epsilon) = \frac{1}{\exp(\beta(\epsilon - \epsilon_F)) + 1}$  عند درجة حرارة الصفر كيلفن.

(أ) أرسم المنحنى البياني لـ  $f(\epsilon)$  عند  $T = 0K$ .

(ب) إحسب  $\epsilon_F$ ; إذا علمت أن  $g_i = 2 \times \frac{2\pi V(2m)^{3/2} \epsilon^{1/2} d\epsilon}{h^3}$

(ج) في حالة وجود مجال مغناطيسي أكتب عبارات  $N'_i, N''_i$  عدد الإلكترونات ذات الطاقة  $\epsilon'_i, \epsilon''_i$ .

مثل بياننا  $N'_i/g_i, N''_i/g_i$  بدلالة كل من  $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$  عند  $T = 0K$ .

(د) عند  $T = 0K$ , إحسب عدد  $N'_i, N''_i$  الإلكترونات التي لها عزوم مغناطيسية متوازية و ضد متوازية لـ  $\vec{B}$ .

(هـ) إحسب العزم المغناطيسي الإلكتروني للصوديوم عند  $T = 0K$ . و بسط عباراتها عند الحقول الضعيفة.

(و) إستنتج عبارة الحساسية المغناطيسية الإلكترونية عند  $T = 0K$  بدلالة كل من  $n = \frac{N}{V}; \mu_0; \mu_B; \epsilon_F$  و قارنها بالنتيجة في السؤال I5.

(ز) من الناحية التجريبية الحساسية المغناطيسية  $\chi$  لا تتعلق بدرجة الحرارة و تساوي  $\chi_{exp} = 7,8 \times 10^{-6}$ . إحسب  $\chi_{theo}$  عند الصفر كيلفن. و قارنها بالتجريبية، إذا علمت أن  $\mu_B = 0,927 \times 10^{-23} Am^2$  و  $\epsilon_F = 5 \times 10^{-19} joules$ .

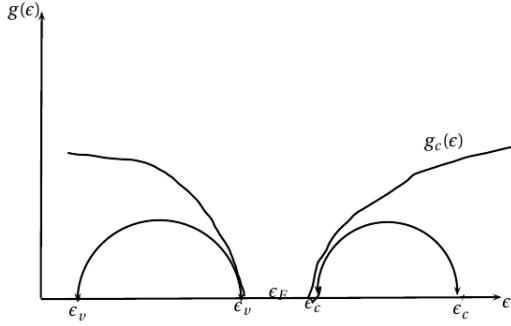
(ح) إحسب الحساسية المغناطيسية عند درجة الحرارة  $T$ . نذكر أن

$$\mu(T) = \mu(0) \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{k_B T}{\mu_0} \right)^2 + \dots \right]$$

(ط) ماهو الخطأ المرتكب في حساب  $\chi$  عند  $T = 300K$  و  $T = 0K$ , تعطى أن  $T_F = \frac{\epsilon_F}{k_B}$ .

## VII تطبيق توزيع فيرمي ديراك على أنصاف النواقل

الفرق الوحيد الذي يوجد هو  $\Delta E$  في عصابة الطاقة بحيث يكون  $\Delta E < 3eV$ . إذا أخذنا بيان  $g(\epsilon)$  بدلالة  $\epsilon$  لعصابات الطاقة.



حيث أن كثافة الحالات  $g_v(\epsilon)$  داخل المجال  $\epsilon_v' - \epsilon_v$

حيث أن كثافة الحالات  $g_c(\epsilon)$  داخل المجال  $\epsilon_c - \epsilon_c'$

نحسب عدد الإلكترونات الموجودة في عصابات النقل  $B_c$  وعدد الثقب في عصابات التكافؤ  $B_v$  عند درجة الحرارة  $T$ .

إذن عدد الإلكترونات في عصابة النقل يعطى بالعلاقة التالية

$$N_c = \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_c'} f(\epsilon) g_c(\epsilon) d\epsilon = \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_c'} \frac{g_c(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} + 1}$$

وأن عدد الثقب في عصابة التكافؤ يعطى بالعلاقة التالية

$$P_v = \int_{\epsilon_v'}^{\epsilon_v} (1 - f(\epsilon)) g_v(\epsilon) d\epsilon = \int_{\epsilon_v'}^{\epsilon_v} \frac{g_v(\epsilon) d\epsilon}{e^{\beta(\epsilon_F - \epsilon)} + 1}$$

إذا أخذنا أن  $\beta(\epsilon_c - \epsilon_F) \gg 1$  وأن  $\beta(\epsilon_F - \epsilon_v) \gg 1$  فإننا نجد أن

$$N_c = \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_c'} g_c(\epsilon) e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon \Rightarrow \int_{\epsilon_c}^{\infty} g_c(\epsilon) e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon$$

نقوم الآن بحساب الطاقة الداخلية  $\Delta U$  والتي تساوي

$$\Delta U = \Delta U_c + \Delta U_v$$

حيث الربح في الطاقة في عصابة النقل يساوي إلى

$$\Delta U_c = \int_{\epsilon_c}^{\epsilon_c'} \epsilon f(\epsilon) g_c(\epsilon) d\epsilon$$

وأن النقص في الطاقة لعصابة التكافؤ يعطى بالمعادلة التالية

$$\Delta U_v = - \int_{\epsilon_v'}^{\epsilon_v} \epsilon (1 - f(\epsilon)) g_v(\epsilon) d\epsilon$$

في الدراسة التقريبية السابقة نجد أن الطاقة الداخلية الكلية تساوي

$$\Delta U = \int_{\epsilon_c}^{\infty} \epsilon g_c(\epsilon) e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon - \int_{-\infty}^{\epsilon_v} \epsilon g_v(\epsilon) e^{\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon$$

ولحساب كل هذه المقادير نستخدم التقريب من شكل قطع مكافئ

$$g_v(\epsilon) = \sqrt{2R_v}(\epsilon_v - \epsilon)^{1/2};; g_c = \sqrt{2R_c}(\epsilon - \epsilon_c)^{1/2}$$

حيث أن كل من  $R_v$  و  $R_c$  تمثلان نصف قطر كثافة الحالات و هي مقدار ثابت. بالتعويض في عبارتي عدد الإلكترونات و عدد الثقوب في كل من عصابتي النقل و التكافؤ على الترتيب نجد أن

$$N_c = (2R_c)^{1/2} \int_{\epsilon_c}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_c)^{1/2} e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon$$

$$P_v = (2R_v)^{1/2} \int_{-\infty}^{\epsilon_v} (\epsilon_v - \epsilon)^{1/2} e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon$$

ونستطيع كتابة العبارتين السابقتين كما يلي

$$N_c = (2R_c)^{1/2} e^{-\beta(\epsilon_c - \epsilon_F)} \int_{\epsilon_c}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_c)^{1/2} e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_c)} d\epsilon$$

$$P_v = (2R_v)^{1/2} e^{-\beta(\epsilon_v - \epsilon_F)} \int_{-\infty}^{\epsilon_v} (\epsilon_v - \epsilon)^{1/2} e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_v)} d\epsilon$$

بوضع أن  $x = \beta(\epsilon - \epsilon_c)$  نجد أن

$$N_c = (2R_c)^{1/2} (kT)^{3/2} e^{-\beta(\epsilon_c - \epsilon_F)} \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx$$

و بمعرفة أن التكامل  $I = \int_0^{\infty} x^{1/2} e^{-x} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  نجد أن

$$\begin{cases} N_c = \sqrt{\frac{\pi R_c}{2}} (kT)^{3/2} e^{-\beta(\epsilon_c - \epsilon_F)} \\ P_v = \sqrt{\frac{\pi R_v}{2}} (kT)^{3/2} e^{-\beta(\epsilon_v - \epsilon_F)} \end{cases}$$

بما أن عدد الإلكترونات يساوي عدد الثقوب إذن  $N_c = P_v$  فإننا نجد أن

$$\epsilon_F = \frac{\epsilon_c + \epsilon_v}{2} + kT \ln \frac{R_v}{R_c}$$

نحسب الطاقة الداخلية  $\Delta U$  و التي تساوي

$$\Delta U = \int_{\epsilon_c}^{\infty} \epsilon g_c(\epsilon) e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon - \int_{-\infty}^{\epsilon_v} \epsilon g_v(\epsilon) e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon$$

بالتعويض بقيمة  $g_c$  و  $g_v$  المعرفتين سابقاً نجد أن

$$\Delta U = \sqrt{2R_c} \int_{\epsilon_c}^{\infty} (\epsilon - \epsilon_c)^{1/2} \epsilon e^{-\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon - \sqrt{2R_v} \int_{-\infty}^{\epsilon_v} (\epsilon_v - \epsilon)^{1/2} \epsilon e^{+\beta(\epsilon - \epsilon_F)} d\epsilon$$

بفرض أن  $y = \beta(\epsilon_v - \epsilon) \Rightarrow \epsilon = \epsilon_v - \frac{x}{\beta}$  و  $x = \beta(\epsilon - \epsilon_c) \Rightarrow \epsilon = \epsilon_c + \frac{x}{\beta}$  نجد أن

$$\Delta U_c = \sqrt{2R_c} (kT)^{3/2} e^{-\beta(\epsilon_c - \epsilon_F)} \int_0^{\infty} x^{1/2} (\epsilon_c + \frac{x}{\beta}) e^{-x} dx$$

$$\Delta U_v = -\sqrt{2R_v} (kT)^{3/2} e^{-\beta(\epsilon_v - \epsilon_F)} \int_0^{\infty} x^{1/2} (\epsilon_v - \frac{x}{\beta}) e^{-x} dx$$

بمعرفة أن التكاملين  $I$  و  $J = \int_0^{\infty} x^{3/2} e^{-x} dx = 3/4 \sqrt{\pi}$  نجد أن

$$\Delta U = \sqrt{2R_c} (kT)^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta(\epsilon_c - \epsilon_F)} (\epsilon_c + \frac{3}{2} kT) - \sqrt{2R_v} (kT)^{3/2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\beta(\epsilon_v - \epsilon_F)} (\epsilon_v - \frac{3}{2} kT)$$

إذا أهملنا  $3/2 kT$  أمام كل من  $\epsilon_c; \epsilon_v$  نجد أن

$$\Delta U = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (kT)^{3/2} \left[ \sqrt{2R_c} \epsilon_c e^{-\beta(\epsilon_c - \epsilon_F)} - \sqrt{2R_v} \epsilon_v e^{-\beta(\epsilon_v - \epsilon_F)} \right]$$

## VIII مسألة حول نصف ناقل نقي

## المسألة

كن توزيع فيرمي-ديراك من إعتبار شبه الموصل النقي (بدون شوائب) المتكون من شريطين (شريطتين) للطاقة  $E_1$  و  $E_2$  هما شريطا التكافؤ تكون فيه الإلكترونات المسؤولة أساسا على التوصيل الكهربائي عند  $0K$  و شريط التوصيل تنتقل إليه الإلكترونات المستثارة، و هذان الشريطان لهما نفس الأنحلال  $g_1 = g_2 = g$ ، بإعتبار أن  $E_2 > E_1$ ،  $\Delta E = E_2 - E_1$  و أن عدد الإلكترونات في شريحة التكافؤ عند  $0K$  هو  $N$ ، و نفترض لذلك الحالة الحدية  $g = N$ .

1. أوجد عدد الإلكترونات  $N_1, N_2$  في الشريحتين  $E_1, E_2$  عند درجة الحرارة  $T$ .
2. أوجد وضع طاقة فيرمي  $E_F$  عند درجة الحرارة  $T$ .
3. أوجد عدد الفجوات (المتروكة بانتقال الإلكترونات)  $P_1, P_2$  بالشريحتين (باعتبارهما مستويين كل بالانحلال قدره  $g = N$ )، و عبر عنها بدلالة  $g, \Delta E, kT$ ، و أوجد عدد الفجوات عند درجة الحرارة المنخفضة و المرتفعة.
4. قارن النتائج التي حصلت عليها مع تلك التي تحصل عليها بتطبيق توزيع ماكسويل-بولتزمان.
5. أوجد كلا من  $C_v, U$  بدلالة درجة الحرارة، و أوجد درجة الحرارة التي تجعل  $C_v$  نهاية عظمى عندما تكون  $\Delta E = 1eV$  و علق على النتائج التي تحصل عليها.
6. وضح أن عند  $\Delta E = 1eV$  يمكن تبسيط علاقات  $P_1, N_2$ .
7. يعرف معامل التوصيل الكهربائي كما يلي  $\sigma = \frac{J}{E}$  حيث  $J$  هي كثافة التيار الكهربائي،  $E$  الحقل الكهربائي و أن

$$\sigma = e(n_2\mu_- + p_1\mu_+)$$

حيث أن

$$\Delta E = 1eV, \mu_- = 1600cm^2/volt.s, \mu_+ = 400cm^2/volt.s, n = \frac{N}{V} = 3.1 \times 10^{19}/cm^2$$

و ذلك لشبه موصل من نوع السيليسيوم الذي نعتمده في هذه المسألة، أرسم المنحنى العلاقة  $(\sigma, T)$  ووضح أن قياس  $\sigma$  يمكننا من تحديد  $\Delta E$  (الفجوة الممنوعة).

## IX

### الجسم الأسود

الجسم الأسود هو ذلك الجسم الذي يمتص كافة الاطوال الموجية الساقطة عليه. نعتبر في هذه الحالة فجوة *uncavitt* ذات حجم  $V$ , على إشعاع كهرومغناطيسي حراري عند درجة الحرارة  $T$ . أي هناك تبادل مستمر بين جدران الفجوة و الفوتونات الموجودة بها, أي أن هناك ياستقرار إمتصاص وإشعاع الفوتونات من طرف الجدار. بالتالي لا نستطيع تحديد الفوتونات داخل الفجوة. بحيث تكون الفوتونات تخضع لأحصاء بوز-أنشتاين وليس ثمة تفاعلات متبادلة بين الفوتونات و أن عدد الفوتونات غير ثابت.

$$Z = \sum_1 e^{-\beta E_1} \sum_2 e^{-\beta E_2} \dots \sum_i e^{-\beta E_i} \dots$$

$$Z = \sum_1 e^{-\beta n_1 \epsilon_1} \sum_1 e^{-\beta n_2 \epsilon_2} \dots \sum_i e^{-\beta n_i \epsilon_i} \dots$$

$$Z = \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_1}} \right) \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_2}} \right) \dots \left( \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_i}} \right) \dots$$

متوسط عدد الفوتونات في الحالة  $i$  هو  $\bar{n}_i = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln Z}{\partial \epsilon_i}$

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_i} - 1}$$

و في حالة أن المستوي  $\epsilon_i$  منحل بمقدار  $g_i$  فإننا نجد أن

$$\bar{n}_i = \frac{g_i}{e^{\beta \epsilon_i} - 1}$$

يمكن إيجاد على نفس النتيجة بإستخدام توزيع بوز أنشتاين  $\mu = 0$  و ذلك بأخذ الطاقة الحرة  $F$  لها قيمة صغرى عند  $T$  و  $V$  ثابتين.

## I قانون بلانك

لدينا أن طاقة الفوتونات هي  $\epsilon = h\omega$  و أن إندفاعه المعمم  $P = \frac{h\omega}{c}$  , فإن

$$g(\epsilon)d\epsilon = \frac{1}{h\Gamma(\epsilon)}d\epsilon$$

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{4}{3}\pi V \left(\frac{\epsilon}{c}\right)^3 \Rightarrow g(\epsilon)d\epsilon = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \epsilon^2$$

فإنه تصبح لنا أن

$$dE = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}$$

ولكن لدينا أن الفوتونات مستقطبة و في هذه الحالة لدينا نوعان من الإستقطاب الخطي متعامدان فيما بينهما و دائري يميني أو يساري. و بالتالي تصبح كثافة الطاقة تساوي

$$dE = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \frac{\epsilon^3 d\epsilon}{e^{\beta\epsilon} - 1}$$

فإذا عوضنا بـ  $\epsilon = h\nu$  فإن عبارة الطاقة العنصرية تساوي

$$dE(\nu) = \frac{8\pi V h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

و أن كثافة الإشعاع هي بالتعريف عبارة على الطاقة لوحدة الحجم تساوي

$$u(\nu, T) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

ويمكن كتابة أيضا أن  $u(\nu, T)d\nu = u(\omega, T)d\omega$  و نجد أن

$$u(\omega, T) = u(\nu, T) \frac{d\nu}{d\omega} = \frac{h}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\frac{h\omega}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}}$$

## II خواص الجسم الأسود

نلاحظ أن النهاية العظمي تنتقل نحو التواترات العالية كلما زادت درجة الحرارة, فيمكننا إستنتاج النهاية العظمي كما يلي

$$\left[ \frac{\partial u(\omega, T)}{\partial \omega} \right]_T = 0$$

بوضع أن  $x = \frac{h\omega}{kT}$  فإن عبارة كثافة الطاقة تصبح كما يلي  $u(x, T) = \frac{(kT)^4}{\pi^2 (c\hbar)^3} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}$

$$\left[ \frac{\partial u(x, T)}{\partial x} \right]_T = 0 \Rightarrow (3 - x)e^x = 0$$

و هذا الحل هو حل تقريبي بياني ونجد أن  $x = 2.82$  و تعرف قيمة  $x$  بقيمة إنزياح  $wien$ .  
لوقنا بالتكامل على جميع قيم التواترات  $\omega$  فنحصل على كثافة الإشعاع بدلالة درجة الحرارة فقط.

$$u(T) = \int_0^\infty u(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \left( \frac{kT}{\hbar} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2 k^4}{15 (c\hbar)^3} T^4$$

$$u(T) = \sigma T^4$$

و قد وجد ستيفان بولتزمان أن  $\sigma = \frac{c}{4} a$  . و قد وجد هذا القانون ستيفان ووجد ثابتته و لكنه لم يعرف حسابه الذي يحتوي على ثابت بلانك.

لأخذنا قانون بلانك  $u(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1}$  لو أخذنا التواترات الضعيفة أي أن  $\hbar \omega = kT$  فإن عبارة كثافة الطاقة تصبح

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} kT$$

إن هذه العلاقة الأخيرة تكون صالحة إلا في حالة التواترات المنخفضة و هي الطاقة التي توقعها الفيزياء الكلاسيكية . أما عند التواترات العالية  $\hbar \omega \gg kT$

$$u(\omega, T) d\omega = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{d\omega}{e^{\frac{\hbar \omega}{kT}} - 1} = \frac{\hbar \omega}{\pi^4 c^3} e^{-\frac{\hbar \omega}{kT}} d\omega$$

و تمثل سوى الطاقة من أجل التواترات العالية. noir corps du intensité de image.

### III المقادير الحرارية للجسم الأسود

لدينا أن دالة القسمة هي

$$Z = \Pi \frac{g(\omega)}{1 - e^{-\beta \hbar \omega}}$$

حيث أن  $g(\omega)$  تساوي  $V \frac{\omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3}$  و تصبح كتابة دالة القسمة الجديدة هي

$$\ln Z = - \int_0^\infty \frac{V \omega^2 d\omega}{\pi^2 c^3} \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega})$$

بالتعريف تعطى الطاقة الحرة  $F$  بالمعادلة التالية  $F = -kT(T, V)$

$$F(T, V) = \frac{V k T}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty \omega^2 \ln(1 - e^{-\beta \hbar \omega}) d\omega$$

باستخدام تبديل المتغير  $x = \beta \hbar \omega$

$$F(T, V) = V \frac{(kT)^4}{\pi^2 (c\hbar)^3} \int_0^\infty x^2 \ln(1 - e^{-x}) dx = -\frac{1}{3} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} = \frac{-\pi^2}{45} \frac{(kT)^4}{(\hbar c)^3} V$$

$$F(T, V) = -E/3 = -aT^4 V/3$$

وأن القصور الحراري يساوي

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{3}aT^3V$$

و السعة الحرارية تساوي

$$C_v = 4aT^3V$$

والضغط  $P$  يساوي

$$P = 1/3aT^4 \Rightarrow P = 1/3E/V = 1/3u(T)$$

## IV الديناميك الحرارية الكلاسيكية للجسم الأسود

قد برهن كيرشوف من أجل إشعاع متوازن في حيز جدرانه في درجة حرارة منتظمة  $T$  , و أن الخواص الوصفية لهذا الأشعاع لا تتعلق بنوع جدران الحيز أو شكلها أو كبرها بل تتعلق فقط بدرجة الحرارة  $T$  فقط. من المبدأ الأول للديناميك الحرارية لدينا أن

$$TdS = dE + PdV \Rightarrow \frac{4}{3} \frac{u(T)}{T} dV + \frac{V}{T} \frac{du(T)}{dT} dT$$

و بحساب المشتق الثاني لـ  $\frac{\partial^2}{\partial V \partial T}$  من المعادلة السابقة نجد أن

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[ \frac{4}{3} \frac{u(T)}{T} \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left[ \frac{V}{T} \frac{du(T)}{dT} \right]$$

$$\frac{du(T)}{dT} = 4 \frac{u(T)}{T} \Rightarrow u(T) = aT^4$$

تسمى هته النتيجة بقانون بولتزمان و فيه يبقى  $a$  ثابت التكامل غير محدد.

## المصادر

- [1] Charles Chahine, Philippe Devaux, Thermodynamique statistique - résumés de cours et problèmes résolus, Dunod Université 1995 .
- [2] Ryogo Kubo, Hiroshi Ichimura, Tsunemaru Usui, Natsuki Hashitsume, Statistical mechanics: advanced course with problems and solutions, North-Holland Personal Library 1990 .
- [3] Belorizky Elie, Gorecki Wladimir, Introduction à la mécanique statistique, office des publications universitaires 1992 .
- [4] Frederick Reif, Physique Statistique. Volume ,5 Berkley, Cours De Physique, Dunod 1994 .